NUMERO: 1630A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Lanfranchi

MATERIA: Analisi Matematica I. Prof.D'Ambrosio

INSIEMI NUMERICI:

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ → Naturali → - Somma - Prodotto

$\mathbb{Z}$ → Relativi → - Sottrazione

$\mathbb{Q}$ → Razionali → $\left(\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z} \wedge \neq 0\right)$ → - Divisione

$\mathbb{R}$ → Irrazionali (Reali) → No forma decimale esatta

VEDERE DIMOSTRAZIONE $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ SUL LIBRO

RAPPRESENTAZIONI DECIMALI:

$n \in \mathbb{Q}$ → $\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z} \wedge \neq 0$

$n \in \mathbb{Q}$ → $a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 b_4$

- $\mathbb{N}$: $b_n = 0$
- $\mathbb{R}$: b_n infinite, $\neq 0$ e senza periodo
- $\mathbb{Q}$:
  - → b_n finite e diverse da 0
  - → b_n infinite ma rispettando un periodo

⚠ IL PERIODO NON PUÒ ESSERE 9 → $0,\bar{9} = 1$

$3,\bar{9} = 4$ eccetera

$|| - ||_{\text{approssimato}}$ = Errore dell'approssimazione

Es.: $\pi - 3,14 = 0,001592$ → errore $< 10^{-2}$ → Approssimazione a meno di un centesimo

COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI:

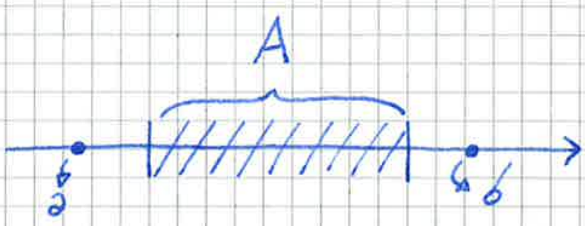
Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice superiormente limitato se esiste un numero reale "b" tale che $x \leq b \quad \forall x \in A$

"b" è detto MAGGIORANTE di A

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice inferiormente limitato se esiste un numero reale "a" tale che $x \geq a \quad \forall x \in A$

"a" è detto MINORANTE di A

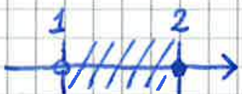
⚠ Maggioranti e minoranti sono infiniti



A superiormente limitato se $\exists\, b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \rightarrow x \leq b$

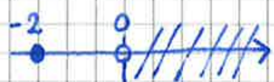
A inferiormente limitato se $\exists\, a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \rightarrow x \geq a$

Es.: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$



→ LIMITATO
→ MINORANTI: 1; 0; -4; -7... (Perché $\notin A$)
→ MAGGIORANTI: 5; 7; 12; 23...

$A = \{-2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$



→ INFERIORMENTE LIM.

$A \subset \mathbb{R}$ ammette massimo se $\exists\, x_M \in A \mid x \leq x_M \quad \forall x \in A \quad (x_M = \max A)$

$A \subset \mathbb{R}$ ammette minimo se $\exists\, x_m \in A \mid x \geq x_m \quad \forall x \in A \quad (x_m = \min A)$

x_M e x_m sono rispettivamente maggioranti e minoranti $\in A$ → SONO UNICI

Es.: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$

→ MASSIMO: $x = 2$
→ MINIMO: $\nexists$ perché $1 \notin A$

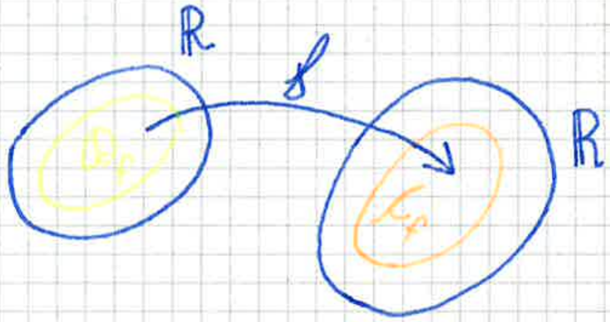
→ MAGGIORANTI DI A: $[2; +\infty[$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 110

CARATTERIZZAZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE:
- $\forall b \in \mathbb{R} \mid a \leq b \ \forall a \in A$
- $\forall c < b \ \exists \ a \in A \mid c < a$

FUNZIONI:

È un'operazione tra insiemi



C_f →
- SUPERIORMENTE LIMITATO / INFERIORMENTE LIMITATO / LIMITATO
- MAGGIORANTE / MINORANTE
- $\sup C$ / $\inf C$
- $\max C$ / $\min C$

A partire da questi concetti sull'insieme C_f daremo analoghe definizioni per f

f si dice → SUP. LIMITATA / INF. LIMITATA / LIMITATA **SE** C_f è → SUP. LIMITATO / INF. LIMITATO / LIMITATO

$$\boxed{\begin{array}{l}\sup f = \sup C_f \\ \inf f = \inf C_f\end{array}} \Leftarrow \boxed{\text{PER DEFINIZIONE}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\max f = \max C_f \\ \min f = \min C_f\end{array}}$$

CONSEGUENZA DELLA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

↓

Esistenza della radice n-esima

↓

ES.: $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ non ha soluzioni
in $\mathbb{R}$ ha due soluzioni: $\pm\sqrt{2}$

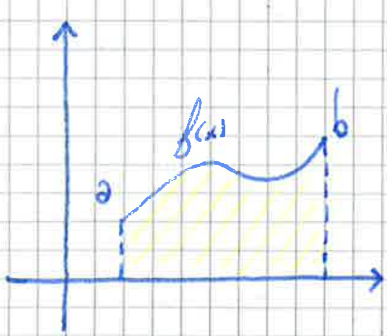
TRE CASI: $b^n < a$, $b^n = a$, $b^n > a$ → $b^n < a$ e $b^n > a$ IMPOSSIBILI → Si è trovato $b^n = a = \sup A$

CALCOLO INFINITESIMALE:

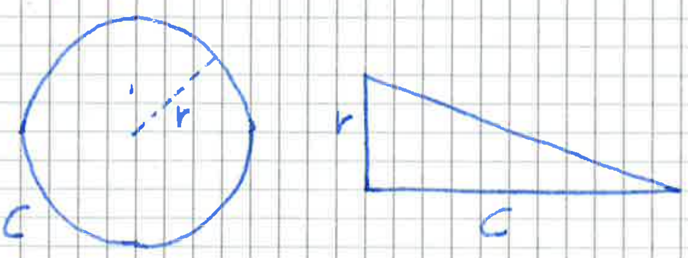
LIMITE
- → DERIVATA → Problema della tangente
- → INTEGRALE → Problema dell'area

PROBLEMA DELL'AREA: Data $f[a;b] \to \mathbb{R}$ definire un oggetto matematico chiamato integrale definito

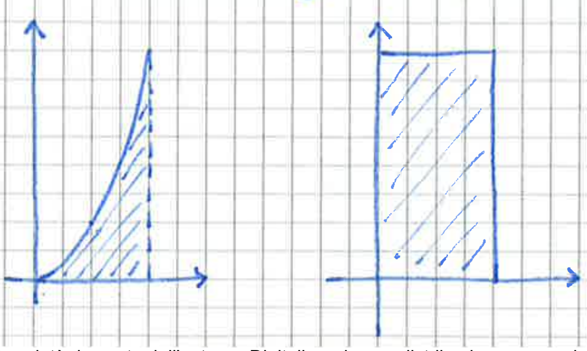
$\int_a^b f(x)\,dx$ che corrisponde all'area del trapezoide formato da $f[a;b]$, dall'asse x e dalle proiezioni di "a" e "b" su di questo



Un cerchio è equivalente ad un triangolo aventi per cateti il proprio raggio e la propria circonferenza



L'area di un segmento parabolico equivale ad un terzo del rettangolo che ha larghezza ed altezza uguali a quelle del segmento parabolico



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 110

$$\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+3^2+(n-1)^2\right) < A < \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+3^2+(n-1)^2+n^2\right)$$ deve valere $\forall n \geq 1$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{1+2^2+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1+2^2+(n-1)^2+n^2} \quad \forall n \geq 1$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

↓

moltiplichiamo i termini della disuguaglianza per $1/n^3$ → Positivo xk $n \geq 1$

↓

$$\underbrace{\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+(n-1)^2\right)}_{s_n} < \frac{1}{3} < \underbrace{\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+(n-1)^2+n^2\right)}_{S_n}$$

Bisogna dimostrare che $1/3$ è l'unica soluzione della disequazione

Aggiungiamo n^2 a tutti i membri

↓

$$1+2^2+(n-1)^2+n^2 < \frac{n^3}{3}+n^2 < 1+2^2+2n^2$$

↓

Moltiplico per $1/n^3$

↓

$$\underbrace{\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2\right)}_{S_n} < \frac{1}{3}+\frac{1}{n}$$

$$S_n \rightarrow S_n < \frac{1}{3}+\frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

Sottraggo n^2

↓

$$1+2^2+(n-1)^2-n^2 < \frac{n^3}{3}-n^2 < 1+2^2+\dots+(n-1)^2$$

↓

Moltiplico per $1/n^3$

↓

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{n} < \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\dots(n-1)^2\right) \rightarrow s_n < \frac{1}{3}-\frac{1}{n}$$

INTEGRALE DEFINITO SECONDO RIEMANN:

$\int_a^b f(x)\,dx$ → LIMITATO
→ È UN NUMERO REALE

1° PASSAGGIO: Definire l'integrale con funzioni "a scala"

2° PASSAGGIO: Approssimare una qualsiasi funzione limitata con funzioni "a scala"

DEFINIZIONE DI FUNZIONE A SCALA:

Si chiama suddivisione di $[a;b]$ un insieme finito di punti $\{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ tale che $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Si chiama raffinamento di $\{x_0; \ldots; x_n\}$ una nuova suddivisione $\{x'_0; x'_1; \ldots; x'_k\}$ tale che $x_i \in \{x'_0; x'_1; \ldots; x'_k\}$ e che la nuova suddivisione contiene un numero di elementi maggiore della prima

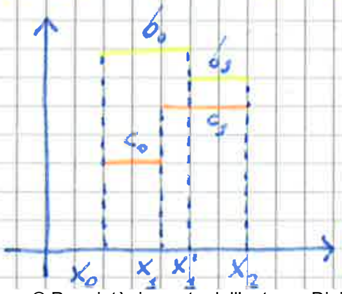
Una funzione $f\,[a;b] \to \mathbb{R}$ si dice "a scala" se esiste una suddivisione $\{x_0; \ldots; x_n\}$ di $[a;b]$ e se esistono le costanti $c_0, c_1; \ldots; c_{n-1}$ tale che

$f(x) = c_i$ se $x \in [x_{i-1}; x_i]$ $\forall i \in 0; 1; \ldots; n-1$

In questo caso si dice che la suddivisione è adattata ad f

> ⚠ Nella definizione non si specificano i valori di f nei punti $x_0; x_1; x_2; \ldots x_n$ ovvero si considerano intervalli APERTI

DATE DUE FUNZIONI A SCALA "f" E "g" ESISTE SEMPRE UNA SUDDIVISIONE ADATTATA AD ENTRAMBE



$f(c_0; c_1) \to$ Suddivisione $\{x_0; x_1; x_2\}$

$g(b_0; b_1) \to$ Suddivisione $\{x_0; x'_1; x_2\}$

Suddivisione adattata $\{x_0; x_1; x'_1; x_2\}$

$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

↓ posso fare

$I(+\infty) : \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \} =]a; +\infty[$

$\downarrow$ >0

$I(-\infty) : \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \} =]b; -\infty[$

$\downarrow$ <0

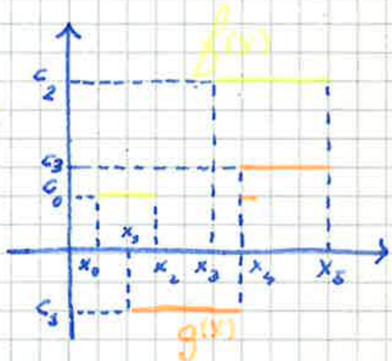
Indichiamo con $S([a;b])$ l'insieme di tutte le possibili funzioni "a scala" in $[a;b]$

OSSERVAZIONE: Dati $f, g \in S([a;b])$ e dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

- $\alpha \cdot f \in S([a;b])$ → ovvio
- $f + g \in S([a;b])$

↓

Potrebbero essere adattate a due suddivisioni diverse: →



↓

Esiste comunque una suddivisione $\{z_0; z_1; \dots; z_n\}$ adattata sia ad $f(x)$ che a $g(x)$

↓

Allora $f+g$ è una funzione avente valori $f_0 + g_0 ; f_1 + g_1 ; \dots ; f_{n-1} + g_{n-1}$

ESEMPIO:

Sia $f \in S([a;b])$ tale che $f(x) = c$

↓ allora

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a)$$

In particolare se $c>0$ l'integrale è l'area di un rettangolo

ESEMPIO: x = tempo
$f(x)$ = velocità $\rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ = Velocità media in $[a;b]$

ESEMPIO: $f(x) \begin{cases} 3 & 1 \leq x \leq 4 \\ -2 & 4 < x \leq 5 \end{cases}$

Valor medio di $f(x) \rightarrow \frac{1}{5-1} \cdot \int_1^5 f(x)\,dx = \frac{1}{5-1} \cdot \left[3(4-1) - 2(5-4)\right] = \frac{7}{4} = 1{,}75$

PROPRIETÀ:

Siano:
- $f; g \in S([a;b])$
- $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$
- $c \in [a;b]$

① $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ → ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO

② $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ → LINEARITÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

③ Se $f \geq 0$ in $[a;b] \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ → POSITIVITÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

④ Se $f \leq g$ in $[a;b] \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ → MONOTONIA DELL'INTEGRALE DEFINITO

DIMOSTRAZIONE:

Ip: $f \leq g$ in $[a;b]$

Ts: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ in $[a;b]$

Sia $h = g - f$; siccome $f \leq g \rightarrow h \geq 0$
$\hookrightarrow \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$ per la ③

PROPRIETÀ:

- A è superiormente limitato: $g(x) \in S_f^- \leftrightarrow \begin{cases} g \in S[a,b] \\ g \leq f \leq \sup(f) \end{cases}$

Per la monotonia dell'integrale della funzione a scala si ha:

$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b S_f(x)\,dx$ ma $\int_a^b S_f(x)\,dx = \boxed{S_f(b-a)}$ → Dunque è maggiorante di A

Dunque $A \subset \mathbb{R}$. Per la completezza di $\mathbb{R}$ ∃ $\boxed{\sup A = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx,\ g \in S_f^-\right\}}$

INTEGRALE SUPERIORE DI $f(x)$ IN $[a,b]$

- B è inferiormente limitato: $h(x) \in S_f^+ \leftrightarrow \begin{cases} h \in S[a,b] \\ \inf(f) \leq f \leq h \end{cases}$

Seguendo lo stesso ragionamento si dimostra che $B \subset \mathbb{R}$

Dunque per la completezza di $\mathbb{R}$ ∃ $\boxed{\inf B = \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b h(x)\,dx,\ h \in S_f^+\right\}}$

INTEGRALE SUPERIORE DI $f(x)$ IN $[a,b]$

Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, in generale

$\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx$ <u>NON È VERO</u>

Mentre è sempre vero che $\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx$

Approssimazione per difetto

Approssimazione per eccesso

DIMOSTRAZIONE:

$\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx = \sup A \qquad \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = \inf B$ → Va provato che $\sup A \leq \inf B$

Posti $a = \int_a^b g(x)\,dx,\ g \in S_f^-$

$b = \int_a^b h(x)\,dx,\ h \in S_f^+$

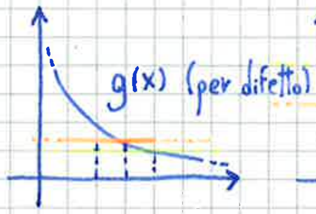
Dunque $\int_1^2 g(x)\,dx \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq \int_1^2 h(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leq 1$

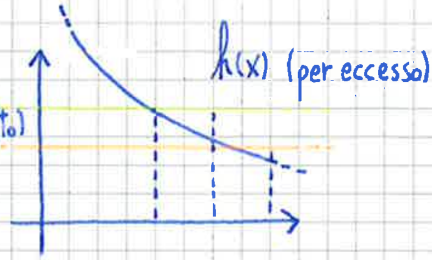
Se considero $g(x) = 1/2 \quad [1,5;\ 2]$

$g(x) = 2/3 \quad [1;\ 1,5]$

$h(x) =$

$h(x) =$

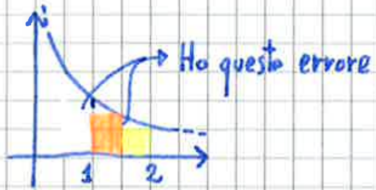


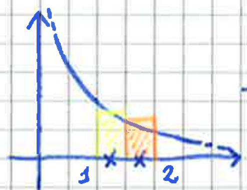


$\int_1^2 g(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$ $\qquad \int_1^2 h(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{5}{6}$

Dunque $\frac{7}{12} \leq \int_a^2 f(x)\,dx \leq \frac{5}{6}$ → Approssimazione migliore all'aumento del numero di suddivisioni n

oss.: Ho un'approssimazione migliore a parità di suddivisioni considerando i punti medi





$\rightarrow \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{24}{35}$

$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \cong \frac{24}{35}$ (Ma non so se per difetto o per eccesso)

FORMULA DEL PUNTO MEDIO:

$f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

n suddivisioni in parti uguali

$[x_0, x_1] \rightarrow$ Punto medio z_1

$[x_1, x_2] \rightarrow$ Punto medio z_2

$[x_2, x_3] \rightarrow$ Punto medio z_3

ecc.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_n)\right)$$

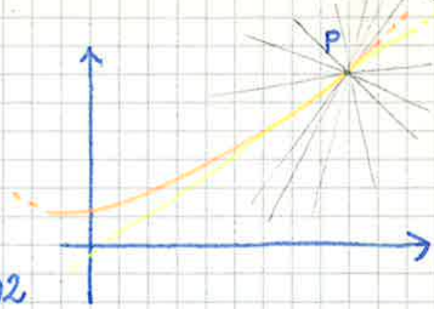
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 110

ESEMPIO:

$y = \frac{1}{100} x^2 \quad P(1; 1/100)$

ASCISSA DI Q	m_{PQ}
0	0,01
0,5	0,015
0,99	0,0199
0,99999	0,0199999
1,00001	0,200001
1,005	0,02005
1,1	0,021
2	0,03

$\downarrow 0,02 \uparrow$



$\downarrow$

$$y = 0,02\,(x-1) + \frac{1}{100}$$

⚠ Non si ha sempre una stabilizzazione della m attorno ad un valore "limite"

$\downarrow$

NON SEMPRE ESISTE LA TANGENTE AD UN GRAFICO IN UN PUNTO

$\downarrow$

NON TUTTE LE FUNZIONI SONO DERIVABILI

MATEMATIZZAZIONE DEL PROBLEMA:

Introduciamo lo scarto $d(x) = |m(x) - 0,02|$

$\downarrow$

Quanto può diventare piccola questa distanza?

ES. È minore di 10^{-3}? → Solo se x è "abbastanza vicino" ad 1

$\downarrow$

$$d(m(x); 0,02) = |m(x) - 0,02|$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{100}x^2}{1-x}$$

$$\left| \frac{0,01x^2 - 0,01}{x-1} - 0,02 \right| = \left| \frac{0,01x^2 - 0,02x + 0,01}{x-1} \right| =$$

$$\boxed{d = 0,01 \cdot |x-1|}$$

DEFINIZIONI:

Funzione definita in I_c di raggio r, escluso al più $x=c$

Siano $c, l \in \mathbb{R}$ ed $f(c-r; c+r) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Si dice che esiste il limite di $f(x)$, uguale ad l, per x tendente a c, se si verifica che: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \mid |x-c| < \delta \wedge x \neq c \mid |f(x) - l| < \varepsilon$

ovvero

$$\lim_{x \to c} (f(x)) = l$$

DERIVATA: sia $c \in \mathbb{R}$ ed $f(c-r; c+r) \to \mathbb{R}$

si dice che $f(x)$ è derivabile in $x=c$ se esiste un numero l (finito) tale che $\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \right) = l$

OSS.: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \to$ È un coefficiente angolare

$\downarrow$

Rapporto incrementale

$\downarrow$

Facendo il limite trovo il coefficiente angolare a cui tendono le secanti all'avvicinarsi di x a c

$\downarrow$

Coefficiente angolare della tangente

$\downarrow$

$$t: y = f(c) + f'(c) \cdot (x-c)$$

OSS.: Se $f(x)$ è derivabile in $x=c$ esiste la tangente NON VERTICALE al grafico di $f(x)$ in $(c; f(c))$

LIMITE DESTRO: $f(c, c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \to c^+} (f(x)) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; |x-c| < \delta \longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$x > c$

⚠ Nel lim normale $x \neq c$

$x < c$

LIMITE SINISTRO: $f(c-r, c) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \to c^-} (f(x)) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; |x-c| < \delta \longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

CONSEGUENZA: $\lim_{x \to c} (f(x)) \; \exists$ se $\lim_{x \to c^-} (f(x)) = \lim_{x \to c^+} (f(x))$

Se $\lim_{x \to c} (f(x)) = f(c)$ si dice che $f(x)$ è continua in $x = c$

DEFINIZIONE: Sia $c \in \mathbb{R}$ e $f(c-r, c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x)$ si dice continua se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ tale che:

$|x - c| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

ovvero

$\lim_{x \to c} (f(x)) = f(c)$

OSSERVAZIONE: Si considera anche il punto "c"

$C(a,b)$: Insieme delle funzioni continue in (a,b)

Moltiplicazione, divisione, somma algebrica e composizione di funzioni continue danno ancora una funzione continua

PROPRIETÀ: Se $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ammette primitive su $[a,b]$

PROPRIETÀ: Siccome l'operazione di derivazione non è iniettiva (es.: $D(\cos x + c) = -\sin x \ \forall c \in \mathbb{R}$), esistono infinite primitive $g(x)+c$ di una funzione integrabile $f(x)$.

TEOREMA: Siano $g(x)$ e $h(x)$ primitive di $f[a,b]$.
Esiste allora una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $h(x) = g(x)+c \ \forall x \in [a,b]$

$\downarrow$

$g(x)+c$ rappresenta l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$

TEOREMA DI TORRICELLI:

Se $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua si ha che

$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$ con $g(x)$ primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$

NOTA: Esistono funzioni continue per cui non è possibile trovare l'espressione esplicita delle primitive

OSSERVAZIONI:

- $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste poiché per ipotesi $f(x)$ è continua su $[a,b]$
- Le primitive di $f(x)$ esistono perche essa è continua su $[a,b]$
- Se si considerano due diverse primitive di $f(x)$, dette $g(x)$ e $h(x)$, sull'intervallo $[a,b]$, allora si ha che $g(b)-g(a) = h(b)-h(a)$

Infatti si ha sempre un numero $c \in \mathbb{R}$ tale che $h(x) = g(x)+c$

Dunque si avrebbe $h(b)-h(a) = (g(b)+c) - (g(a)+c)$

Cioé la tesi: $h(b)-h(a) = g(b)-g(a)$

Questi sono i due estremi di integrazione di $f(x)$ su $[a,b]$, di cui "c" è fisso (si definisce infatti punto base dell'integrale) ed "x" è variabile

Si può scrivere a questo punto la seguente funzione di x:

$$\boxed{\int_c^x f(t)\,dt}$$ FUNZIONE INTEGRALE

È funzione di x

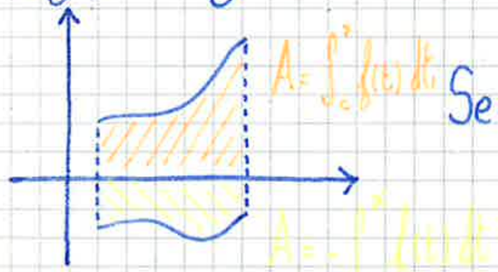
Variabile di integrazione (nel risultato scompare)

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

Punto base

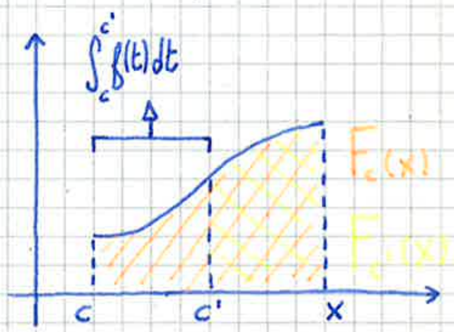
$F_c(x)$ = Funzione integrale di f avente punto base "c"

Significato geometrico: Se $f(x) \geq 0 \rightarrow \int_c^x f(t)\,dt$ = Area della regione tratteggiata se $x > c$



Se $f(x) < 0 \rightarrow \int_c^x f(t)\,dt$ = Area della regione cambiata di segno

Se cambio il punto base "c" cosa succede?



$$F_{c'}(x) = \int_{c'}^x f(t)\,dt$$

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

$\rightarrow$ Da che relazione sono legati?

$$F_c(x) = \underbrace{\int_c^{c'} f(t)\,dt}_{\text{Costante rispetto ad } x} + \underbrace{\int_{c'}^x f(t)\,dt}_{F_{c'}(x)} \quad \forall x \in [a;b]$$

OSSERVAZIONE: Due differenti funzioni integrali di $f(x)$ differiscono tra loro per una costante

Si fissa $\varepsilon > 0$ e trovo $\delta > 0$ che soddisfi la relazione

Per ipotesi $f(x)$ è continua in $[a;b] \rightarrow$ è continua in $x = x_0$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta^* > 0 \mid \text{se } |x - x_0| < \delta^* \longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

Dato $\varepsilon > 0$ scegliamo δ^* come numero δ

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta^* > 0 \mid \text{se } |x - x_0| < \delta^*;\ x > x_0 \rightarrow |g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|g(x) - f(x_0)| = \left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} \quad f(x_0) \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} \quad f(x_0) \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{\cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt}}{x - x_0} \quad f(x_0) \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} - f(x_0) \right|$$

$$\Downarrow$$

Costante

Ampiezza dell'intervallo

$$\left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt}{x - x_0} \right|$$

$$\Downarrow$$

Fino a qui procedimento identico anche per il limite sinistro $\longrightarrow x < x_0$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt}{x - x_0} \right| = \frac{\left| \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt \right|}{|x - x_0|}$$

CONCLUSIONE: Dato $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta^*$ si ha che se:

$$|x - x_0| < \delta^* \; ; \; x > x_0 \longrightarrow |g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ovvero $\lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} \right) = f(x_0)$

$\boxed{\text{CVD}}$

CONSEGUENZE:
- Se $f(x)$ è continua ammette primitive
- Non di tutte le primitive è garantita l'espressione esplicita
- A volte l'integrale può essere calcolato solo tramite metodiche di calcolo approssimato (es. metodo del punto medio)

TEOREMA DI TORRICELLI:

Ip: $f(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ $F_a(x)$ e $g(x)$ primitive di $f(x)$

Ts: $F_a(b) = \int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$

DIMOSTRAZIONE: Applico il teorema fondamentale

$\downarrow$

Scrivo la primitiva di punto base "a"

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a;b]$

$g(x) \quad \forall x \in [a;b]$

$\longrightarrow$ Entrambe primitive di $f(x)$

$\downarrow$

Differiscono per una costante

$F_a(x) = g(x) + k \quad \forall x \in [a;b]$

$\sin\sqrt{x} \geq 0 \qquad 1 \leq \sqrt{x} \leq \pi \rightarrow 1 \leq x \leq \pi^2$

$\sin\sqrt{x} < 0 \qquad \pi < \sqrt{x} < 4 \longrightarrow \pi^2 < x < 16$

$$A = \int_1^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx - \int_{\pi^2}^{16} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Ricerca primitiva di $f(x) \rightarrow x^{1/2} = y \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dy \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2dy$

$$\downarrow$$

$$2\int \sin y\,dy$$

$$\downarrow$$

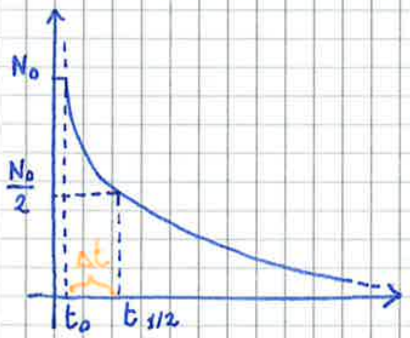
$$F(x) = -2\cos\sqrt{x} + C$$

$$A = -2\cos\pi + 2\cos 1 + 2\cos 4 - 2\cos\pi = 2\cos 1 + 2\cos 4 - 4\cos\pi = 4 + 2\cos 1 + 2\cos 4 = 3{,}77$$

APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

DECADIMENTO RADIOATTIVO: $N(t)$: Quantità di sostanza al tempo t

$N'(t)$: Variazione della q.d.s. nel tempo t



N' è proporzionale ad $N \longrightarrow N'(t) = -\lambda N(t)$

Derivata della variabile indipendente — Variabile dipendente — Variabile indipendente

EQUAZIONE DIFFERENZIALE: Scrittura che lega una funzione ad una sua derivata

Risolvere in "x" equivale a trovare le funzioni che soddisfino le relazioni poste dall'equazione differenziale (nel nostro caso che la derivata N' sia uguale a $-\lambda$ volte N)

DEFINIZIONE: Una funzione $y \in C_1[(a;b)]$ si dice soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ su $[a;b]$ se $y' = f(x;y)$ in $[a;b]$

ESEMPIO: $y' = y + x^2$ $\quad y = -2x - 2 - x^2$

$-2x - 2 = -2x - 2 - x^2 + x^2$

$-2x - 2 = -2x - 2 \longrightarrow$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$y(x)$ è soluzione dell'eq. differenziale

ESEMPIO: $y = x^5 + 4x^3$

$y'(x) = 5x^4 + 12x^2$

$5x^4 + 12x^2 = x^5 + 4x^3 + x^2 \longrightarrow$ Non è vero $\forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$y(x)$ non è soluzione dell'eq. differenziale

INTEGRALE GENERALE: Insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale

INTEGRALE PARTICOLARE: Singola soluzione dell'equazione differenziale

Il calcolo delle primitive è un caso particolare di calcolo delle equazioni differenziali.

ES.: Dato $y'(x) = \cos x$, calcolarne la primitiva è equivalente alla ricerca della funzione $y(x)$ che soddisfi l'equazione:

$$\boxed{y'(x) = \cos x}$$

$\Downarrow$

Insieme delle primitive $\Leftarrow$ $\boxed{y(x) = \sin x + C}$ $\Rightarrow$ INTEGRALE GENERALE

$\downarrow$

INTEGRALE INDEFINITO

② SOLUZIONI NON COSTANTI:

$y = y(x)$ è soluzione in I' se $y'(x) = g(x)h[y(x)] \quad \forall x \in I'$

$$\boxed{x \xrightarrow{y} \underbrace{y(x)}_{\in \mathcal{D}_h \to J} \xrightarrow{h} h(y(x))}$$

Devo poter fare la composta

$$\begin{cases} x \in I \\ y(x) \in \mathrm{dom}(h) \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni il cui grafico non intersechi quello delle soluzioni costanti

Trovo un intervallo tale che $h(y) \neq 0 \quad \forall y \in J \longrightarrow J'$

TEOREMA: Sia $g \in C(I)$ e sia G una primitiva di g in I

Sia $h \in C(J)$ e sia $J' \subset J$ un intervallo tale che

$$h(y) \neq 0 \quad \forall y \in J'$$

Sia H una primitiva di $1/h$ in J'

Allora $y: I' \subset I \longrightarrow J'$

è soluzione di $y' =$

se

$$\boxed{\begin{array}{c} H(y(x)) = G(x) + c \quad \forall x \in I' \\ \Big\downarrow {\scriptstyle y = 1/h} \\ y(x) = H^{-1}(G(x)+c) \end{array}}$$

DIMOSTRAZIONE: Ip: $y: I' \subset I \longrightarrow J'$ soluzione di $y' = g(x) \cdot h(y)$ in I'

Ts:

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^3}{3} + c \longrightarrow H(y(x)) = G(x) + c$$

$$y(x) = H^{-1}(G(x)+c) \longrightarrow y(x) = \frac{1}{x^3/3 + c}$$

ESERCIZIO:

$$\begin{cases} y' = 3x^2 \cdot e^{-y} \\ y(0) = 2 \end{cases} \longrightarrow \frac{y'}{e^{-y}} = 3x^2 \longrightarrow \int \frac{y'}{e^{-y}}\,dy = \int 3x^2\,dx$$

$$y = s$$
$$y'dy = ds$$
$$\int \frac{1}{e^{-s}}\,ds$$
$$\int e^s\,ds = e^s + k' = x^3 + k$$
$$e^s = x^3 + k - k'$$
$$e^y = x^3 + c$$
$$y = \log(x^3 + c)$$
$$2 = \log(c)$$
$$-c = e^2$$

Soluzione: $y = \log(x^3 + e^2)$

⚠ N.B. Il dominio della soluzione può essere minore dell'intervallo in cui sono definite le equazioni di partenza

$$e^{P(x)} \cdot e^{-P(x)} \cdot y(x) = e^{P(x)} R(x) + c$$

$$\downarrow$$

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot (R(x) + c)$$

$$\boxed{\text{CVD}}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE:

DEFINIZIONE: $f: I \to \mathbb{R}$ si dice di classe $C^k(I)$ sè è derivabile k-volte in I ed $f^{(k)}$ è continua su I.

DEFINIZIONE: Si chiama equazione differenziale del secondo ordine una relazione del tipo

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')}$$

Si dice soluzione una ~~equazione~~ funzione di classe C^2 che soddisfa la relazione

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad \forall x \in I$$

ESERCIZIO: Determinare $c \in \mathbb{R}$ in modo che

$y(x) = ce^{2x}$

sia soluzione dell'equazione

$y'' = e^{2x} - y$

su $\mathbb{R}$

TEOREMA DI STRUTTURA:

Ip: $\varphi : I \to \mathbb{R}$ soluzione di $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$

Ts: 1) Se "u" è soluzione dell'equazione di cui sopra, esiste una soluzione "v" dell'equazione omogenea $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tale che

$$\boxed{u = v + \varphi}$$

2) Viceversa ogni "v" soluzione dell'omogenea dà

$$\boxed{u = v + \varphi}$$

Soluzione della completa associata

OSS.: 1) Dice che la somma di φ a "v" soluzioni dell'omogenea dà TUTTE le soluzioni dell'equazione completa

$$\boxed{y_{\substack{GEN\\COMPLETA}}(x) = \varphi(x) + y_{\substack{GEN\\OMOGENEA}}(x)}$$

I) RICERCA DELL'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA:

Caso particolare: a e b sono numeri $\in \mathbb{R}$

$$y'' + ay' + by = 0$$

Siano $\ell_{1,2}$ soluzioni di $\ell^2 + a\ell + b = 0$

L'equazione differenziale ha integrale generale $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Dove $y_1(x), y_2(x)$ sono:

$y_1(x) = e^{\ell_1 x}$, $y_2(x) = e^{\ell_2 x}$ se $\Delta > 0$

$y_1(x) = e^{\ell_1 x}$, $y_2(x) = x e^{\ell_1 x}$ se $\Delta = 0$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ se $\Delta < 0$ $\quad (\ell_{1,2} = \alpha \pm i\beta)$

"B" va trovato in modo che ψ sia soluzione della completa

ESEMPIO:

$y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$

I) $y'' - 5y' + 6y = 0 \rightarrow \ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \rightarrow \ell_1 = 2, \ \ell_2 = 3$

$\downarrow$

$y_1 = e^{2x}$

$y_2 = e^{3x}$

$\downarrow$

$\psi_{g.o.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

II) $g(x) = 4e^{2x} \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow$ molteplicità $1 \rightarrow m = 1$

$\psi_{p.c.} = Bx^m e^{\alpha x} \rightarrow Bxe^{2x} \rightarrow$ Deve essere soluzione di $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$

$\downarrow$

$6Bxe^{2x} - 5(Be^{2x} + Bx2e^{2x}) + (2Be^{2x} + 2Be^{2x} + 2Bxe^{2x} \cdot 2) = 4e^{2x}$

$\downarrow$

$-Be^{2x} = 4e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$B = -4$

$\downarrow$

$\psi_{p.c.} = -4xe^{2x}$

$\downarrow$

$\psi_{g.c.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - 4xe^{2x}$

$$x_{g.o.} = e^{-\frac{\mu}{2m}\cdot t}\left(c_1 \sin \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\mu^2}{4m^2}}}_{\gamma}\cdot t + c_2 \cos \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\mu^2}{4m^2}}}_{\gamma}\cdot t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\frac{\mu}{2m}\cdot t}\left(c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)\right) \rightarrow$$ Moto della molla in assenza di forze esterne

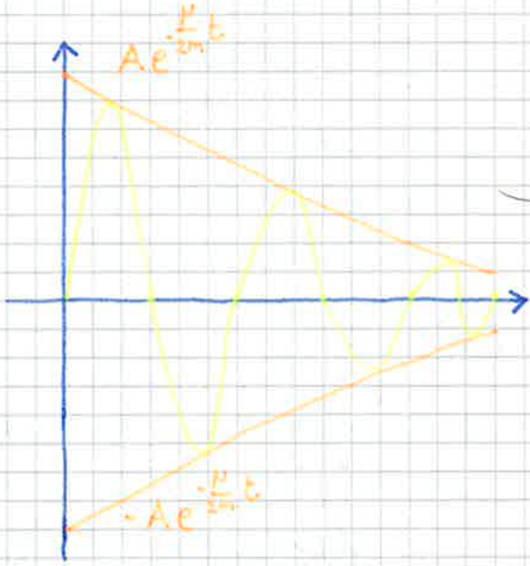
$$\Downarrow$$

$$x(t) = A\cdot e^{-\frac{\mu}{2m}\cdot t}\cdot \sin(\gamma t + \varphi)$$

- $\mu = 0 \rightarrow x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi\right) \rightarrow$ Assenza di attrito (oscillatore armonico)

Se $0<\mu^2<4km$ (attrito debole)

$$Ae^{-\frac{\mu^2}{2m}\cdot t}\cdot \sin(\gamma t + \varphi)$$



Se agisce una forza esterna

$$mx'' + \mu x' + kx = F\cos\omega t$$

INTEGRALE PARTICOLARE: $c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

$$x' = -\omega c_1 \sin\omega t + \omega c_2 \cos\omega t$$
$$x'' = -\omega^2 c_1 \cos\omega t - \omega^2 c_2 \sin\omega t$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\omega t(-m\omega^2 c_1 + \mu\omega c_2 + kc_1) + \sin\omega t(-m\omega^2 c_2 - \mu\omega c_1 + kc_2) = F\cos\omega t$$

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE:

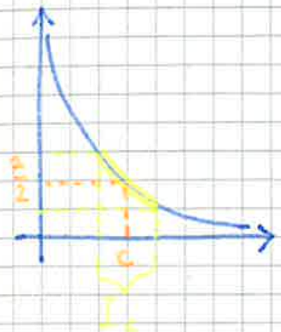
Ip: $f: I(c) \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ (finito)

Ts: f è localmente limitata $\to \exists\, I(c) \mid \exists\, m>0 \mid |f(x)|<m \quad \forall x \in I(c)/\{c\}$

ESEMPIO:

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad c = 2$

f è continua in $c=2 \to \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \to$ finito $\to$ Esiste $I(2)$ su cui f è limitata



TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTÒNE:

Ip: $f: I^-(c) \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, f crescente su $I^-(c)$

Ts: Esiste $\lim\limits_{x\to c^-}(f(x))$ $\to$ Finito se limitata in $I^-(c) \to l = \sup\{f(x);\, x \in I^-(c)\}$

$\to$ Infinito se illimitata in $I^-(c)$

OSS.:
- Vale anche per le funzioni decrescenti
- Se $f(x)$ è anche continua esiste il limite completo
- Vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$ (Per la completezza di $\mathbb{R}$)

SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO (CASO FINITO):

Ip: $f, g, h : I(c)/\{c\} \to \mathbb{R}$

$I'(c) \mid f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(c)/\{c\}$

$\lim_{x \to c}[f(x)] = \lim_{x \to c}(h(x)) = l$

Ts: $\lim_{x \to c}(g(x)) = l$

DIMOSTRAZIONE: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; I''(c)/\{c\} \mid \forall x \in I''(c)/\{c\} \to |f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; I'''(c)/\{c\} \mid \forall x \in I'''(c)/\{c\} \to |f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\lim_{x \to c}(g(x)) = l \quad \leftarrow \quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

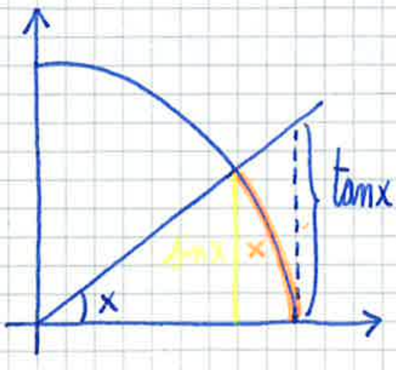
$\boxed{\text{CVD}}$

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = ?$

essendo $\sin x / x$ una funzione pari è sufficiente calcolare il limite destro: $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

devo trovare $f(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq h(x)$ e $\lim_{x \to 0^+}(f(x)) = \lim_{x \to 0^+}(h(x))$,

dunque $f(x)$ e $h(x)$ tali da soddisfare queste condizioni



$\sin x \leq x \leq \tan x \to 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

se $l \in \mathbb{R}$ la successione si dice CONVERGENTE

se $l = \pm\infty$ la successione si dice DIVERGENTE

se l esiste la successione si dice che AMMETTE LIMITE o che È REGOLARE

se l non esiste la successione si dice INDETERMINATA

- Valgono tutti i teoremi sui limiti delle funzioni

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE (SUCCESSIONI):

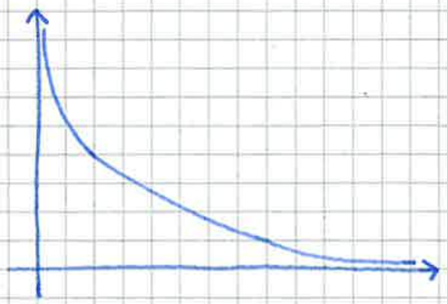
Ip: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
a_n è convergente

Ts: a_n è limitata in $I(+\infty)$ + $\underbrace{\text{è globalmente limitata}}_{\text{PARTE NUOVA}}$

ESEMPIO:

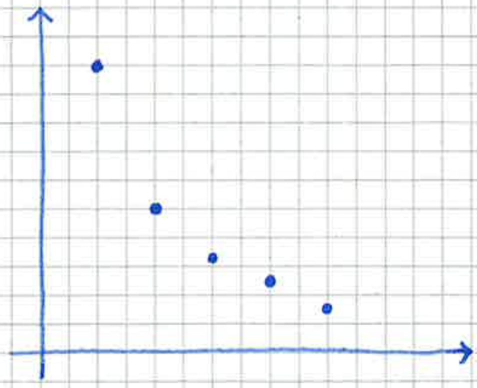
$f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0;+\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \rightarrow f(x)$ è limitata in $I(+\infty)$
ma non globalmente



$a_n = \frac{1}{n}$ in $(0;+\infty)$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \rightarrow a_n$ è globalmente limitata
(valore massimo 1 con $n=1$)



CASO GENERALE: $f: I(c)/\{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to c} (f(x)) = l$; $l \in \mathbb{R}$

Se considero una successione tale che

$\lim_{n \to +\infty} (a_n) = l$; $a_n \neq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} [f(a_n)] = l$$

PROPRIETA: Se esistono due successioni a_n; b_n tali che

$\lim_{n \to +\infty} (a_n) = c$; $a_n \neq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \to +\infty} (b_n) = c \quad b_n \neq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \to +\infty} (f(a_n)) \neq \lim_{n \to +\infty} (f(b_n))$

allora $\lim_{x \to c} (f(x))$ non esiste

ESEMPIO: Dimostriamo che $\lim_{x \to +\infty} (\sin x)$ non esiste

$a_n = n\pi \quad \lim_{n \to +\infty} (n\pi) = +\infty \qquad b_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2} + 2n\pi\right) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to +\infty} (\sin(n\pi)) = 0 \\ \lim_{n \to +\infty} \left(\sin\left(\frac{3}{2} + 2n\pi\right)\right) = -1 \end{array}\right] \to$ Sono diversi $\to \lim_{x \to +\infty} (\sin x)$ non esiste

SCHEMI DI APPROSSIMAZIONE NUMERICA:

① CALCOLO APPROSSIMATO DI UN INTEGRALE DEFINITO:

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

- Esiste $\int_a^b f(x)\,dx$
  - → Formula del punto medio
  - → Approssimazioni per difetto e per eccesso

② SOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI:

es.: $x + e^x = 0$

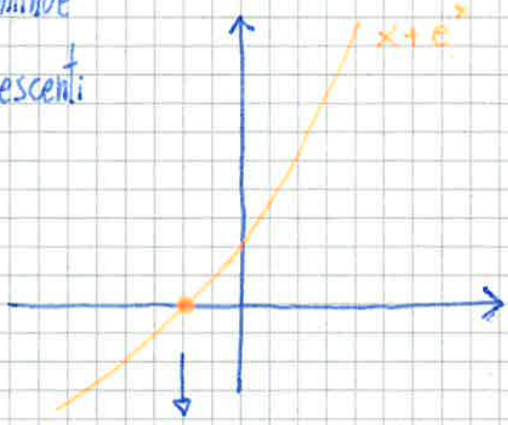
- Non esistono metodi risolutivi
- Ottica analitica: Soluzioni = Zeri della funzione

$f(x)$ continua perché somma di funzioni continue

$f(x)$ crescente perché somma di funzioni crescenti

$\lim_{x \to +\infty} (x + e^x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x + e^x) = -\infty$



C'è uno zero → Soluzione
↓
Tra -1 e 0

METODO DI BISEZIONE:

$I_0 = [-1; 0] \to$ Punto medio di $I_0 = c_0 = -0,5$

Calcolo $f(c_0)$
- → $= 0 \to$ Ho trovato la soluzione
- → > 0 o $< 0 \to$ Vado avanti:

$f(-0,5) \cong 0,1 \quad (>0)$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI:

Ip: $f[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Ts: Ad ogni numero $\bar{y} \in (f(a), f(b))$ corrisponde un numero $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che $f(a) < f(b)$ ed $\bar{y}$ tale che $f(a) < \bar{y} < f(b)$

Dobbiamo dimostrare che esiste $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$

Proviamo che $g(x) = \bar{y} - f(x)$ ha uno zero su (a,b)

Applichiamo il teorema di esistenza degli zeri ($g(x)$ è continua perché somma di una costante e di una funzione continua per ipotesi, inoltre

$g(a) > 0$ perché $\bar{y} > f(a)$

$g(b) < 0$ perché $\bar{y} < f(b)$)

Dunque esiste $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $g(\bar{x}) = 0 \rightarrow \bar{y} - f(\bar{x}) = 0 \rightarrow \bar{y} = f(\bar{x})$

CVD

TEOREMA:

Ip: $f(x)$ derivabile in $x = c$

Ts: $f(x)$ continua in $x = c$

DIMOSTRAZIONE:

Voglio che sia $\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = 0$

Dunque $\lim_{x \to c} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{f'(c)} \cdot \underbrace{(x - c)}_{0} \right) = 0$

CVD

TEOREMA DI FERMAT:

Ip: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

c è punto di massimo o minimo $\in (a,b)$

$f(x)$ derivabile in $x=c$

Ts: $f'(c)=0$

CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO:

1) Punti interni ad (a,b) in cui $f(x)$ è derivabile e vale $f'(c)=0$

$\downarrow$

PUNTI CRITICI O STAZIONARI

2) Estremi dell'intervallo (se questo è chiuso)

3) Punti interni ad (a,b) in cui $f(x)$ non è derivabile

DIMOSTRAZIONE (MINIMO LOCALE):

Ip: $\exists\ I(c) \mid f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in I(c) \qquad (f(x)-f(c) = \Delta f(x,c)) \geq 0$

$c \in (a,b)$

Ts: $f'(c)=0 \longrightarrow \lim\limits_{x \to c}\left(\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)=0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{\Delta f(x,c)}{x-c}\right)$

$\dfrac{\Delta f(x,c)}{x-c} = g(x)$ Definita in $I(c)/\{c\}$, $\Delta f(x,c) \geq 0$ x ip.

$\to g(x) \geq 0$ se $x>c$, $x \in I(c)$

$\to g(x) \leq 0$ se $x<c$, $x \in I(c)$

Si applica il primo teorema del confronto (dall'informazione sul segno di $g(x)$ ne deduco una sul segno del limite)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è (strettamente) decrescente su (a,b) se, posto che $x<y$ si ha che $f(x)\overset{(>)}{\geq} f(y)$ $\forall x,y\in(a,b)$

EQUIVALENTE A

$$\lim_{x\to y}\left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)\leq 0 \to f'(x)\leq 0 \quad \forall\, x,y\in(a,b),\ x\neq y$$

1) f decrescente su (a,b) $\longrightarrow$ $f'\leq 0$ su (a,b)

2) $f'\leq 0$ su (a,b) $\longrightarrow$ f decrescente su (a,b)

3) $f'<0$ su (a,b) $\longrightarrow$ f strettamente decrescente su (a,b)

DIMOSTRAZIONE PUNTO 1):

Ip: $f(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq 0$ $\forall\, x,y\in(a,b)$, $x\neq y$

Ts: $f'(c)\leq 0$

Sia $c\in(a,b)\to f'(c)=\lim_{x\to c}\left(\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)$

Siccome $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ per il teorema del confronto anche il suo limite è ≤ 0, dunque $f'(c)\leq 0$

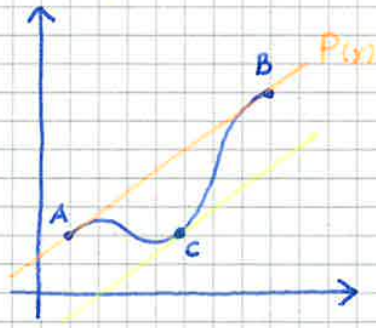
$\boxed{\text{CVD}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 110

TEOREMA DI LAGRANGE:

Ip: $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b)

Ts: $\exists\, c \in (a,b) \mid \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



DIMOSTRAZIONE:

$$P(x) = y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Sia $h(x) = f(x) - P(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$h(x)$ è:
- Continua su $[a,b]$ (somma di funzioni continue)
- Derivabile su (a,b) (somma di funzioni derivabili)
- $h(b) = h(a)$ (in quanto $f(b) = P(b)$ e $f(a) = P(a)$)

$\downarrow$

Applico il teorema di Rolle

$\downarrow$

$$\exists\, c \in [a,b] \mid h'(c) = 0$$

$$h'(c) = f'(c) - P'(c) \to = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

CVD

$$F_a'(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,dt - 0}{b-a}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

$$\boxed{\text{CVD}}$$

- Caratterizzazioni di funzioni a derivata nulla su un intervallo

Ip: $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su (a,b)

Ts: f costante su $(a,b) \longleftrightarrow f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$

f costante su $(a,b) \rightarrow f'(x)=0$ ovvio per definizione di derivata

$f'(x)=0 \rightarrow f$ costante su (a,b)

Dimostriamo che $f(x)=f(y) \quad \forall\, x,y \in (a,b)$

Applichiamo il teorema di Lagrange

$\downarrow$

$$\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Ma $f'(c)=0$ per ipotesi

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0 \longrightarrow f(x)=f(y)$$

$$\boxed{\text{CVD}}$$

PUNTI DI FLESSO:

$f(a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$

Se esiste $I^+(c)$ ed $I^-(c)$ tale che f è convessa su $I^+(c)$ e concava su $I^-(c)$, o viceversa, c si dice punto di flesso per f.

TEOREMA:

Ip: $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile

Ts: f convessa su $(a,b) \Leftrightarrow f'$ crescente su (a,b)

f concava su $(a,b) \Leftrightarrow f'$ decrescente su (a,b)

TEOREMA:

Ip: $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte

Ts: f convessa su $(a,b) \Leftrightarrow f'' \geq 0$ su (a,b)

f concava su $(a,b) \Leftrightarrow f'' \leq 0$ su (a,b)

ESERCIZIO:

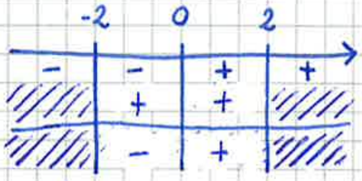
Studio di funzione di $F(x) = \int_1^x t \sqrt[4]{16-t^4}\, dt$

$D: [-2;2]$

$F'(x) = f = x\sqrt[4]{16-x^4}$

$x\sqrt[4]{16-x^4} \geq 0$

$x \geq 0$ $\quad$ $+\ \forall x \in D = [-2;2]$



$F'(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 2$

$F'(x) \leq 0$ per $-2 \leq x \leq 0$

$F''(x) = \sqrt[4]{16-x^4} - \dfrac{x^4}{\sqrt[4]{(16-x^4)^3}} = \dfrac{16-2x^4}{\sqrt[4]{(16-x^4)^3}}$

$P_{1,f,c}(x)$ = Polinomio di Taylor del 1° ordine di f centrato in $x=c$

Se x "è vicino" a $c \rightarrow f(x) \simeq P_{1,f,c}(x)$

$\downarrow$

$f(x) - P_{1,f,c}(x)$ = Errore dell'approssimazione o resto

$\downarrow$

$E_1(x)$

1 → Perché al primo ordine

PROPRIETÀ DELL' ERRORE:

$\lim_{x\to c}(E_1(x)) = 0 \rightarrow E_1$ è un infinitesimo per $x \to c$

$\downarrow$

$E: I(c)/\{c\} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{x\to c}(E(x)) = 0$

PROBLEMA: Dato un infinitesimo misurare la "velocità" con cui $f(x)$ va a 0.

ESEMPIO: $f(x) = x^2$

$g(x) = x^6$

x	x^2	x^6
10^{-1}	10^{-2}	10^{-6}
10^{-2}	10^{-4}	10^{-12}
10^{-3}	10^{-6}	10^{-18}
10^{-4}	10^{-8}	10^{-24}
10^{-5}	10^{-10}	10^{-30}

Le $g(x)$ diventano piccole molto più rapidamente di $f(x)$

$\downarrow$

Tende a 0 più velocemente

FORMALIZZAZIONE DEL CONCETTO:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \left(\frac{x^6}{x^2}\right) = (x^4) = 0 \rightarrow$ Il numeratore è molto più piccolo (tende a 0 più "velocemente" del denominatore)

DEFINIZIONE: Siano $f, g: I(c)/\{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesimi per $x \to c$

Siano $f, g \neq 0 \quad \forall x \in I(c)/\{c\}$

$\exists \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}}$

Se $\ell = 0$ $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$

Se $\ell = \pm\infty$ $f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 110

$f_1(x) = 1-\cos(x)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^\alpha}\right) \to l = 1/2 \text{ per } \alpha = 2$$

$f_3(x) = \log(1+x)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\right) \to l = 1 \text{ per } \alpha = 1$$

CONCLUSIONE: $f_1(x) = 1-\cos(x)$ ha ordine di infinitesimo 2

$f_2(x) = \sin^4(x)$ ha ordine di infinitesimo 4

$f_3(x) = \log(1+x)$ ha ordine di infinitesimo 1

TEOREMA:

Ip: $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile

$E_1(x) = f(x) - P_{1,c}(x)$

Ts: $\lim_{x\to c}\left(\frac{E_1(x)}{x-c}\right) = 0$ (E_1 è infinitesimo di ordine superiore a 1 per $x\to c$)

Guardacaso anche grado di $P_{1,c}(x)$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{E_1(x)}{x-c}\right) = \left(\frac{f(x)-P_{1,c}(x)}{x-c}\right) = \left(\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c}\right) = \left(\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{f'(c)} - f'(c)\right) = 0$$

APPROSSIMAZIONE CON POLINOMI DI GRADO >1:

Miglioramento dell'approssimazione
- → Uso di polinomi di grado maggiore
- → Uso delle derivate successive

$$\boxed{P_{n,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3 + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n}$$

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_{n,c}(x)}$$

ESEMPIO:

$f(x) = e^x$, $c = 0$

$n=1 \rightarrow P_{1,0} = x+1$

$n=2 \rightarrow P_{2,0} = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$

$n=3 \rightarrow P_{3,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

$n=4 \rightarrow P_{4,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$

$n=n \rightarrow P_{n,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{n!}x^n$

SIMBOLI DI LANDAU:

$\sim$ → Equivalente

o → o piccolo

Definiti per: $f, g: I(c)/\{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ e $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I(c)/\{c\}$

DEFINIZIONE: $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to c$, ovvero

$f = o(g)$, $x \to c$

Se si verifica $\lim_{x \to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$

ESEMPIO: $f(x) = \sin^2 x$
$g(x) = x$
$c = 0$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right) = \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x\right) = 0$$

Dunque $\sin^2 x = o(x)$, $x \to 0$

Da cui consegue che $\lim_{x\to c}\left(\frac{E_n(x)}{(x-c)^n}\right)=0$

$$\downarrow$$

$$E_n(x)=o(x-c)^n,\quad x\to c$$

Si può dedurre che $f(x)-P_{n,c}(x)=o(x-c)^n,\ x\to c$

$$\downarrow$$

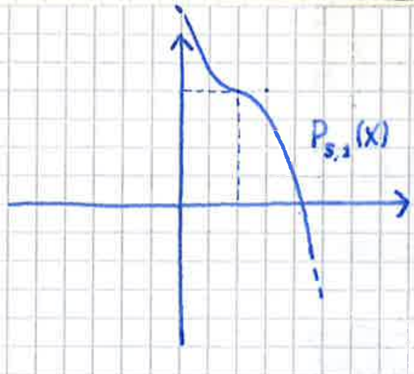
$$\boxed{f(x)=P_{n,c}(x)+o(x-c)^n,\quad x\to c}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

ESEMPIO:

$P_{5,1}(x) = 2 - 3(x-1)^5 + o((x-1)^5)$, $x \to 1$

$f(x)$?



Deduco che in $I(1)$ $f(x)$ è:
- positiva
- decrescente
- concava in I^+ e convessa in I^-

STUDIO DEI PUNTI CRITICI DI f:

Come capire se "c" è punto di massimo, minimo o flesso ?

↳ studio della monotonia in $I(c)$

↓ metodo delle derivate successive

TEOREMA:

Ip: $f(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

Supponiamo che esista $n \geq 2$ intero tale che:

$f \in C^n(a,b)$

$f^n(c) \neq 0$

$f^k(c) = 0 \quad \forall k = n-1$ (Fino a)

Allora
- → n pari
  - → $f^n(c) > 0 \to c$ è punto di minimo
  - → $f^n(c) < 0 \to c$ è punto di massimo
- → n dispari → c non è né massimo né minimo (flesso)

UTILIZZO DELLE PARTI PRINCIPALI NEL CALCOLO DEI LIMITI:

TEOREMA DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI:

Ip: $f_1, f_2, g_1, g_2 : I(c)/\{c\} \to \mathbb{R}$

$f_2 = o(f_1), \quad x \to c$

$g_2 = o(g_1), \quad x \to c$

Ts: $\lim_{x \to c} \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\left(g_1(x) + g_2(x)\right) = \lim_{x \to c} \left(f_1(x) \cdot g_1(x)\right)$

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}\right) = \lim_{x \to c} \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)$$

ESEMPIO:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 5}{2x^2 + 3x + 1}\right)$$

ma $\begin{cases} x^3 + 2x + 5 = x^3 + o(x^3), & x \to +\infty \\ 2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + o(x^2), & x \to +\infty \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}}\right) = +\infty$$

CONFRONTO TRA INFINITI:

$f: I(c)/\{c\} \to \mathbb{R}$ si dice infinito per $x \to c$ se:

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)\right) = \pm\infty$$

$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$
- $\to l = \pm\infty \to f$ è infinito di ordine superiore a g per $x \to c$
- $\to l \in \mathbb{R}, \neq 0 \to f$ e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \to c$
- $\to l = 0 \to f$ è infinito di ordine inferiore a g per $x \to c$

INFINITI CAMPIONE: $V(x)$
- $\to x$ per $x \to \pm\infty$
- $\to 1/(x-c)$ per $x \to c$, $c \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO:

$f(x) = \frac{1}{1+x} \longrightarrow T_{n,0} = 1 - x + x^2 - x^3 + (-1)^n x^n$

$f(1) = 0{,}5 \longrightarrow T_{n,0}(1) = ? \longrightarrow n = 1 \rightarrow T(1) = 0$

$n = 2 \rightarrow T(1) = 1$

$n = 3 \rightarrow T(1) = 0$

$n = 4 \rightarrow T(1) = 1$

↓

L'approssimazione non migliora aumentando il grado di $T_0(0)$

↓

Come mai?

↓

Mi sono "allontanato" troppo dall'intorno di $x = 0$

↓ I polinomi di Taylor danno una buona approssimazione solo localmente

↓ Non posso sapere a priori quanto sia "grande" l'intorno di x_0 in cui l'approssimazione con $T_n(x)$ è attendibile

ESERCIZIO:

Dimostriamo che $\lim_{n \to +\infty} \left(P_{n,0}(1)\right) = e$

Ricordiamo che $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \rightarrow e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 0,\ n \to +\infty$

→ È un infinitesimo

↓

Si può dimostrare che ha ordine di infinitesimo 1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 110

Dunque $0 < \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} \longrightarrow 0 < E_n(1) < \frac{e}{(n+1)!}$

$E_n(1)$ converge a 0 molto velocemente (con l'ordine dei fattoriali, dunque superiore a quello di qualsiasi potenza del campione)

$\Downarrow$

$b_n \to e$, $n \to +\infty$ molto velocemente

ESERCIZIO:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x \cos\sqrt{x} - \sin x}{\log(1+x^5)} \right) = ?$$

Sviluppo $x\cos\sqrt{x} - \sin x$, $x \to 0^+$

$$P_{3,0} = x\left(1 - \frac{1}{2}x\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

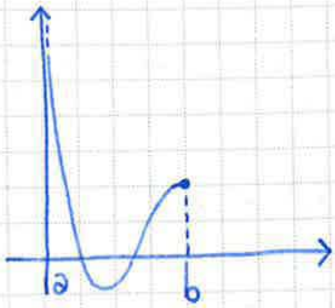
$$\frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{6!}x^3$$

$$P_{3,0} = x\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{6!}x^3\right) - x + \frac{1}{6}x^3$$

$$P_{3,0} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \cancel{\frac{1}{6!}x^4} + \frac{1}{6}x^3$$

$$P_{3,0} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3) \longrightarrow -\frac{1}{2}x^2 \text{ è la parte principale}$$

② $f(a,b] \to \mathbb{R}$ illimitata in "a"
$f \in \mathcal{R}[c,b] \ \forall \ a<c<b$



$$\int_c^b f(x)\,dx \to f(b) - \lim_{c\to a^+} (f(x))$$

ESEMPI FONDAMENTALI:

1) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx,\ \alpha>0 \to \frac{1}{x-a}$ è infinito campione per $x \to a^+$

$$\lim_{c\to a^+}\left(\int_c^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx\right) = \lim_{c\to a^+}(G(b)-G(c)) \qquad G(x)\begin{cases} \log|x-a|, & \alpha=1 \\ (x-a)^{-\alpha+1}/-\alpha+1, & \alpha\neq 1\end{cases}$$

$$\alpha=1 \to \lim_{c\to a^+}(\log|b-a| - \log|c-a|) = +\infty$$

Attenzione!

$$\alpha\neq 1 \to \lim_{c\to a^+}\left(\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(c-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)$$

$\alpha > 1 \to +\infty$

$0<\alpha<1 \to \dfrac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

CRITERIO DEL CONFRONTO:

Ip: $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f, g \in \mathcal{R}[a,b] \ \forall b > a$

$\exists \ I(+\infty) \mid f > 0, \ g > 0 \ \forall x \in I(+\infty), \quad f \leq g \ \forall x \in I(+\infty)$

Ts: $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Senso unico

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge $\Longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

ESEMPIO:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^8 + x\sqrt{x} + \log x}\,dx$$

1) $f > 0$ in $I(+\infty)$? $\to$ Sì

Applico il criterio del confronto asintotico:

A $+\infty$ prevale x^5 a numeratore ed x^8 a denominatore

$\hookrightarrow f(x) \sim \frac{x^5}{x^8}, \ x \to +\infty$ cioè $f(x) \sim \frac{1}{x^3}, \ x \to +\infty$

Ordine di infinitesimo 3

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:

Ip: $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f_{[a,b]} \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \ \forall b > a$

Ts: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge $\longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge

Senso unico

ESEMPIO:

$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\, dx$ (cambia segno infinite volte)

Studio $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ (sempre ≥ 0)

Applico uno dei due criteri precedenti

- Non posso trovare la parte principale di $f(x)$ a $+\infty$ ($|\sin x|$ non ammette limite)

$\downarrow$

Criterio del confronto

$0 \leq |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in (2; +\infty) \longrightarrow 0 \leq \frac{|\sin x|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3} \quad \forall x \in [2; +\infty)$

$$\int_0^5 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx \text{ converge}$$

Infinito di ordine $1/4$ (<1)

Dunque anche $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+x^7}\,dx$ converge

NUMERI COMPLESSI:

$\mathbb{C} : \{ z \mid z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R} \}$

i = unità immaginaria

$\bar{z}$ = complesso coniugato di z = $x - iy$

$z = x + iy$

Parte reale → $Re(z)$

Parte immaginaria → $Im(z)$

Se $y = 0 \rightarrow z \in \mathbb{R}$

Se $z \in \mathbb{R} \rightarrow z = \bar{z}$