



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1628A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Iannizzi

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Esercizi
esame. Prof.Molinari

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Testo:

- Aurelio Somà : " ^{devotote} ^{Bella} Fondamenti di meccanica strutturale L&B 2013 "
(lezioni ed esercizi ed esercizi di riepilogo)

Eventuali testi consigliati:

Copia da slide.

ESAME

• prova scritta e orale

↓

obbligo

↳ facoltativa x chi ha preso meno di 25/30

obbligatoria x chi ha preso un voto \geq 25/30

esercizi (simili a quelli in aula)

anche qualche domanda di teoria.

3 h !!

→ VENERDÌ:

→ 11.30 ÷ 13.00 AULA 10 A

→ 14.30 ÷ 16.00 AULA 3

EQUILIBRIO e CALCOLO delle REAZIONI VINCOLARI

6/03/13

Sistema meccanico = parte o porzione isolata di una macchina o di una struttura che si vuole studiare.

ex: il corpo umano.

Composizione $\begin{cases} \text{porzione c.r.} \\ \text{intero c.r.} \\ \text{più c.r.} \end{cases}$

Si parla di

- EQUILIBRIO DINAMICO: il sist modifica istante x istante il suo stato di moto
- EQUILIBRIO STATICO: sist in quiete
- EQUILIBRIO "QUASI" STATICO: $v = \text{cost}$ $a = 0$

Noi studieremo inizialmente l'equilibrio statico.

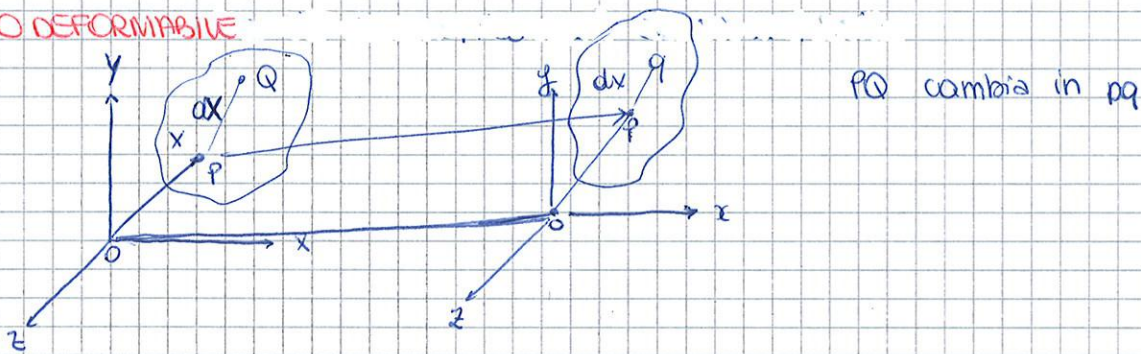
Punto materiale: rappresentazione di un oggetto quando non si tiene conto della forma e dell'estensione dell'oggetto. Il più semplice modello.

Gradi di libertà: parametri indipendenti necessari per determinare la posizione del punto dello spazio. Scelto un sist di riferimento, un punto libero nello spazio possiede 3 gradi di libertà al max.

Corpo rigido: viene considerata forma ed estensione.

Costituito da ∞ punti materiali che non cambiano le loro posizioni relative, quindi le distanze fra tutti i p.h del corpo restano invariate.

CORPO DEFORMABILE



Lo studio della mecc. strutt. \rightarrow studio eq. statico e dinamico di sist meccanici di corpi deformabili attraverso un modello matematico.

Il grado di accuratezza dipende dalle ipotesi che fa il progettista.

Dietro tutto ovviamente c'è il costo.

Se il corpo deformabile si deforma poco, allora possiamo descrivere lo studio partendo da un corpo rigido. Non altereremo, quindi, la forma del corpo.

IPOTESI - MECC. STRUTT. LINEARE

◦ semplificazioni geometriche:

- i vincoli sono ideali (viene idealizzato x semplicità)

Risultante di forze parallele

Per trovarlo \rightarrow modulo = somma algebrica dei moduli

posizione = condiz di equilibrio che garantisce un equilibrio rotazionale

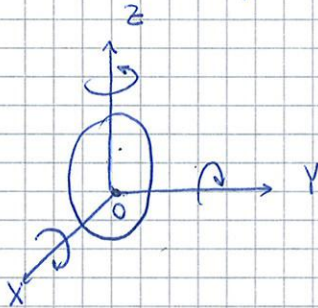
SISTEMA MECCANICO (3d)

Corpo rigido libero nello spazio.

Ellissoide \rightarrow 6 GdL

3 traslazione

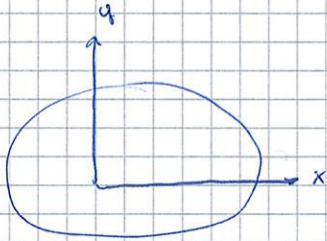
3 rotazione



SISTEMA MECCANICO (2d)

3 GdL

traslazione e rotazione.



VINCOLI

Sistema è vincolato quando le possibilità di movimento sono parzialmente o completamente impedite.

\rightarrow REAZIONI VINCOLARI : equilibriamo una o più componenti.

Equilibrio vincolato \rightarrow per impedire mov mi servono tanti vincoli quanti sono i GdL

CORPO RIGIDO MONOLITICO : 6 vincoli nello spazio, 3 nel 2d

EQUILIBRIO VINCOLATO

Quando il corpo è completamente vincolato \rightarrow sistema ISOSTATICO (tante condizioni di vincolo \times avere quiete).

Se metto + condizioni di vincolo \rightarrow sistema IPERSTATICO

Se il sistema è ancora a muoversi in qdc direzione \rightarrow sistema LABILE

I vincoli devono essere efficaci :

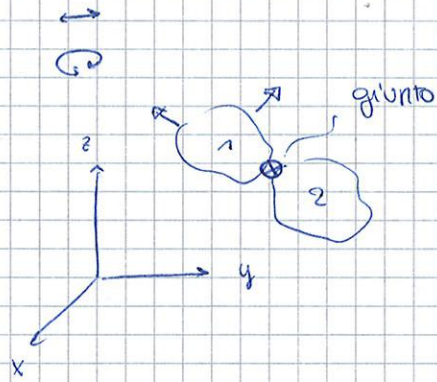
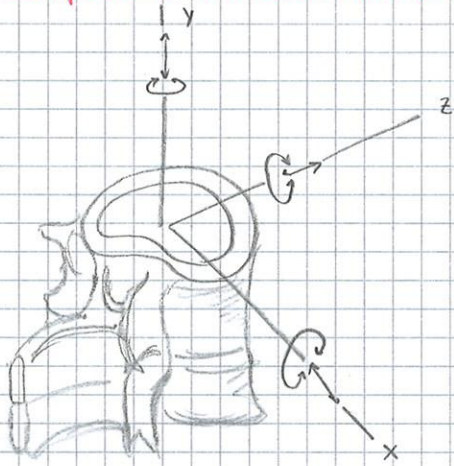
vincoli numericamente suff, ma traslazione lungo \times ancora possibile



\rightarrow vincoli inefficaci

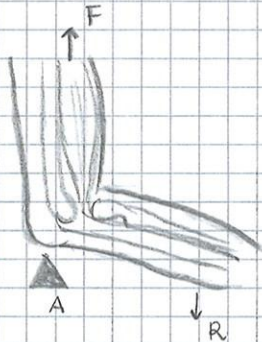
Sistemi composti e vincoli interni

3d

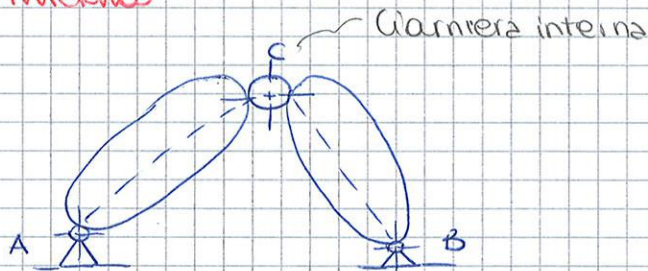


Attenzione ai corpi articolati

2d



Cerniera interna



8/03/13

Gradi di libertà

6 nello spazio, 3 nel piano

Vincoli

- Carrello: toglie un GdL
- Cerniera esterna: toglie 2 GdL
- Incastro: toglie 3 GdL

Grado di iperstaticità

Sist meccanici hanno GdL. Isostatico: $GdV = GdL$

EQUAZIONE di GRADO di IPERSTATICITÀ:

$$G = 3 \cdot i + 2 \cdot ce + 2 \cdot (r-1) \cdot ci + a - m \cdot n$$

i = incastri

ce = cerniere esterne

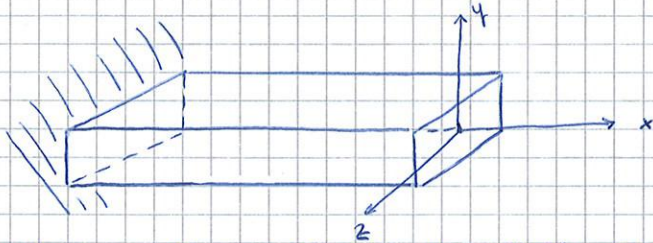
a = carrello

ci = cerniera interna

r = pezzi connessi al giunto.

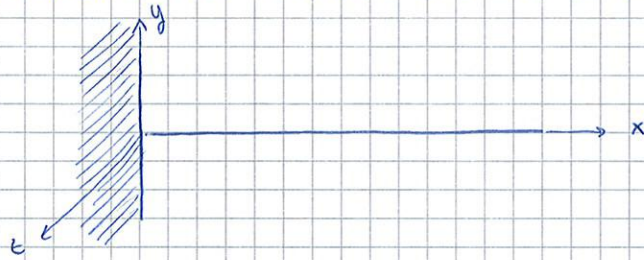
$m = n^o$ GdL del corpo (3 nel piano)

$n = n^o$ C.O.R.



Trave sezione costante asse rettilineo

Consideriamolo una mensola incastrata nel muro. Facciamone un modello:

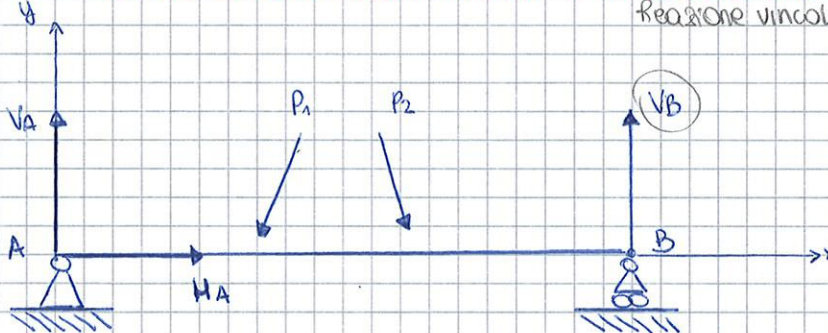


viene ad essere la linea d'asse.

TRAVE AD UNA SOLA CAMPATA APPOGGIATA

Reazione vincolare (// al mov. impedito)

P.24



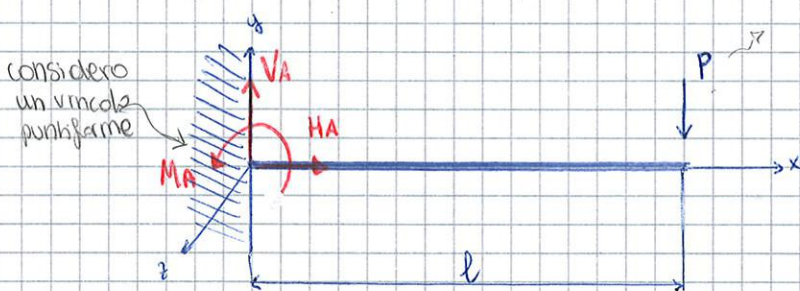
$G = 2 + 1 - 1 \cdot 3 = 0$

I vincoli sono efficaci

ESEMPI di CALCOLO di REAZIONI VINCOLARI

Vari esempi:

• Mensola incastrata:



anche il carico diventa puntiforme.

Dobbiamo scrivere le equazioni in modo canonico.

$\sum X = 0$

$\sum Y = 0$

$H_A = 0$

V_A (non conosciamo verso e modulo. Allora lo prendiamo concorde a y.)

$V_A - P = 0 \Rightarrow V_A = P$ verso concorde a y, modulo = P

Se il carico fosse nel verso contrario: $\uparrow P$

Il modello della mensola è lo stesso

$\sum Y = 0$

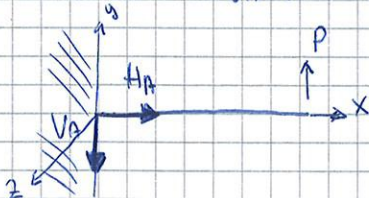
$V_A + P = 0$

$V_A = -P$

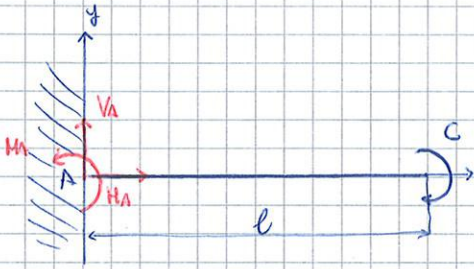
La reazione non sarà concorde con l'asse y

modulo = P,

ma verso opposto a y



- Trave incastrata caricata con una coppia C concentrata all'estremità



$$H_A - C = 0$$

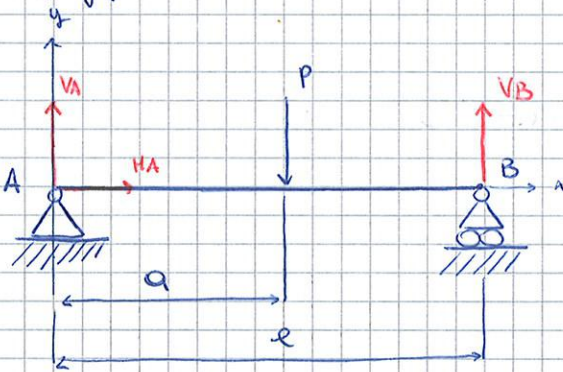
$$M_A = C$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = 0$$

TRAVE APPOGGIATA

- Trave appoggiata con carico concentrato



$$\sum X = 0 \quad H_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad V_A - P + V_B = 0$$

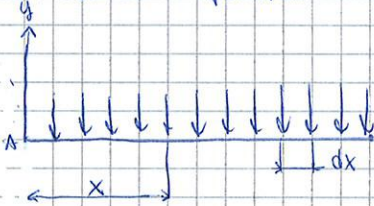
$$\sum M_A = 0 \quad -Pa + V_B l = 0$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{Pb}{l}$$

$$V_B = \frac{Pa}{l}$$

- Trave con carico uniformemente distribuito



$$H_A = 0 \quad e$$

$$V_A + V_B - \int_0^l q dx = 0$$

$$V_A + V_B - ql = 0$$

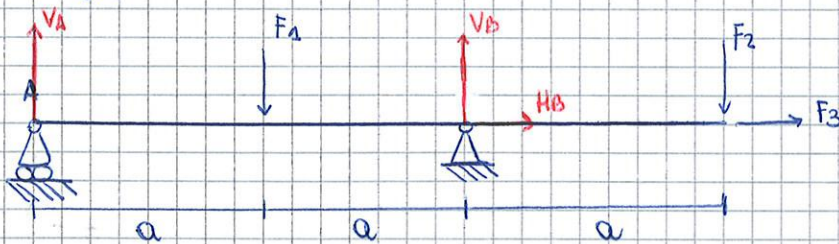
$$\sum M_A = 0 \quad - \int_0^l x q dx + V_B l = 0$$

$$- \frac{ql^2}{2} + V_B l = 0$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{ql}{2}$$

- Trave appoggiata: trave monoelica



$$F_1 = F_2 = 20000 \text{ N}$$

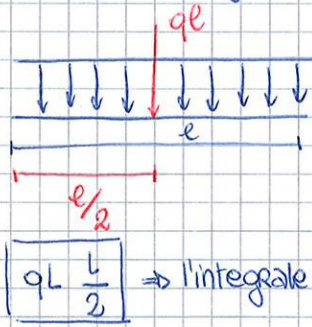
$$F_3 = 30000 \text{ N}$$

1) È isostatica? $G = 2 + 1 - 1 \cdot 3 = 0$

2) $\sum X = 0 \quad H_B + F_3 = 0$

$\sum Y = 0 \quad V_A + V_B - F_1 - F_2 = 0$

Scorciatoia x l'integrale:



$$\sum_c M_2 = 0 : qL \frac{L}{2} - 2qL^2 + 2V_e L = 0$$

Riassumendo:

$$1 : \begin{cases} H_A + H_C = 0 \\ V_A + V_B - V_C - qL = 0 \\ qL \frac{L}{2} - V_B L - V_A 2L + H_A L = 0 \end{cases}$$

$$2 : \begin{cases} H_C + qL = 0 \\ V_B + V_C - 2qL = 0 \\ qL \frac{L}{2} - 2qL^2 + 2V_e L = 0 \end{cases}$$

$$H_C = qL$$

$$V_e = \frac{3}{4} qL$$

$$V_C = \frac{5}{4} qL$$

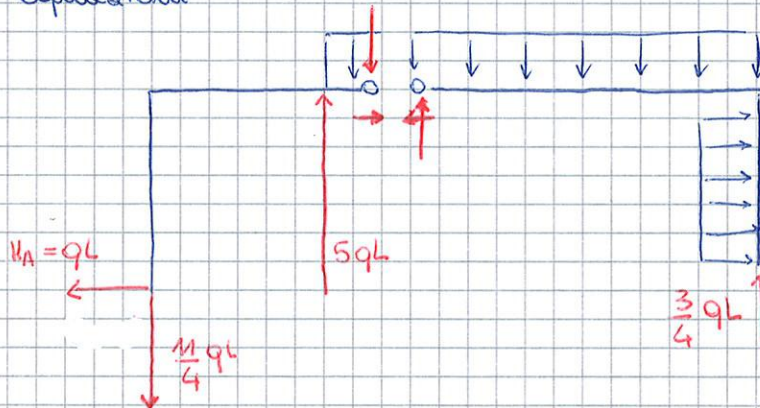
$$H_A = -H_C = -qL$$

$$V_A = -\frac{11}{4} qL$$

$$V_B = 5qL$$

Sistema effettivo di carico delle strutture:

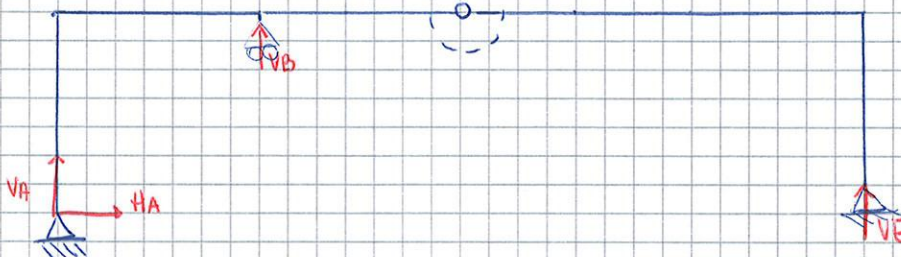
I carichi effettivamente presenti alle strutture sono quelli che vanno inseriti nelle equazioni



questi sono i carichi EFFETTIVI !!

Se tenessi la struttura tutta intera, come monodimensionale \rightarrow tutta nel piano

Queste reazioni se le vincola



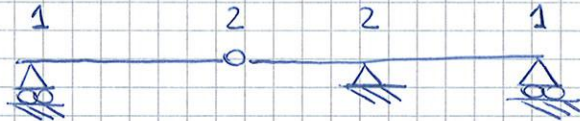
$$\sum X = 0$$

$\sum Y = 0 \rightarrow$ non posso risolvere! Ho 4 incognite \rightarrow equazione ausiliaria

$$\sum M_2 = 0$$

!! > // Tutte le volte che ho un giunto interno ho una rotazione relativa e quindi il MOMENTO È UGUALE a ZERO rispetto a quel punto.

ES:



$G = ?$

$3N_c = NV$

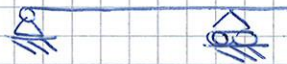
$N_c = 2$

$3 \cdot 2 = 6$ strutt. isostatica

$NV = 6$

$G = 3 \cdot i + 2ce + 2(r-1)ci + a - m \cdot n =$
 $= 0 + 2 + 2 \cdot 1 + 2 - 3 \cdot 2 = 0 ! \text{ :)$

ES:



$N_c = 1$

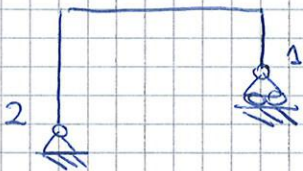
$3 \cdot N_c = NV$

$NV = 3$

$3 \cdot 1 = 3$ Ok!

isostatica

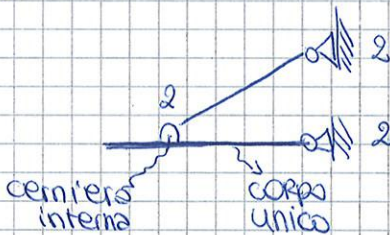
ES:



$3N_c = NV$

$3 \cdot 1 = 3$ isostatica

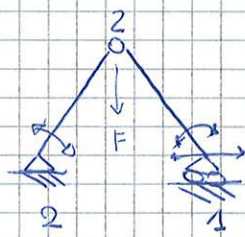
ES:



$3N_c = NV$

$3 \cdot 2 = 6$ strutt. isostatica

ES:



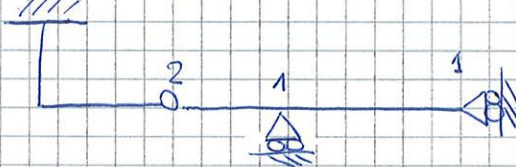
$N_c = 2$ $NV = 5$

$3N_c = NV$

$3 \cdot 2 = 5$

$6 = 5 \rightarrow 6 > 5$ struttura labile !

ES: 3

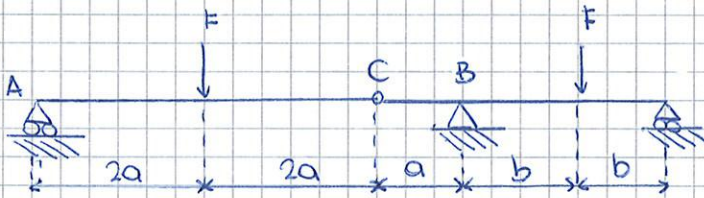


$N_c = 2$

$NV = 7$

$6 < 7$ struttura iperstatica

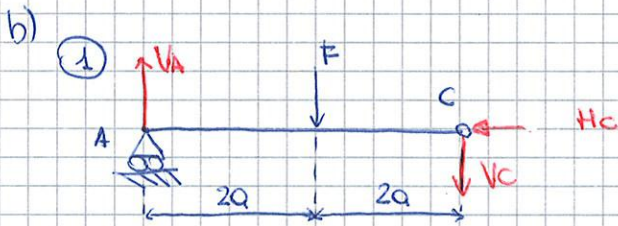
Es. 3



$$\begin{cases} a = 1,2 \text{ m} \\ b = 2 \text{ m} \\ F = 50 \text{ N} \end{cases}$$

a) G
b) Reaz. vincolari

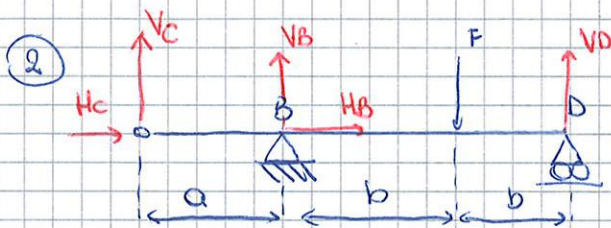
a) $G = 3i + 2ce + 2(r-1)ci + a - m \cdot n$
 $= 0 + 2 + 2(2-1)1 + 2 - 3 \cdot 2 =$
 $= 2 + 2 + 2 - 6 = 0 \quad \text{isostatico}$



$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad -H_c = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad V_A - F - V_c = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad -F(2a) - V_c(4a) = 0 \end{aligned}$$

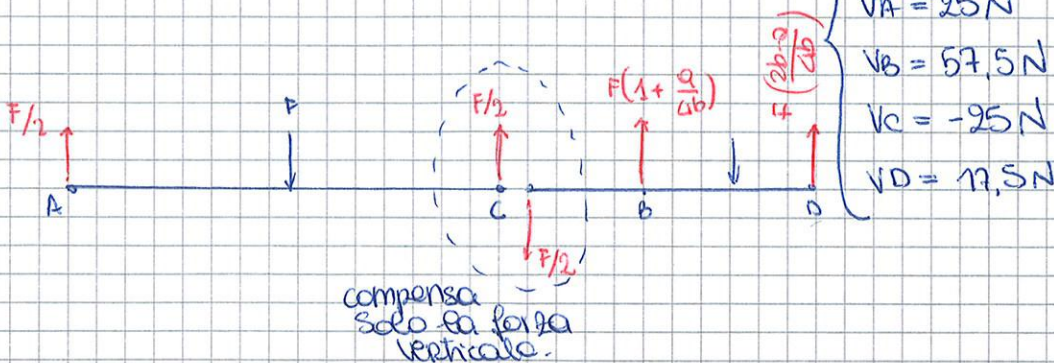
⇒

$$\begin{cases} H_c = 0 \\ V_A - F - V_c = 0 \\ -2Fa - 4V_c a = 0 \\ H_c + H_B = 0 \\ V_c + V_B + V_D - F = 0 \\ -V_c a - Fb + V_D 2b = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad H_c + H_B = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad V_c + V_B + V_D - F = 0 \\ \sum M_B = 0 & \quad -V_c a - Fb + V_D 2b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_c = 0 \\ H_B = 0 \\ 4V_c a = -2Fa \Rightarrow V_c = -\frac{F}{2} = -25 \text{ N} \\ V_A = V_c + F = 25 \text{ N} \\ 2bV_D = Fb + aV_c = V_D = \frac{F}{2} \cdot \frac{a}{4b} \\ V_B = F - V_c - V_D = F \cdot 1 + \frac{a}{4b} \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_B = 0 \\ H_c = 0 \\ V_A = 25 \text{ N} \\ V_B = 57,5 \text{ N} \\ V_c = -25 \text{ N} \\ V_D = 17,5 \text{ N} \end{cases}$$

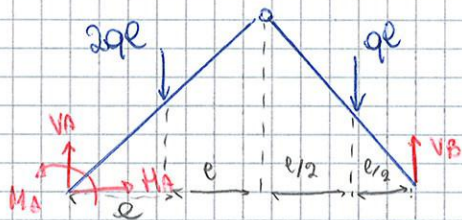
$$\begin{cases} \sum X=0 \\ \sum Y=0 \\ \sum M_2=0 \end{cases} \begin{cases} V_C - qe + V_B = 0 \\ H_C = 0 \\ -qe \frac{e}{2} + V_B e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_C = 0 \\ H_A = 0 \\ V_B e = \frac{qe^2}{2} \rightarrow V_B = \frac{qe}{2} \\ V_C = qe - V_B = \frac{qe}{2} \\ V_A = 2qe + V_C = \frac{5}{2} qe \\ M_A = 2qe^2 + qe^2 = 3qe^2 \end{cases}$$

Risultati

$$\begin{cases} H_A = H_C = 0 \\ V_A = 75 \text{ N} \\ M_A = 90 \text{ Nm} \\ V_B = 15 \text{ N} \\ V_C = 15 \text{ N} \end{cases}$$

Auxiliaria



Il vincolo (A) \Rightarrow le forze non sono "oblique" perché l'orientazione è arbitraria perché quello che ci interessa è la risultante.

$$\begin{cases} \sum X=0 \\ \sum Y=0 \\ \sum M_C=0 \\ \textcircled{2} \sum M_2=0 \end{cases} \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - 2qe - qe + V_B = 0 \\ V_B e - qe \frac{e}{2} = 0 \\ M_A - 2qe^2 - qe \frac{5e}{2} + V_B 3e = 0 \end{cases}$$

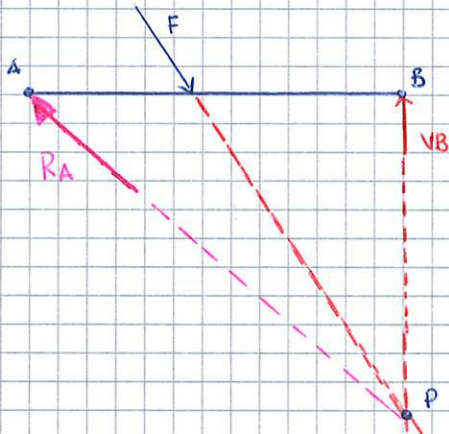
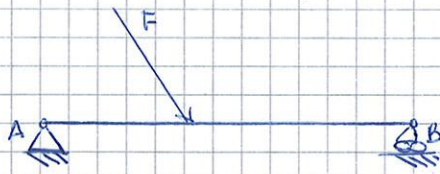
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B - 3qe = 0 \Rightarrow V_A = 3q1 - 15 = 90 - 15 = 75 \text{ N} \\ V_B = qe \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{30 \cdot 1}{2} = 15 \text{ N} \\ M_A = 2 \cdot 30 \cdot 1 + 30 \frac{5}{2} - 15 \cdot 3 = 60 + 75 - 45 = 90 \text{ Nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 75 \text{ N} \\ V_B = 15 \text{ N} \\ M_A = 90 \text{ Nm} \end{cases}$$

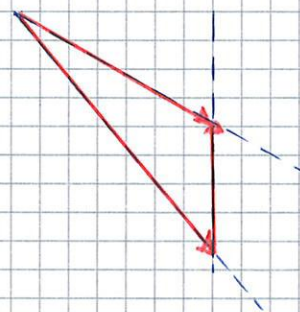
DETERMINAZIONE GRAFICA delle REAZ. VINCOLARI

13/03/13

In alcuni casi si può studiare la determinaz. delle reaz. vincolari in modo grafico.



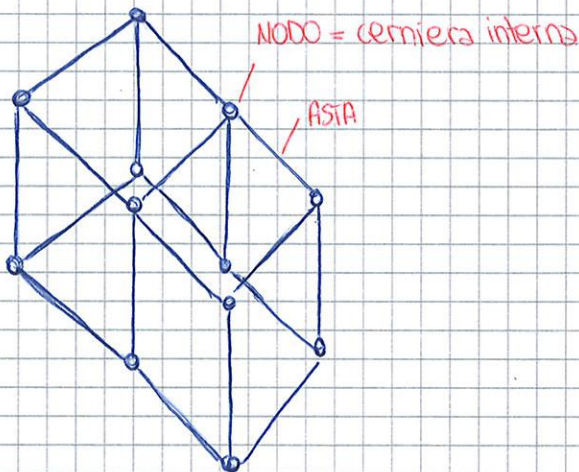
⇒ TRIANGOLO delle forze



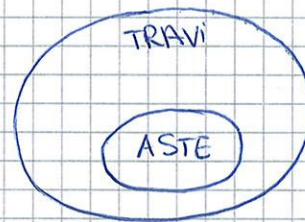
TRAVATURE RETICOLARI

Trave ⇒ modello monodimensionale

Immaginiamo una struttura con una molteplicità di vincoli interni



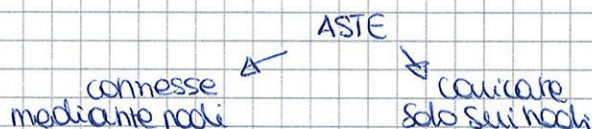
Modello insiemistico



ASTA: modello di trave che collegata al resto della strutt. mediante cerniere dette in questo caso "nodi" e che ammette carichi esterni solo sui nodi stessi.

Un cilindro strutturale diventa una TRAVE → linea d'asse.

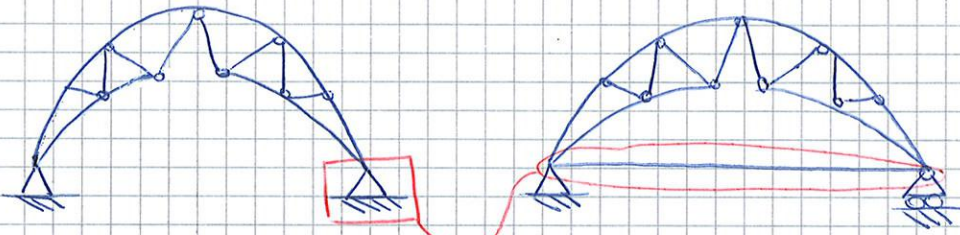
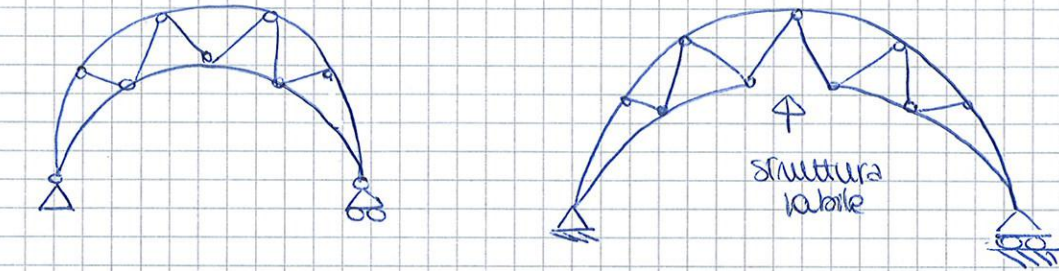
Di tutte le travi analizziamo alcuni tipi particolari. Uno di questi è l'ASTA, connessa con cerniere interne che vengono chiamate nodi.



Esempi di travi reticolari:

- 1) Copriporta Poloneau
- c) travatura Mohnie
- e)
- 2) " inglese
- d)
- f)

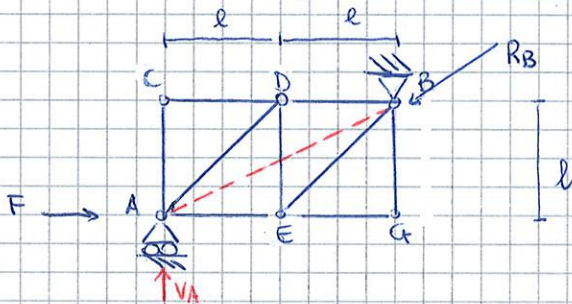
Esiste anche l'arco reticolare:



Risolvo il problema della struttura labile

Calcolo delle reazioni

Scriviamo delle equazioni di equilibrio.



9 aste

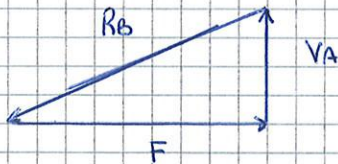
6 ci

$$9 + 3 = 2 \cdot 6$$

$$12 = 12 \quad \text{OK}$$

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A \\ R_{Bx} \\ R_{By} \end{cases}$$

oppure metodo grafico



$$V_A = \frac{F}{2}$$

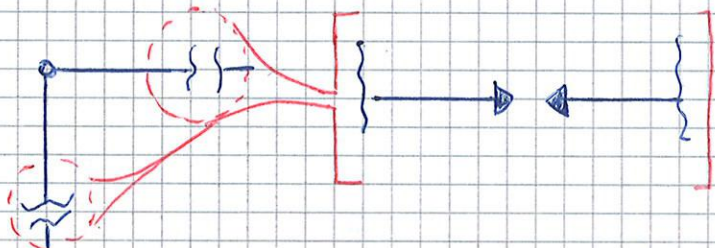
$$R_B = \sqrt{F^2 + \frac{F^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} F$$

Calcolare la distribuzione delle azioni interne nelle aste.

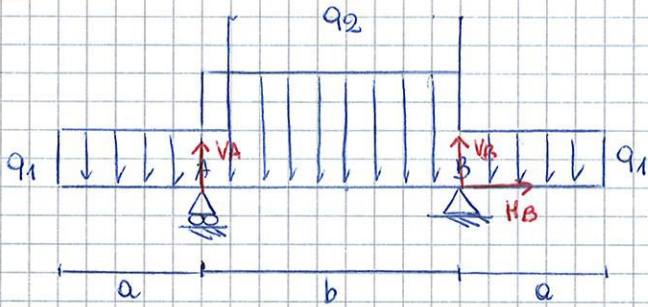
Dobbiamo scrivere un'eq per ogni cerniera \Rightarrow metodo di equilibrio dei nodi

Isoliamo cerniera C.

Operiamo un taglio "virtuale" della strut.



ES 8



VA ?
VB ?
HB ?

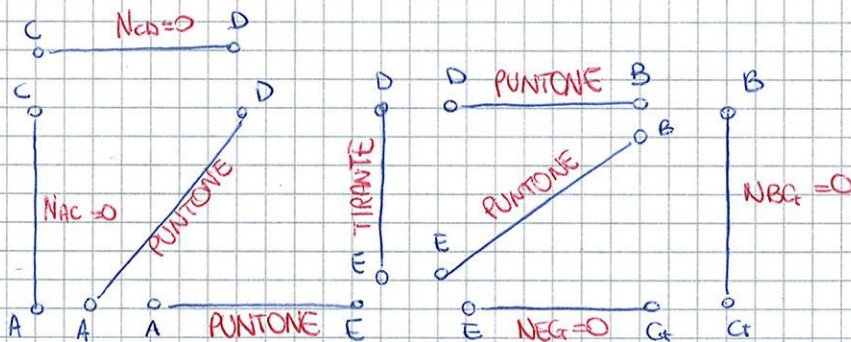
$$\begin{cases} \sum X = 0 : & H_B = 0 \\ \sum Y = 0 : & V_A + V_B - 2q_1 a - q_2 b = 0 \\ \sum M_B = 0 : & -V_A b + q_1 a \left(\frac{a}{2} + b \right) + q_2 b \frac{b}{2} - q_1 \frac{a^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = 0 \\ V_A = \left(q_1 \frac{a^2}{2} + q_1 a b + q_2 \frac{b^2}{2} - q_1 \frac{a^2}{2} \right) \frac{1}{b} = q_1 a + q_2 \frac{b}{2} \\ V_B = 2q_1 a + q_2 b - q_1 a - q_2 \frac{b}{2} = q_1 (2a - a) + q_2 \left(b - \frac{b}{2} \right) = q_1 a + q_2 \frac{b}{2} \end{cases}$$

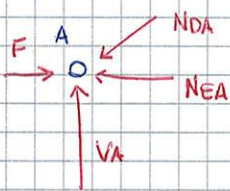
ok!

Tornando all'esercizio sulle aste:

Calcoliamo reazioni all'interno:

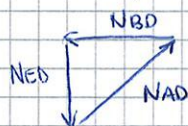


Vediamo cosa accade
barra



$$NDA = -\frac{F\sqrt{2}}{2}$$

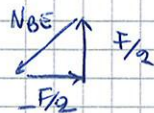
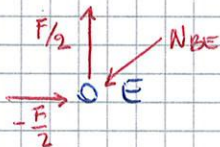
$$NEA = -\frac{F}{2}$$



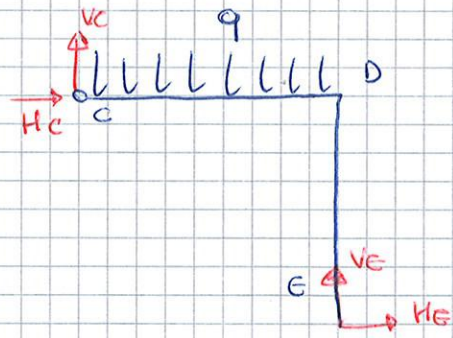
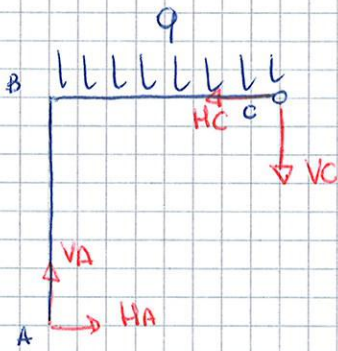
$$NAD = -\frac{F\sqrt{2}}{2}$$

$$NED = \frac{F}{2}$$

$$NBD = -\frac{F}{2}$$



$$NBE = -\frac{F\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{A) } \begin{cases} H_A - H_c = 0 \\ V_A - V_c - qe = 0 \\ H_c e - V_c l - qe \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

$$-V_c e = q \frac{l^2}{2} - H_c e$$

$$-H_c e + q \frac{e^2}{2} - H_c e + q \frac{e^2}{2} = 0$$

$$2H_c e = qe^2$$

$$H_c = \frac{qe^2}{2e} = 45 \text{ N}$$

$$H_E = -H_c \rightarrow H_E = -45 \text{ N}$$

$$H_A = H_c \rightarrow H_A = 45 \text{ N}$$

$$V_c = -q \frac{e}{2} + q \frac{e}{2} = 0 \text{ N}$$

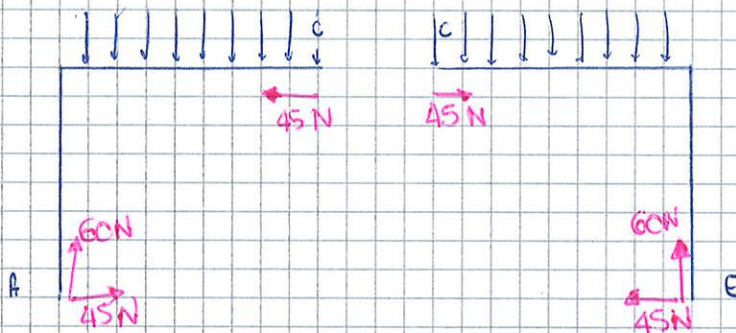
$$V_A = V_c + qe = 60 \text{ N}$$

$$V_E = -V_c + qe = 60 \text{ N}$$

$$\begin{cases} H_c + H_E = 0 \\ V_c + V_E - qe = 0 \\ \sum \overline{EI} - V_c e - H_c e + q \frac{e^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} H_c = 45 \text{ N} \\ H_E = -45 \text{ N} \\ H_A = 45 \text{ N} \\ V_c = 0 \text{ N} \\ V_A = V_E = 60 \text{ N} \end{cases}$$



Con equazione ausiliaria:

$$\begin{cases} H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B - 2qe = 0 \\ 2V_B e - 2qe^2 = 0 \\ -q \frac{e^2}{2} + V_B e + H_B e = 0 \end{cases}$$

$$H_A = -H_B$$

$$V_B = \frac{2qe^2}{2e} = qe = 60 \text{ N}$$

$$V_A = -qe + 2qe = qe = 60 \text{ N}$$

$$H_B = \left(-V_B e + q \frac{e^2}{2} \right) \frac{1}{e} =$$

$$= -\frac{qe^2}{e} + \frac{qe^2}{2e} = -\frac{qe^2}{2e} = -45 \text{ N}$$

Auxiliaria:

$$H_A + H_B = 0$$

$$V_A + V_B = 0$$

$$\uparrow A) \quad 2V_B L - M_1 = 0$$

$$\uparrow C) \quad -V_A L + H_A H - \frac{M_1}{2} = 0$$

$$H_A = -H_B$$

$$V_B = \frac{M_1}{2L} = \frac{1000 \text{ Nm}}{2 \cdot 3 \text{ m}} = 166,7 \text{ N}$$

$$V_A = -V_B = -166,7 \text{ N}$$

$$\frac{M_1}{2L} + H_A H - \frac{M_1}{2L} = 0$$

$$H_A H = 0$$

$$H_A = 0$$

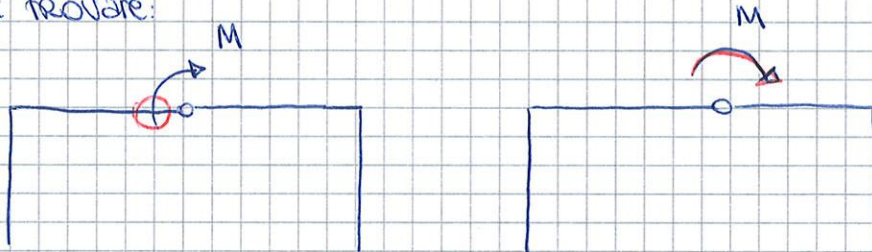
Pertanto:

$$\begin{cases} H_A = H_B = 0 \\ V_A = -166,7 \text{ N} \\ V_B = 166,7 \text{ N} \end{cases}$$

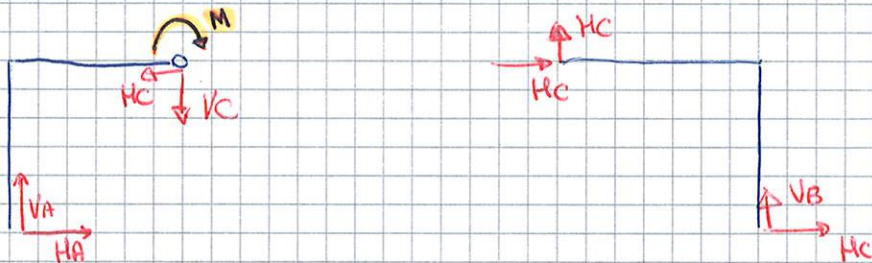
Possiamo poi calcolare
Hc e Vc

Attenzione:

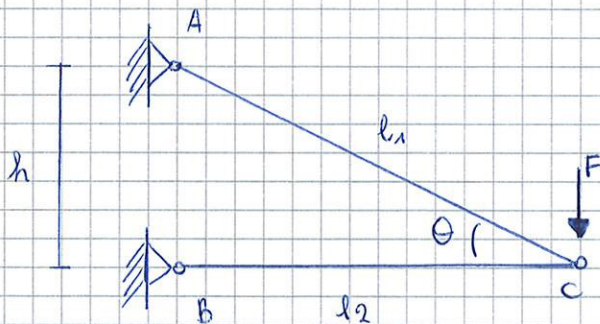
Potrei trovare:



Solo su un corpo della struttura!!



ES. 3



$$l_2 = 3 \text{ m}$$

$$F = 2000 \text{ N}$$

$$\theta = 30^\circ$$

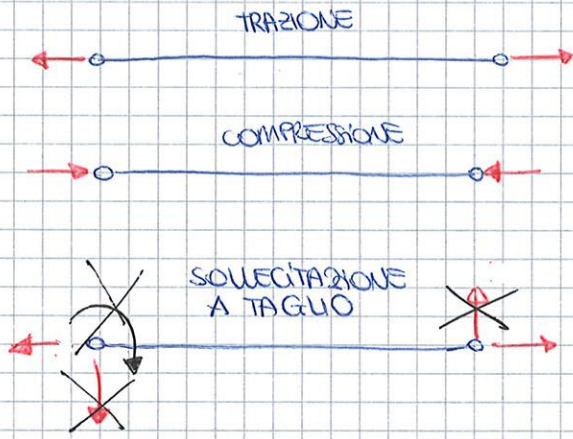
$$3 N_C = N_V$$

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$l_1 = \frac{l_2}{\cos \theta} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

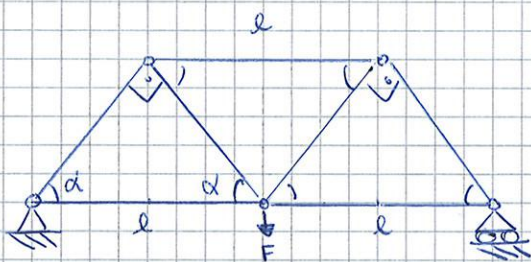
$$h = l_2 \tan \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 13 \text{ m}$$

asta



Non è equilibrata:
dovrei aggiungere un momento, ma ho una cerniera e quel non è possibile

ES. 4



$$\begin{cases} l = 5\text{m} \\ \alpha = 45^\circ \\ F = 2000\text{N} \end{cases}$$

$$N_c + N_{\text{vest}} = 2 N_n$$

\downarrow # vincoli esterni \downarrow # nodi

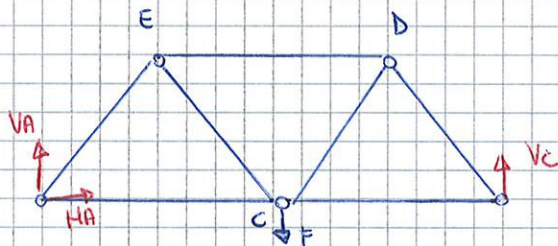
$$7 + 3 = 2 \cdot 5$$

ok!

$$N_c = 7$$

$$N_{\text{vest}} = 2 + 1 = 3$$

$$N_n = 5$$



$$\uparrow H_A = 0$$

$$\rightarrow -F + V_A + V_C = 0$$

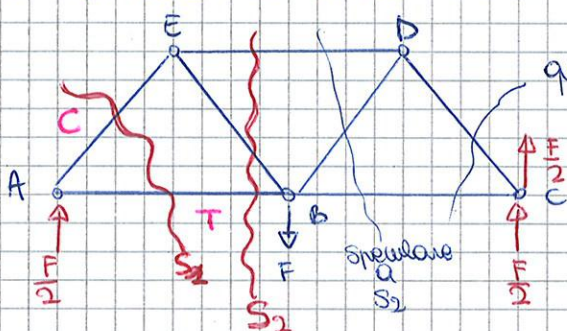
$$\uparrow -F_E + V_C \cdot 2l = 0$$

$$H_A = 0$$

$$V_C = \frac{F}{2}$$

$$V_A = \frac{F}{2}$$

Metodo delle sezioni di Ritter:



questa sezione è speculare a S1



$$\sum X = 0 \quad N = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad V_A - T = 0 \Rightarrow T = V_A = P$$

$$\sum_{R} M_F = 0$$

$$M_F = -M_A + V_A x$$

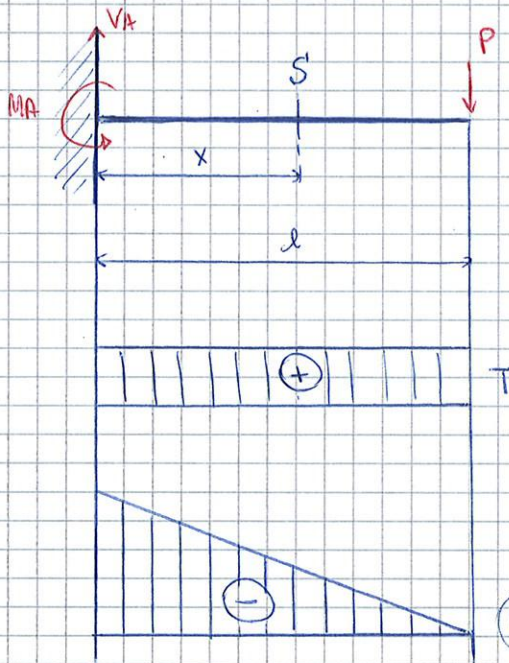
$$M_F = -Pl + Px$$

$$M_F = -P(l - x)$$

Quindi:

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T_y(x) = P \\ M_F(x) = -P(l - x) \end{cases}$$

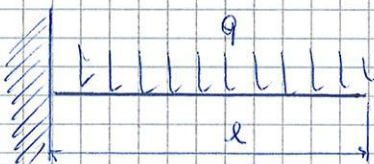
Possiamo tracciarne i diagrammi



$N = 0$ non rappresentato

M_F → sempre dalla parte delle fibre tese

ES: Carico uniforme



$$\begin{cases} V_A = ql \\ M_A = \frac{ql^2}{2} \end{cases}$$

$$M_F + dM_F - M_F - T dx - q \frac{dx^2}{2} = 0$$

circuito sup

$$dM_F - T dx = 0$$

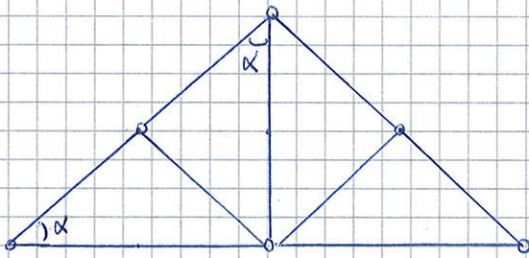
QUALUNQUE noi la trave

$$\frac{dM_F}{dx} = T$$

Prima: $M_F = \text{retto} \rightarrow \text{obbligato} = \text{cost}$
 Infatti se taglio el cost.

ESERCITAZIONE del 25/03/13

5

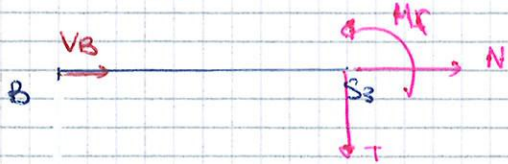


$$N = -H_A = -25 \text{ N}$$

$$T = V_A - qx = \begin{cases} V_A = 60 \text{ N}, & x=0 \\ V_A - qe = -10 \text{ N}, & x=e \end{cases}$$

$$M_f = V_A x - q \frac{x^2}{2} - H_A e = \begin{cases} -H_A e = -25 \text{ Nm}, & x=0 \\ = 0, & x=e \end{cases}$$

$S_3: 0 < x < e/2$



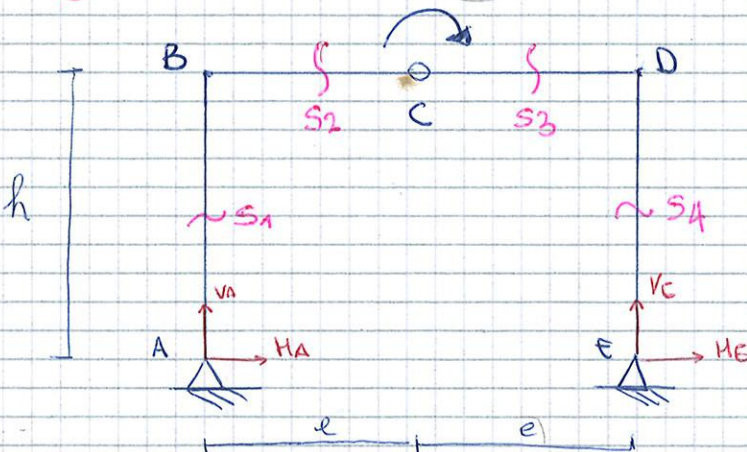
$$\begin{aligned} \rightarrow N + V_B &= 0 & N &= -V_B = -10 \text{ N} \\ \uparrow T &= 0 \\ \curvearrowright M_f &= 0 \end{aligned}$$

Non viene mai considerata $x < e$ sostituita dalla terza.

ES (2)

(M) posso decidere se M sta sulla parete o su

$$M = 1000 \text{ Nm}$$



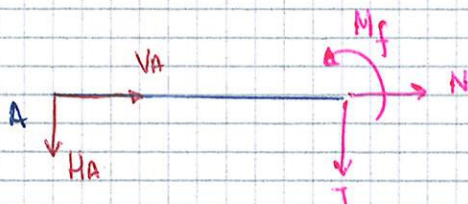
M agisce sulla parte di sx

$$\begin{aligned} \rightarrow H_A + H_E &= 0 \\ \uparrow V_A + V_E &= 0 \\ \curvearrowright A) \quad 2V_E e - M &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_E = \frac{M}{2e} = 166,7 \text{ N} & H_E = -250 \text{ N} \\ V_A = -V_E = -166,7 \text{ N} \\ H_A = \frac{M}{h} + V_A \frac{e}{h} = 250 \text{ N} \end{cases}$$

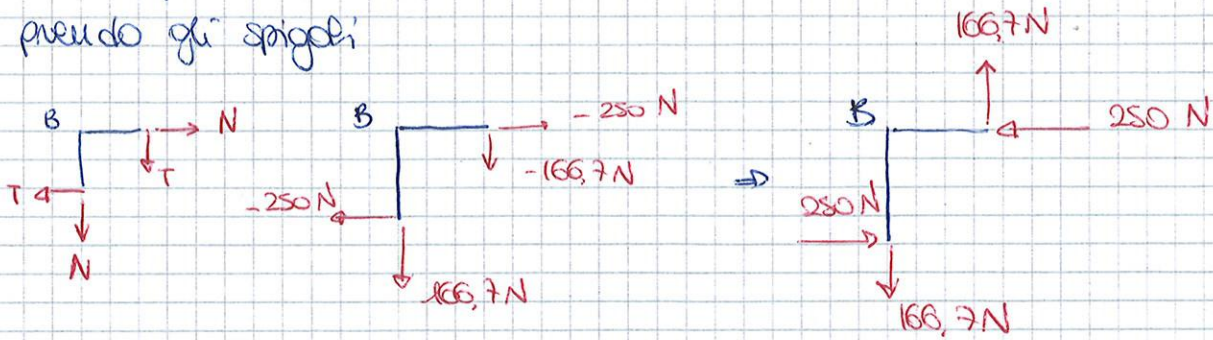
$$\sum M_C = 0 \quad \curvearrowright C) \quad -V_A e + H_A h - M = 0$$

$S_1: 0 < x < h$

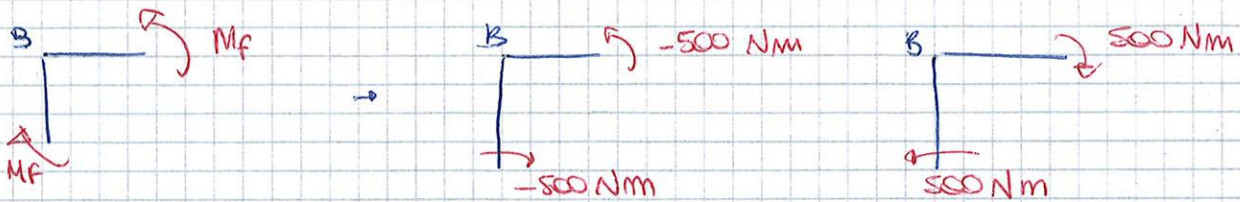


$$\begin{aligned} \rightarrow V_A + N &= 0 & N &= -V_A = 166,7 \text{ N} \\ \uparrow -H_A - T &= 0 & T &= -H_A = -250 \text{ N} \\ \curvearrowright A) \quad -Tx + M_f &= 0 & M_f &= Tx = \begin{cases} 0 & x=0 \\ Th & x=h \end{cases} \end{aligned}$$

Per verifica:
prendo gli spigoli;



È in equilibrio!



È in equilibrio!

La stessa cosa posso fare per D.

d'altra verifica se è la derivata di:

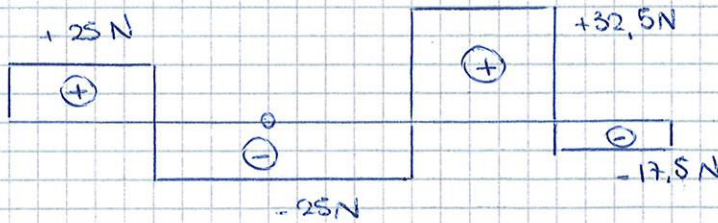
$$\frac{dM_f}{dx} = T \quad \frac{dT}{dx} = q$$

Es. 3

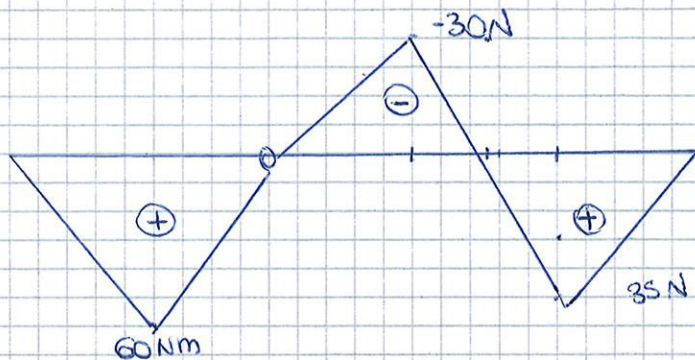
(N)

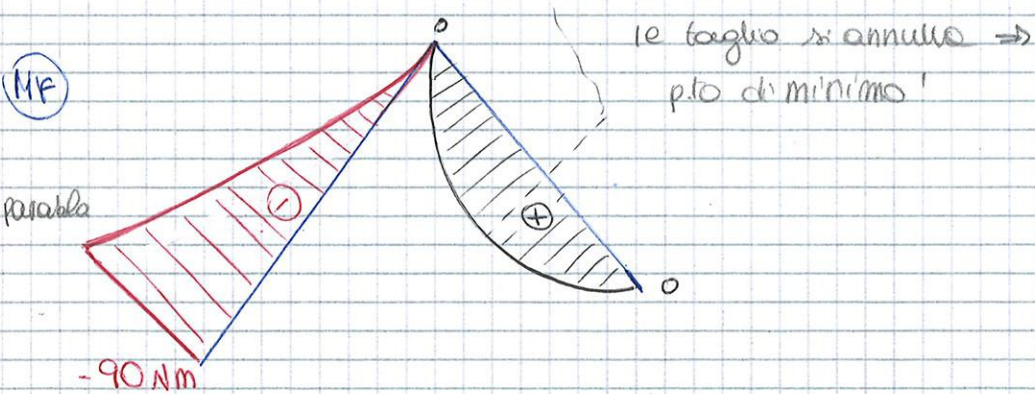
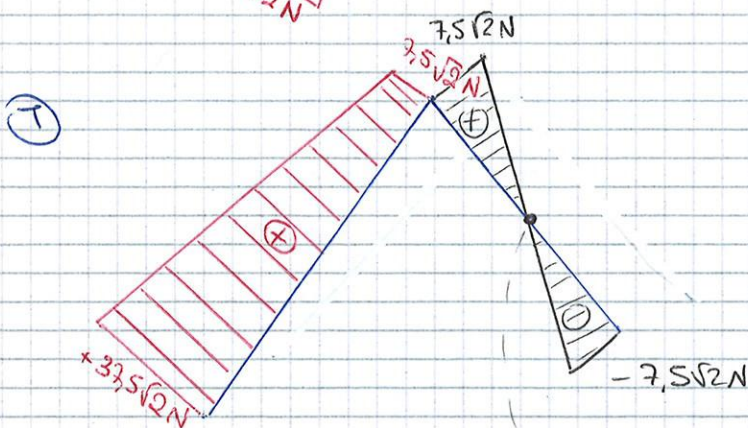
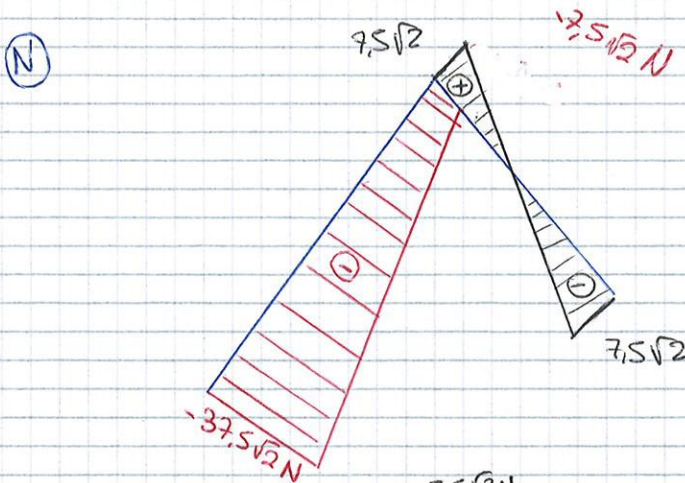


(T)

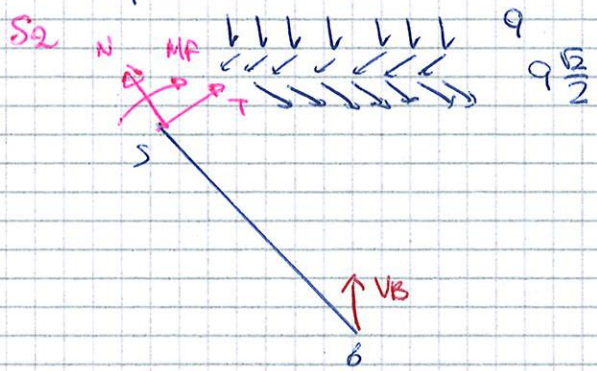


(Mf)





L'altra parte di sezione



asse N + VB √2 - q √2 x = 0

taglio T - q √2 x + VB √2 = 0

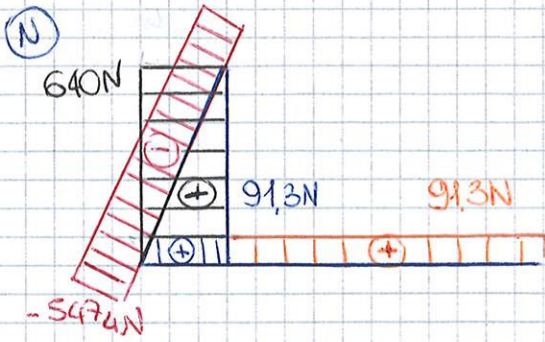
MF + q x √2 - VB x = 0

$N = q \frac{\sqrt{2}}{2} x - VB \frac{\sqrt{2}}{2}$

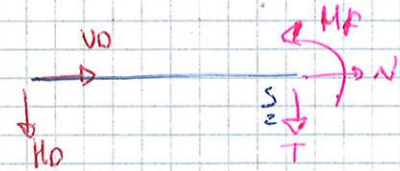
$T = q \frac{\sqrt{2}}{2} x - VB \frac{\sqrt{2}}{2}$

$N = \begin{cases} -7.5\sqrt{2} N & x=0 \\ 7.5\sqrt{2} N & x=l \end{cases}$

$T = \begin{cases} -7.5\sqrt{2} N & x=0 \\ 7.5\sqrt{2} N & x=l \end{cases}$



S2: $0 < x < a \cos \alpha$



$$\sum X = 0 \quad V_0 + N = 0$$

$$N = -V_0 = 640 \text{ N}$$

$$\sum Y = 0 \quad -H_0 - T = 0$$

$$T = -H_0 = 0 \text{ N}$$

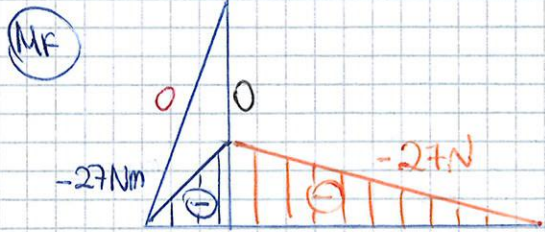
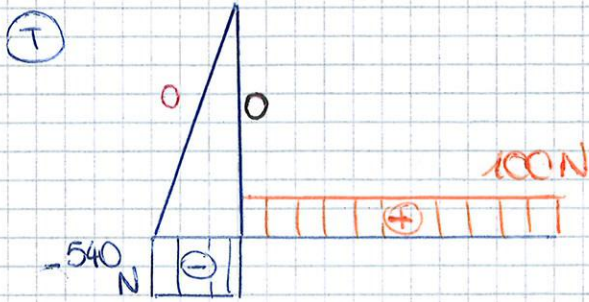
$\int_0^x S_2$

$$M_f + H_0 x = 0$$

$$M_f = -H_0 x$$

$$x = 0 : M_f = 0$$

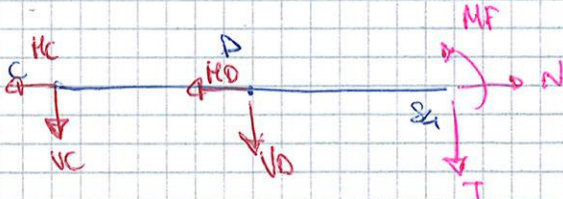
$$x = a \cos \alpha : M_f = 0$$



S3: $0 < x < b$



S1: $0 < x < c$



$$\sum X = 0 \quad N - H_c = 0$$

$$N = H_c = 91.3 \text{ N}$$

$$\sum Y = 0 \quad -V_c - T = 0$$

$$T = -V_c = -540 \text{ N}$$

$\int_0^x S_3$

$$M_f = -V_c x$$

$$x = 0 : M_f = 0$$

$$x = b : M_f = -V_c b = -27 \text{ Nm}$$

$$\sum X = 0 \quad N - H_0 - H_c = 0$$

$$N = 91.3 \text{ N}$$

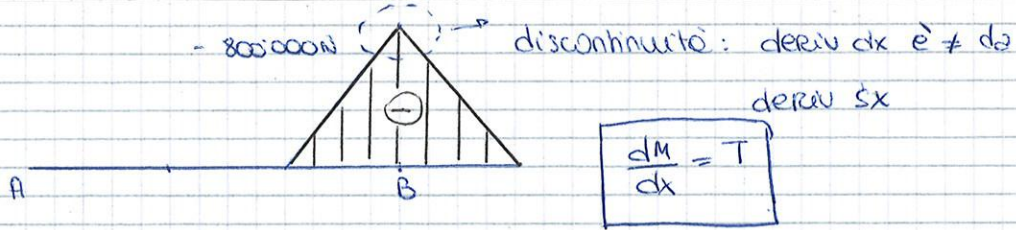
$$\sum Y = 0 \quad -T - V_0 - V_c = 0$$

$$T = 100 \text{ N}$$

$\int_0^x S_4$

$$M_f + V_0(x - b) + V_c x = 0$$

(MF)

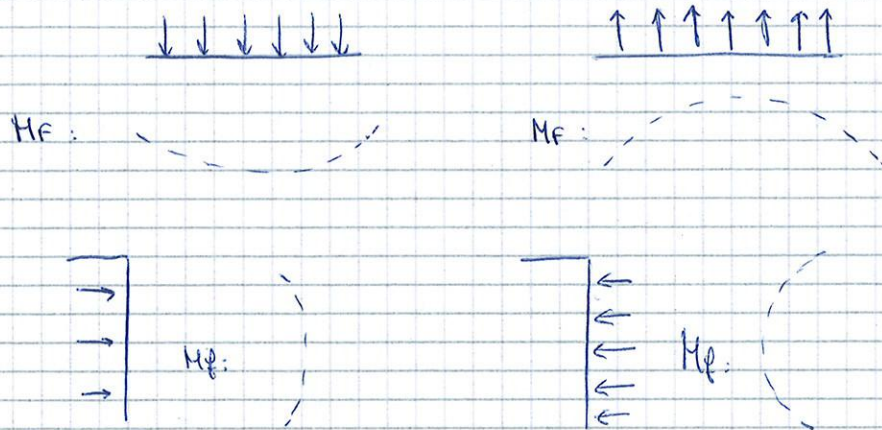


Non ci sono discontinuità sulla funzione.

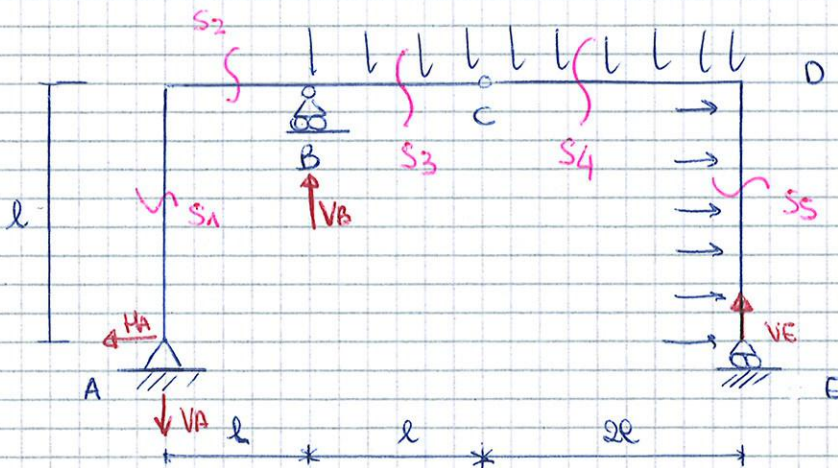
Considerazioni pratiche

$\frac{dM^2}{dx^2} = q$ Mi dice la curvatura del carico.

Se ho strutt. con carico distribuito :

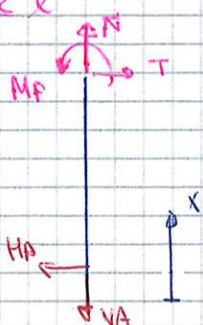


ESEMPIO : struttura a portale

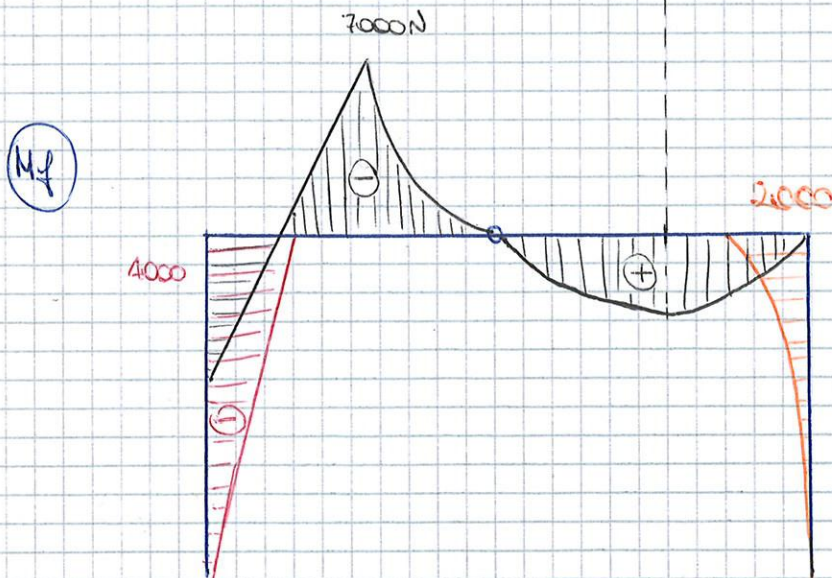
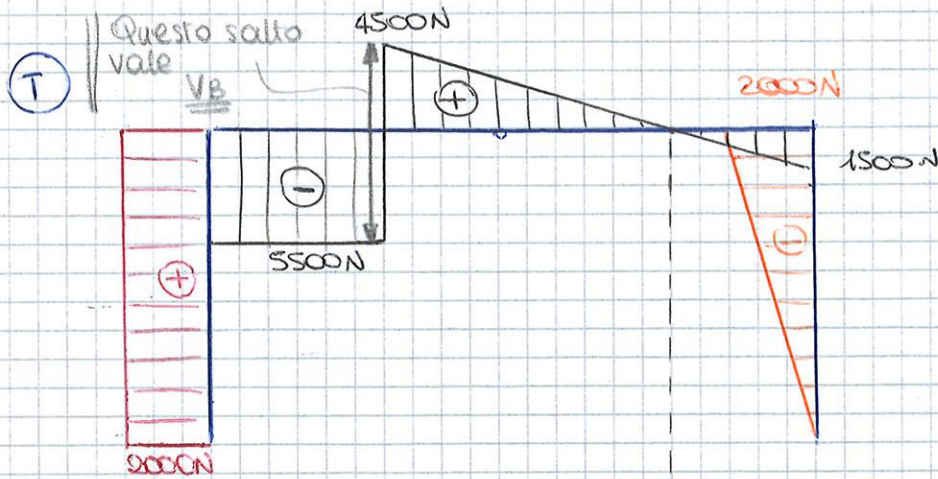
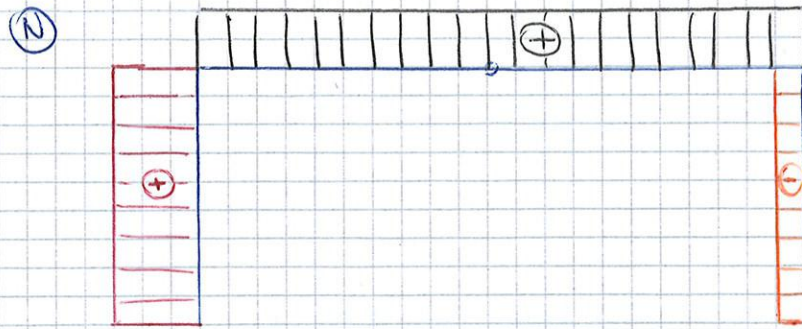


$H_C = 2000 \text{ N}$	$V_B = 10000 \text{ N}$
$V_A = 5500 \text{ N}$	$V_E = 1500 \text{ N}$
$H_A = 2000 \text{ N}$	$V_C = 2500 \text{ N}$

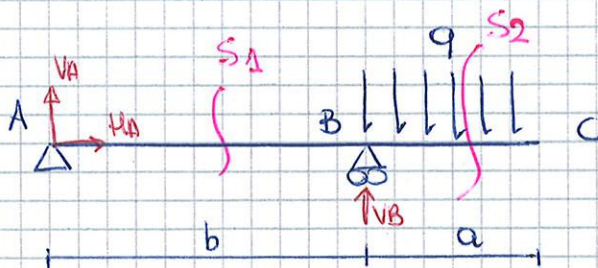
S_1 : $0 < x < l$



$N = V_A = 5500 \text{ N}$
 $T = H_A = 2000 \text{ N}$
 $M_F = H_A x$
 $x=0 \rightarrow M_F = 0$ $x=l \rightarrow M_F = 4000 \text{ N}$



ESERCIZIO



$a = 0,5m$
 $b = 1m$
 $q = 12 N/mm$

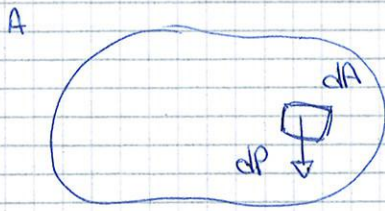
$\sum X = 0 \quad H_A = 0$

$\sum Y = 0 \quad V_A + V_B - q \cdot a = 0$

GEOMETRIA delle AREE

5/04/13

Trova deformabile:



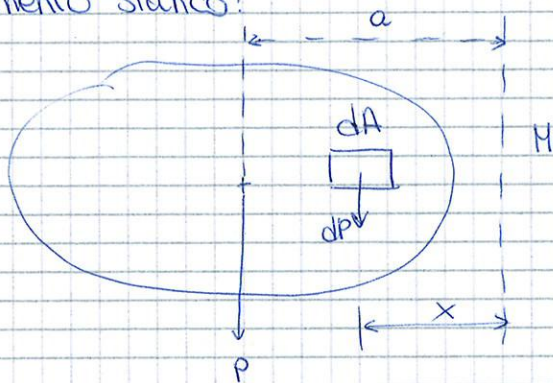
$$d\bar{P} = \bar{g}_p dA$$

$$|\bar{P}| = \int_A d\bar{P} = \bar{g}_p \int_A dA = \bar{g}_p A$$

Per determinare il baricentro e momenti statici prendiamo una sezione A.

Consideriamo una densità di area. Calcoliamo \bar{P} per unità di lunghezza \bar{g}_p di dA .

Momento statico:



$$\bar{P} \cdot a = \int_A x dP = \bar{g}_p \int_A x \cdot dA$$

Posiamo semplificare \bar{g}_p e \bar{g} costanti nel caso di un corpo omogeneo di densità costante.

MOMENTO STATICO della sezione rispetto ad un asse verticale M:

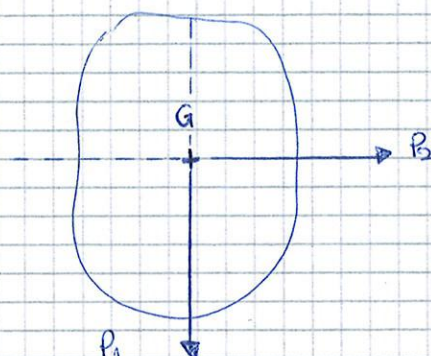
$$S = \int_A x dA$$

La distanza fra P e l'asse passante per M:

$$a = \frac{\bar{g}_p \int_A x dA}{P}$$

Esiste un p.to particolare in cui la risultante si trova & equiv. gravitazionale e annulla il braccio a.

Baricentro



Intersezione dei 2 assi
|||
BARICENTRO

$$S_x = \int_A y \, dA = \int_A y \cdot x \, dy = \int_0^h b \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot y \, dy = \frac{bh^2}{6}$$

la stessa cosa rispetto a y.

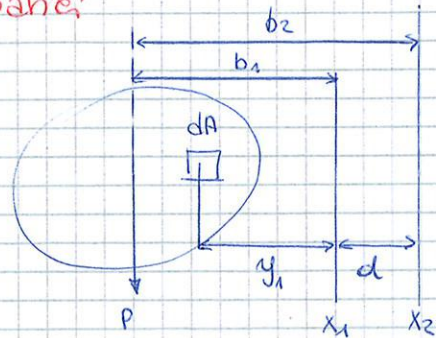
Teorema di trasposizione dei momenti statici:

$$S_1 = \int_A y_1 \, dA = A b_1$$

$$S_2 = A b_2 = A(b_1 + d) = A \cdot b_1 + A d$$

$$S_2 = S_1 + (A \cdot d)$$

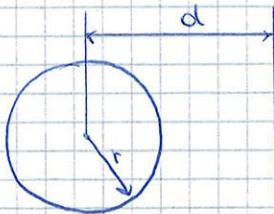
Momento statico di trasporto



Se uno dei due assi fosse baricentrico, ad es $x_1 \Rightarrow S_1 = 0$, quindi

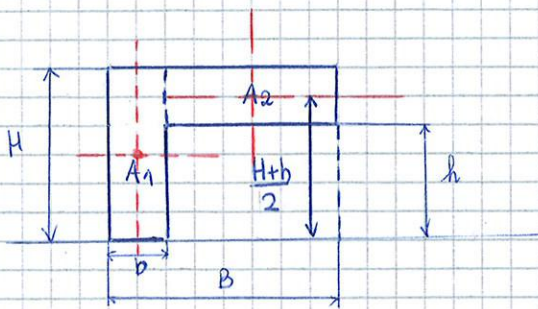
$$S_2 = A \cdot d_G$$

Sezione circolare



$$S_2 = A d_G = \pi r^2 d$$

Figure composte:

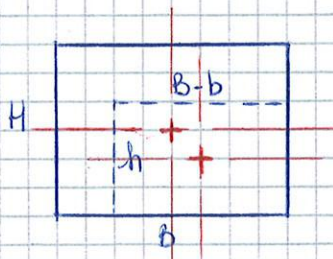


$$S = \int_A y \, dA = \int_{A_1} y \, dA + \int_{A_2} y \, dA$$

$$S = A_1 d_{G1} + A_2 d_{G2} =$$

$$= bH \frac{H}{2} + (B-b)(H-h) \frac{H+h}{2}$$

OPPURE: Secondo metodo (sottrazione)

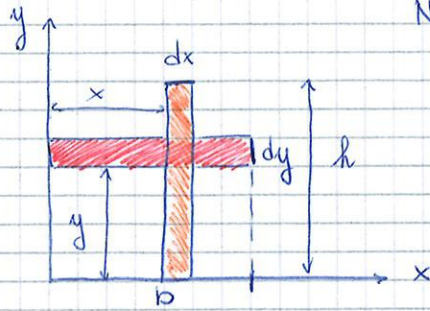


Invece di sommare gli integrali, li sottraggio

$$S = BH \frac{H}{2} - (B-b) h \frac{h}{2}$$

ES: Rettangolo

NON BARICENTRICI



$$I_x = \int_A y^2 dA \quad dA = b dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 h dx = \frac{hb^3}{3}$$

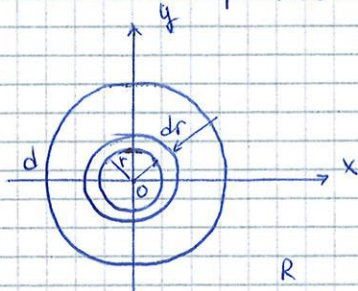
BARICENTRICI

Modifichiamo gli estremi integrali:

$$I_{x_0} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_0} = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{b^3 h}{12}$$

ES: sezione circolare piena.



$$dA = 2\pi r dr$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 (2\pi r dr) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

⊗ Per assialsimmetria

$$I_d = I_p / 2$$

$$I_d = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_p = I_x + I_y = 2 I_d$$

Tornando agli assi sfasati:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x$$

o Rispetto ad una retta qualunque:

$$d = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$I_\alpha = \int_A d^2 dA$$

$$I_\alpha = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

Valori di α per cui I_α è massimo o minimo:

$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow I_\alpha = \text{massimo o minimo}$$



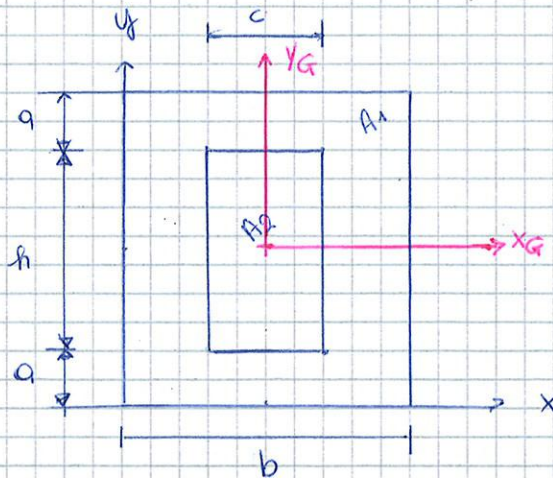
Questi sono gli assi principali.

Rispetto agli assi principali il momento centrifugo è nullo.

ESERCITAZIONE dell' 8/04/13

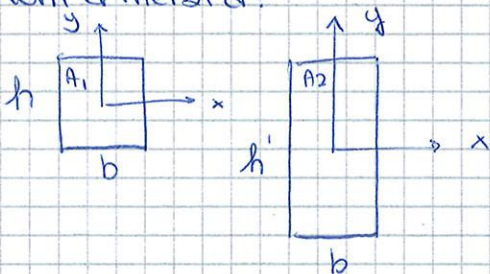
Es. 1 eserc. 4

$$\begin{cases} a = 100 \text{ mm} \\ b = 400 \text{ mm} \\ c = 100 \text{ mm} \\ h = 400 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} S_x \\ S_y \\ X_G \\ Y_G \\ J_x \\ J_y \end{cases}$$

Mom d'inerzia:



$$I_x^{A1} < I_x^{A2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$A_1 = b(h+2a) = 400(400+200) = 240 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = ch = 100 \cdot 400 = 40 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$S_{x_1} = \int_{A_1} y dA_1$$

Mom d'inerzia rispetto a G

$$I_{x_1} = \int_{A_1} y^2 dA_1 = \int_{\frac{(h+2a)}{2}}^{\frac{h+2a}{2}} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h+2a}{2}}^{\frac{h+2a}{2}} = \frac{b}{3} \left(\frac{h+2a}{2} \right)^3 + \left(\frac{h+2a}{2} \right)^3 = \frac{1}{12} b (h+2a)^3 = 7,2 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \int_{A_1} x^2 dA_1 = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 (h+2a) dx = (h+2a) \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = (h+2a) \left(\frac{b}{6} \right)^3 + \left(\frac{b}{6} \right)^3 = \frac{1}{12} b^3 (h+2a) = 3,2 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Per la sezione interna uso le formule:

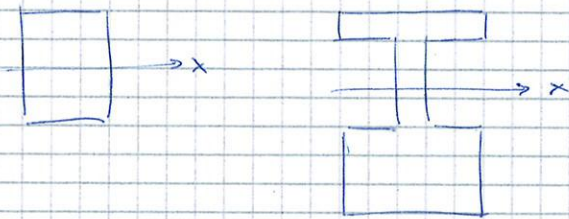
$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{ch^3}{12} = 0,536 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{b^3h}{12} - \frac{c^3h}{12} = 0,033 \cdot b^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_G} = I_{x_1} - I_{x_2} = 6,67 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

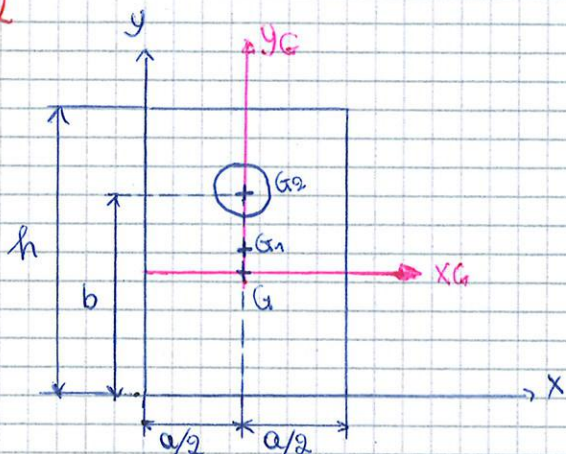
$$I_{y_G} = I_{y_1} - I_{y_2} = 3,167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Per aumentare il mom d'inerzia \Rightarrow ovviamente + la sez è grande + il mom d'inerzia è grande, ma non sempre è possibile. Anzi si cerca di trovare un'altra soluzione: allontanare la sezione il + possibile dall'asse baricentrico:



Stessa area, ma + materiale lontano dall'asse rispetto cui calcolo il momento.

Es. 2



$$\begin{cases} a = 200 \text{ mm} \\ b = 250 \text{ mm} \\ h = 400 \text{ mm} \\ d = 40 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x \\ S_y \\ X_G \\ Y_G \\ I_{x_1} \\ I_{y_1} \end{cases}$$

$$A_1 = ah = 80 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 1257 \text{ mm}^2$$

$$G_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right) \quad G_2 = \left(\frac{a}{2}, b \right)$$

$$S_{ix} = y_{G_2} A_1 = 16 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$S_{iy} = x_{G_2} A_1 = 8 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$S_{x_1} = y_{G_1} A_1 = 25 \cdot 5000 = 125 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_{y_1} = x_{G_1} A_1 = 0 \cdot 5000 = 0 \text{ mm}^3$$

y è un asse baricentrico

$$S_{x_2} = y_{G_2} A_2 = 91 \cdot 125 \text{ mm}^3$$

$$S_{y_2} = x_{G_2} A_2 = 0 \text{ mm}^3$$

$$S_x = S_{x_1} - S_{x_2} = 33875 \text{ mm}^3$$

$$S_y = 0 \text{ mm}^3$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 0$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 35,7 \text{ mm}$$

$$(I_{x_G})_1 = \underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{I_{x_{G_1}}} + (y_{G_1} - y_G)^2 A_1 = \frac{100 \cdot 50^3}{12} (25 - 35,7)^2 \cdot 5000 = 1,61 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(I_{y_G})_1 = \underbrace{\frac{b^3h}{12}}_{I_{y_{G_1}}} + \underbrace{(x_{G_1} - x_G)^2}_{0} A_1 = 4,17 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

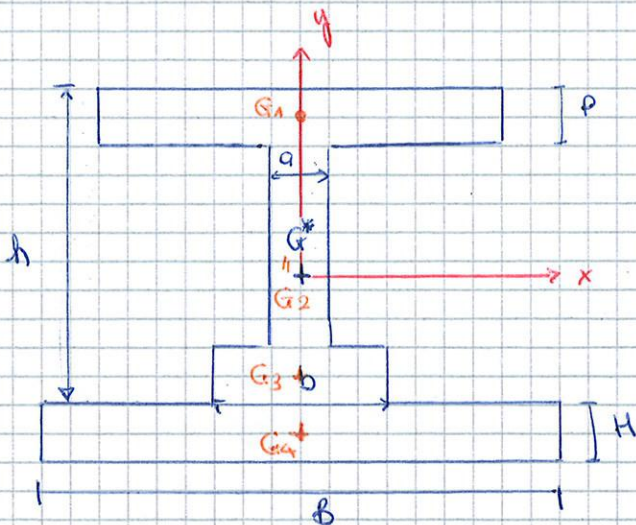
$$(I_{x_G})_2 = I_{x_{G_2}} + (y_{G_2} - y_G)^2 A_2 = \frac{(b-2s)(h-s)^3}{12} + (y_{G_2} - y_G)^2 A_2 = 39 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(I_{y_G})_2 = I_{y_{G_2}} + (x_{G_2} - x_G)^2 A_2 = \frac{(b-2s)^3(h-s)}{12} + (x_{G_2} - x_G)^2 A_2 = 2,73 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_G} = (I_{x_G})_1 - (I_{x_G})_2 = 225 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_G} = (I_{y_G})_1 - (I_{y_G})_2 = 1,432 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

ES:



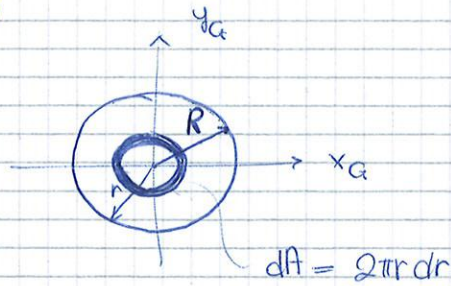
$$x_{G_1} = \dots = x_{G_4} = 0$$

$$y_{G_1} = -\frac{h}{2} + \frac{p}{2} = -47,5 \text{ mm}$$

MOMENTO D'INERZIA di un CERCHIO

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$



$$I_x + I_y = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

equazione cerchio:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$I_p = I_x + I_y = \int_A r^2 dA \quad \text{momento d'inerzia polare}$$

$$I_p = \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

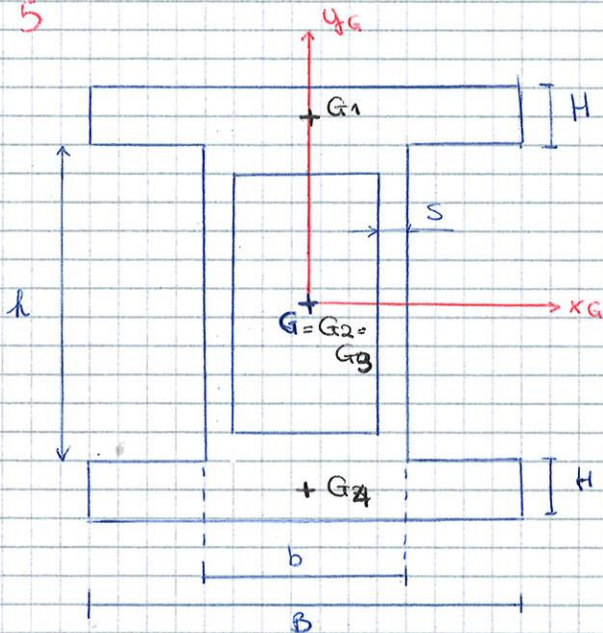
$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Con il diametro

$$I_d = I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

Es. 5



$$h = 200 \text{ mm}$$

$$H = 20 \text{ mm}$$

$$G_1 = \left(0, \frac{h}{2} + \frac{H}{2} \right) = (0, 110 \text{ mm})$$

$$G_2 = G_3 = G = (0, 0) = (0, 0 \text{ mm})$$

$$G_4 = \left(0, -\frac{h}{2} + \frac{H}{2} \right) = (0, -110 \text{ mm})$$

$$A_1 = BH = 4800 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 4800 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = b \cdot h = 2400 \text{ mm}^2$$

$$A_4 = (b - 2s)(h - 2s) = 1800 \text{ mm}^2$$

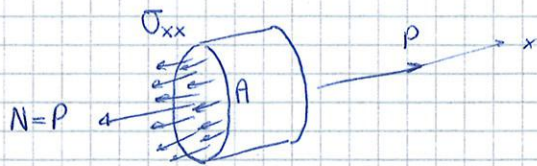
SOLECCITAZIONI SEMPLICI

Trazione e compressione



- Sforzo normale (N)
- Sforzo di taglio (T)
- Momento torcente (M)
- Momento flettente (M_y, M_z)

Tensione unitaria - Tensioni interne



Tensione unitaria interna = valore del carico per unità di superficie = σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

Che cosa accade in trazione e compressione?

Se la trave è uniforme, sottoposta a trazione, le fibre subiscono un identico allungamento, cioè le sezioni rimangono rette e //.

Tensione σ_{xx} \Rightarrow il doppio pedice:

- 1° • direzione della tensione
- 2° • direzione della normale della sezione rispetto alla quale la tensione è calcolata.

Quanto vale numericamente? \int l'integrale di tutte le forze sulla sezione:

$$\int \sigma_{xx} dA = N$$

Se sono uniformi:

$$\sigma_{xx} \int dA = N$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

Dimensionalmente: $[\sigma_{xx}] = N/mm^2$

Se abbiamo variazione brusca della trave \Rightarrow dobbiamo tener conto delle discontinuità.

Lavoro di deformazione

Molla: lavoro che mi può restituire energia.

Qualunque sia il sito, con cui è il materiale si deforma
lavoro di deformazione \rightarrow integrale: Se calcoliamo prima il

calcoliamo l'area $\triangle L = \frac{1}{2} P \Delta l$ sostituendo Δl Lavoro infinitesimo:
 $\Delta l = \bar{P} d(\Delta l)$
del triangolo sotto
il grafico $L = \frac{P^2 l}{2EA}$

Possiamo sfruttare le precedenti formule:

$$L = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} \underbrace{V}_{\text{volume}} = \frac{1}{2} \sigma_{xx}^2 \frac{1}{E} V = \frac{1}{2} \epsilon_{xx}^2 EV$$

Lavoro x unità di volume:

$$L_v = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xx}^2}{E} = \frac{1}{2} \epsilon_{xx}^2 E$$

Determinazione dei limiti ammissibili. Prova di trazione

Prove \rightarrow distruttive (1)

\hookrightarrow non distruttive (2)

(1) Determinato un provino viene portato a rottura. Rotto, si possono determinare dei parametri.

(2) - Non portato a rottura il provino.

PROVA DI TRAZIONE

• Provino sollecitato in modo tale che i risultati siano estendibili ad ogni tipo di struttura.

Le prove di trazione sono fatte su macchine di tipo idraulico od elettromeccanico

Ovviamente sono in base a normative: UNI EN 10002 (1992)

La normativa determinerà una velocità di prova che rimane tempo costante.

Macchinario:

- 5: provino tenuto da ganasce
- 8: trave fissa
- traversa superiore legata al sistema e alla parte mobile 3,
- Pistone solidale a 4.

Dobbiamo scegliere una classe di materiali in base ai parametri da poco visti:

- Tensione di rottura (σ_R, R_m)

:

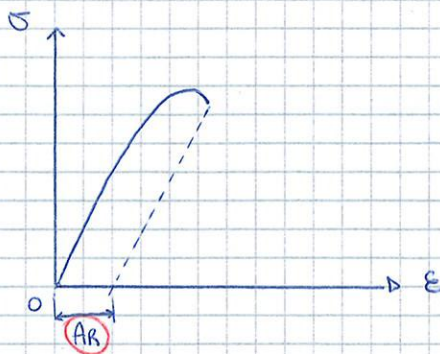
Proponiamo analisi statistica su un lotto di materiali.

Certificato \rightarrow trovo tutti i parametri di cui ho bisogno:

- E : modulo elastico
- σ_s : tensione di snervamento
- σ_R : " di rottura
- A_R : allungamento di rottura.

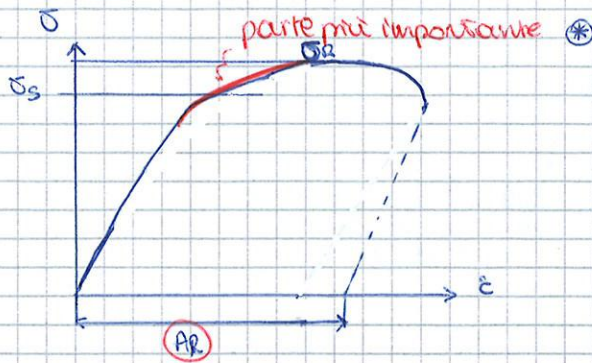
Materiali con comportamento fragile

Materiale vetroso \rightarrow la zona plastica ≈ 0 o è molto limitata



Comp. fragile quando
 $A_R < 5\%$

Comportamento plastico quando $A_R > 5\%$.



Supponiamo un tutore sottoposto ad un peso un po' imponente \rightarrow si piega irrimediabilmente, ma non si rompe.

Per ottenere una buona lavorazione plastica bisogna favorire la *

Un materiale metallico duttile \rightarrow buona plasticità.

Dobbiamo rimanere sotto la soglia di σ_s , per non perdere funzionalità dell'oggetto.

Dobbiamo stimare il carico che ci sarà sull'oggetto \rightarrow studi statistici, ma poi la realtà magari è \neq \rightarrow sovraccarico. Da qui avvengono i cedimenti.

Se uso un materiale duttile \rightarrow l'oggetto lo butto, ma non si spezza di schianto e non fa danni allo x soma (si piega, ma non si rompe).

La tensione di deformazione è definita dal p.to di vista "ingegneristico" \rightarrow

Proprietà meccaniche:

→ Resistenza (σ, ϵ)

→ durezza: parametro superficiale in dipendenza dalla temperatura (durometro)

→ duttilità o tenacità: pendolo di Charpy.

* ACCIAIO

Differenza "grossolana" del tenore di C + normative.

→ ac. non legati

→ ac. legati

→ ac. legati con tempra

* ACCIAIO INOSSIDABILE

I materiali che devono essere inseriti nel corpo devono essere inox.

Hanno un film di ossido di berillio/molibdeno

* LEGHE di ALUMINIO

Al - Cu : AVIONAL

Al - Zn : ERGAL

* LEGHE di TITANIO

Biocompatibile (no proprietà magnetiche, no ossidabile)

Un acciaio ha comportamento elastico uguale a tutti indipendentemente dai leganti

$$\downarrow 2.1 \cdot 10^5$$

↳ influiscono sulle resistenze

Modulo di Poisson è sempre uguale ($\approx 0,3$)

La densità è uguale x tutti (i leganti non influiscono)

$$\hookrightarrow 7800 \text{ kg/m}^3$$

Acciaio da costruzione $\rightarrow 360 \text{ MPa}$

Acciaio speciale x molle $\rightarrow 2000 \text{ MPa}$

Leghe:

Leghe d'alluminio $\rightarrow E$ non cambia = $\frac{1}{3}$ dell'acciaio

Densità $\rightarrow \frac{1}{3}$ dell'acciaio.

Il legante influisce sulle resistenze

Tutti i materiali, no, non sono metallici \rightarrow MATERIALI PLASTICI

\rightarrow

TENSIONE AMMISSIBILE e COEFF di SICUREZZA

12/04/13

Dobbiamo confrontare i dati ottenuti con i dati calcolati con le formule.

I risultati di resistenza sono noti in modo statistico

È necessario introdurre un coeff. di sicurezza

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_L}{S}$$

\downarrow
 tensione di sicurezza

\swarrow carico limite
 \searrow coeff. di sicurezza, > 1

Per materiali duttili: il limite di snervamento σ_s :

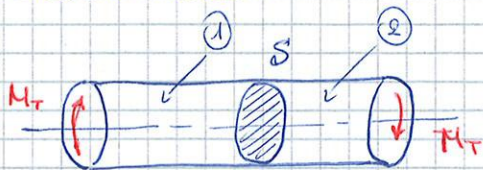
$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{S}$$

Per materiali fragili: carico limite = limite di rottura:

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_e}{S}$$

TORSIONE

Torsione di sezione circolare:

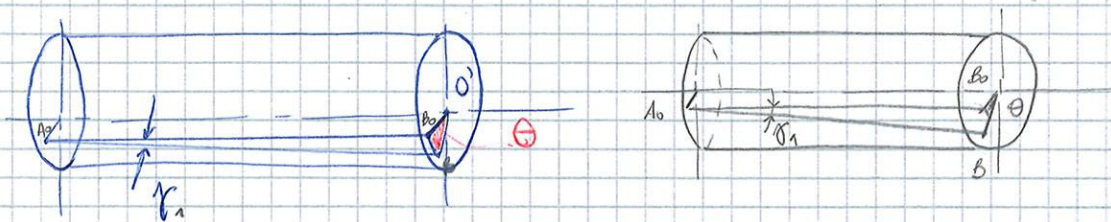


La struttura ruota intorno al suo asse mantenendo le sezioni piane.

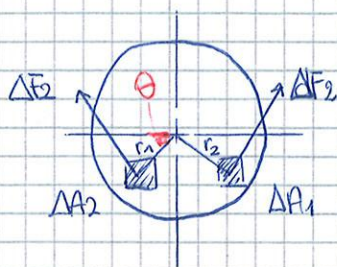
M_T determina scivolamento sul piano delle sezioni \Rightarrow produce **TENSIONI TANGENZIALI**

1 e 2 rimangono in equilibrio

Immaginiamo che le sezioni si modifichino in modo molto evidente:



Posso considerare



H₀: angoli piccoli:

$$\tan \gamma_1 \approx \gamma_1 = \frac{B_0 B}{l}$$

Ogni p.to della sezione può ruotare intorno al centro di un angolo θ rispetto alla sezione adiacente:

$$B_0 B = r_1 \theta$$

Quindi:

$$\gamma_1 = r_1 \frac{\theta}{l}$$

Dal p.to di vista del materiale: Legge di Hooke

$$\tau = G \gamma$$

\downarrow tensione \downarrow modulo di elasticità tangenziale \rightarrow scorrimento

In particolari casi di materiali omogenei e isotropi:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

leghiamo G al modulo di Poisson

Dal p.to di vista delle forze \rightarrow tangenziale rispetto al raggio e produce una quota di momento

$$\Delta F_1 = \tau_1 \Delta A_1$$

$$\tau_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta A_1}$$

$$\tau_2 = \frac{\Delta F_2}{\Delta A_2}$$

Tutti i punti potrebbero avere tensioni \neq . Allora sommiamo tutti i contributi di momento torcente:

$$\tau_1 \Delta A_1 r_1 + \tau_2 \Delta A_2 r_2 + \dots = M_t$$

$$\int_A \tau r dA = M_t$$

In generale:

$$\tau = G r \frac{\theta}{l}$$

Se sostituiamo nell'equazione di equilibrio:

$$G \frac{\theta}{l} \int_A r^2 dA = M_t$$

θ è l'unica incognita

momento d'inerzia polare della sezione

Sezione circolare piena:

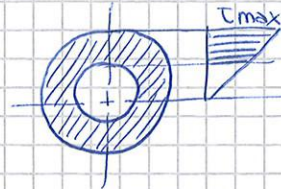
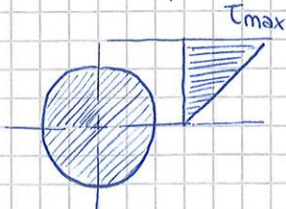
$$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$$

Sezione circolare cava:

$$W_t = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Per disegnare l'andamento τ sulla sezione ci sono \neq metodi. Però usiamo:

- τ disegnate sulla sezione
- τ riportate fuori dalla sezione.



Per ciascuna sollecitazione definiamo il lavoro:

$$L = \frac{1}{2} M_t \theta$$

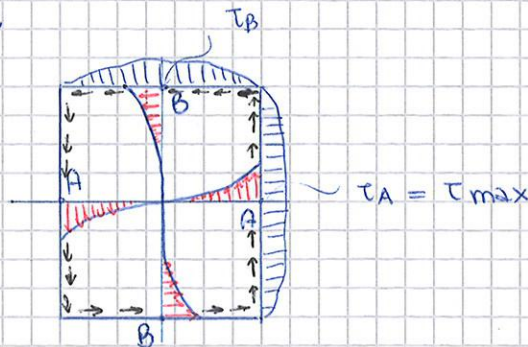
$$L = \frac{1}{2} \frac{G J_p \theta^2}{l}$$

TORSIONI IN TRAVI A SEZIONE RETTANGOLARE

le sezioni non rimangono piane !! Si ingobbano.

Allora dobbiamo usare un'analogia (metodo indiretto).

Supponiamo di prendere un recipiente con un liquido. La sezione del recipiente sarà uguale al liquido e quindi valutiamo τ nel liquido invece che nel materiale.



$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_t}{ab^2}$$

fattore di forma che dipende da quanto la sezione è allungata

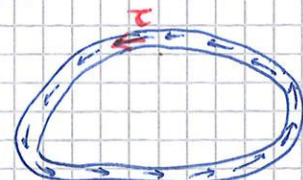
$$\theta_u = \beta \frac{M_t}{G a b^3}$$

α, β = fattori di forma

TORSIONI IN TRAVI CON SEZIONE ANULARE di PICCOLO SPESSORE

h_p : tensioni tangenziali approssimabili ad un valore cost pari al valor medio della tensione in corrispondenza della linea mediana tra bordo interno ed esterno della parete.

domanda di teoria



Più piccola è la sezione, più è grande $\tau \Rightarrow$ punto più debole!

$T =$ parametro locale puntuale. Θ invece è cumulativo, integrale = quanto ruoto la torsione

$$\Theta_u = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{S_i}$$

$$= \frac{M_t}{4G\Omega^2} \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} + \frac{l_3}{S_3} + \frac{l_4}{S_4} \right)$$

Riassumendo

Caratteristiche di sollecitazione:

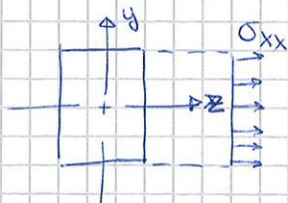
- \rightarrow trazione: σ (N)
- \rightarrow torsione: τ (M_x)
- \rightarrow flessione: σ (M_y, M_z)
- \rightarrow taglio: τ (T)

TRAZIONE

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad \epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \text{ (Hooke)}$$

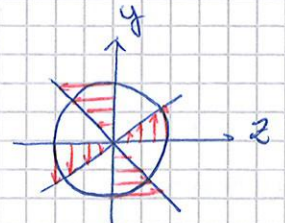
$$\Delta l = \left(\frac{l}{EA} \right) P$$



TORSIONE

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p}$$

$$\Theta = \frac{M_t l}{G J_p}$$



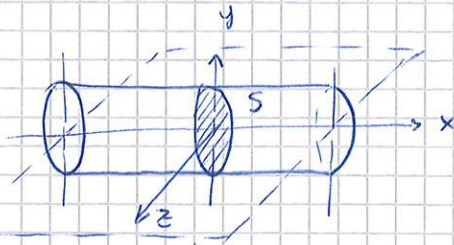
FLESSIONE

Raramente ho solo momento flettente \Rightarrow c'è sempre T.

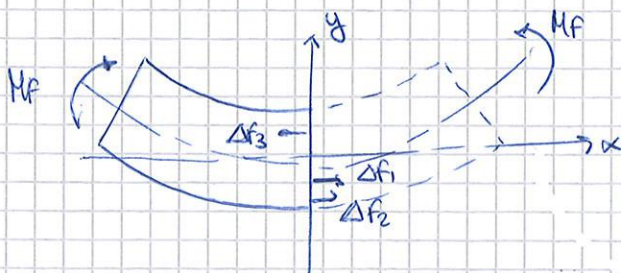
Flessione pura $\rightarrow M_f$

Flessione semplice $\rightarrow M_f + T$

Ora supponiamo che M_f sia cost in modo tale da non avere T.



Trave deformata:



$$M_f > 0$$

In flessione trave si dispone in configurazione deformata \rightarrow linea elastica.

TESA = zona convessa \rightarrow tensione > 0

COMPRESSA = zona concava \rightarrow " < 0

ASSE NEUTRO \rightarrow tensione nulla

" Asse z della sezione

Per definizione:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta e_1}{e}$$

$$\frac{R + \Delta e_1}{e} = \frac{R - y_1}{R}$$

$$\epsilon_1 = - \frac{y_1}{R}$$

In generale:

$$\epsilon = - \frac{y}{R}$$

A Δ della torsione non abbiamo grosse hp.

Abbiamo scritto l'equilibrio con 2 formule che siamo nello spazio e poi abbiamo calcolato le deformazioni.

Dalla legge di Hooke ($\sigma = E\epsilon$) e dalle formule di eq:

$$\frac{E}{R} \int_A y dA = 0 \quad \text{Asse neutro deve essere baricentrico}$$

Momento statico rispetto ad un asse baricentrico = 0 \rightarrow Ok!

$$\frac{E}{R} \int_A y^2 dA = M$$

\hookrightarrow Momento d'inerzia della sezione: J_z
baricentrico

Il legame sarà:

$$\frac{EJ_z}{R} = M \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ_z}$$

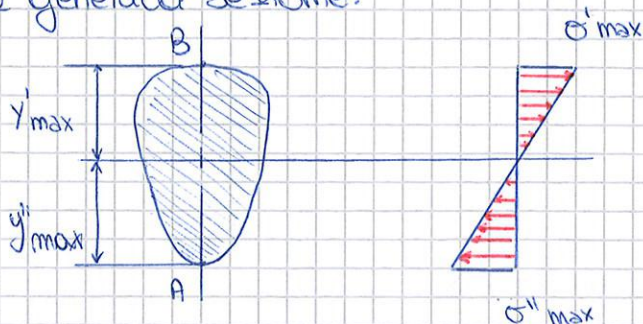
Rigidità flessionale

$$k = EJ_z$$

Sostituiamo $\frac{1}{R}$ in $\sigma = - \frac{Ey}{R}$, otteniamo:

$$\sigma = - \frac{M_z y}{J_z}$$

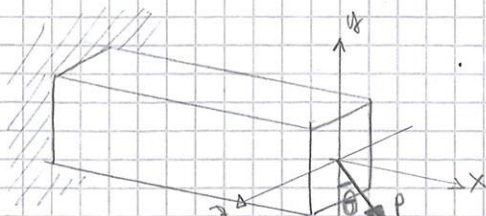
Con una generica sezione:



$$\sigma'_{\max} = \frac{M y'_{\max}}{J_z}$$

$$\sigma''_{\max} = \frac{M y''_{\max}}{J_z}$$

Flessione deviata nelle travi

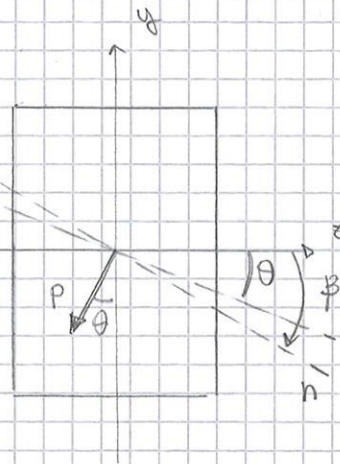


$$M_z = -P x \cos \theta$$

$$M_y = -P x \sin \theta$$

Quando M_f non è allineato con uno degli assi principali

↓
Flessione deviata



Quanto vale σ ?

$$\sigma = - \frac{M_z y}{J_z}$$

rispetto a z

$$\sigma = - \frac{M_y z}{J_y}$$

rispetto a y

Posso accumulare tutte flessioni rispetto ai due momenti.

ASSE NEUTRO = luogo dei p.h. della sezione in cui σ_x è zero.

$$- \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} = 0$$

$$\text{tg } \beta = \frac{y}{z} = - \frac{M_y J_z}{M_z J_y}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{M_y}{M_z}$$

$$\text{tg } \beta = - \text{tg } \theta \frac{J_z}{J_y}$$

angolo di inclinazione dell'asse neutro

angolo di inclinazione della sezione

domanda esame

La trave si flette NON secondo P, ma è deviata di un certo angolo β che dipende dal rapporto dei momenti.

In sezioni quadrate /

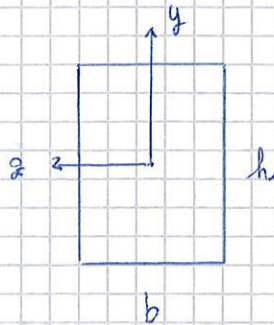
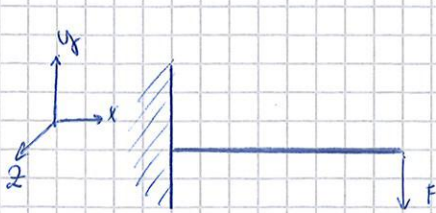
$$\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow \beta = \theta$$

Centro non // agli assi \rightarrow flessione sfasata.

$$\Delta e = \epsilon \cdot l = -1,27 \text{ mm}$$

$$S = \frac{\sigma_s}{\sigma_N} = 1,5 \quad \text{Il coeff. di sicurezza deve essere sempre positivo.}$$

ES. 2



$$b = 60 \text{ mm}$$

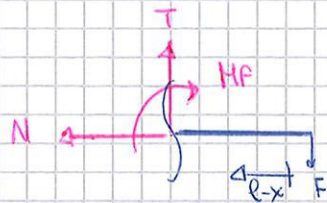
$$h = 100 \text{ mm}$$

$$\sigma_s = 300 \text{ MPa}$$

$$F = 36 \text{ kN}$$

$$l = 500 \text{ mm}$$

c'è una parte + sollecitata.



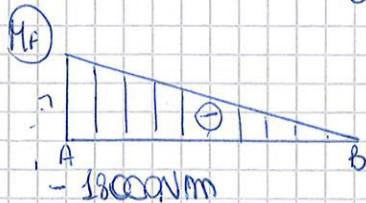
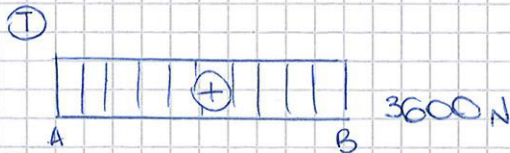
$$T = F = 36 \text{ kN}$$

$$N = 0$$

$$\sum M_f + F(l-x) = 0$$

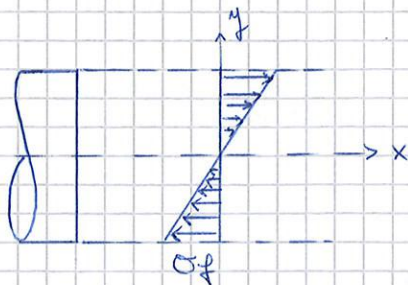
$$M_f = F(x-l)$$

$$\begin{cases} x=0: -Fe \\ x=l: 0 \end{cases}$$



Non consideriamo T

Sezione più sollecitata \rightarrow sezione (A)



Sollecitata lungo B

$$\sigma_f = \frac{M_z}{I_z} y \Rightarrow \quad I_z = \frac{bh^3}{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

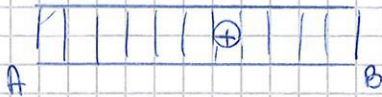
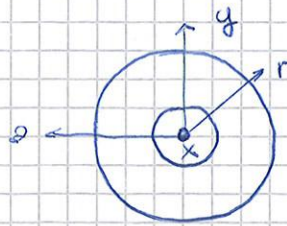
$$\sigma_f = \frac{-18000 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} \cdot y \Rightarrow \quad \sigma_f^{\max} \Rightarrow y = \pm y_{\max} = \pm \frac{h}{2} = \pm 50 \text{ mm}$$

$$\sigma_f^{\max} = \frac{-18000 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} (\pm 50) = \pm 180 \text{ MPa}$$

Variazione



$$M_x = 7 \text{ kNm}$$



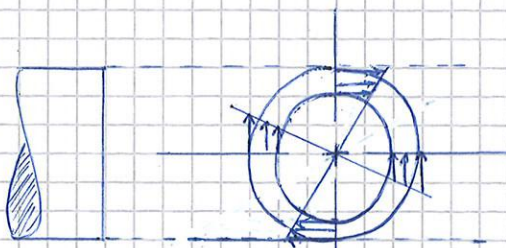
I_p = mom d'inerzia rispetto all'asse x uscente dal picco =

$$= \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (60^4 - 10^4) = 1271363 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} r$$

$$W_x = \frac{I_p}{D/2} = \frac{1271363}{30 \text{ mm}} = 42378,8 \text{ mm}^3$$

↳ modulo di resistenza a torsione



Ambiente delle r lineari

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p} r_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{7000 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{42378,8 \text{ mm}^3} = 165,2 \text{ N/mm}^2 = \text{MPa}$$

↳ può essere solo positivo

Modulo di elasticità tangenziale:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210}{2(1+0,3)} = 80,77 \text{ GPa}$$

Angolo di torsione Θ :

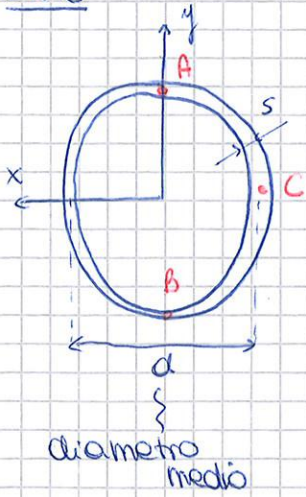
$$\Theta = \frac{M_x l}{G I_p} = 0,0273 \text{ rad}$$

Angolo di torsione nella mazzaria:

$$\Theta_u = \frac{M_x l}{2G I_p}$$

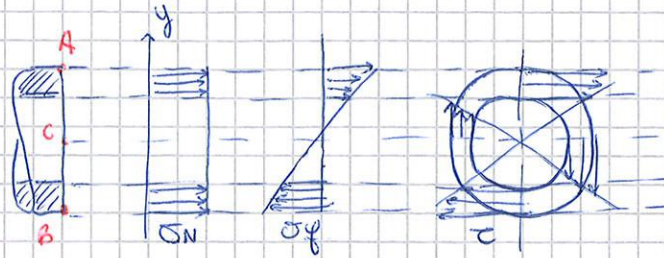
→

ES. 6



$$\left\{ \begin{array}{ll} d = 40 \text{ mm} & N = 10.000 \text{ N} \\ s = 2 \text{ mm} & M_z = 200 \text{ Nm} \\ E = 210 \text{ GPa} & M_x = 130 \text{ Nm} \\ \nu = 0,3 \end{array} \right.$$

Possiamo applicare le hp dello spessore sottile.
 ↳ Parete sottile



$$\Omega = \text{area racchiusa nella sezione media} = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{40^2}{4} = 1256,6 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{*} A = \text{area anello che costituisce la parete} = (2\pi r) s = 2\pi \frac{d}{2} s = 251,33 \text{ mm}^2$$

$$I_z = \frac{\pi (d+s)^4}{64} - \frac{\pi (d-s)^4}{64} = 50391,15 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{*} \text{ Per il calcolo di } \sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{10.000 \text{ N}}{251,33 \text{ mm}^2} = 39,79 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_f = \frac{M_z}{I_z} y \Rightarrow \sigma_f^{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \left(\pm \frac{d+s}{2} \right) = \pm 83,35 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_x}{2 \cdot \Omega \cdot s} = 25,86 \text{ MPa}, \quad \text{Formula di Bredt} \rightarrow \times \text{ approssimazione } \tau \text{ è cost.}$$

$$\Theta = \frac{M_x}{4 G \Omega^2} \frac{1}{s} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80,77 \text{ GPa}$$

$$\Theta = \frac{130 \cdot 10^3}{4 \cdot 80,77 \cdot (1256,6)^2} \cdot \frac{1}{2} = 1,274 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

Considerando i **p.ti rossi** dobbiamo calcolare le sollecitazioni proprie di:

A: $\sigma_A = \sigma_N + \sigma_f$ $\tau_A = \tau$
 $\sigma_A = 39,79 + 83,35 = 123,14 \text{ MPa}$ $\tau_A = 25,86 \text{ MPa}$

B: $\sigma_B = \sigma_N + \sigma_f$ $\tau_B = \tau$
 $\sigma_B = 39,79 - 83,35 = -43,56 \text{ MPa}$ $\tau_B = 25,86 \text{ MPa}$

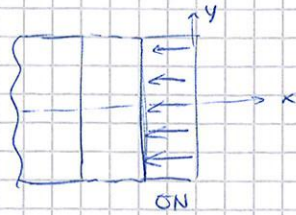
C: $\sigma_C = \sigma_N + \sigma_f$ $\tau_C = \tau$
 $\sigma_C = 39,79 + 0 = 39,79 \text{ MPa}$ $\tau_C = 25,86 \text{ MPa}$
↳ corrispondenza asse neutro

$$(I_{zG})_2 = I_{zG_2} + (y_{G_2} - y_G)^2 A_2 = \frac{SH^3}{12} + (y_{G_2} - y_G)^2 A_2 = 480 \cdot 356 \text{ mm}^4$$

$$I_{zG} = (I_{zG})_1 + (I_{zG})_2 = 656 \cdot 666,7 \text{ mm}^4 \quad \text{sezione completa}$$

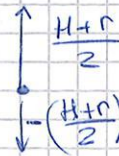
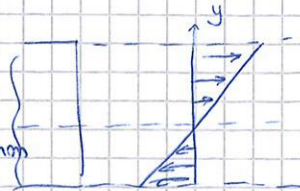
Ora prendiamo i 2 casi separati:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$



$$\sigma_f = \frac{M_F}{I_z} y$$

$$M_F = N \cdot d = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$



Ora i 2 contributi

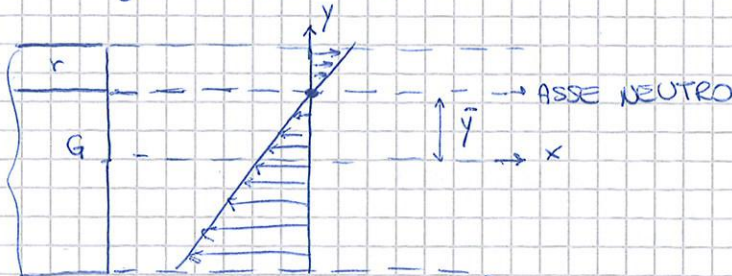
$$\sigma = \sigma_N + \sigma_f = \frac{N}{A} + \frac{M_F}{I_z} y = \frac{N}{A} + \frac{M_F}{I_z} y$$

$$h_{min} < y < h_{max} \rightarrow y = \bar{y}$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{M_F}{I_z} y = 0$$

$$y = \bar{y} = -\frac{N}{A} \frac{I_z}{M_F} \rightarrow \text{ASSE NEUTRO}$$

$$\bar{y} = 21,03 \text{ mm}$$



SOLLECITAZIONI SEMPLICI

24/04/13

Trazione $\Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$

Torsione $\Rightarrow \tau = \frac{M_T}{J_P} \cdot r$

Flessione $\Rightarrow \sigma = \frac{M_Z}{J_Z} y$

TAGLIO

Taglio puro \rightarrow Momento flettente deve passare per \emptyset .

Distribuzione non uniforme \rightarrow valor medio:

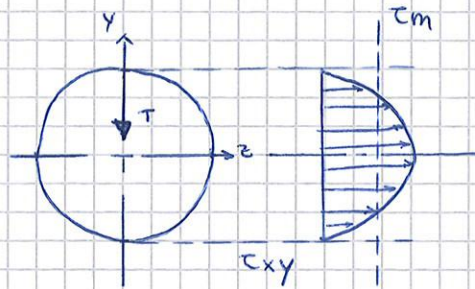
$$\tau_m = \frac{T}{A}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{2} \tau_m \quad \text{sottoshimo e sovrashimo } \tau$$

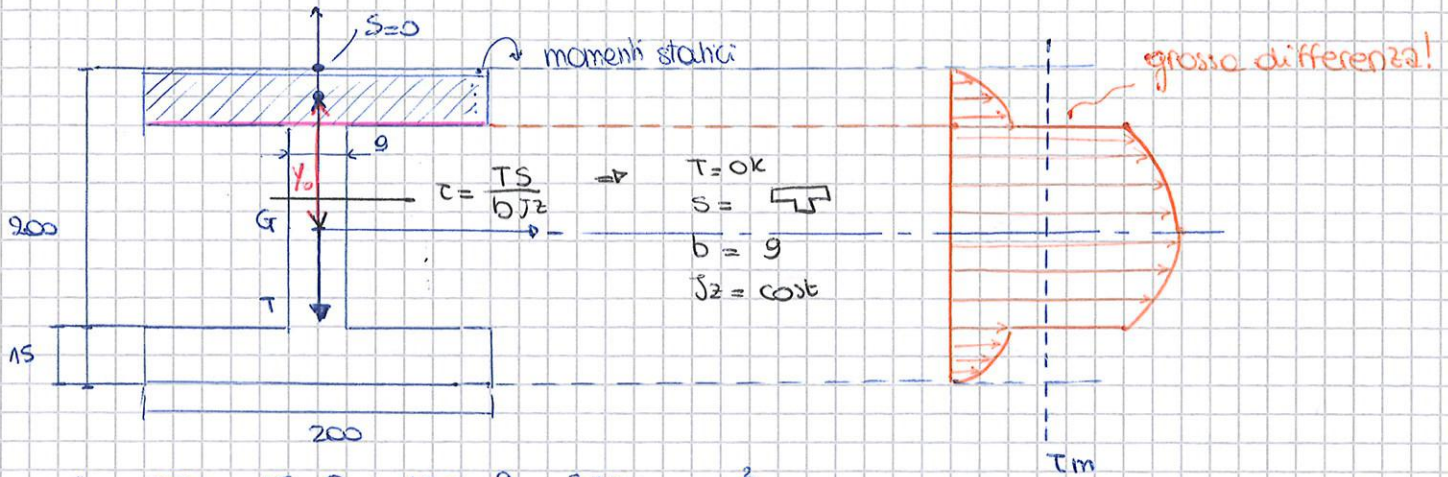
• Sezione circolare

$$S = \frac{2}{3} r^3 \quad J_z = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \tau_m$$



• Doppio T:



$$A = 200 \cdot 15 \cdot 2 + 170 \cdot 9 = 7530 \text{ mm}^2$$

$$\tau_m = \frac{T}{A} = \frac{100 \text{ kN}}{7530} = 13,3 \text{ MPa}$$

$$J_z = \{ \text{somma mom d'inerzia} \} = 55.134.750 \text{ mm}^4$$

$$S_{\text{albero}}^1 = A \cdot y_0 = 277.500 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{100.000 \cdot 277.500}{200 \cdot J_z} = 2,5 \text{ MPa}$$

Sollecitazioni semplici

- 1) Reaz. vincolari
- 2) Tracciare diagrammi di sollecitazione
- 3) Individuare sez. + sollecitate
- 4) Calcolare tensioni semplici nelle sezioni maggiormente sollecitate (N, M_f, M_t)
- 5) Individuare punto maggiormente sollecitato
- 6) Verificare lo sfuocatura nel p.to maggiormente sollecitato confrontando tensione max con quella ammissibile del materiale diviso x S (coeff. sicurezza)

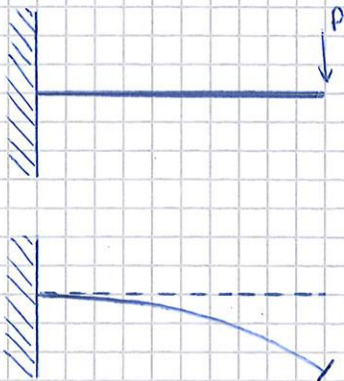
Tensione max $\sigma_N + \sigma_f + (\tau=0) = \text{tensione di progetto} = 99 \text{ MPa}$

$$99 \text{ MPa} < \sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{S} \Rightarrow \text{la struttura è verificata}$$

Schema di calcolo di progetto

- 1) Resz. vincolari
- 2) Tracciare diagrammi
- 3)

LINEA ELASTICA nelle TRAVI INFLESSE



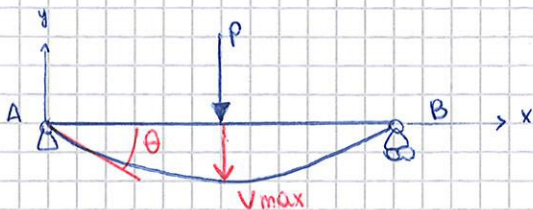
Obiettivo \rightarrow studiare linea elastica, che permette di individuare:

- 1) spostamento elastico max (freccia)
- 2) rotazione massima



x evitare interferenze che possono pregiudicare il corretto funzionamento della struttura.

Deformata di una trave

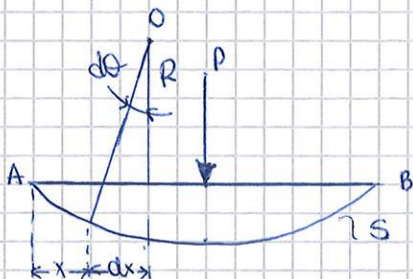


V_{max} = spostamento verticale nella direzione y , $V(x)$

Sist. riferimento: $\uparrow +$, $\downarrow +$

θ = angolo di rotazione definito in ogni sezione: $\theta(x)$

p. 156



$$R = \frac{ds}{d\theta}$$