NUMERO: 1625A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Della Ripa

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc. Prof.Mazzi

ANALISI MATEMATICA I

30-09-13

PROPOSIZIONI → VERE V / FALSE F

7 è DISPARI V   3 è PARI F

LE PROPOSIZIONI LOGICHE VENGONO LEGATI DAI CONNETTIVI LOGICI

→ NEGAZIONE

$\neg p$ [NON P]

TAB VERITÀ

p	$\neg p$
V	F
F	V

p = 7 è DISPARI V

$\neg p$ = 7 NON è DISPARI F

→ CONGIUNZIONE LOGICA

$\wedge$ [ET] (E)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p = 7 è DISPARI V

q = 7 è IRRAZIONALE F

$p \wedge q$ 7 è DISPARI e IRRAZIONALE F

→ DISGIUNZIONE LOGICA

$\vee$ [VEL] (OUT)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p = 7 è DISPARI V

q = 7 è IRRAZIONALE F

$p \vee q$ 7 è DISPARI e/o IRRAZIONALE V

→ IMPLICAZIONE LOGICA $\Rightarrow$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
		I		II

→ I e II SONO EQUIVALENTI

OS. $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$

→ QUANTIFICATORI

$\forall$ QUANTIFICATORE UNIVERSALE [PER OGNI]

$\exists$ QUANTIFICATORE ESISTENZIALE [ESISTE ALMENO UN ELEMENTO]

$\forall x \; p(x)$ → PER OGNI x, $p(x)$ È VERA

$p(x) = [x$ È UN NUMERO, $x \geq 0]$ $\forall x \in \mathbb{N} \; p(x)$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \; p(x)$ FALSA

$\exists x \in \mathbb{Z} \; p(x) = x \geq 0$ È VERA

$\exists$ ED È UNICO ($\exists!$)

ES. $P(x) = x < 7$

$\forall x \in \mathbb{N}, x < 7$ FALSO

$\exists x \in \mathbb{N}, x < 7$ VERO

COME SI NEGA

$\forall x \in \mathbb{N} \; x < 7$ È FALSA

$\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \; \neg(x < 7)$

$\neg(\forall x \; p(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \; \neg p(x))$

$\exists x \in \mathbb{N} \; x < 0$ È FALSA

$(\Leftrightarrow) \; \forall x \in \mathbb{N}, \neg(x < 0)$ CIOÈ $(x \geq 0)$

$\neg(\exists x \; p(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \; \neg p(x))$

$p(x;y) \quad p(x)$

$\forall x \exists y \; p(x,y)$?

$\exists x \forall y \; p(x;y)$

$\forall x \forall y \; p(x;y) \Longleftrightarrow \forall y \forall x \; p(x;y)$

$p(x,y) \quad x = y$

$\forall x \exists y \quad x \leq y$ VERA $\quad \exists y = x \quad \exists y = x+1$

INSIEMI

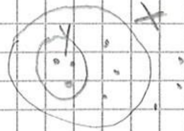
1-10-13

X INSIEMI

x ELEMENTO DELL'INSIEME

$x \in X$

$\neg(x \in X) = x \notin X$ x NON APPARTIENE A X



Y È UN SOTTINSIEME DI X SE TUTTI GLI ELEMENTI DI Y APPARTENGONO ANCHE A X

$$x \in Y \Rightarrow x \in X \qquad [Y \subseteq X] \rightarrow \text{INCLUSIONE}$$

Y È INCLUSO IN X

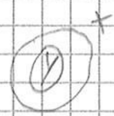
Y È UN SOTTINSIEME DI X

$X = Y$ SE HANNO GLI STESSI ELEMENTI

$x \in X \Leftrightarrow x \in Y$

$Y \subseteq X$ OPPURE $Y \subset X$

$Y \subset X \rightarrow Y \subsetneq X$



Y È UN SOTTINSIEME PROPRIO DI X

$\exists x \; x \in X \wedge x \notin Y$

Y È STRETTAMENTE INCLUSO IN X

I $X = \{1, 2, 3\}$

$\boxed{: \; / \; \text{TALE CHE}}$

$X = \{x \in A : p(x)\} = \{x \in A / p(x)\}$

II $X = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3\}$

III $X = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 4\}$

I, II, III UGUALI

$\emptyset$ = INSIEME VUOTO → PRIVO DI ELEMENTI

→ L'INSIEME DELLE PARTI DI X

$P(X) = 2^X$

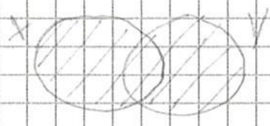
È L'INSIEME DEI SOTTINSIEMI DI X

PER OGNI X; $\emptyset \in P(X)$

$X \in P(X) \qquad X \subseteq X$

ES.

→ **UNIONE**



$$X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$$

ES. $X = \{1, 2, 3\}$

$Y = \{m \in \mathbb{N} : m$ è pari$\}$

$X \cup Y = \{1, 3, m$ pari$\}$

$X \cup Y = Y \cup X$

$Y \cap X = X \cap Y$

INVECE

$X \setminus Y \neq Y \setminus X$

→ **DIFFERENZA INSIEMISTICA**

$X \setminus Y$

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$$

$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$

$C_X Y = X - Y$ con $Y \subseteq X$

→ **DIFFERENZA SIMMETRICA**

$$X \Delta Y = X \setminus Y \cup Y \setminus X = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

PROPRIETÀ BOOLEANE

con $A \in X$

$\boxed{A \cap (C_X A) = \emptyset}$ $\boxed{A \cup (C_X A) = X}$

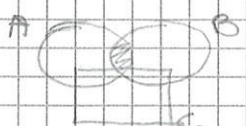
xké non hanno elementi in comune (disgiunti)

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

$A \cap B = B \cap A$ COMMUTATIVA $A \cup B = B \cup A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ASSOCIATIVA $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ } DISTRIBUTIVA



LEGGI DI MORGAN

→ PRODOTTO

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ BINARIO INTERNO

① COMMUTATIVA

$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \cdot m = m \cdot n$

② ASSOCIATIVA

$\forall n, m, p \in \mathbb{N} \quad (n \cdot m)\, p = n(m \cdot p)$

③ $\exists u \; \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \quad n \cdot u = n$ QUINDI $u = 1$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

$\forall n, m, p \in \mathbb{N}$

$m(n+p) = m \cdot n + m \cdot p$

Prop. $\forall m \in \mathbb{N}, \; m \cdot 0 = 0$

dim. $\forall p \in \mathbb{N}, \; p \neq 0$

$$\underset{\displaystyle m \cdot 0}{m(p-p)} = m \cdot p + m(-p) = m \cdot p - mp = 0$$

④ $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \; \exists m \in \mathbb{N}$ INVERSO MOLTIPLICATIVO

In $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ $\nexists$ INVERSO MOLTIPLICATIVO $\{*\}$

→ $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3\}$

→ SOMMA

VIENE SODDISFATTA ANCHE LA ④ DELLA SOMMA IN $\mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{Z} \; \exists n' \in \mathbb{Z} \quad n + n' = 0$

n' OPPOSTO DI $n \to n' = -n$

ESTENDO ALL'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI

$\frac{1}{n} \quad n \neq 0$

$\frac{1}{n}$ È TALE CHE $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ RECIPROCO

$*$

$d^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ È PARI

OSS.: SE UN QUADRATO DI UN NUMERO È PARI ALLORA ANCHE IL NUMERO È PARI

$m^2 = 2n^2$ SE $m = K \cdot K = (2h) \cdot (2h) = 2^2 \cdot h^2$

SE K È PARI $m = K^2$ È PARI

SE K È DISPARI $m.K = 2h+1$

$m = K \cdot K = (2h+1)^2 = \underbrace{4h^2 + 4h}_{\text{PARI}} + 1 =$ DISPARI

SE $m^2 = 2n$ È PARI $\Rightarrow m$ È PARI

$m = 2h$

$m^2 = (2h)^2 = 4h^2 = 2n^2$

$\Rightarrow 2h^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ È PARI $\Rightarrow n$ È PARI

m È PARI E n È PARI $\Rightarrow$ m E n HANNO UN FATTORE IN COMUNE (2)

$d^2 = 2$ QUINDI $d \in \mathbb{Q}$ $\boxed{d = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

$\boxed{\mathbb{R}}$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

+ ; · VENGONO ESTESI A $\mathbb{R}$ CONSERVANDO LE PROPRIETÀ IN $\mathbb{Q}$

→ ORDINAMENTO DI $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$

$\mathbb{Q}_- = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$

$x > y \iff x - y > 0$

$x \geq y \iff x - y \geq 0$

→ PROPRIETÀ (RELAZIONE D'ORDINE)

① $\forall x \in \mathbb{Q}$ $x \geq x$ RIFLESSIVA

② $x, y \in \mathbb{Q}$

$x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$ ANTISIMMETRICA

③ $x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$ TRANSITIVITÀ

→ COROLLARIO (ASSOCIATO AD UN TEOREMA PRECEDENTE)

$\forall a \in \mathbb{R} ; a > 0$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} ; m \cdot a > 1$

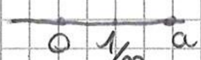
APPLICO IL TEOREMA PRECEDENTE CON $b = 1$

OSS. $m \neq 0$

→ COROLLARIO

$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{m} > a$

dim: $m \cdot a > 1$ DIVIDO PER m $a > \frac{1}{m}$



TRA a E 0 C'È SEMPRE UN NUMERO PIÙ PICCOLO DI a

VALORE ASSOLUTO O MODULO

$x \in \mathbb{R}$ $|x|$

$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $|-\pi| = \pi$ $|4| = 4$

→ PROPRIETÀ

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

SE $x > 0$ LUNGHEZZA DEL SEGMENTO $\overline{0x}$ È UGUALE A x

SE $x < 0$ LUNGHEZZA DEL SEGMENTO $\overline{0x}$ È $-x = |x|$

$|x|$ = DISTANZA DEL PUNTO x DALL'ORIGINE

$|x|$ = LUNGHEZZA DEL SEGMENTO $\overline{0x}$

SE VOGLIO CALCOLARE LA DISTANZA TRA x, y

$\overline{xy} = d(x; y)$

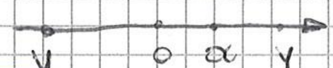
$y - x$ $\quad d(x; y) = x - y \quad d(x; y) = y - x$

PER NON VEDERE OGNI VOLTA QUALE È TRA x, y IL MAGGIORE

$d(y; x) = |y - x| = \begin{cases} y - x & \text{se } y - x \geq 0 \\ -(y - x) = x - y & \text{se } y - x < 0 \end{cases}$

① $\boxed{|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

② $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\overset{a}{x} + \overset{b}{y}| \leq |x| + |y|}$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE



$|2 - 3| = |-1| = 1$ a

$|2| + |-3| = 2 + 3 = 5$ b

③ $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|}$

INTERVALLI

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$[a, b]$ INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b

$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ INTERVALLO APERTO

$[a; b)$; $(a; b]$

→ SEMIRETTE

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b$

→ $A \subseteq \mathbb{R}$

A È SUPERIORMENTE LIMITATO SE $\exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\ \ x \leq b$

b SI DICE MAGGIORANTE DI A

ES. $A = (-5; 8)$ È SUPERIORMENTE LIMITATO

$\exists b = 50\ \forall x \in A\ \ x \leq 50$

→ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}\ \forall b \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N} : m \cdot 1 \geq b$

QUINDI NON È SUPERIORMENTE LIMITATO

→ SE $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists x \in A\ \ x > b$, A È SUPERIORMENTE ILLIMITATO

→ $\mathbb{Z}_- = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 0\}$ ANCHE SE TERMINI INFINITI PUÒ ESSERE SUP. LIMITATO

→ Def: A È INFERIORMENTE LIMITATO SE $\exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in A : b \leq x$

b È UN MINORANTE DI A, SE b È MINORANTE DI A ESISTONO INFINITI MINORANTI DI A

→ Def: A È INFERIORMENTE ILLIMITATO SE $\nexists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in A : x < b$

ES. $\mathbb{Z}_- = \{m \in \mathbb{Z} : m < 0\}$ SUP LIMITATO E INF ILLIMITATO

$\forall \varepsilon > 0$ PROP. CONC.

$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

SE $\varepsilon > 0$, ε NON È UN MINORANTE DI A

Def SE A È LIMITATO INF, SI DICE ESTREMO INFERIORE DI A ($\inf A$) IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI DI A

Def SE A È LIMITATO SUP SI DICE ESTREMO SUPERIORE ($\sup A$) IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI DI A

OSS. SE $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

SE $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

→ ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

OGNI INSIEME LIMITATO HA ESTREMO SUP E ESTREMO INF IN $\mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

$\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

FUNZIONI

$f: x \to y$

È UNA LEGGE CHE AGLI ELEMENTI DI x ASSUME AL PIÙ UN ELEMENTO DI Y

$X = \{$PERSONE PRESENTI NELL'AULA$\}$

$Y = \{$CORSO DI LAUREA DEL POLI$\}$

$x \in X$ ASSOCIA IL CORSO DI LAUREA A CUI x È ISCRITTO

→ DOMINIO DI f: $\{x \in X$ SU CUI f OPERA$\}$

$$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$
$$\text{DOM} f: [0; +\infty] = \{x : x \geq 0\}$$

→ CODOMINIO f: L'INSIEME IN CUI PRENDE VALORI $f(y)$

$f: x \to y$ [CODOMINIO = DOVE LA f PRENDE VALORE]

$x \mapsto f(y)$

$x \mapsto f(x)$ x VARIABILE INDIPENDENTE

SI PUÒ SCRIVERE $y = f(x)$

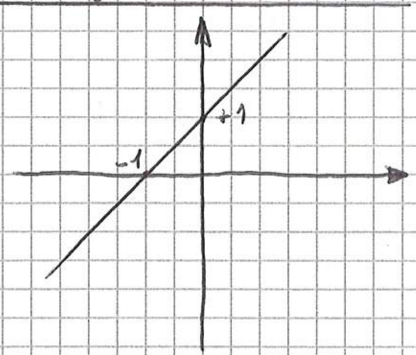
$y = x + 1$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 1$

$f(x) = x + 1$

$\text{DOM} f = \mathbb{R}$



$(x; f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f: x \to y$

GRUPPO DI f $\Gamma(f) = \{(x; y) : y = f(x) \wedge x \in \text{dom} f\}$

↓ GAMMA MAIUSCOLA $= X \times Y$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 294

FUNZIONE SEGNO

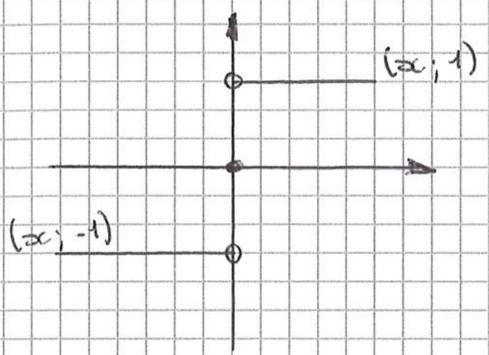
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{FUNZIONE SEGNO} : \operatorname{sgn}(x)$$

dom f : $\mathbb{R}$

Im f : $\cancel{\mathbb{R}}\{-1, 0, 1\}$

Se codominio sta in $\mathbb{R}$ → f **reale** di una variabile reale se dom $\subseteq \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Im } f \subseteq \text{codominio}}$



$x > 0 \quad \operatorname{sgn} x = 1$

$x = 0 \quad \operatorname{sgn} x = 0$

$x < 0 \quad \operatorname{sgn} x = -1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

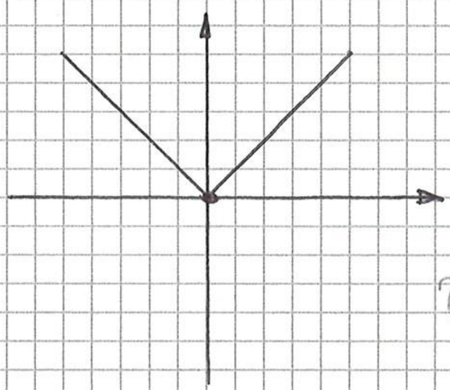
$x \mapsto |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & \operatorname{sgn} > 0 \\ -x & \operatorname{sgn} < 0 \end{cases}$$

dom f : $\mathbb{R}$

Im f : $[0; +\infty)$

$\Gamma f = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$



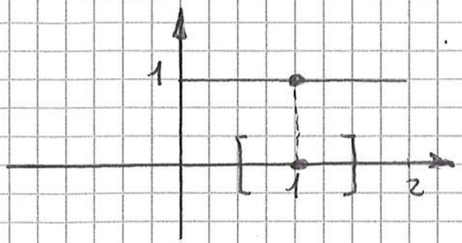
$x \geq 0$

$y = x = |x|$

$x < 0$

? $y = x = -x$

$f(x) = [x] \quad A = [1/2 ; 3/2]$?

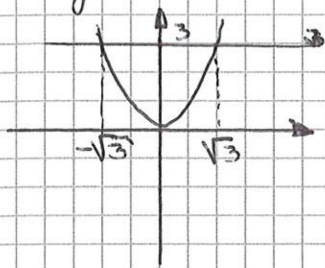


$f(A) = \{0 ; 1\}$

$y \in Y$ CONTROIMMAGINE DI y $\quad f^{-1}(y)$

$f^{-1}(y) = \{x \in \text{dom} f : f(x) = y\}$

ES $\quad f(x) = x^2$



$y = 3 \quad f^{-1}(3) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

$y = -2 \quad f^{-1}(-2) = \{x : x^2 = -2\} = \emptyset$

$y = 0 \quad f^{-1}(0) = \{0\}$

$f(x) = \text{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

$f^{-1}(y) = \emptyset \quad \text{sgn}\, y \neq -1, 0, 1$

$f^{-1}(1) = \{x : \text{sgn}\, x = 1\} = (0 ; +\infty)$

$f^{-1}(0) = f^{-1}(-1)$

$f : X \to Y \quad B \subseteq Y$

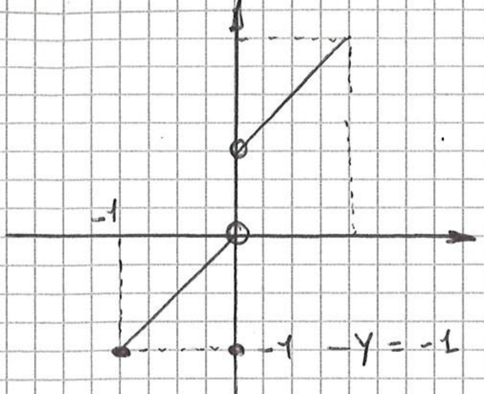
$f^{-1}(B) = \{x \in \text{dom} f : f(x) \in B\} \subseteq \text{dom} f$

Def: f è SUP LIMITATO SE $\text{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ È SUP LIMITATA CIOÈ

SE $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in \text{dom} f \quad f(x) \leq M$

$\sup f = \sup \text{Im} f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 294



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ x+1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$y = -1$ $\quad f^{-1}(-1) = \{-1; 0\}$ NON INIETTIVA

FACENDO PERÒ UNA RESTRIZIONE CIOÈ TOGLIENDO -1 DAL DOMINIO DIVENTA INIETTIVA.

SE f È INIETTIVA SU X
$\Rightarrow \forall y \in \mathrm{Im} f$, $f^{-1}(y)$ CONTIENE UN SOLO ELEMENTO

SE f NON È INIETTIVA SU X
$\Rightarrow \exists y \in \mathrm{Im} f$; $f^{-1}(y)$ CONTIENE PIÙ DI UN ELEMENTO

f SURRIETTIVA $f: X \to Y$ SE $\mathrm{Im} f = Y$
INVECE $f: X \to \mathrm{Im} f$ SEMPRE SURRIETTIVA

f È BIUNIVOCA O BIETTIVA SE È INIETTIVA E SURRIETTIVA
SE f È INIETTIVA SU $X \Rightarrow f: X \to \mathrm{Im} f$ È BIUNIVOCA

$f: X \to \mathrm{Im} f$ INIETTIVA

$$\downarrow$$

$$f^{-1}(y) = \{x\}$$

?

DEFINISCO LA FUNZIONE INVERSA DI f

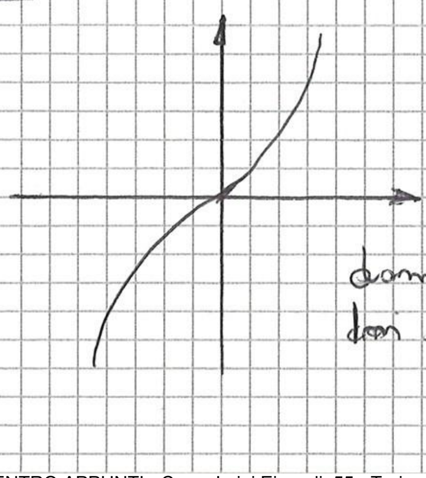
$$\mathrm{Im} f \to X$$
$$y \longmapsto x : f(x) = y$$
$$f^{-1}(y) = 1$$

SE PRENDO $f(x) = x^3$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto x : x^3 = y$$

$f(x) = x^3 \qquad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



dom f: $\mathbb{R}$
dom f: $\mathbb{R}$

ESERCIZIO:

$f|_{(-\infty;0]}$ QUAL'È L'INVERSO (SE ESISTE)

$\to f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$

- È INVERTIBILE SU $\mathbb{R}$?
- È INVERTIBILE SU UN INSIEME; COSA AVVIENE $x = 1$ E $x = 0$
- COM'È FATTA L'INVERSA?

COMPOSIZIONE DI FUNZIONE

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$f(x) \longrightarrow y \qquad x \in \mathrm{dom}\, f$

$x \longmapsto f(x)$

se $f(x)$ è nel dom g $\quad g(f(x))$

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$

$g \circ f : x \to z$

$x \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$

$$\mathrm{dom}\, g \circ f = \{x \in \mathrm{dom}\, f \wedge f(x) \in \mathrm{dom}\, g\}$$

ES $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \mapsto x+1 \qquad y \mapsto \sqrt{y}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto x+1 \longmapsto g(x+1) = \sqrt{x+1}$

$g \circ f = g(x+1) = \sqrt{x+1}$

$\mathrm{dom}\, g \circ f = \{x : x+1 \geq 0\} = [-1; +\infty)$

$\underbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{g \circ f} \qquad \underbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f \circ g}$

$g \circ f(x) = g(x+1) = \sqrt{x+1} \qquad f \circ g = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1 \neq \sqrt{x+1}$

LA COMPOSIZIONE NON È COMMUTATIVA

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

PROP: SE f INVERTIBILE DA x SU $y = \operatorname{Im} f$

SE g INVERTIBILE DA y SU $x = \operatorname{Im} g$

ALLORA $\Rightarrow$ $g \circ f$ È INVERTIBILE E

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

dim: $\underbrace{x \to y \to z}_{g \circ f} \xrightarrow{(g \circ f)^{-1}} x$

$$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = id\ x$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) \overset{?}{=} x \quad \forall x \in X$$

$$g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x) = g \circ f \circ f^{-1}(g^{-1}(x)) =$$

$$= g \circ f[f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(x)}_{y})] = g(g^{-1}(x)) = x$$

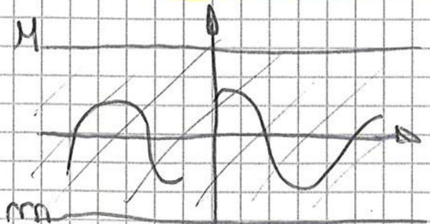
?

$f: x \to \mathbb{R}$

f È LIMITATO SUPERIORMENTE SE L'IMMAGINE DI f È LIMITATO SUPERIORMENTE

CIOÈ SE $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall y \in \operatorname{Im} f,\ y \leq M$

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq M}$$



$(x; f(x))$ $\leq M$

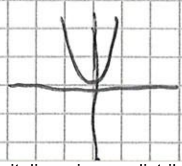
IL GRAFICO È SOTTO LA RETTA M

f È LIMITATO INFERIORMENTE SE $\operatorname{Im} f$ È LIMITATO INFERIORMENTE

CIOÈ SE $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall y \operatorname{Im} f;\ y \geq m$

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \geq m}$$

ES.

$f(x) = x^2$  LIMITATO INF MA ILLIMITA

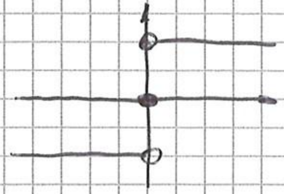
MINIMO DI f $\quad \min f$

SE f È LIMITATA INFERIORMENTE È $\inf f \in \operatorname{Im} f \implies$

$\implies \inf f = \min f$ SI DICE CHE f HA MINIMO

$\exists\, \underline{x} \in \operatorname{dom} f \ \forall x \in \operatorname{dom} f : f(x) \geq f(\underline{x})$

ES.



$-1 = \min(\operatorname{sgn})$

$x \in (-\infty ; 0)$ SONO PUNTI DI MINIMO

INVECE NELLA MANTISSA IL MINIMO $\min M = 0$

---

f È LIMITATA SE LIMITATA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE CIOÈ SE $\exists\, m, M \in \mathbb{R} \ \forall x \in \operatorname{dom} f : m \leq f(x) \leq M \iff$

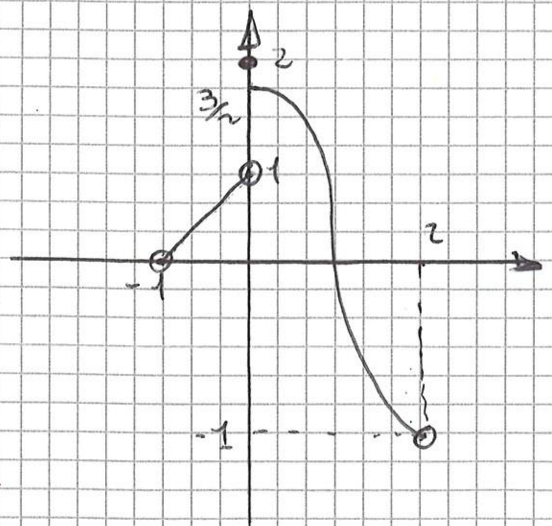
$\iff \exists\, M > 0 \ \forall x \in \operatorname{dom}$

$|f(x)| \leq M$

$-M \leq f(x) \leq M$

INVECE SE f È SUPERIORMENTE ILLIMITATA DICO CHE IL $\sup f = +\infty$

E SE f È ILLIMITATA INFERIORMENTE DICO CHE L' $\inf f = -\infty$



$\operatorname{Im} f = (-1 ; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

NON È INIETTIVA

$\max f = 2$

$x = 0$ PUNTO DI MAX

$\inf f = -1$

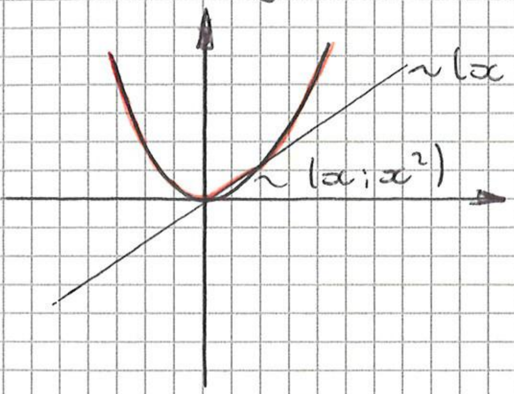
$\sup f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(x) : x \in A\}$

ESERC PROP: SE $A \subseteq X = \text{dom } f$

$\Rightarrow$ · $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leq \sup f$

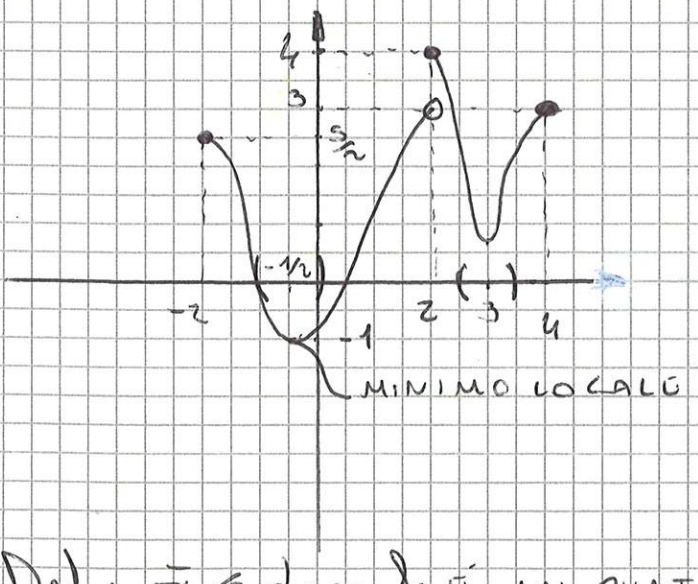
· $\inf\limits_{x \in A} f(x) \geq \inf f$

· $f(x) = \max\{x ; x^2\} \quad x \in \mathbb{R}$



$x < 0$

$$f(x) \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$



$x = 4$ PUNTO DI MAX LOCALE

$x = 3$ PUNTO DI MIN LOCALE

$x = -2$ PUNTO DI MAX LOCALE

· f LIMITATA NON INIETTIVA

· $[-1, 4]$

$\max f = 4 \quad x = 2$ PUNT DI MAX

$\min f = -1 \quad x = \frac{1}{2}$ PUNTO DI MIN

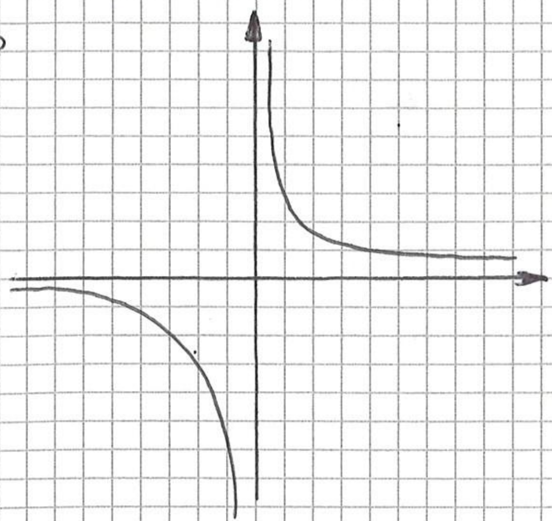
Def: $\bar{x} \in \text{dom } f$ è UN PUNTO DI MINIMO LOCALE O RELATIVO

SE $\exists\, B(\bar{x}_r) = (\bar{x}_r - r ; \bar{x}_r + r)$

$\forall x \in B_r(\bar{x}) \cap \text{dom } f : f(x) \geq f(\bar{x})$

5

$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{A}$



$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

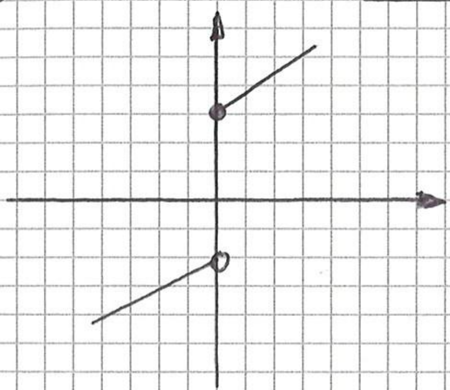
$x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

NON MONOTONA

INVECE SE

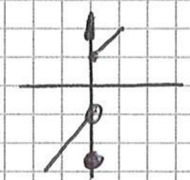
f SU $(-\infty; 0)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE

f SU $(0; +\infty)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f\, x_2$

STRETTAMENTE CRESCENTE SU A



NON MONOTONA

PROP: SE f È STRETTAMENTE MONOTONA SU $A \Rightarrow f$ È INIETTIVA SU A

dim: f È STRETTAMENTE CRES. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

DEVO DIMOSTRARE CHE SE $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1 < f(x_1)$ STR. CRES.

PROP: SE f È STRETT. DECRESCENTE SU $A \Rightarrow f$ È INIETTIVA SU A

dim: f È STRETT. DECRESCENTE, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

DEVO DIMOST. CHE SE $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ STRETT. DECR.

f, g MONOTÒNE $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $g \circ f$ È MONOTÒNA

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$\text{im } f \subseteq \text{dom } g$

f CRESCENTE ↗

f DECRESCENTE ↘

	f	g	$g \circ f$
1	↗	↗	↗
	↗	↘	↘
	↘	↗	↘
	↘	↘	↗

① dim: $x_1, x_2 \in \text{dom } g \circ f = \text{dom } f$

$x_1 < x_2 \Rightarrow g \circ f(x_1) < g \circ f(x_2)$

SO CHE:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) \leq g(y_2)$

$$g(\underbrace{f(x_1)}_{y_1}) < g(\underbrace{f(x_2)}_{y_2})$$

② f CRES: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

g DECR: $[y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) \geq g(y_2)]$ *

$$g \circ f(x_1) \overset{?}{\geq} g \circ f(x_2)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ g(f(x_1)) & & g(f(x_2)) \\ \| & & \| \\ y_1 & \leq & y_2 \end{array}$$

SE MINORE * → $\geq$

ES. $f(x) = x+1$ SEMPRE CRES

$g(y) = \sqrt{y}$ STRETT. CRES.

$h(x) = \sqrt{x+1}$ STRETT. CRES.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 294

TOPOLOGIA DELLA RETTA

14-10-13

TOPOS → LUOGO

$\mathbb{R}$ INTORNO DI UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$

$d(x;y) = |x-y|$

INTORNO DI CENTRO x_0 E RAGGIO r_0 IN $\mathbb{R}$

$B(x_0;r_0) = B_r(x_0) = \{z \in \mathbb{R} / d(x_0) < r\}$

$= \{z \in \mathbb{R} / |z - x_0| < r$

$= \{x_0 - r ; x_0 + r\}$

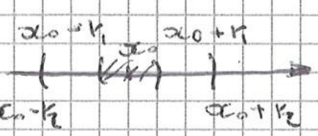
PROP: SE $B(x_0;r_1)$ E $B(x_0;r_2)$

$\Rightarrow B(x_0;r_1) \cap B(x_0;r_2)$

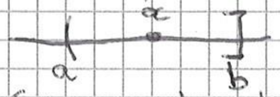
$=$

$B(x_0;r_0)$

$r = \min\{r_1;r_2\}$



Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ x_0 È INTORNO AD A SE $\exists B(x_0;r) \subseteq r$



$a < x \leq b$

$\min\{|x-a| ; |x-b|\} = r$

$B(x;r) \subseteq (a;b]$

N.B. b NON È UN PUNTO INTERNO

$\forall B(b;r)$ NON È CONTENUTO IN A

$\forall B(b;r) : B(b;r) \cap CA \neq \emptyset$

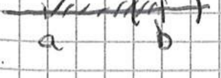
SE $x \in A \Rightarrow x$ NON È INTERNO.

2) $A \subseteq \mathbb{R}$ x È UN PUNTO DI FRONTIERA PER A SE

$\forall B(x;r)$ $- B(x;r) \cap A \neq \emptyset$

$- B(x;r) \cap C(A) \neq \emptyset$

1.16 (122)



$(a;b)$

$[a;b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

$\partial[[a;b]] = \{a;b\} \subseteq [a;b] \Rightarrow$ CHIUSO

$(a;b)$ APERTO

$(a;+\infty)$ e $(-\infty;a)$ SONO APERTI

$[a;+\infty)$ e $(-\infty;a]$ SONO CHIUSI

$\{a\}$ È CHIUSO $\quad \mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty;a) \cup (a+\infty)$

$\{a_1; \dots a_n\}$ È CHIUSO

Def $A \subseteq \mathbb{R}$

$\bar{A} = A \cup \partial A$ CHIUSURA DI A

① È CHIUSO

② È IL PIÙ PICCOLO CHIUSO CHE CONTIENE A

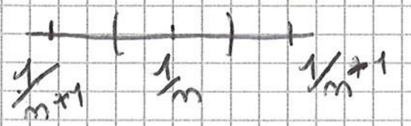
$A = (a;b] \quad \bar{A} = A \cup \{a\} = [a;b]$

$B = (a;b) \quad \bar{B} = B \cup \{a;b\} = [a;b]$

$A = [0;1] \cap \mathbb{Q} \qquad \bar{A} = A \cup \partial A = [0;1]$

$\partial A = [0;1]$

$A = \left\{\frac{1}{n}, n \neq 0, n \in \mathbb{N}\right\}$



$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = r \quad \left(\frac{1}{n} - r; \frac{1}{n} + r\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

$\Rightarrow$ NESSUN PUNTO DI A È INTERNO $\mathring{A} = \emptyset$

SONO TUTTI PUNTI DI FRONTIERA

$0 \in \partial A \quad \forall B(0;\varepsilon) = (-\varepsilon;\varepsilon) : (-\varepsilon;\varepsilon) \cap A \neq 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$(-\varepsilon,\varepsilon) \cap CA \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in \partial A$ E NON CI SONO ALTRI PUNTI DI FRONTIERA

$\bar{A} = A \cup \partial A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 294

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty ; -\infty\}$
$B(+\infty) = (m ; +\infty)$
$B(-\infty) = (-\infty ; m)$

$A \subseteq \mathbb{R}$ dom f

$+\infty$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A SE

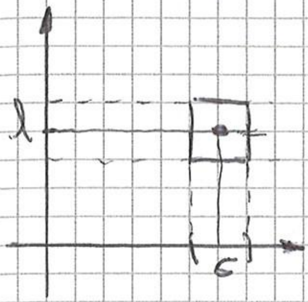
$\forall B(+\infty) ; B(+\infty) \cap A \neq \emptyset$

$\overset{\shortparallel}{(m ; +\infty)}$

$\forall m \; \exists x \in A : x \in (m ; +\infty)$ CIOÈ SE $x > m$

PROP: $+\infty$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A
$\iff$ A SUP ILLIMITATO

2) $-\infty$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE $\iff$ INF ILLIMITATO



$B(l) = (l-\varepsilon; l+\varepsilon)\ \exists B(c) = (c-\delta; c+\delta)$

$: x \in B(c) \cup \mathrm{dom} f \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon; l+\varepsilon)$

15-10-13

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

C PUNTO DI ACCUMULAZIONE DEL DOMINIO DI $f = A$

C PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A SE $\forall B(c),\ B(c) \cap A \setminus \{c\} \neq \emptyset$

$c \in \mathbb{R}$; $c = +\infty$; O $c = -\infty$

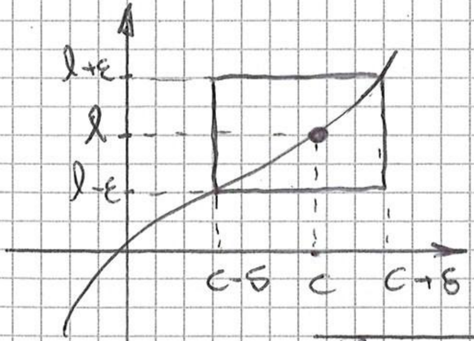
SE $c \in \mathbb{R}$, $B(c) = (c-\varepsilon; c+\varepsilon)$

SE $c = +\infty$ $B(c) = (a; +\infty)$

SE $c = -\infty$ $B(c) = (-\infty; a)$

$\exists \lim\limits_{x \to c} f(c) = l$ SE.

$\forall B(l)\ \exists B(c): x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in B(l)$



$(x, f(x))$

$c = x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad l \in \mathbb{R}$

$B(l) = B(l; \varepsilon) = (l-\varepsilon; l+\varepsilon)$

$B(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

① $\forall B(l, \varepsilon)\quad \exists B(x_0, \delta) : \quad x \in B(x_0; \delta) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B(l; \varepsilon)$

$\quad\ ∥ \qquad\qquad ∥ \qquad\qquad ∥$

② $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon; l+\varepsilon)$

$\qquad\qquad\qquad ∥$

③ $\quad 0 < (x - x_0) < \delta \wedge x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

1 $\forall B(+\infty)\ \exists B(x_0)\quad x \in B(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B(+\infty)$

2 $\forall (m; +\infty)\ \exists (x_0 - \delta; x + \delta): x \in B(x_0) \cap A \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in (m; +\infty)$

3 $\forall m\ \exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > m$

$$\lim_{x \to 0} = \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\forall m\ \exists \delta > 0\quad x \in (-\delta; \delta) \setminus \{0\} \Rightarrow f(x)\ \frac{1}{x^2} > m$

SE $m < 0$ È SEMPRE VERO

$\frac{1}{x^2} > m > 0 \iff x^2 \cdot m < 1 \iff x^2 \cdot \frac{1}{m}$

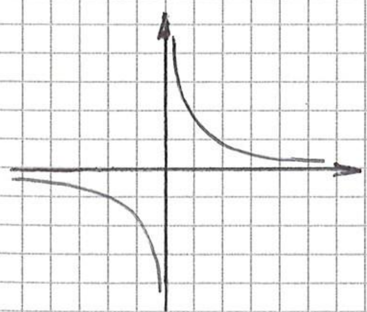
$\iff -\sqrt{\frac{1}{m}} < x < \sqrt{\frac{1}{m}}$

$\delta = \sqrt{\frac{1}{m}}$

SE $m \leq 0$ $(-\infty; +\infty)$

N.B ATTENZIONE NON BASTA CHE L'IMMAGINE DI f SIA ILLIMITATO SUPERIORMENTE PERCHÈ IL $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

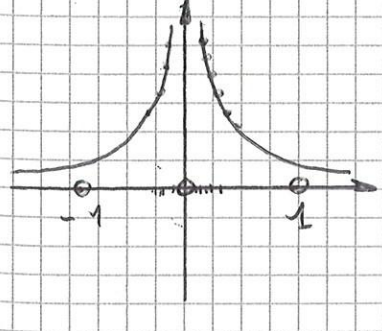
$f(x) = \frac{1}{x}$ PER $x \to 0$



$\forall m > 0$

$\exists (-\delta; \delta)\ x \in (-\delta; \delta) \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} > m$

ES $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq \frac{1}{m} \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$



$\forall B(0) = (-\delta; \delta)$

$x \in (-\delta; \delta) \setminus \{0\}$

$f(x) = 0$

$\operatorname{Im} f = [0; +\infty)$

$f(-\delta; \delta)$ È ILLIMITATA SUPERIORMENTE

SUCCESSIONI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\text{dom } f : \{ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \}$

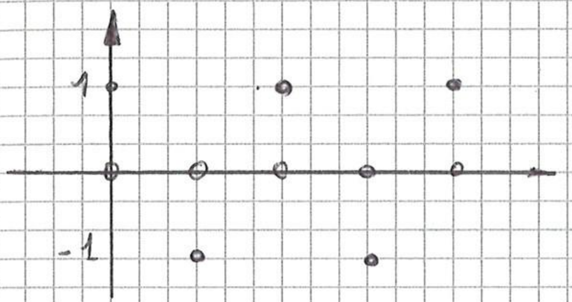
$f(n) = \frac{1}{n-3}$ $\{ n \in \mathbb{N},\ n \geq 4 \}$ xk se parte da 2 dobbiamo escludere 3 e non è più una successione

$f(n) = (-1)^n \quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0$

$$f(n) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$K \in \mathbb{N} \to n = 2k+1 \quad (-1)^{2k+1} = -1^{2k} \cdot (-1) = -1$

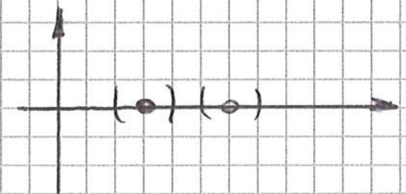
$n = 2k \quad (-1)^{2k} = [(-1)]^k = 1^k = 1$



$f(n) = (-1)^n = a_n$

$a_n = \frac{1}{n-3} \ : \ n \geq 4$

$\{a_n\}_{n \geq 4} = \left\{ \frac{1}{n-3} \right\}_{n \geq 4}$



$\left(n - \frac{1}{2} \ ; \ n + \frac{1}{2} \right)$

L'unico punto di accumulazione del dominio di una funzione successione è $+\infty$

$\Rightarrow$ ha senso chiedersi se

$\exists \lim_{n \to +\infty} = \lim_{n \to \infty} f(n)$

$\forall B(l) \ \exists B(+\infty) : n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow f(n) \in B(l)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists (a;+\infty) \ n \in (a;+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow f(n) \in B(l)$

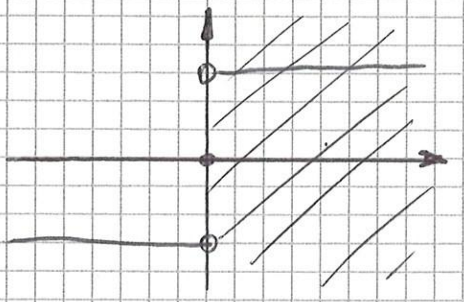
$n > a \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) \in B(l)$

ES $a = \pi \quad n > \pi \quad n > 3$

$\exists a \quad n > [a]$ quindi scriviamo

$\exists n_0 \ (= [a]) \ n > n_0 \Rightarrow a_n = f(n) \in B(l)$

$\lim_{n \to +\infty} (\text{sen } n\pi) = 0$ applicando la definizione



SE ELIMINIAMO

ESISTE IL $\lim_{x \to 0}$

$\lim f(x)$

$\frac{1}{x}$, $\operatorname{dom} f = (0; +\infty) = A$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\forall B(+\infty) = (m; +\infty)\ \exists B(0) = (-\delta; \delta)$

$x \in (-\delta; \delta) \cap (0 + \infty) = (0; \delta) \Rightarrow f(x) \in (m; +\infty)$

INTORNO DESTRO DI x_0 $[x_0; x_0 + \delta)$

$B^+(x_0)$ $(x_0; x_0 + \delta)$

INTORNO SINISTRO DI x_0 $[x_0 - \delta; x_0]$

$B^-(x_0)$ $(x_0 - \delta; x_0)$

- x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DEL $\operatorname{dom} f$ DA DESTRA SE $\forall B^+(x_0)$, $\operatorname{dom} f \cap B^+(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

$\operatorname{dom} f \cap \{x_0 - \delta; x_0) \neq \emptyset$

Def: SE x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA DI $A = \operatorname{dom} f$

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ SE

$\forall B^+(l)\ \exists B^+(x_0) : x \in B^+(x_0) \cap \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B(l)$

Def: x_0 È UN PUNTO DI ACC. DEL $\operatorname{dom} f$ DA SINISTRA SE

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ SE [lim SINISTRO]

$\forall B(l)\ \exists B^-(x_0) : x \in B^-(x_0) \cap \operatorname{dom} f \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in B(l)$

A $\forall B(l) = (l-\varepsilon; l+\varepsilon)\ \exists B(c) : x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$

$\Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$\forall B(m) = (m-\varepsilon; m+\varepsilon), \exists B'(c) : x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\}$

$\Rightarrow m-\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|l-m|}{\varepsilon}$ $\quad x \in B(c) \cap B'(c) \cap A \setminus \{c\}$

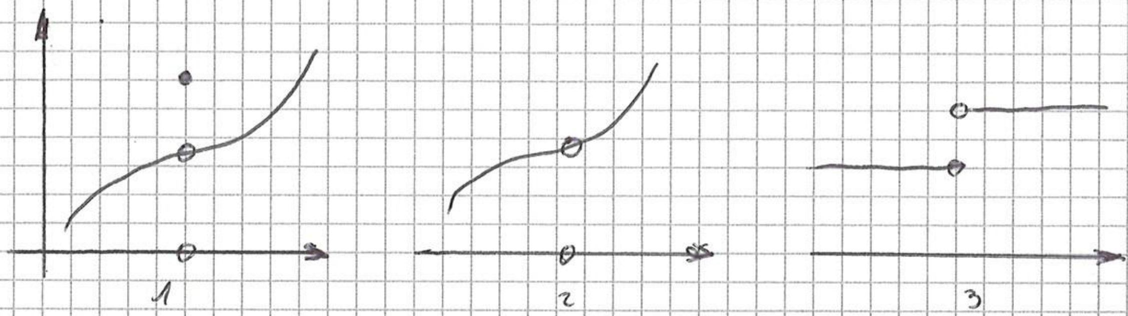
SE E SEMPRE VERO

$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$m-\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon$

NO POICHE $(l-\varepsilon; l+\varepsilon) \cap (m-\varepsilon; m+\varepsilon) = \emptyset$

NON PUÒ ACCADERE CHE $f(x)$ ASSUMA VALORI NEI 2 INT



VOGLIO DISTINGUERE IL 2 DAGLI ALTRI

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \operatorname{dom} f = A$

f E CONTINUA IN x_0 SE

$\forall B(x_0)\ \exists B(x_0) : x \in B(x_0) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0))$

(SIMILE

$B(l)\ \exists (x_0) : x \in B(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0))$

NELLA DEF. DI INTORNO $x_0 \in \operatorname{dom} f$ E NE CONSEGUE CHE SIA DI ACCUMULAZIONE DEL $\operatorname{dom} f$

SE $x_0 \in \operatorname{dom} f$ È UN PUNTO ISOLATO DI A DEL $\operatorname{dom} f$

$\exists B(x); B(x_0) \cap \operatorname{dom} f = \{x_0\}$

$\forall B(f(x_0))\ \exists B(x_0) : x \in B(x_0) \cap \operatorname{dom} f \Leftrightarrow x = x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0) \in B(f(x_0)) = (f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon)$

(A) SE $\lim f(x) = l \in \mathbb{R}$ E $x_0 \in \text{dom} f$
E SE $\lim f(x) = l \in \mathbb{R} \wedge l \neq f(x_0)$

x_0 È UNA SINGOLARITÀ ELIMINABILE.

(B) x_0 SI DICE CHE È UNA SINGOLARITÀ DI TIPO SALTO (I SPECIE)

SE $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

E $l_1 \neq l_2$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

$|l_1 - l_2|$ È IL SALTO DI f

(C) SINGOLARITÀ DI II SPECIE

IL $\lim$ NON ESISTE O IL DESTRO O IL SINISTRO $= \pm\infty$
E TUTTI GLI ALTRI CASI

f È DEFINITA IN $[a; b]$ DISCONTINUA IN $x = a$ / CONT.
O DISC. IN $x = b$ / CONTI

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

TEOREMI SUI LIMITI

21-10-13

$x \to c$
(C È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DEL $\text{dom} f$
(EVENTUALMENTE SOLO DA DESTRA O SOLO DA SX)

$x \to c$

- $x \to x_0 \in \mathbb{R}$
- $x \to x_0^+$
- $x \to x_0^-$
- $x \to +\infty$
- $x \to -\infty$

COROLLARIO: SE $\exists \lim_{x \to c} f(x) = l$

SE $\exists B(c)\ \forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$, $f(x) \geq 0$ (≤ 0)

$\Rightarrow l \geq 0$

dim.

HO DIMOSTRATO CHE ~~[illegible]~~ $\exists l,\ l > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ IN $B(c) \cap A \setminus \{c\}$

NEGO LA TESI (DIM. CONTRONOMINALE)

$\neg(l \geq 0) = l < 0 \Rightarrow \exists B(c) : x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) < 0$

- $f(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

- $f(x) = e^{x} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \quad e^{x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

COROLLARIO. SE $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI ACC. DEL dom f E $x_0 \in A$

E SE ~~[illegible]~~ f È CONTINUA IN x_0 E $f(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists B(x_0)\ \forall x \in B(x_0) \cap A$, $f(x)$ HA LO STESSO SEGNO DI $f(x_0)$

$$f(x) \cdot f(x_0) > 0$$

$$\begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix}$$

dim. SE f È CONTINUA IN x_0 E x_0 È UN PUNTO DI ACC. DEL dom f

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{l}$ CASO PRECEDENTE MA PARTICOLARE

APPLICO IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Def: SI DICE CHE f È LOCALMENTE LIMITATA IN x_0 (c) SE

$\exists B(x_0) : \exists M > 0 : \forall x \in B(x_0) \cap A \Rightarrow |f(x)| \leq M$

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

- c PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI $A = \text{dom} f$
- $\exists \lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ESCLUDO QUINDI $+\infty$ E $-\infty$.

$\Rightarrow f$ È LOCALMENTE LIMITATA IN c

$\lim_{x \to c} f(x)$	$\lim_{x \to c} g(x)$	$\lim_{x \to c} f(x) + g(x)$
$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$	$l + m$
$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

IL TEOREMA NON CI DICE NIENTE XKÈ PUÒ $\to$ A $+\infty$, $-\infty$; 0, n$\mathbb{R}$

$\to$ FORMA INDETERMINATA.

dim: IPOTESI

$\lim_{x \to c} f(x) = l$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists B(c)\ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\cdot$ dom $f \cap$ dom $g = A$ e c PUNTO DI ACC. DI A

$\lim_{x \to c} g(x) = m\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B'(c) : x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$

DEVO DIM

$\forall \varepsilon > 0\ \exists B^2(c) : x \in B^2(c) \cap A \setminus \{c\}$

$\Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (l + m)| < \varepsilon$

PER DIMOSTRARE QUESTO PRENDO

$B'(c) \cap B(c) = B^2(c) : x \in B^2(c) \cap A \setminus \{c\}$

ALLORA HO

$|(f(x) + g(x)) - (l + m)| = |f(x) - l + g(x) - m| \leq$

USO LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

FISSATO UN INTORNO ε HO CHE TUTTO $\leq 2\varepsilon$

ESERCIZIO:

DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + \operatorname{sen} x) = +\infty$

$-1 < \operatorname{sen} x < 1$

$f(x) = x^2 \searrow +\infty \qquad g(x) = \operatorname{sen} x \to$ UN NUMERO TRA -1 E 1

$f(x) + g(x) = +\infty$

$f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x \qquad g(x) = -x^2$

$f(x) + g(x) = \operatorname{sen} x \to$ NON HA LIMITE PER $x \to +\infty$

PRODOTTO.

$A = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \qquad c$ PUNTO DI ACC. DI A

$\lim_{x \to c} f(x)$	$\lim_{x \to c} g(x)$	$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x)$
$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$	$l \cdot m$
$+\infty$	$m > 0$ $m < 0$	$+\infty$ $-\infty$
$-\infty$	$m > 0$ $m < 0$	$-\infty$ $+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$+\infty$ ^{0}	$-\infty$	$-\infty$
$\pm\infty$	0	?

dim

SE $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$

f È LOCALMENTE LIMITATA IN $x = c$

$\exists B(c) : x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)| \leq M$ X IL TEOREMI DI LIMITATEZZA LOCALE

SE $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists B'(c) : x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ DEF DI LIMITE

55 $x^2 + 3x + 1$

$$\lim_{x \to +\infty} (\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{3x} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x}} = ?$$

$$f(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \to 0 \text{ per } x \to +\infty$$

per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} (1) = 1$$

$$f(x) = k \cdot x^2 \quad k \neq 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) \cdot g(x) = k \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = k \to k \text{ per } x \to +\infty$$

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

22-10-13 3 ORE

$g(x)$ $\frac{1}{g(x)}$

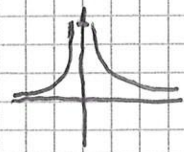
- c SIA UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

$\exists B(c)\ \forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} ;\ g(x) \neq 0$

FACCIO UN OSS. SE $g(x) \to 0$ NON È DETTO CHE $\exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{g(x)}$

$g(x) = x \to 0$ PER $x \to 0$ $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}$ NON HA LIMITE

PERÒ $\left|\frac{1}{x}\right|$ HA LIMITE $= +\infty$



$\lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)}$	$\lim_{x\to c} \left\|\frac{1}{g(x)}\right\|$
$l \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{l}$	
0	NON È DETTO CHE ESISTE	$+\infty$
$+\infty$ o $-\infty$	0	0

$\lim_{x\to c} g(x) = 0$

SIGNIFICA $\forall \varepsilon > 0\ (-\varepsilon ; \varepsilon) = B(0)\ \exists B'(c) : x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\} \to |g(x)| < \varepsilon$

$x \in B'(c) \cap B(c) \cap A \setminus \{c\}$

$\frac{\cancel{g(x)}}{|g(x)|} = \left|\frac{1}{g(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists B^2(c) : x \in B^2(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}\right| > a$

SE PRENDO $\varepsilon = \frac{1}{a}$ $B^2(c) = B'(c) \cap B(c)$

$|g(x)| < \varepsilon = \frac{1}{a} \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}\right| > a$

SE $\lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$

$\forall a\ \exists B'(c)\ x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |g(x)| > a$

$\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{1}{a} = \varepsilon$ $\quad \varepsilon \to \frac{1}{\varepsilon} = a$

$f(x) = \frac{K}{x^2}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^2} \to 0$ PER $x \to +\infty$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K/x^2}{1/x^2} = K \to K$ PER $x \to +\infty$

$f(x) = x^4$ PER $x \to 0$ $\quad g(x) = x^2$ PER $x \to 0$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \to 0$ PER $x \to 0$

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \to +\infty$ PER $x \to 0$

COROLLARIO

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

SE g È CONTINUA IN x_0 E $g(x_0) \neq 0$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO $\exists B(x_0)$

$\forall x \in B(x_0) \cap \mathrm{dom}\, g(x)$, HA LO STESSO SEGNO DI $f(x)$

$\Rightarrow g(x) \neq 0$ IN $B(x_0) \cap \mathrm{dom}\, g \Rightarrow \frac{1}{g(x)}$ È DEFINITO IN $B(x_0)\, \mathrm{dom}\, g$

IPOT.

① g È CONTINUA IN x_0 E $g(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{g(x)}$ È CONTINUA IN x_0

② g È CONTINUA IN x_0 E $g(x_0) \neq 0$ f CONTINUA IN x_0

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ È CONTINUA IN x_0

dim • SE x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI dom g

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \underset{\neq 0}{g(x_0)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}$

$\underset{\text{CONT}}{f} \cdot \underset{\text{CONT}}{\frac{1}{g}} = \text{CONTINUA}$

• SE x_0 È UN PUNTO ISOLATO DEL DOMINIO $\to$ OVVIO

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}}$ $\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^5+x} = \frac{0}{0}$ INDETERMINATA

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x}{4x^4+1} = \frac{3x^3\left(1+\frac{2x}{3x^3}\right)}{4x^4\left(1+\frac{1}{4x^4}\right)} = \frac{3x^3\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\right)}{4x^4\underbrace{\left(1+\frac{1}{4x^4}\right)}_{1}}$$

$$= \underbrace{\frac{3x^3}{4x^4}}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\frac{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3}}{1+1/4x^4}}_{\downarrow\, 1/1=1} = 0\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x^2+x}{6x^3-2x}$$

$$\frac{5x^3\left(1+\frac{2x^2}{5x^3}+\frac{x}{5x^3}\right)}{6x^3\left(1-2x/6x^3\right)} = \frac{5\cancel{x^3}\left(1+\cancel{\frac{2}{5x}}^{\,0}+\cancel{\frac{1}{5x^2}}^{\,0}\right)}{6\cancel{x^3}\left(1-\cancel{1/3x^2}_{\,0}\right)}$$

$$= \frac{5}{6}\cdot 1 = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2}{5x^4-x}$$

$+\infty$ PER $x\to 0^+$

$$\frac{2x^3\left(1+\frac{x^2}{2x^3}\right)}{5x^4\left(1-x/5x^4\right)} = \frac{2\cancel{x^3}^{\,0}\left(1+\cancel{\frac{1}{2x}}\right)}{5x^4\left(1-1/5x^3\right)}$$

$$\frac{2}{5x}\cdot\frac{(\quad)}{(\quad)} =$$

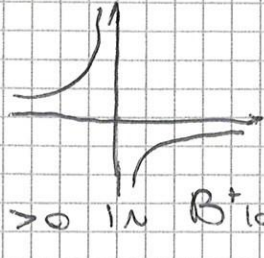
MA SE RACCOLGO I PIÙ PICCOLI

$$\frac{2x^3+x^2}{5x^4-x} = \frac{x^2\left(\frac{2x^3}{x^2}+1\right)}{-x\left(\frac{5x^4}{-x}+1\right)} = \frac{x^2(2x+1)}{-x(-5x^2+1)} = \underbrace{\frac{x^2}{-x}}_{=\,-x}\cdot\underbrace{\frac{(\quad)}{(\quad)}}_{\frac{1}{1}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2}{5x^4-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2}{5x^4-x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x\to 0} = -\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^3+x^2}{5x^4-x^3} = \lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x} = -\infty$$

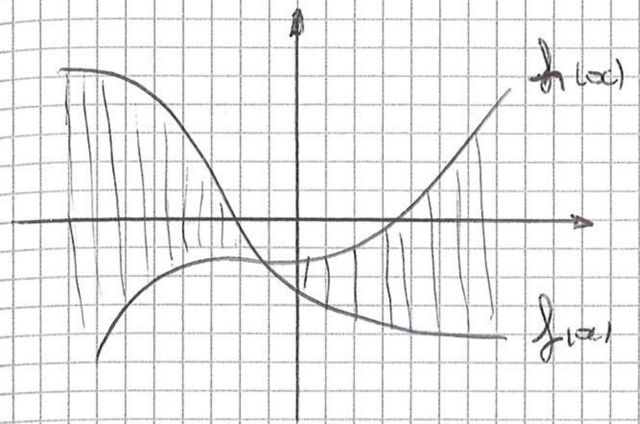


$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3+x^2}{5x^4-x^3} = \lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{x} = +\infty$$

$x>0$ IN $B^+(0)$

- SE $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to c} g(x) = l$



dim:

$\lim_{x \to c} h(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B^1(c) : x \in B^1(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B^2(c) \ x \in B^2 \cap A / \{0\} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l - \varepsilon$

FISSATO $\varepsilon > 0$

$\exists B^3(c) = B^1(c) \cap B^2(c) \cap B(c)$ → L'INTERSEZIONE DI INTORNI È SEMPRE UN INTORNO

$x \in B^3(c) \cap A \setminus \{c\} : l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = l$

TEOREMA CONFRONTO (CASO INFINITI)

- $f; g$ DEFINITI SU A

- c PUNTO DI ACC DI A

- $\exists B(c) : x \in B(x) \cap A / \{c\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

① SE $\lim_{x \to c} f(x) + \infty \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = +\infty$

② SE $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = -\infty$

dim → PAG SUCC.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 294

ESERCIZIO: DIMOSTRARE CHE:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to c} |f(x)| = 0$$

ESEMPI:

$$\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x \qquad \lim_{x \to \infty} \left|\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x\right|$$

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$$

MA $|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{x} \to 0$ PER $x \to +\infty$

$$0 \leq \left|\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x\right| = \underset{\downarrow 0}{\left|\frac{1}{x}\right|} \, \underset{\downarrow 0}{|\operatorname{sen} x|} \leq \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} \to 0$$

$\forall x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0$ PARI

DISPARI PARI

$-1 < \operatorname{sen} x < 1 \qquad x > 0$

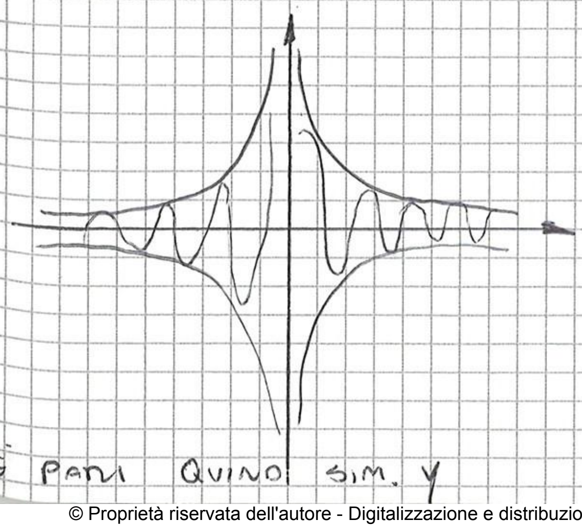
$-\frac{1}{x} < \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x < \frac{1}{x}$

$\operatorname{sen} x = 1 \; \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cdot \; \frac{1}{x} \operatorname{sen} x = \frac{1}{x}$

$\operatorname{sen} x = -1 \; \left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cdot \; \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = -\frac{1}{x}$

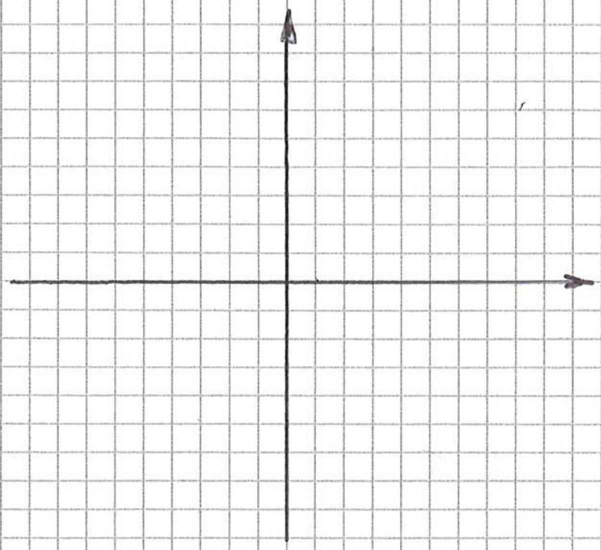
$\frac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0 \quad$ SE $x = 0\, k\pi$

$\frac{1}{x} \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$



È PARI QUINDI SIM. Y

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$\sin(3x)$ $\quad x \mapsto 3x \quad t \mapsto \sin t$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$x \mapsto 3x \qquad t \mapsto \frac{\sin t}{t}$$

TEOREMA 1 LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE

$f: A \to B \qquad g: B \to C$

$x \to f(x)$

- $A = \text{dom}(g \circ f)$
- $B = \text{dom}\, g \cap \text{Im} f$
- c PUNTO DI ACC. DI A
- $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- $l \in B$ E g È CONTINUA IN l
- $\lim_{y \to l} g(y) = g(l)$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} g \circ f = g(l)$

$\quad\quad = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$ $\quad$ dim $\longrightarrow$

USCIRE FUORI DALL $B(m)$

$\forall B(m)\ \exists B(l) : y \in B(l) \cap B \setminus \{l\} \Rightarrow g(y) \in B(m)$

$\exists B(c) : x B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in B(l)$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } y \neq 0 \\ 2 & \text{SE } y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\left\{ g(f(x)) = g(0) = 2 \qquad \lim_{x \to 0} g(f(x)) = 2 \right\}}$$

SE POTESSI USARE IL LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

CON $y = f(x)$ PER $y \to 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ALLORA SE FACCIAMO

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) \overset{?}{=} \lim_{y \to 0} g(y) = 1$$

COROLLARIO

SE f È CONTINUA IN x_0 E g È CONTINUA IN $f(x_0)$

$\Rightarrow g \circ f$ È CONTINUA IN x_0

SE x_0 È UN PUNTO DI ACC. DI A

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

$\sin 3x$ È CONT IN $\mathbb{R}$

$\underset{\text{CONT}}{\sin}(\underset{\text{CONT}}{e^x})$ È CONTINUA IN $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \sin(e^x) = \sin e^0 = \sin 1$$

PURE CONTINUA

28-10-13

SIMBOLI DI LANDAU

c PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

f, g.

$x \to c$

① $f = O(g)$ f CONTROLLATA DA g SE

$\exists M > 0 \ \exists B(c) \ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|$

IN PARTICOLARE SE $g(x) = 1$

$f(x) = O(1)$ IN $x \to c$ $|f(x)| \leq M$

LOCALMENTE LIMITATA IN c

$g(x)$ $\exists B(c) \ \forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}, \ g(x) \neq 0$

$\frac{1}{g(x)} \Rightarrow x$ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER IL dom $\left(\frac{1}{g}\right)$

② $f \overset{\times}{\cap} g$ f HA LO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA DI g, PER $x \to c$

SE $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ $l \in \mathbb{R}$

ES $\lim_{x \to \infty} \frac{3x + \sin x}{x^4 + x} = 3$

$\Rightarrow 3x^4 + \sin x \overset{\times}{\cap} x^4 + x$ PER $x \to +\infty$

③ SE $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f \sim g$ PER $x \to c$ f È EQUIVALENTE A g PER $x \to c$

ES $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$ PER $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x$ PER $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$ $\frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ PER $x \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{3x^4 + \sqrt{x}} = 1$ $3x^4 + 2x + 1 \sim 3x^4 + \sqrt{x}$ PER $x \to \infty$

IN PARTICOLARE $f = o(1)$ PER $x \to c$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = 0$$

f È INFINITESIMA PER $x \to 0$

$$\lim_{x \to c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$ POSSIAMO DIRE CHE $g = o(f)$ PER $x \to c$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|} = 0 = \lim_{x \to c} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$\Rightarrow g = o(f)$ PER $x \to c$

PROPRIETÀ

PROP.

① $$\left.\begin{array}{l} f \asymp g \text{ PER } x \to c \\ f \sim g \text{ PER } x \to c \\ f = o(g) \text{ PER } x \to c \end{array}\right\} \Rightarrow f = O(g) \text{ PER } x \to c$$

dim.

HANNO IN COMUNE CHE $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$

VEDENDO IL TEOREMA DELLA LIMITATEZZA LOCALE

$\exists B(c)\ \exists M > 0\ \forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|$$

$$\Rightarrow f = O(g) \text{ PER } x \to c$$

---

② $f \sim g$ PER $x \to c \Rightarrow f \asymp g$ PER $x \to c$

---

③ $f \asymp g$ PER $x \to c \Rightarrow \exists\, l \neq 0\ \ f(x) \sim l \cdot g(x)$ PER $x \to c$

dim

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \qquad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l \cdot g(x)}$$

⑤ $f = o(g)$ per $x \to c$

$\iff f = o(\lambda g) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\iff f = \lambda\, o(g) \quad \forall \lambda \neq 0$

$o(g) = o(\lambda g) = \lambda \cdot o(g)$

dim.

$$\lim_{x \to g} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \forall \lambda \neq 0 \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\lambda \cdot g(x)}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{1}{\lambda} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f = \lambda \cdot o(g) \iff f = o(g)$

$f(x) = \lambda f(x)$ dove $h(x) = o(g)$

$$\lim_{x \to c} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\frac{\lambda h(x)}{g(x)} = \lambda \frac{h(x)}{g(x)} \to \lambda \cdot 0 = 0$$

$f = o(g) \iff f = o(\lambda \cdot g) \quad \forall \lambda \neq 0$

$\iff f = \lambda \cdot o(g) \quad \forall \lambda \neq 0$

- $f = o\left(\frac{1}{2} x^2\right)$ per $x \to 0 \Rightarrow f = o(x^2)$
- $f = -o(x^2) = o(x^2) \quad \lambda = 1$

---

⑥ f è continua in x_0 punto di acc. di $A = \text{dom} f$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$

dim

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$\iff f(x) . f(x_0) = o(1)$ per $x \to x_0$

$\iff f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 294

$$= \frac{\sin x\,(\cos x - 1)}{x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos - 1) =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI

$f, g, \bar{f}, \bar{g}$ DEFINITE SU A, c PUNTO DI ACC. DI A

$\frac{1}{f}, \frac{1}{g}$: c È PUNTO DI ACC. DEL dom

$f \sim \bar{f}$, $g \sim \bar{g}$ PER $x \to c \Rightarrow$

① $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to c} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$

E $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$

$\sin x \sim x$

$1 - \cos \sim \frac{1}{2} x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)\, x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2} x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2} x^2}$$

② $\exists \lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow \exists \lim \bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x)$

E $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \bar{f}(x) \cdot g(x)$

$f \sim \bar{f}$

$g \sim \bar{g}$

$\bar{f} = f + o(f)$ PER $x \to c$

$\bar{g} = g + o(g)$ PER $x \to c$

$\Downarrow$

① $\lim_{x \to c} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$\lim_{x \to c} \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

② $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim \bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x)$

① $$\lim_{x \to c} \frac{f(x) + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x \to c} \frac{f\left(1 + \frac{o(f)}{f}\right)}{g\left(1 + \frac{o(g)}{g}\right)}$$

$\frac{o(f)}{f} \to 0$ PER $x \to 0$

$\frac{o(g)}{g} \to 0$ PER $x \to c$

29-10-13

ESERCIZI

$\sin x - tg\, x$ PER $x \to 0$

$$\sin x - \frac{\sin}{tg\, x} = \frac{\sin x \cdot \cos - \sin x}{\cos x} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}\cdot(\cos x - 1) = tg\, x \cdot (\cos x - 1)$$

$tg\, x \sim x$ PER $x \to 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} f \sim \bar{f} \\ g \sim \bar{g}\end{array}\right| \Rightarrow f\cdot g \sim \bar{f}\cdot\bar{g}$

$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ PER $x \to 0$

$tg\, x(\cos x - 1) \sim x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)$ PER $x \to 0$

$\boxed{\sin x \cdot tg\, x \sim \frac{1}{2}x^3}$

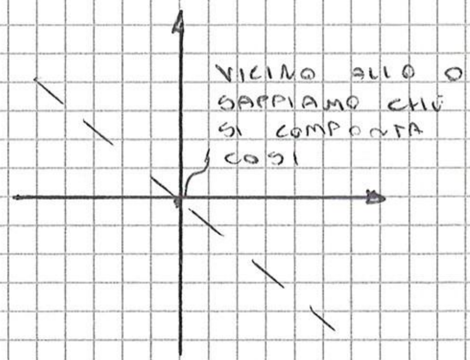
$\sin x - tg\, x \sim -\frac{1}{2}x^3 + o\left(-\frac{1}{2}x^3\right)$ PER $x \to 0$

$\boxed{\sin x - tg\, x = -\frac{1}{2}x^3 + (x^3) \text{ PER } x \to 0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - tg\, x}{2x^2 - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{2x^2 + \cancel{o(2x^2)}} = 0$$

$$\frac{-x^3}{2x^2} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - tg\, x}{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{4}x$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \alpha \neq 0$$

$(1+x^n)^{\alpha}_n - 1 \sim x$ PER $x \to 0$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(\alpha x) = \alpha x + o(x)$ PER $x \to 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ PER $x \to 0$

- $f(x) \to 0$ PER $x \to c$

$(1+f(x))^\alpha = 1 + \alpha(f(x))^\alpha + o(f(x))$ PER $x \to c$

→

$$= -\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{x^{12/7}} + o\left(\frac{1}{x^{12/7}}\right) \quad \text{PER } x \to \pm\infty$$

ORDINE DI INFINITESIMO

$f(x)$ È INFINITESIMA PER $x \to c$ SE $\lim_{x\to c} f(x) = 0$

ANCHE $f(x) = o(1)$ PER $x \to c$

$f(x)$, $g(x)$ INFINITESIME PER $x \to c$ $\quad A = \text{dom } f, g$

$\exists B(c) \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$

① $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ ES. $\text{sen } x \overset{\sim}{\cap} x$ PER $x \to 0$ $\text{sen} - \text{tg} = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$	$f \overset{\sim}{\cap} g$ $x \to c$	f E g HANNO LO STESSO ~~...~~ ORDINE DI INFINITESIMO
② $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ES $1 - \cos x$ HA UN ORDINE INFINIT. SUPERIORE DI $\text{sen } x$ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\text{sen } x} =$ $= \lim_{x\to c} \frac{1/2\, x^2}{x} = 0$	$f = o(g)$ $x \to c$	f HA UN ~~...~~ ORDINE DI INFINITESIMO SUPERIORE A g PER $x \to c$
$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$	$g = o f$ $x \to c$	f HA ORDINE DI INFINITESIMO INFERIORE A g PER $x \to c$
$\nexists \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ ES. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \text{sen } x$ $g(x) = \frac{1}{x}$ PER $x \to +\infty$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}\text{sen } x}{1/x}$ IL SEN NON HA LIMITE		INFINITESIMI NON CONFRONTABILI.

$$\sqrt[7]{x^2-1} - \sqrt[7]{x^2+1} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{x^{12/7}} + o\left(\frac{1}{x^{12/7}}\right)$$ ← VISTO PRIMA

$$= \underbrace{-\frac{2}{7}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{12}{7}}} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{12}{7}}\right) \quad \text{PER } x \to \pm\infty$$

PARTE PRINCIPALE RISPETTO $\frac{1}{x}$ PER $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

HA ORDINE INFINITESIMO $\frac{12}{7}$ RISPETTO A $\frac{1}{x}$ PER $x \to \pm\infty$

ORDINE DI INFINITO

$f(x)$, $g(x)$ INFINITI PER $x \to c$ CIOÈ

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty \qquad \lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty$$

$\frac{1}{x}$ PER $x \to 0$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ f E g HANNO LO STESSO ORDINE DI ∞ PER $x \to c$

ES $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+\ln x}{3x^3+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+o(x^3)}{3x^3+o(x^3)} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$	$f(x) \asymp g(x)$ $x \to c$	STESSO ORDINE DI INFINITO PER $x \to c$
$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$f(x) = o(g(x))$ $x \to c$	f HA ORDINE DI ∞ INFERIORE DELL'ORDINE DI g, PER $x \to c$
ES $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+3x}{x^7-2x-\sqrt{x}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^7} = 0$		
$\lim_{x\to c} \left\lvert\frac{f(x)}{g(x)}\right\rvert = +\infty$	$g(x) = o\,f(x)$ $x \to c$	f HA ORDINE DI ∞ SUPERIORE ALL'ORDINE DI g PER $x \to c$
$\nexists \lim_{x\to c} \left\lvert\frac{f(x)}{g(x)}\right\rvert$		f E g SONO ∞ NON CONFRONTABILI PER $x \to c$

$$x^{8/9}\left[1+\frac{1}{9}f(x)+o(f(x))\right]=$$

$$x^{8/9}+\underbrace{x^{8/9}\cdot\frac{1}{9}f(x)}_{o(1)}+x^{8/9}\cdot o(f(x))$$

$f(x)=o(1)$ per $x\to+\infty$

$$x^{8/9}+x^{8/9}\underbrace{[o(1)+o(1)]}_{o(1)}=x^{8/9}+o(x^{8/9})\quad x\to+\infty$$

$$\underline{f(x)=\sqrt[9]{x^8+3x+\sin x}=x^{8/9}+o(x^{8/9})}\quad \text{per } x\to+\infty$$

ESERCIZIO

① $\begin{cases} f(x)=o(x^3) & x\to 0\\ g(x)=o(x^4) & x\to 0\end{cases} \Big| = f+g=o(?)$

② $\begin{cases} f(x)=o(x^3) & x\to +\infty\\ g(x)=o(x^4) & x\to +\infty\end{cases} \Big| = f+g=o(?)$

---

e^x $x\to+\infty$ è vero che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty\quad\forall\alpha>0}$$

PER DIMOSTRARLO SERVE HOPITAL

(5) $\lim_{x \to 0} x^2 \log x = \lim_{x \to 0} \dfrac{\log x}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$\frac{1}{x} = t \to +\infty$ per $x \to 0$

$x > 0$

$\lim_{x \to 0} x^2 \log x = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\log \frac{1}{t}}{t^2} = \lim_{x \to \infty} -\dfrac{\log t}{t^2} = 0^-$

SCALA DEGLI INFINITI

$\log x \quad x^2 \quad e^x \quad \pi^x \quad x^x$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{e^x} =$ con $a > 1$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^x \begin{cases} +\infty & a > e \\ 1 & a = e \\ 0 & 1 < a < e \end{cases}$

x^x

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^x}{a^x}$ con $a > 1$

$= \dfrac{e^{\log x^x}}{e^{\log a^x}} = \dfrac{e^{x \log x}}{e^{x \log a}} = e^{x \log x - x \log a}$

$\lim_{x \to +\infty} e^{x \underbrace{(\log x - \log a)}_{+\infty}} = +\infty$

x^x HA ORDINE DI ∞ SUPERIORE AD a^x $\forall a > 1$

$\log n, \quad n^2 \quad e^n \quad n^n$

$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$

$\downarrow$
FATTORIALI

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\log n \quad n^2 \quad e^n \quad n! \quad n^n$