



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1621A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Botta

MATERIA: Meccanica dei Fluidi. Prof.Boano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

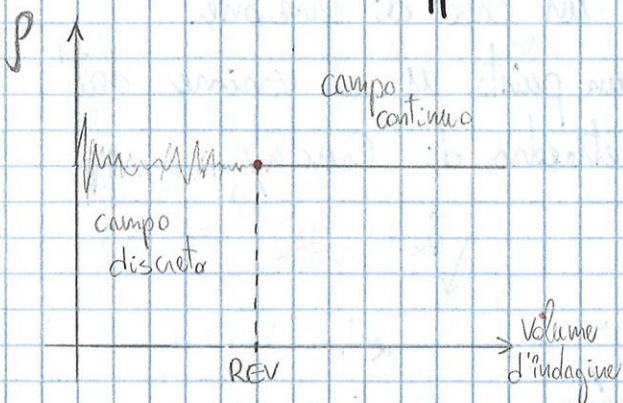
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INTRODUZIONE E ANALISI DEGLI SFORZI

Si definisce fluido un materiale (costituito da una miscela o da una sola sostanza) che può subire variazioni di forma con forze modeste.

La deformazione imposta è permanente, e le forze necessarie sono tanto minori minore è la velocità di deformazione.

I fluidi si classificano come liquidi o gas. I liquidi sono incompressibili (poco comprimibili), cioè oppongono grande resistenza alle variazioni di volume. I gas invece sono comprimibili, vale a dire che alle variazioni di volume viene opposta una scarsa resistenza.



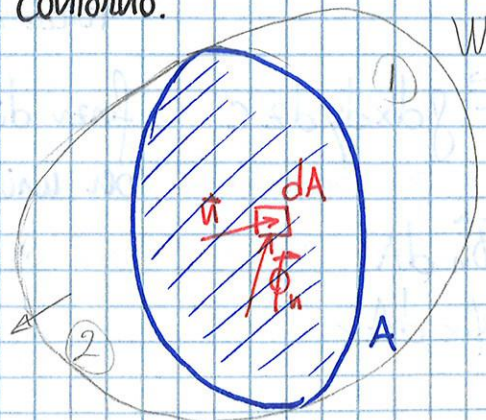
I fluidi vengono studiati come materia continua per avere le grandezze costanti nel volume d'indagine.

Il più piccolo volume d'indagine per cui si è ancora in campo continuo è il volume rappresentativo elementare o REV.

Il più piccolo volume d'indagine per cui si è ancora in campo continuo è il volume rappresentativo elementare o REV.

Su di un fluido possono agire due tipi di forze: forze di massa, che sono proporzionali alla massa di fluido, e forze di superficie, che si applicano al contorno.

Dato un volume di fluido W che viene diviso da una superficie di separazione, sulla superficie A deve essere applicato un sistema di forze \vec{T} per mantenere



$$\vec{\phi}_y dA_y$$

$$\vec{\phi}_z dA_z$$

Con la trigonometria si trovano dA_x, dA_y, dA_z

$$dA_x = dA \cos \alpha = -dA \cos(\pi - \alpha) = -dA \cos(\nu_x)$$

$$dA_y = dA \cos \beta = -dA \cos(\pi - \beta) = -dA \cos(\nu_y)$$

$$dA_z = dA \cos \gamma = -dA \cos(\pi - \gamma) = -dA \cos(\nu_z)$$

Per l'equilibrio del tetraedro deve valere:

$$\Sigma \text{forze} = 0$$

Le forze di massa risultano infinitesimi del 3° ordine ($dx dy dz$), mentre le forze di superficie sono del 2° ordine (dA_i), quindi per l'equilibrio le forze di massa risultano trascurabili.

$$\Sigma \text{forze sup.} = 0$$

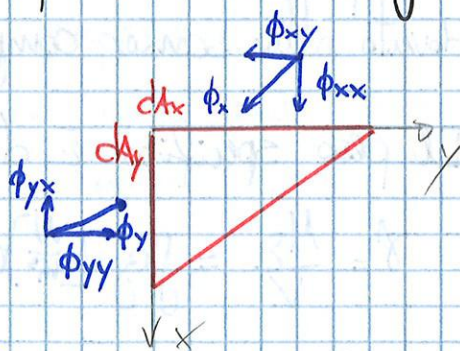
$$\vec{\phi}_n dA - \vec{\phi}_x dA \cos(\nu_x) - \vec{\phi}_y dA \cos(\nu_y) - \vec{\phi}_z dA \cos(\nu_z) = 0$$

$$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_x \cos \nu_x + \vec{\phi}_y \cos \nu_y + \vec{\phi}_z \cos \nu_z$$

Lo sforzo nel punto M risulta una combinazione lineare omogenea di tre sforzi che agiscono su tre piani che contengono il punto M e perpendicolari tra loro.

Esplicitando la forma vettoriale:

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \phi_{xx} \cos(\nu_x) + \phi_{yx} \cos(\nu_y) + \phi_{zx} \cos(\nu_z) \\ \phi_{ny} = \phi_{xy} \cos(\nu_x) + \phi_{yy} \cos(\nu_y) + \phi_{zy} \cos(\nu_z) \\ \phi_{nz} = \phi_{xz} \cos(\nu_x) + \phi_{yz} \cos(\nu_y) + \phi_{zz} \cos(\nu_z) \end{cases}$$



Lo sforzo ϕ_{ii} prende il nome di tensione (o sforzo) normale σ_i .

Lo sforzo ϕ_{ij} prende il nome di sforzo tangenziale τ_{ik} .

Si dimostra che $\phi_{ij} = \phi_{ji}$.

$$\Delta W = - \frac{\Delta P W}{\epsilon}$$

Per basse comprimibilità ϵ è grande, per l'acqua

vale $\epsilon_{H_2O} = 2 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$

ES. Acqua: $W = 1 \text{ l}$ $\Delta P = 10^5 \text{ Pa}$ $\epsilon_{H_2O} = 2 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$

$$\Delta W = - \frac{\Delta P W}{\epsilon} = - \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{2 \times 10^9} = - 0.5 \times 10^{-7} \text{ m}^3 = - 0.5 \times 10^{-1} \text{ cm}^3$$

Per i liquidi quindi è possibile approssimare il loro comportamento a fluidi incompressibili data la scarsa variazione di volume.

Per i gas l'equazione caratteristica della densità discende dall'equazione dei gas perfetti:

$$PV = nRT \quad \text{con } R = 8312 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

$$\frac{PV}{Mg} = \frac{1}{Mg} nRT$$

ricordando $\gamma = \rho g$ ed esplicitando $\frac{R}{g}$

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{8312 T}{P.M.}$$

L'equazione caratteristica della densità risulta ancora proporzionale alla pressione e alla temperatura.

Anche il modulo di elasticità può essere dedotto dalle relazioni dei gas ideali per la trasformazione politropica:

$$PV^n = \text{cost.} \quad n \text{ indice della trasformazione}$$

$$\frac{PV^n}{(Mg)^n} = \frac{P}{\gamma^n} = \text{cost.}$$

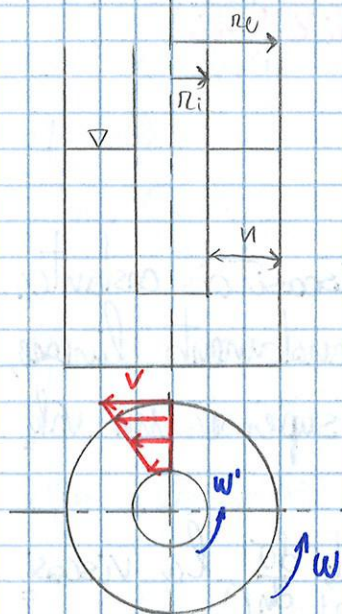
per variazioni di volume la massa rimane costante:

$$M = \rho W \quad dM = 0$$

$$d(\rho W) = d\rho W + \rho dW = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dW}{W}$$

la variazione di volume vale anche:

Un fluido trasmette il moto tra i suoi strati attraverso lo scambio di sforzi tangenziali, tale proprietà è determinata dalla viscosità.



VISCOSIMETRO

Il dispositivo rappresenta un viscosimetro. Avviando la rotazione del cilindro esterno si osserva l'aderenza tra il fluido e le sue pareti, seguita da una progressiva movimentazione di tutto il fluido fino allo stato in aderenza con il cilindro interno che ne causa la messa in rotazione.

Per impedire la rotazione del cilindro interno occorre applicare una coppia esercitata dalla forza T che vale:

$$T \propto \text{sup. laterale} \cdot \frac{\omega r_e - \omega r_i}{r_e - r_i} = 2\pi r_i h_i \frac{\omega r_e - \omega r_i}{r_e - r_i} \sim \frac{d\omega}{dr}$$

per menti piccoli ($r_e - r_i = h < l$)

$$T \propto A \frac{d\omega}{dr}$$

Esplicitando la proporzionalità attraverso la viscosità dinamica μ si ottiene la legge di Newton:

$$\tau = \frac{T}{A} = \mu \frac{d\omega}{dr} \quad \mu_{H_2O} = 10^{-3} \frac{kg}{ms}, \quad \mu_{aria} = 1,8 \times 10^{-5} \frac{kg}{ms}$$

La grandezza $\frac{d\omega}{dr}$ rappresenta il gradiente di velocità nel mezzo. Dalla legge di Newton si osserva che in assenza di gradiente non esistono sforzi tangenziali τ ma solo eventuali sforzi normali, tale condizione è detta fluido in quiete.

È possibile definire la viscosità cinematica come:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \nu_{H_2O} = 10^{-6} \frac{m^2}{s}, \quad \nu_{aria} = 1,5 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

diventa:

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \sigma_x \cos(\alpha_x) + z_z \cos(\alpha_y) + z_y \cos(\alpha_z) = \sigma_x \cos(\alpha_x) \\ \phi_{ny} = z_z \cos(\alpha_x) + \sigma_y \cos(\alpha_y) + z_x \cos(\alpha_z) = \sigma_y \cos(\alpha_y) \\ \phi_{nz} = z_y \cos(\alpha_x) + z_x \cos(\alpha_y) + \sigma_z \cos(\alpha_z) = \sigma_z \cos(\alpha_z) \end{cases}$$

per la quiete anche $\vec{\phi}_n$ deve avere sola componente normale

quindi:

$$\vec{\phi}_n = \sigma_n \vec{n}$$

Unendo le due relazioni in un equilibrio si ottiene

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \sigma_x \cos(\alpha_x) = \sigma_n \cos(\alpha_x) \rightarrow \sigma_x = \sigma_n \\ \phi_{ny} = \sigma_y \cos(\alpha_y) = \sigma_n \cos(\alpha_y) \rightarrow \sigma_y = \sigma_n \\ \phi_{nz} = \sigma_z \cos(\alpha_z) = \sigma_n \cos(\alpha_z) \rightarrow \sigma_z = \sigma_n \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n$$

Gli sforzi di un sistema in quiete sono quindi isotropi, cioè il valore dello sforzo in un punto è lo stesso qualunque sia la giacitura del piano. Lo sforzo è detto pressione e ha la stessa intensità qualunque sia l'orientamento della superficie, tale principio è noto come principio di Pascal.

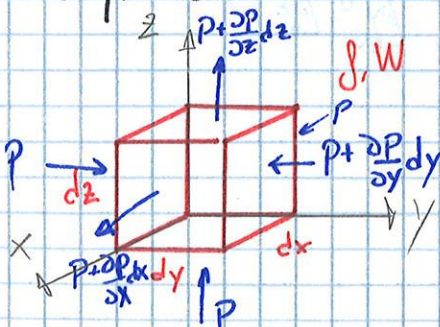
$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

$$1 atm = 101330 Pa$$

$$1 bar = 10^5 Pa$$

$$1 atc = 1 \frac{kgf}{cm^2} = \frac{9.806}{10^4} Pa$$

Per ricavare l'equazione indefinita della statica si consideri l'equilibrio di un elemento infinitesimo del fluido:



$$W = dx dy dz$$

$$M = \rho dx dy dz$$

$$\rho g = \gamma$$

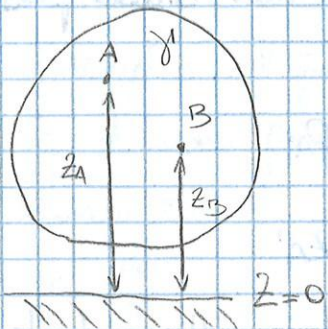
$$-\gamma \text{ grad } z = \text{grad } p$$

$$-\text{grad } z = \text{grad } \frac{p}{\gamma}$$

$$-z = \frac{p}{\gamma} + \text{cost.}$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost.}$$

tale relazione è nota come legge di Stevin. z rappresenta la quota del fluido rispetto al riferimento, $\frac{p}{\gamma}$ è detta altezza piezometrica, mentre il primo membro prende il nome di quota piezometrica.



La legge di Stevin è applicabile su tutti i punti di uno stesso fluido.

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

$$p_A = p_B + \gamma(z_B - z_A)$$

$$(z_B - z_A) < 0 \rightarrow p_A < p_B$$

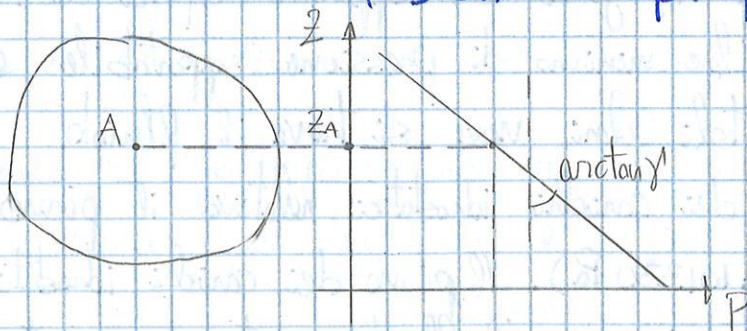
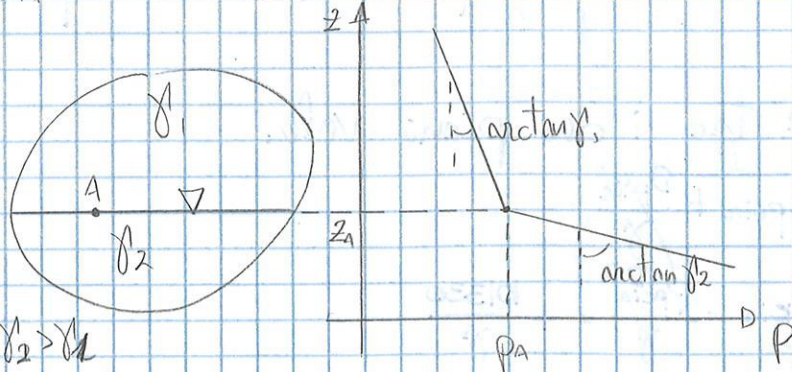


DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI

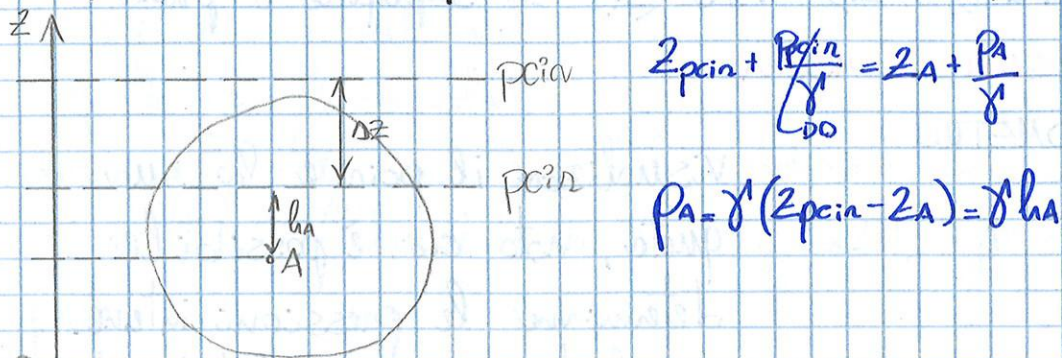


A appartiene sia a γ_1 che a γ_2

$$\gamma_2 > \gamma_1$$

DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI DI 2 FLUIDI IN QUIETE

Conoscere la posizione dei piani permette di conoscere la pressione di ogni punto del fluido nota la quota:

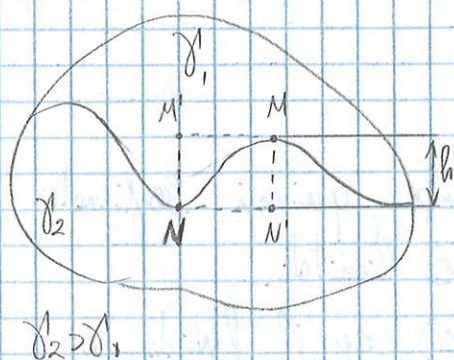


Si definisce h_A come affondamento del punto A, se è positivo il punto A si trova sotto al z_{pcin} , mentre se h è negativo il punto A è al di sopra del z_{pcin} .
 Dalla relazione precedente è facile ricavare il valore dell'affondamento:

$$h_A = \frac{P_A}{\gamma}$$

Conoscere quindi la posizione dei piani e la pressione di un punto permette di valutare la posizione.

Segue la dimostrazione che nel caso idrostatico la superficie di separazione di due fluidi è un piano orizzontale:



Dimostrazione per assurdo: la superficie non è piana.

$$z_M = z_{M'} \Rightarrow P_M = P_{M'}$$

$$z_N = z_{N'} \Rightarrow P_N = P_{N'}$$

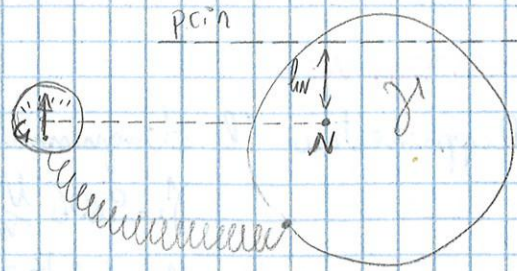
$$z_M + \frac{P_M}{\gamma_1} = z_{M'} + \frac{P_{M'}}{\gamma_1}$$

$$P_N = P_{N'} + \gamma(z_{M'} - z_{N'}) = P_{M'} + \gamma h$$

$$z_{N'} + \frac{P_{N'}}{\gamma_2} = z_M + \frac{P_M}{\gamma_2}$$

$$P_{N'} = P_M + \gamma_2(z_M - z_{N'}) = P_M + \gamma_2 h$$

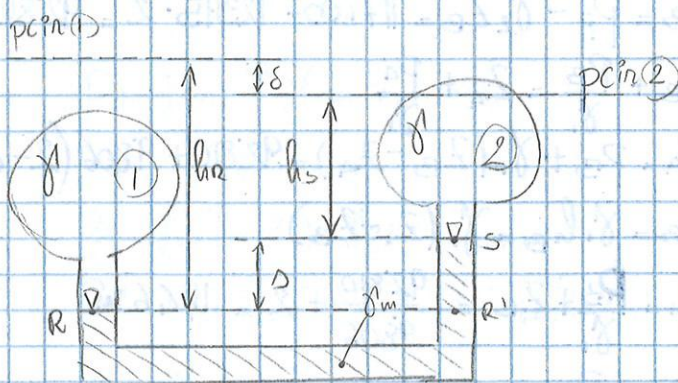
che aziona il quadrante di un manometro.



La pressione visualizzata è quella del fluido alla stessa quota del baricentro del quadrante, noto tale valore si trova l'affondamento h_m e quindi la posizione del p_{cin} .

MANOMETRO DIFFERENZIALE

serve per valutare la distanza tra due contenitori p_{cin} di due contenitori con lo stesso fluido γ .



Il piano più in alto appartiene al contenitore il cui ramo presenta meno fluido manometrico, questo perché si trova ad una pressione superiore.

Il manometro fornisce il valore del dislivello Δ , noto il quale si ricava s :

$$p_a = p_{a'} = \gamma h_r$$

$$p_{a'} = \gamma_m \Delta + p_s = \gamma_m \Delta + \gamma h_s = \gamma_m \Delta + \gamma (h_r - s - \Delta)$$

$$\gamma h_r = \gamma h_r - \gamma s - \gamma \Delta + \gamma_m \Delta$$

$$s = \Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} = \Delta \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)$$

Si usa un fluido manometrico con $\gamma_m > 2\gamma$ quando si prevedono grandi Δ . Per piccoli Δ $\gamma_m < \gamma$ e il tubo a h_r concavità opposta.

$$P_A = P_{A'} = P_n + \Delta_3 \gamma_m$$

$$P_n = P_{n'} = P_s - \Delta \gamma_1$$

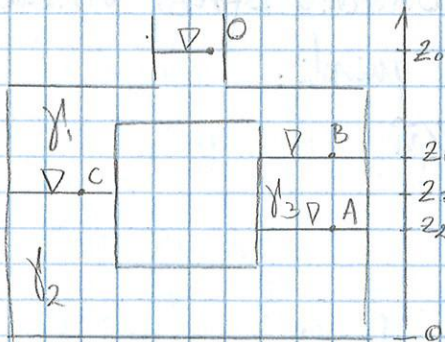
$$P_s = P_{s'} = P_1 + \Delta_1 \gamma_m$$

$$P_A = P_{D_0} + \Delta_1 \gamma_m - \Delta_2 \gamma_1 + \Delta_3 \gamma_m = \gamma_m (\Delta_1 + \Delta_3) - \gamma_1 \Delta_2 =$$

$$= 133362 (0,35 + 0,30) - 9806 \cdot 0,25 = 86233 \text{ Pa}$$

$$h_A = \frac{P_A}{\gamma_A} = \frac{86233}{9806} = 8,58 \text{ m}$$

E3. Dimostrare che la posizione dei piani di separazione è indipendente da z_0 .



$$P_A = P_B + \gamma_3 (z_1 - z_2) = P_0$$

$$P_B = P_0 + \gamma_1 (z_0 - z_1)$$

$$P_A = \gamma_1 (z_0 - z_1) + \gamma_3 (z_1 - z_2)$$

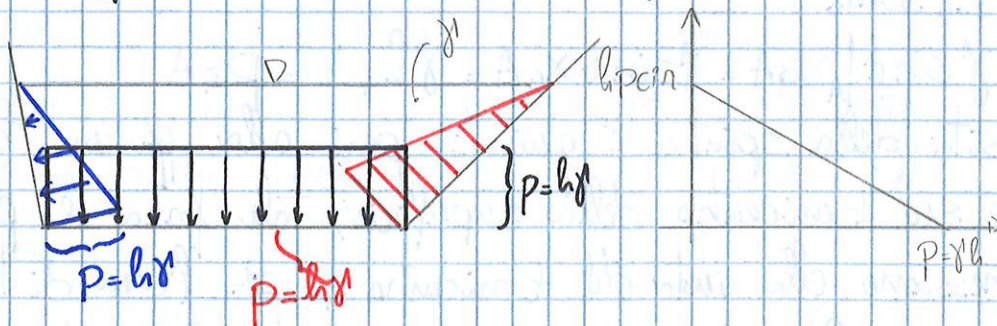
$$P_{A'} = P_C + \gamma_3 (z_3 - z_1) = P_0 + \gamma_2 (z_0 - z_3) + \gamma_3 (z_3 - z_1)$$

$$P_A = P_{A'}$$

$$\gamma_1 z_0 - \gamma_1 z_1 + \gamma_3 z_1 - \gamma_3 z_2 = \gamma_1 z_0 - \gamma_1 z_3 + \gamma_3 z_3 - \gamma_3 z_1$$

$$\gamma_2 z_1 + \gamma_1 z_3 + \gamma_3 z_1 = \gamma_3 z_3 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 \quad \text{CVD}$$

E4. Rappresentare l'andamento delle pressioni:



$$P_A = P_A' = P_n + \Delta_3 \gamma_m$$

$$P_n = P_n' = P_s - \Delta \gamma_1$$

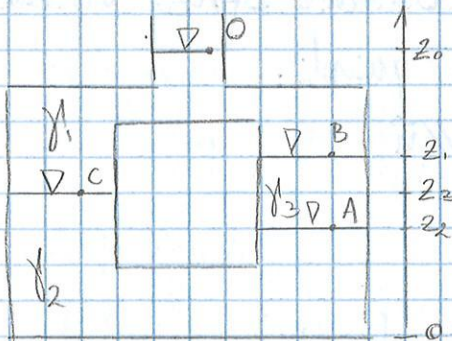
$$P_s = P_s' = P_r + \Delta_1 \gamma_m$$

$$P_A = P_{D_0} + \Delta_1 \gamma_m - \Delta_2 \gamma_1 + \Delta_3 \gamma_m = \gamma_m (\Delta_1 + \Delta_3) - \gamma_1 \Delta_2 =$$

$$= 133362 (0,35 + 0,30) - 9806 \cdot 0,25 = 86233 \text{ Pa}$$

$$h_A = \frac{P_A}{\gamma_1} = \frac{86233}{9806} = 8,58 \text{ m}$$

E3. Dimostrare che la posizione dei piani di separazione è indipendente da z_0 .



$$P_A = P_B + \gamma_3 (z_1 - z_2) = P_B$$

$$P_B = P_0 + \gamma_1 (z_0 - z_1)$$

$$P_A = \gamma_1 (z_0 - z_1) + \gamma_3 (z_1 - z_2)$$

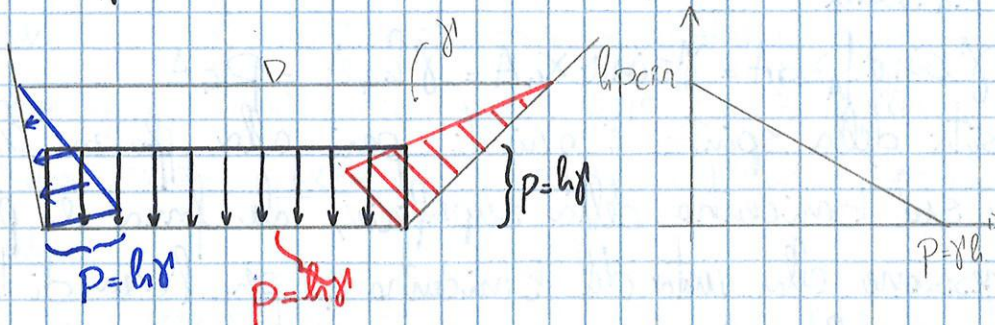
$$P_A' = P_C + \gamma_3 (z_3 - z_1) = P_0 + \gamma_2 (z_0 - z_3) + \gamma_3 (z_3 - z_1)$$

$$P_A = P_A'$$

$$\gamma_1 z_0 - \gamma_1 z_1 + \gamma_3 z_1 - \gamma_3 z_2 = \gamma_1 z_0 - \gamma_1 z_3 + \gamma_3 z_3 - \gamma_3 z_1$$

$$\gamma_2 z_1 + \gamma_1 z_3 + \gamma_3 z_1 = \gamma_3 z_3 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 \quad \text{CVD}$$

E4. Rappresentare l'andamento delle pressioni



$$\eta y: S \xi = \int x ds = \int_A x \rho dA = \int_A x \gamma h dA = \int_A x \gamma x \sin \alpha dA$$

$$S \xi = \gamma h_c A \xi$$

$$\gamma h_c A \xi = \gamma \sin \alpha \int_A x^2 dA$$

$$x_c \sin \alpha A \xi = \sin \alpha \int_A x^2 dA$$

$$\xi = \frac{\int_A x^2 dA}{x_c A} = \frac{I_{\text{linea}}}{M_{\text{linea}}}$$

dove I_{linea} è il momento d'inerzia rispetto alla linea di sponda, mentre M_{linea} è il momento statico rispetto alla linea di sponda.

Analogamente con l'altro equilibrio:

$$\eta x: S y = \int y ds = \int_A y \rho dA = \int_A y \gamma h dA = \int_A y \gamma x \sin \alpha dA$$

$$S y = \gamma h_c A y$$

$$\gamma h_c A y = \gamma \sin \alpha \int_A x y dA$$

$$x_c \sin \alpha A y = \sin \alpha \int_A x y dA$$

$$\eta = \frac{\int_A x y dA}{x_c A} = \frac{I_{xy}}{M_{\text{linea}}}$$

dove I_{xy} è il momento d'inerzia centrifugo, se x e y sono assi di simmetria della superficie A allora I_{xy} è nullo, quindi anche $\eta = 0$ e quindi C si trova sull'asse di simmetria.

Per il teorema di Huygens-Steiner la coordinata ξ può essere scritta come:

$$\xi = \frac{I_{\text{linea}}}{M_{\text{linea}}} = \frac{I_g + A x_c^2}{A x_c} = \frac{I_g}{A x_c} + x_c$$

Geometricamente la grandezza $\frac{I_g}{A x_c}$ rappresenta la distanza $\bar{c}c$ misurata sul piano π .

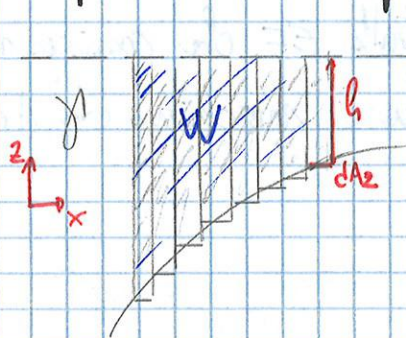
$$\begin{cases} dS_x = dS \cos \alpha_x = \gamma h dA_x \\ dS_y = dS \cos \alpha_y = \gamma h dA_y \\ dS_z = dS \cos \alpha_z = \gamma h dA_z \end{cases}$$

$$S_x = \int dS_x = \int \gamma h dA_x = \gamma h_{ax} A_x$$

$$S_y = \int dS_y = \int \gamma h dA_y = \gamma h_{cy} A_y$$

Le proiezioni A_x e A_y sono superfici piane quindi si applica la formulazione della spinta su superfici piane $S = \gamma h a$.
Va notato che A_i è l'area della superficie proiettata e h_{ai} è l'affondamento del baricentro della superficie proiettata.

Proiettando lungo z l'affondamento h è variabile a seconda del piano che si proietta



$$dS_z = \gamma h dA_z$$

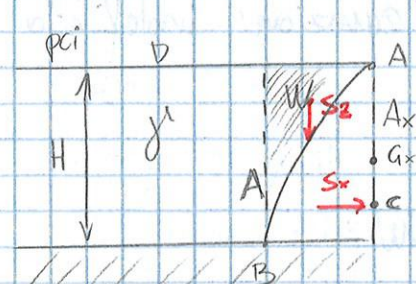
$$S_z = \int dS_z = \int \gamma h dz = \gamma \int h dz$$

$$W = \int h dA_z$$

$$S_z = \gamma W$$

W rappresenta il volume compreso tra la superficie e il pci, la spinta S_z equivale quindi al peso del volume W .

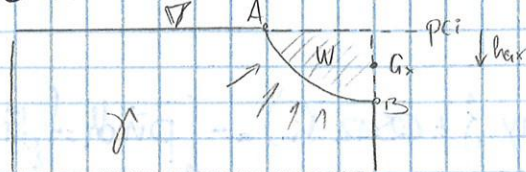
ES. 1



$$S_x = \gamma h_{ax} A_x = \gamma \frac{H}{2} A_x$$

$$S_z = \gamma W$$

ES. 2



$$S_x = \gamma h_{ax} A_x$$

$$S_z = \gamma W > 0 \quad (\text{verso l'alto})$$

$$\int_W \rho \vec{F} dW = \vec{G}$$

$$-\int_A d\vec{\pi} = -\vec{\pi}$$

$$\int_W \rho \vec{F} dW = \int_W \rho \text{grad} p dW \rightarrow \vec{G} = -\vec{\pi}$$

$$\vec{G} + \vec{\pi} = 0$$

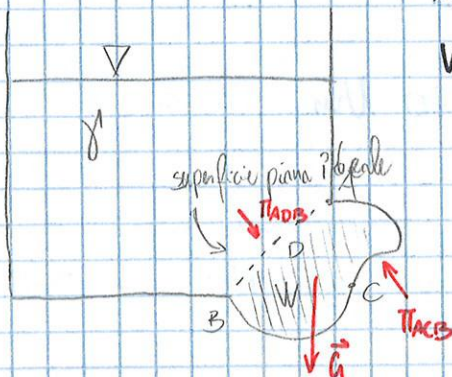
L'ultima relazione rappresenta l'equazione globale dell'equilibrio statico: \vec{G} rappresenta la risultante delle forze di massa su W , $\vec{\pi}$ è la risultante delle spinte di superficie sul fluido.

Applicando l'equazione globale al volume W si trova:

$$\vec{G} + \vec{\pi} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{\pi}_{ACB} + \vec{\pi}_{ADB} = 0$$

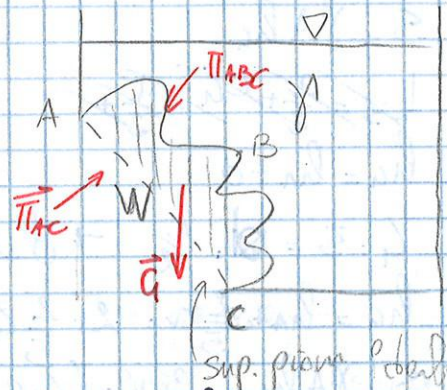
$$-\vec{\pi}_{ACB} = \vec{G} + \vec{\pi}_{ADB} = \rho W \vec{k} + A_{AD} \rho h_{AD} \vec{n}$$



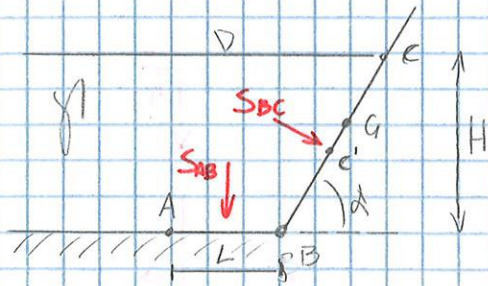
L'equazione globale viene applicata ad un volume W di fluido, nel caso seguente quindi si ipotizza di riempire il volume W con il fluido ρ , in modo che il p.c.m. del volume e del contenitore coincidano. Si applica quindi l'equazione a W :

$$\vec{G} + \vec{\pi}_{ABC} + \vec{\pi}_{AC} = 0$$

$$\vec{\pi}_{AB} = -\vec{G} - \vec{\pi}_{AC}$$



E3 Trovare la lunghezza L^* minima affinché l'elemento non si ribalti. Trovare il valore di α che minimizza L .



$$\begin{aligned} \text{Dl: } S_{AB} b_{SAB} - S_{BC} b_{SBC} &= 0 \\ S_{AB} &= \gamma h_{AB} A_{AB} = \gamma h_{AB} L \cdot 1 \\ b_{SAB} &= \frac{L}{2} \\ S_{BC} &= \gamma h_{BC} \frac{H}{\sin \alpha} \cdot 1 = \gamma \frac{H}{2} \frac{H}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

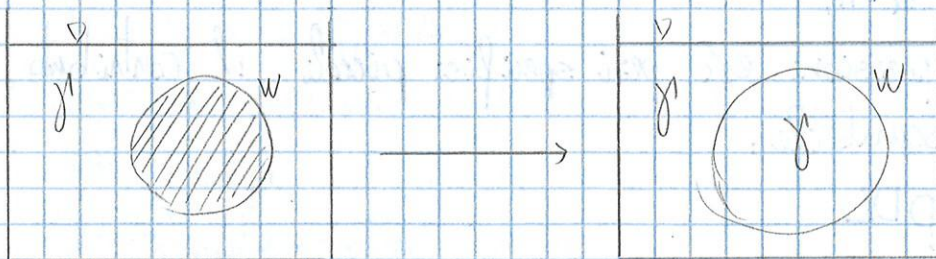
$$b_{SBC} = \overline{C'B} = \frac{1}{3} \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$\gamma H L^2 \frac{1}{2} - \gamma \frac{H^2}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{H}{3 \sin \alpha} = 0 \rightarrow L^2 = \frac{H^2}{3 \sin^2 \alpha}$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$L_{\min}(\alpha) = L(\alpha = 90^\circ) = \frac{H}{\sqrt{3}}$$

SPINTA DI ARCHIMEDE



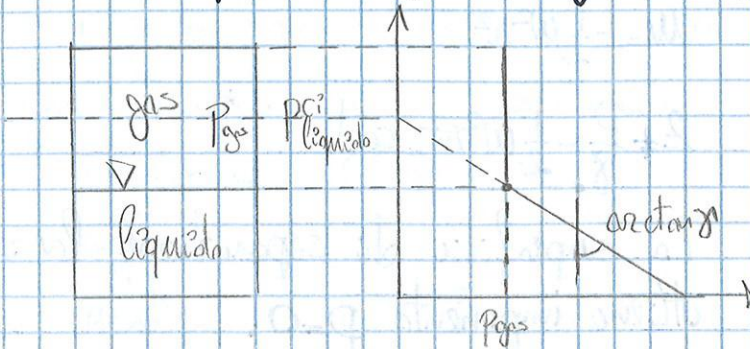
La pressione esercitata dal fluido γ è indipendente dal contenuto del volume W . Per valutare quindi la spinta su un corpo si può sostituire il corpo con il fluido γ e con stesso ρ del resto del fluido, si applica poi l'equazione globale:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0$$

$$\vec{\Pi} = -\vec{G} = -\gamma W \vec{k}$$

Tale spinta è nota come spinta di Archimede ed afferma che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta

L'ipotesi porta il p.c.i. del gas all'infinito ($\gamma \rightarrow 0, h \rightarrow \infty$)



FLUIDO IN QUIETE, CONTENITORE IN MOTO

Se il moto del contenitore non è accelerato il fenomeno è identico. Se il moto è accelerato il sistema non è più inerziale e le forze d'inerzia partecipano all'equilibrio di forze:

$$\vec{f} = (-g \text{grad} z - \vec{A}) m$$

$$\vec{F} = -g \text{grad} z - \vec{A}$$

Se si ammette che l'accelerazione \vec{A} abbia un potenziale:

$$\vec{A} = \text{grad} w$$

$$\vec{F} = -g \text{grad} z - \text{grad} w$$

L'equazione indefinita diventa:

$$\int \vec{F} = \text{grad} p$$

$$\int (-g \text{grad} z - \text{grad} w) = \text{grad} p$$

$$-g \text{grad} z - \int \text{grad} w = \text{grad} p$$

$$\text{grad} z + \frac{1}{g} \int \text{grad} w + \frac{1}{g} \text{grad} p = 0$$

$$\text{grad} \left(z + \frac{w}{g} + \frac{p}{g} \right) = 0$$

$$z + \frac{w}{g} + \frac{p}{g} = \text{cost.}$$

L'equazione è nota come Teorema di Bernoulli:

Si studia ora il caso di un contenitore rotante:

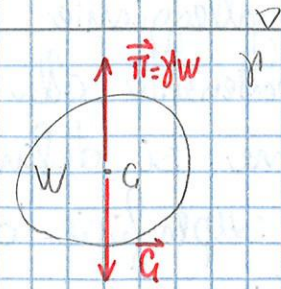
CORPI IMMERSI E CALLEGGIANTI

Un corpo immerso in un fluido può trovarsi in 3 condizioni:

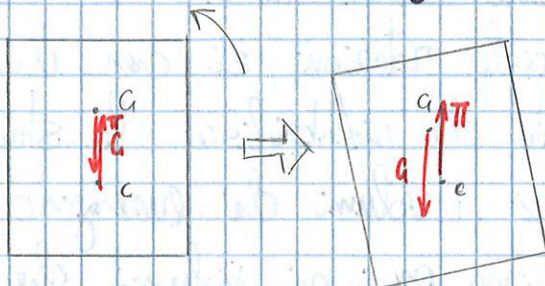
equilibrio: $|\vec{G}| = |\vec{\pi}|$

affonda: $|\vec{G}| > |\vec{\pi}|$

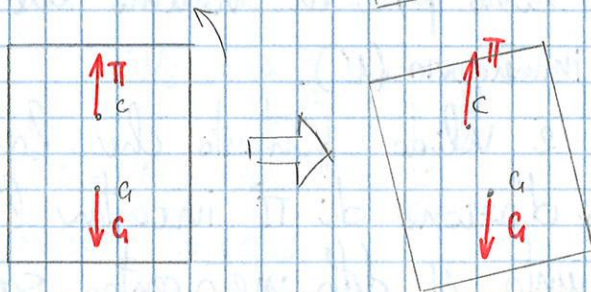
risale: $|\vec{G}| < |\vec{\pi}|$



Se il baricentro G coincide con il centro di spinta, il corpo galleggiante o immerso soggetto ad una rotazione non è in condizione di instabilità. Se ciò non accade si hanno i seguenti casi:

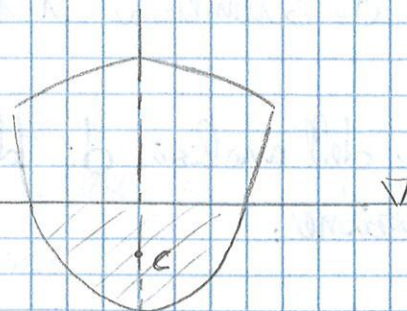


coppia destabilizzante



coppia stabilizzante

Dato un galleggiante si definisce superficie di galleggiamento la superficie di separazione tra parte emersa e parte immersa.



La parte immersa prende il nome di volume di carena e il centro della spinta C è detto centro di carena.

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{NN'}}{\overline{CG}}$$

centro
inverso metacentro

$$\overline{GC'} = \overline{MG} \sin \theta$$

$$\overline{CC'} = \overline{MC} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} U \cdot (\overline{NO}) &= \int_{S_1} x \tan \theta dx = \\ &= \int_{S_1} \tan \theta x^2 dA = \\ &= \tan \theta \int_{S_1} x^2 dA = \tan \theta I_0 \end{aligned}$$

distanza
asse

$$U \cdot (\overline{NO}) = \tan \theta I_0$$

$$U = 0 \Rightarrow U(\overline{NO} + \overline{N'O}) = I_0 \tan \theta + \tan \theta I_0$$

$$U \overline{NN'} = \tan \theta (I_0 + I_0) = \tan \theta I_0$$

Dove I_0 è il momento d'inerzia totale della superficie di galleggiamento.

È ora possibile rinviare la relazione trovata precedentemente:

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{NN'}}{\overline{CG}} = \frac{\tan \theta I_0}{\overline{CG}}$$

$$\overline{CC'} = \overline{MC} \sin \theta = \tan \theta \frac{I_0}{\overline{CG}}$$

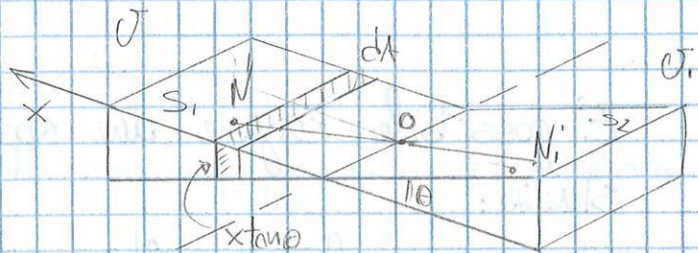
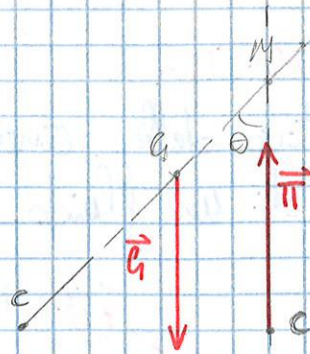
$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$

$$\overline{MC} = \frac{I_0}{\overline{CG}} = \overline{MG} + \overline{GC'}$$

Si definisce \overline{MG} distanza metacentrica.

Dalla relazione risulta che, a parità di peso, se $\overline{GC'}$ è grande la rotazione stabilizzante è più veloce.

Va garantito che il baricentro sia sotto il metacentro



Coppia $\propto \overline{CG}$

$$A_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

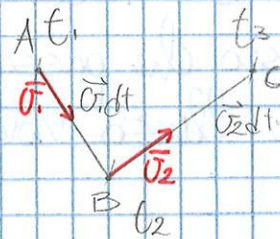
$$A_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

L'accelerazione in un sistema lagrangiano è definita quindi come derivata totale della velocità:

$$\vec{A} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

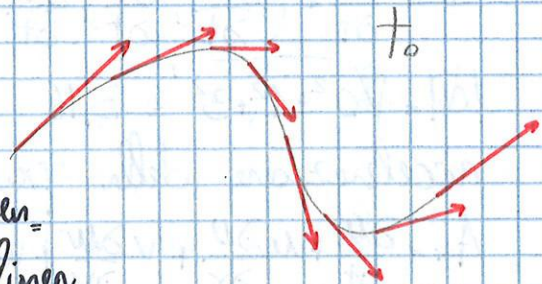
Si definisce traiettoria il luogo dei punti successivamente occupati dalle particelle:

$$\left. \begin{aligned} dx &= u(x,y,z,t) dt \\ dy &= v(x,y,z,t) dt \\ dz &= w(x,y,z,t) dt \end{aligned} \right\} ds = \vec{v} dt$$



Si definisce linea di flusso al tempo t_0 il luogo dei punti tangenti in ogni punto al vettore velocità:

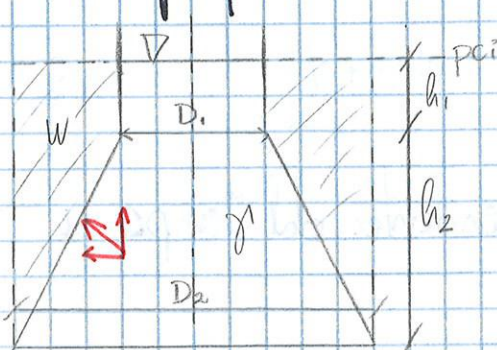
$$\frac{dx}{u(x,y,z,t_0)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t_0)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t_0)}$$



Nel caso la velocità sia indipendente dal tempo, traiettoria e linea di flusso coincidono.

ESERCITAZIONE

Es n°1: Determinare modulo e direzione della spinta sul la superficie troncoconica.



$$D_1 = 1 \text{ m} \quad D_2 = 4 \text{ m} \quad \gamma = 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$h_1 = 2 \text{ m} \quad h_2 = 6 \text{ m}$$

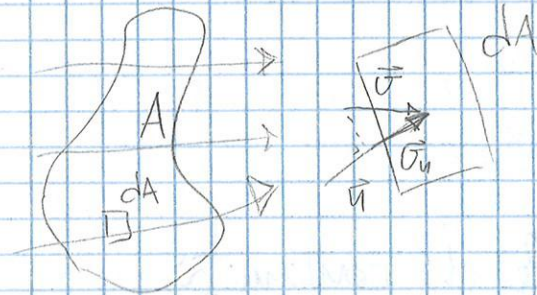
le spinte in direzione radiale si equilibrano per simmetria.

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi h_2 (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = 32,98 \text{ m}^3$$

ha moto permanente o stazionario ($\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$).
 Se il moto è stazionario ed indipendente dallo spazio si ha moto uniforme.

Nelle applicazioni reali l'attrito tra parete e fluido crea una distribuzione parabolica delle velocità: si usa quindi il concetto di moto uniforme in media: la velocità media in una sezione è uguale per tutti i punti della sezione.

Si definisce portata:



$$dQ = \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dA = \sigma_n dA$$

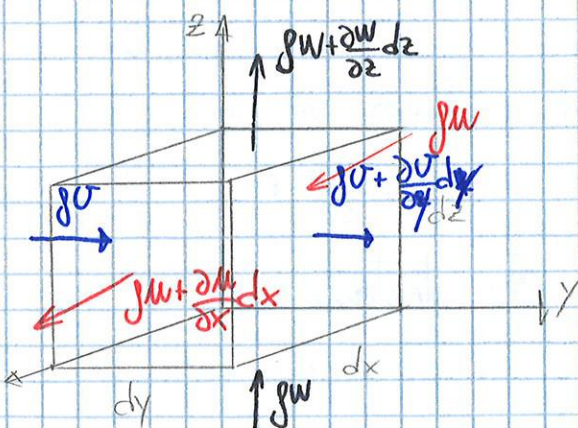
$$Q = \int_A \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dA$$

nel caso di sezione trasversale, ortogonale in ogni punto a $\vec{\sigma}$, si ha $\sigma_n = \sigma$.

Per il calcolo della portata occorre però sapere la distribuzione delle velocità nella sezione, perciò si introduce un'altra definizione di portata usando la velocità media:

$$Q = VA \quad V = V_{media} = \frac{\int_A \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dA}{A}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ'



La quantità di massa entrante meno la quantità uscente vale:

$$\begin{aligned} & \rho u dx dz dt + \rho v dy dz dt + \rho w dx dy dt + \\ & - (\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx) dx dz dt - (\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy) dy dz dt + \\ & - (\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz) dx dy dt = \\ & = - (\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}) dx dy dz dt \end{aligned}$$

che è l'equazione globale di continuità.

Nel caso di fluidi incomprimibili la relazione si semplifica in:

$$\oint_A U_n dA = 0 \rightarrow \int_A U_n dA = 0$$

→ sezioni in cui il flusso è nullo

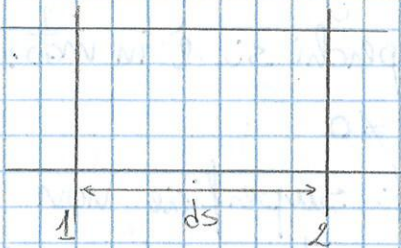
$$A = A_{in} + A_0 + A_{out}$$

$$\int_A U_n dA = \int_{A_{in}} U_n dA + \int_{A_0} U_n dA + \int_{A_{out}} U_n dA = Q_{in} - Q_{out} = 0$$

$$Q_{in} = Q_{out}$$

Si definisce corrente la direzione media del moto del fluido.

Applicando l'equazione di continuità alle correnti si ottiene:



$$\rho Q dt - \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds \right) dt = \frac{\partial A}{\partial t} ds \rho dt$$

$$-\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt = \frac{\partial A}{\partial t} ds \rho dt$$

→ ds costante in dt

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$$

Se il fluido è incomprimibile:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial s} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Se il moto è permanente:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = \text{cost.} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \rightarrow Q = \text{cost in dt} \right)$$

Se invece la corrente è contenuta in tubazioni rigide:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$$Q_1 = Q_2 \text{ costante nella sezione}$$

Nell'ultimo caso se il moto è vario la portata è costante nella

$$\vec{F} \int dx dy dz + \left[-\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}\right) dx dy dz \right] = \int dx dy dz \vec{A}$$

$$j(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}$$

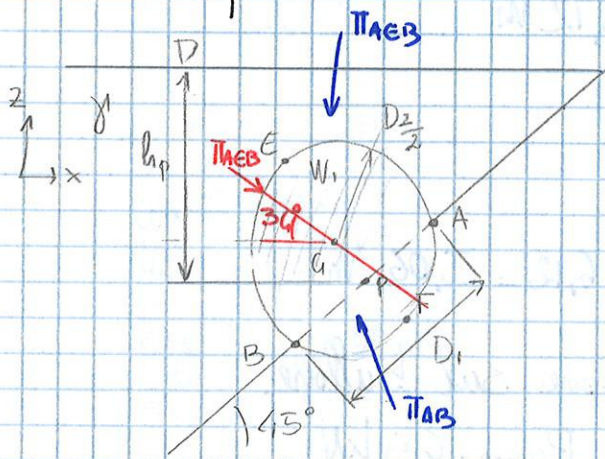
Ovviamente se il fluido è in quiete si riottiene l'equazione della statica:

$$j(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k}$$

$$j\vec{F} = g \nabla p$$

ESERCITAZIONE

Es. n° 1: trovare il modulo e la retta d'azione della spinta sulla sfera.



$$\gamma = 9806 \frac{N}{m^3} \quad D_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$D_1 = 0,3 \text{ m} \quad h_p = 6 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$V_{calotta} = \frac{1}{3} \pi h_1 (3r^2 - h_1^2)$$

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{AEB} + \vec{\Pi}_{AB} = 0$$

$$\Pi_{AB} = A_{AB} \rho p = A_{AB} \gamma h_p = 9806 \cdot 4 \cdot \pi \frac{0,3^2}{4} = 2772,2 \text{ N}$$

$$h_1 = PF = \frac{D_2^2}{2} - OP = \frac{D_2^2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - \frac{D_1^2}{4}} = 0,05 \text{ m}$$

$$G = \gamma W_1 = \gamma (W_{sfera} - W_{calotta}) = 627,1 \text{ N}$$

$$x: \vec{\Pi}_{AEB} = -\vec{G} - \vec{\Pi}_{AB} \rightarrow \Pi_{AEBx} = -G_x - (-\Pi_{ABx}) = \Pi_{ABx} = \Pi_{AB} \sin \alpha = 1960,52 \text{ N}$$

$$z: \vec{\Pi}_{AEB} = -\vec{G} - \vec{\Pi}_{AB} \rightarrow \Pi_{AEBz} = -(-G_z) - (\Pi_{ABz}) = G - \Pi_{AB} \cos \alpha = -1333,62 \text{ N}$$

$$|\vec{\Pi}_{AEB}| = \sqrt{\Pi_{AEBx}^2 + \Pi_{AEBz}^2} = 2371 \text{ N}$$

$$\beta = \arctan \frac{\Pi_{AEBz}}{\Pi_{AEBx}} = 30^\circ$$

per l'equilibrio alla rotazione la retta d'azione passa il centro della sfera.

Es. n° 4: Calcolare la forza al fondo del serbatoio

$D = 3\text{m}$ $p^* = 3\text{bar}$ $\gamma_{\text{carb}} = 0.8 \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$

$v = 10\text{ m/s}^2$ $h = 3\text{m}$

$\vec{F} = \rho \vec{a} \cdot \vec{p}$

$F = -\rho \int (g+a) z - a \cdot V$

$\int (-g-a) = \frac{\partial p}{\partial z}$

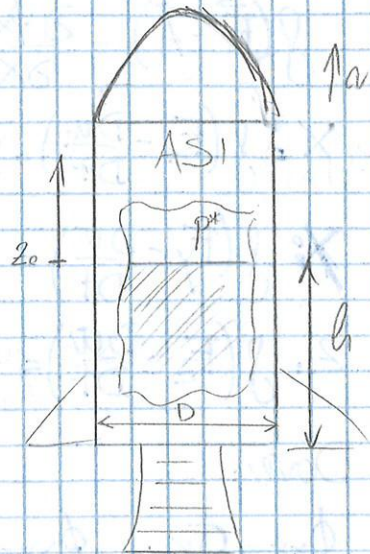
$p = -\int (g+a) z + \text{Cost.}$

$\text{Cost.} = p(z=0) = 3\text{bar} = p^*$

$p = p^* - \int (g+a) z$

$p_A = p^* - \int (g+a) h = 3 \times 10^5 - 0.8 \cdot 9806 (9.81 + 10)(-3) = 367520\text{Pa}$

$S = -p_A \frac{\pi D^2}{4} + p_{\text{atm}} \frac{\pi D^2}{4} = -1.75 \times 10^6\text{N} = -175\text{kN}$



Es. n° 5 Determinare la frazione di volume che emerge.

$\gamma_{\text{ice}} > \gamma_{\text{ghiaccio}}$

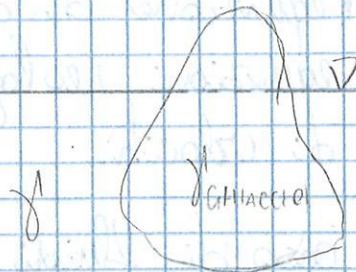
$W_{\text{emerso}} = \alpha W$

$\gamma_{\text{ice}} W = \gamma_{\text{ghiaccio}} (1-\alpha) W$

$\alpha = 1 - \frac{\gamma_{\text{ghiaccio}}}{\gamma_{\text{ice}}}$

γW peso tot

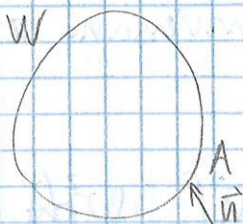
peso
Volume di
fluido spostato



Il sistema è quindi rappresentabile dall'equazione di Eulero:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \rho \nabla p$$

Per trovare l'equazione globale si considera un volume W di superficie A :



$$\int_W \rho \vec{F} dW - \int_W \rho \vec{A} dW = \int_W \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dW$$

le forze di massa sono:

$$\int_W \rho \vec{F} dW = \vec{G} \quad \vec{n} \text{ diretta verso l'interno}$$

mentre le forze di superficie:

$$\int_W \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dW = - \int_A (\phi_x \cos \alpha_x + \phi_y \cos \alpha_y + \phi_z \cos \alpha_z) dA =$$

$$= - \int_A \phi_n dA = -\Pi$$

l'integrale rimanente:

$$- \int_W \rho \vec{A} dW = - \int_W \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} w \right) dW =$$

$$= - \int_W \left(\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right) dW$$

la prima parte rappresenta la risultante delle inerzie locali o la variazione nel tempo della quantità di moto del fluido in W :

$$- \int_W \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dW = - \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \vec{u} dW = \vec{I}$$

nel caso di moto permanente e fluido incompressibile $\vec{I} = 0$.
La seconda parte invece rappresenta il flusso di quantità di moto attraverso la superficie A :

$$- \int_W \left(\frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right) dW = -(-1) \int_A \rho \vec{u} (\cos \alpha_x u + \cos \alpha_y v + \cos \alpha_z w) dA =$$

$$= + \int \rho \vec{u} \phi_n dA$$

$$\rho \phi_n dA = \frac{massa}{dt}$$

$$\vec{u} \phi_n dA = \frac{q \, dm}{dt}$$

\vec{n} entrante

$$x: \pi_{0x} + M_{11x} - M_{01x} = \pi_{0x} + M_{11} - M_{01} \cos \alpha = 0$$

$$\pi_{0x} = -\beta \rho V^2 a + \beta \rho V^2 a \cos \alpha = \beta \rho V^2 a (\cos \alpha - 1)$$

$$y: \pi_{0y} + M_{11y} - M_{01y} = \pi_{0y} - M_{01} \sin \alpha = 0$$

$$\pi_{0y} = \beta \rho V^2 a \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} |\pi_0| &= \sqrt{\pi_{0x}^2 + \pi_{0y}^2} = \sqrt{(-\beta \rho V^2 a)^2 (1 - \cos \alpha)^2 + (\beta \rho V^2 a)^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \beta \rho V^2 a \sqrt{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \beta \rho V^2 a \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \alpha} = \\ &= \beta \rho V^2 a \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\pi_{0 \max} = \pi_0(\alpha^*) \rightarrow \alpha^* = 180^\circ \quad \cos \alpha^* = -1$$

$$\pi_{0 \max} = \beta \rho V^2 a \cdot 2$$

TEOREMA DI BERNULLI

Per enunciare il teorema di Bernoulli occorre imporre 5 ipotesi preliminari. Le prime tre sono:

- Hp1: Fluido perfetto: vale l'equazione di Eulero.
- Hp2: Fluido nel campo gravitazionale: il peso è la forza di massa.
- Hp3: Fluido incompressibile.

Le ultime due ipotesi verranno introdotte durante la trattazione.

Si inizia scrivendo l'equazione di Eulero:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad} p \quad (\text{Hp1})$$

$$\vec{F} = -\rho \text{grad} z \quad (\text{Hp2})$$

$$\rho(-\rho \text{grad} z) - \rho \vec{A} = \text{grad} p$$

$$-\rho \text{grad} z - \rho \vec{A} = \text{grad} p$$

Dividendo tutto per ρ :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Dv}{Dt}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} \right)$$

• Hp 4: moto stazionario.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$$

• Hp 5: moto lungo una traiettoria.

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost. lungo } s$$

L'ultima espressione è il teorema di Bernoulli ed afferma che ogni traiettoria mantiene costante il suo carico totale H . Il carico totale ha le dimensioni di una lunghezza e rappresenta l'energia meccanica per unità di peso del fluido. La quota z rappresenta l'energia potenziale per unità di peso, l'altezza piezometrica $\frac{p}{\gamma}$ è l'energia di pressione per unità di peso dovuta alla distribuzione delle pressioni; assieme quota e altezza piezometrica sono la quota piezometrica h . L'altezza cinetica $\frac{v^2}{2g}$ rappresenta l'energia cinetica per unità di peso.

Si prenda un caso che rispetti tutte e 5 le ipotesi del teorema di Bernoulli. Tutti i punti della traiettoria avranno lo stesso carico totale.

$$H_A = H_B = H_C = H_D = H$$

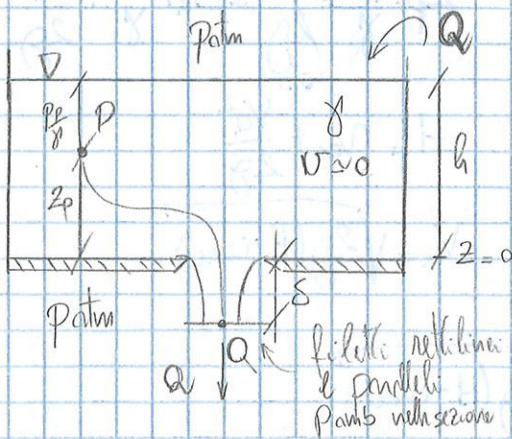
Nelle luci a battente la vena fluida è a contatto con la luce, mentre nelle luci a stramazzo solo una porzione di vena è a contatto con la luce.

Obiettivo della fononomia è determinare la portata di fluido che attraversa la luce attraverso l'effluente del livello del fluido.

Si osserva che un fluido che attraversa una luce subisce una contrazione della sezione:

Acontratta = Contrazione A

il coefficiente di contrazione C_c è un dato sperimentale.



Si ipotizza l'uso di un fluido perfetto, incomprimibile, nel campo gravitazionale ed in moto permanente (si ricompra la portata Q oppure si svuota lentamente). Nella traiettoria il carico totale

Si conserva:

$$H_p = H_a$$

$$z_p + \frac{p_p}{\gamma} + \frac{v_p^2}{2g} = z_a + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_a^2}{2g}$$

$\downarrow \text{da } 0$ $\downarrow p_{amb} = p_{atm} = 0$

$$h = -\delta + \frac{v_a^2}{2g}$$

$$v_a = \sqrt{2g(h + \delta)}$$

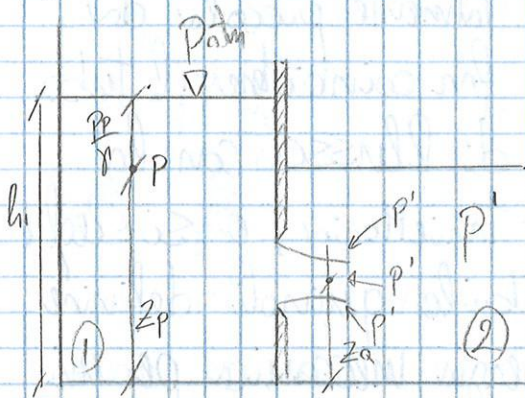
$$v_a = v_{media} = v_{contratta}$$

$$v_{reale} = C_v \sqrt{2g(h + \delta)}$$

dove C_v è il coefficiente correttivo di velocità, anch'esso sperimentale.

$p' > p_{atm}$ la quota piezometrica sarebbe:
 $h_i = h_i + \frac{p'}{\gamma}$

Il caso seguente è analogo al precedente solo che il secondo serbatoio è chiuso ed in pressione:



$$H_p = H_a$$

$$z_p + \frac{p_p}{\gamma} + \frac{V_p^2}{2g} = z_q + \frac{p_q}{\gamma} + \frac{V_q^2}{2g}$$

$$h_1 = z_q + \frac{p'}{\gamma} + \frac{V_q^2}{2g}$$

$$V_q = \sqrt{2g \left(h_1 - z_q - \frac{p'}{\gamma} \right)}$$

V_q non è più la velocità media in quanto dipende dalla posizione nel di Q .

Se la luce è piccola rispetto al suo conico si può approssimare la velocità nel baricentro della luce alla velocità media:

$$h = h_1 - z_q$$

$$V_c = C_v \sqrt{2g \left(h - \frac{p'}{\gamma} \right)}$$

$$Q = C_c A C_v \sqrt{2g \left(h - \frac{p'}{\gamma} \right)} = \mu A \sqrt{2g \left(h - \frac{p'}{\gamma} \right)}$$

per aumentare la portata si può diminuire p' , la pressione minima vale:

$$p'_{min} = -p_{atm} = -101330 \text{ Pa}$$

$$Q_{max} = \mu A \sqrt{2g \left(h - \frac{-101330}{\gamma} \right)}$$

La portata si annulla quando:

$$p' = h\gamma$$

La portata invece si inverte, il gas in pressione va al serbatoio 1, quando:

$$p' > h\gamma$$

per correnti lineari o gradualmente variate le traiettorie sono rettilinee e parallele quindi:

$$z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost.}$$

$$P = \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) \int_A v \, dA + P_{\text{cinetica}} = \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) Q + P_c$$

dove la potenza cinetica vale:

$$P_c = \int \gamma \frac{v^3}{2g} \, dA = \alpha \gamma \frac{V^2}{2g} Q$$

$$\alpha = \frac{\int \gamma \frac{v^3}{2g} \, dA}{\gamma \frac{V^2}{2g} Q}$$

dove α è il coefficiente di Coriolis che si usa per tener conto la velocità media.

La potenza diventa quindi:

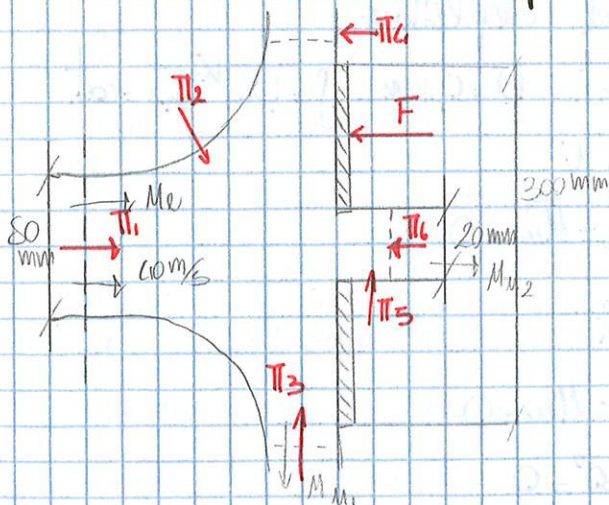
$$P = \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) Q + \alpha \gamma \frac{V^2}{2g} Q = \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) Q = \text{cost.}$$

ricordando che $\gamma = \text{cost.}$ e $Q = \text{cost.}$ si ottiene il teorema di Bernoulli esteso:

$$z + \frac{P}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = \text{cost.}$$

ESERCITAZIONE

Es n°1: Calcolare la spinta sul piatto.



$$\beta = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \beta = 1$$

$$\vec{C} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_3 + \vec{\Pi}_4 + \vec{\Pi}_5 + \vec{\Pi}_6 + \vec{F}$$

$$\Pi_2 = \Pi_5 = \Pi_4 = 0 \quad (\text{contatto con piatto})$$

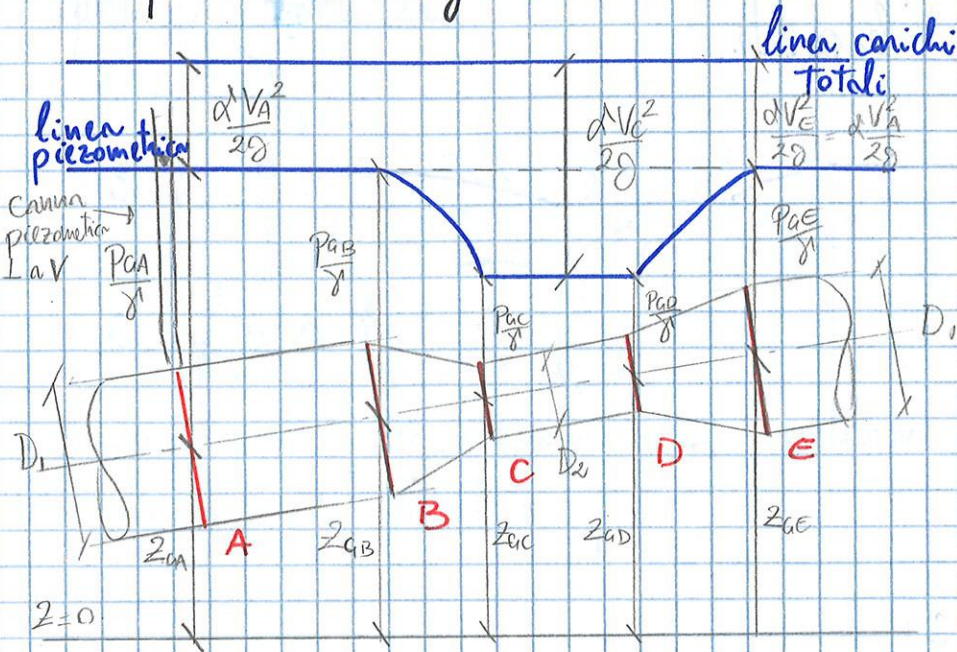
$$\Pi_1 = \Pi_3 = \Pi_6 = 0 \quad (p_{\text{amb}} = p_{\text{atm}})$$

$$\vec{C} + \vec{F} + \vec{M}_e - \vec{M}_{u1} - \vec{M}_{u2} = 0$$

$$X: -F_x + M_e - M_{u2} = 0$$

$$F_x = M_e - M_{u2} = \beta \gamma V^2 A_e - \beta \gamma V^2 A_{u2} = \beta \gamma V^2 (A_e - A_{u2}) = 9,05 \text{ N}$$

Si studia ora l'andamento della linea dei carichi totali e quella della quota piezometrica in una condotta.
Si prende la seguente tubazione:



la verticale \times
le quote passano
convenzionalmente
 \times il baricentro
della sezione,
 \times tubazioni rettilinee
Si ottiene lo stesso
risultato \times qualunque
punto
(dist. idrostatica)

per ogni sezione vale:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

quindi tutte le sezioni hanno la stessa linea dei carichi totali.

Nel tratto a diametro costante la velocità media non varia quindi la quota piezometrica è costante nel tratto.

Nel tratto convergente, a portata costante, la velocità aumenta e la quota piezometrica deve diminuire.

Nel tratto divergente si ha il comportamento opposto.

Tornando al diametro iniziale la quota piezometrica torna ad essere quella iniziale.

Inserendo piezometri il livello del fluido giunge alla linea piezometrica che corrisponde alla sezione in cui è stato inserito.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = \alpha \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

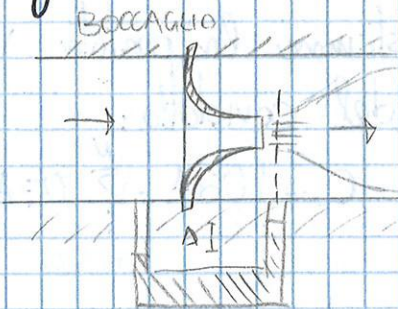
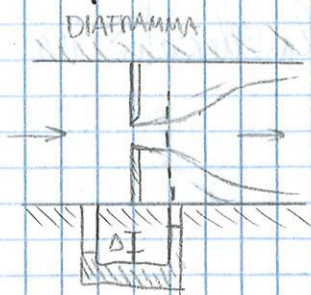
il manometro permette di valutare la distanza tra le due quote piezometriche:

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$\delta = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2 A_1^2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \frac{A_2^2 A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Strumenti meno ingombranti del venturimetro sono il diaframma ed il bocaglio:

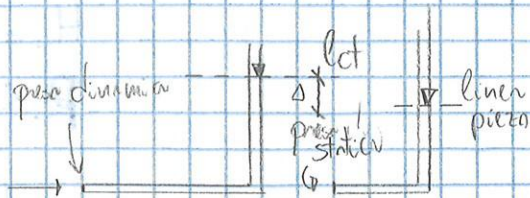


il fenomeno di funzionamento è analogo al venturimetro, solo che dagli ostacoli fanno contrarre la vena fluida.

Per la misura puntuale della velocità si usa invece il tubo di Pitot.



VISTA IN PIANITA



VISTA IN SEZIONE

il fluido entra nella presa dinamica e riempie il tubicino ad una certa altezza, oltre non riesce più ad entrare e viene deviato. Il livello indica dove si trova la linea

$$V_B = V_C = \sqrt{2g \frac{7}{4} h}$$

$$Q = C_c A C_v \sqrt{2g h \frac{7}{4}} = \mu \sqrt{\frac{7}{4}} A \sqrt{2gh}$$

la portata con tubo addizionale esterno è superiore rispetto al caso di efflusso attraverso parete sottile.

Aumentando il livello h la pressione in B diminuisce, la pressione deve però essere superiore o pari a -101330 Pa.

$$P_A = -\frac{3}{4} h \gamma - \frac{101330}{\gamma}$$

$$h \leq \frac{4}{3} \frac{101330}{\gamma}$$

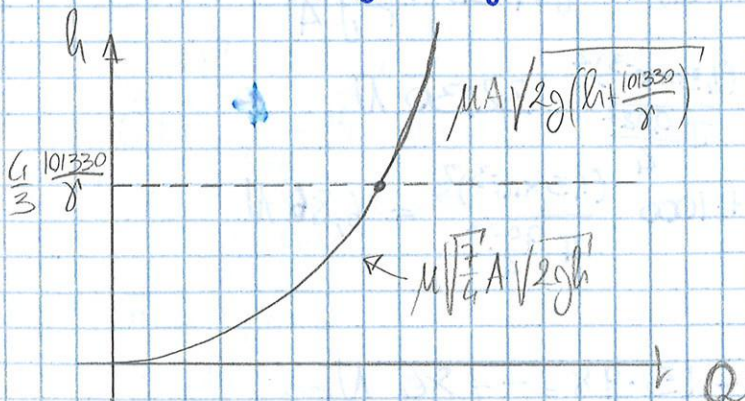
se h supera tale valore si avrebbero pressioni assolute negative, ciò non si verifica ma si crea una sezione di controllo: qualunque sia h il punto più in alto della sezione si trova a $p^* = 0 \text{ atm}$.

La portata che passa in questo caso è:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

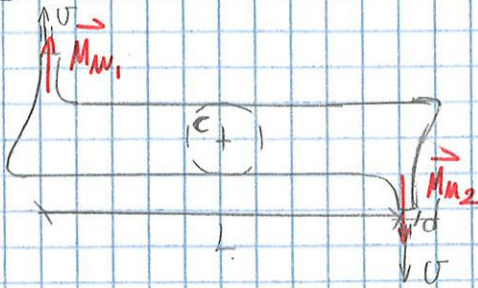
$$V_B = \sqrt{2g \left(h + \frac{101330}{\gamma} \right)}$$

$$Q = C_c C_v A \sqrt{2g \left(h + \frac{101330}{\gamma} \right)}$$



$$S_{flangia} = \sqrt{S_{flangia_1}^2 + S_{flangia_2}^2} = 33,24 \text{ N}$$

Es n°2: Determinare la coppia necessaria a tener fermo il mulinello.



$$\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$$

$$U = 3 \text{ m/s}$$

$$d = 0,05 \text{ m}$$

$$L = 0,4 \text{ m}$$

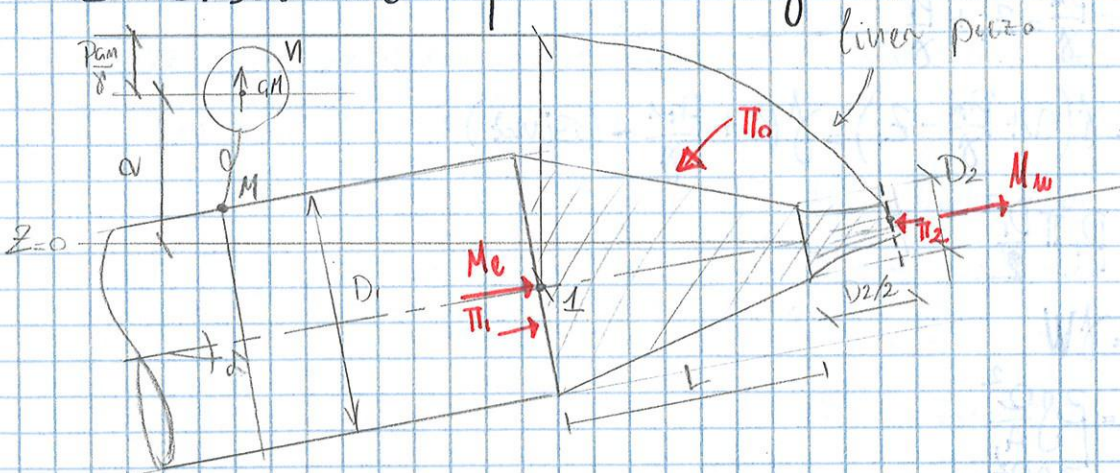
$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e \rightleftharpoons \vec{M}_u = 0$$

\vec{M}_u è l'unica componente che crea momento

$$M_{u_1} = M_{u_2} = \beta \rho U^2 A$$

$$C = \beta \rho U^2 A L = 1 \cdot 1000 \cdot 3^2 \cdot \pi \frac{0,05^2}{4} \cdot 0,4 = 7,068 \text{ Nm}$$

Es n°3: Determinare la spinta sul bocchaglio troncoconico.



$$\gamma = 9806 \text{ N/m}^3 \quad \nu = 0,2 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad \alpha = 30^\circ \quad D_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$D_2 = 0,1 \text{ m} \quad L = 0,4 \quad C_c = 0,9$$

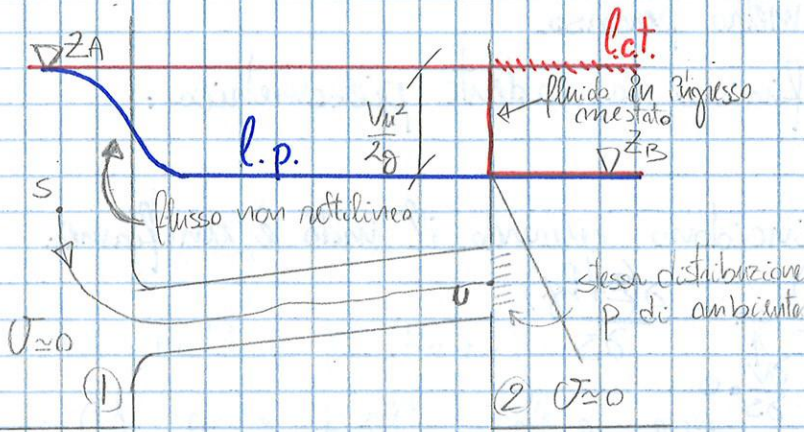
$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$-\vec{\Pi}_0 = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{G} + \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

$$\Pi_1 = A p_1$$

$$z_M + \frac{p_M}{\gamma} = z_{QM} + \frac{p_{QM}}{\gamma}$$

Si vuole ora analizzare la differenza tra l'andamento dei carichi totali e della piezometrica in un fluido perfetto e in un fluido reale.



Hp. fluido perfetto

$$\alpha = 1$$

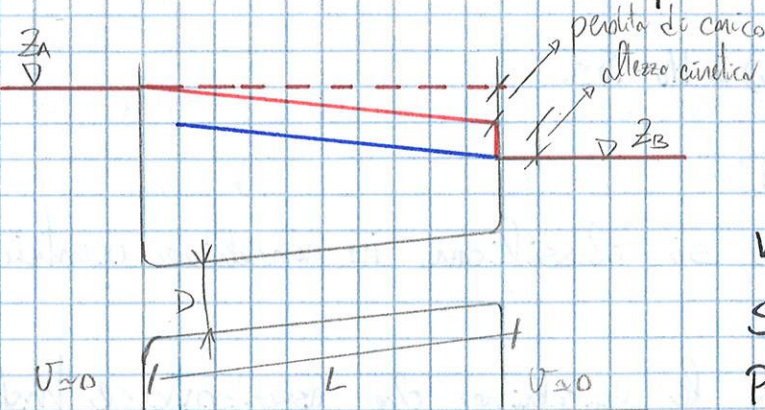
$$H_s = H_u$$

$$Z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \alpha \frac{V_s^2}{2g} = Z_u + \frac{p_u}{\gamma} + \alpha \frac{V_u^2}{2g}$$

$$Z_A + \frac{p_{atm}}{\gamma} = Z_B + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{V_u^2}{2g}$$

$$Z_A = Z_B + \frac{V_u^2}{2g} \quad \frac{V_u^2}{2g} = Z_A - Z_B$$

Il dislivello tra A e B si trasforma in energia cinetica. Nel serbatoio il fluido è in quiete quindi carico totale ed altezza piezometrica coincidono. La linea dei carichi totali in B non si alza perché la portata in ingresso è bassa.



Hp. fluido reale

$$D = \text{cost.} \Rightarrow V = \text{cost.} \Rightarrow \frac{V^2}{2g} = \text{cost.}$$

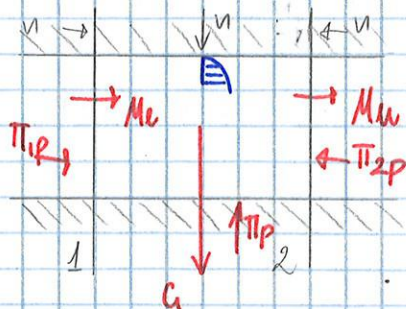
la distanza tra le due linee è costante quindi sono parallele.

Per dissipazione di energia la linea piezometrica è

inclinata, quindi è inclinata anche la linea dei carichi totali. Oltre al solito salto cinetico è presente anche una perdita di carico, che rappresenta l'energia persa.

Si definisce come ordine dei carichi la diminuzione di carichi.

Data una condotta a diametro e portata costanti.



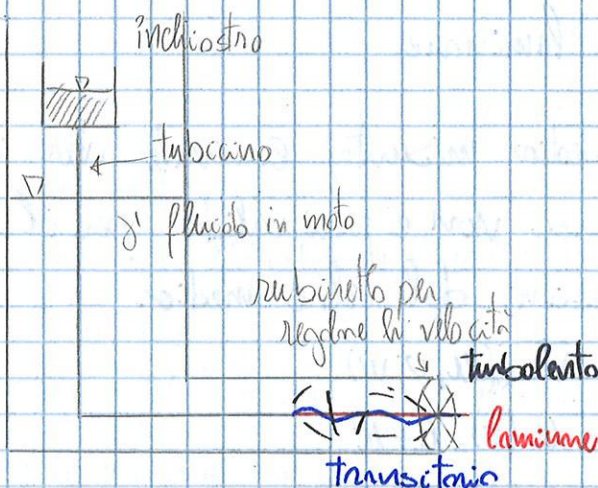
$$\int_{A_1} \rho \frac{\partial v}{\partial t} dA_1 = 0$$

$$\int_{A_2} \rho \frac{\partial v}{\partial t} dA_2 = 0$$

$$\int_{A_{laterale}} \rho \frac{\partial v}{\partial t} dA_{laterale} \neq 0$$

esiste il gradiente di velocità solo lungo la parete laterale quindi la viscosità e gli sforzi tangenziali non hanno nessun effetto nelle sezioni di entrata ed uscita.

REGIME DI MOTO



L'esperimento di Reynolds permette di vedere il regime di moto di un fluido al variare della velocità dello stesso.

Per visualizzarlo si inietta del tracciante colorato, tale fluido non deve aumentare il peso specifico del fluido altrimenti

le traiettorie vengono curvate verso il basso.

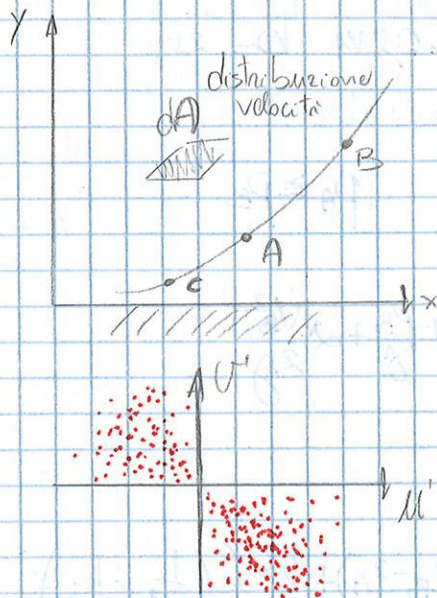
A basse velocità si è in regime laminare: il tracciante procede linearmente.

Aumentando la velocità ad un certo punto la traiettoria rettilinea inizia ad essere perturbata ma è ancora definita, le perturbazioni aumentano all'aumentare della velocità. Si è in regime transitorio.

Ad alte velocità inizia il moto turbolento, le componenti di agitazione sono tali da rimescolare tutto il fluido, la traiettoria

$$i_x = \frac{\sqrt{u'^2}}{u} \quad i_y = \frac{\sqrt{v'^2}}{v} \quad i_z = \frac{\sqrt{w'^2}}{w}$$

Le turbolenze inducono sforzi aggiuntivi nel fluido, quando una particella si sposta da A a B per le turbolenze.



$$u' > 0 \Rightarrow u' < 0 \quad (u_B > u_A)$$

quando si sposta da A a C:

$$u' < 0 \Rightarrow u' > 0 \quad (u_C < u_A)$$

per entrambi vale:

$$u' \cdot u' < 0$$

la distribuzione non è uniforme.

La massa che passa attraverso dA

subisce una variazione nell'unità di tempo:

$$m(v_f - v_i) = \rho u' dA dt (u_B - u_A)$$

$$m' = m_A - m_B$$

$$m' dv = \rho u' dA dt (-u') = -\rho u' dA dt u'$$

lo sforzo associato vale:

$$\vec{F} dt = m' dv$$

$$\vec{F} = -\rho u' u' dA dt \frac{1}{dt} = -\rho u' u' dA$$

$$\text{sforzo turbolento} = -\rho u' u'$$

A causa delle perturbazioni il moto turbolento va studiato nel periodo T:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\vec{G} + \vec{I} + \vec{M}_c - \vec{M}_u + \Pi) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\vec{G} + \vec{I} + \vec{M}_c - \vec{M}_u + \Pi - \mu \int_A \frac{\partial u}{\partial n} dA) dt = 0$$

Integrando le relazioni nel tempo T:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\vec{C} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u - \int_A \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi} p dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_A p \vec{n} dA dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_A (\bar{p} + p') \vec{n} dA dt = \\ &= \int_A \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p} + p') dt \vec{n} dA = \int_A \left[\frac{1}{T} \int_0^T \bar{p} dt + \frac{1}{T} \int_0^T p' dt \right] \vec{n} dA = \\ &= \int_A \left[\frac{1}{T} \bar{p} T \right] \vec{n} dA = \int_A \bar{p} \vec{n} dA = \vec{\Pi} \bar{p} \end{aligned}$$

analogo risultato lo si ha per le altre grandezze lineari:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\vec{C} + \vec{\Pi} p + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{I} - \mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA) dt = \vec{C} + \vec{\Pi} \bar{p} + \vec{I} - \mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA + \frac{1}{T} (\vec{M}_e - \vec{M}_u) dt$$

per il flusso della quantità di moto vale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{M}_e - \vec{M}_u) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho \vec{v} v_n dA dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho (\bar{v} + v') (\bar{v}_n + v'_n) dA dt = \\ &= \int_A \frac{1}{T} \int_0^T \rho (\bar{v} \bar{v}_n + \bar{v}' v'_n + \bar{v} v'_n + v' \bar{v}_n) dt dA = \\ &= \int_A \left[\frac{1}{T} \rho \bar{v} \bar{v}_n \int_0^T dt + \bar{v}_n \frac{1}{T} \int_0^T \rho \bar{v}' dt + \bar{v}' \frac{1}{T} \int_0^T \rho \bar{v} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \rho v' v'_n dt \right] dA = \\ &= \int_A \left[\rho \bar{v} \bar{v}_n + \rho \bar{v}' v'_n \right] dA = \vec{M}_{e\bar{v}} - \vec{M}_{u\bar{v}} + \int_A \rho \bar{v}' v'_n dA \end{aligned}$$

riassumendo si dice:

$$\vec{C} + \vec{\Pi} \bar{p} + \vec{I} + \vec{M}_{e\bar{v}} - \vec{M}_{u\bar{v}} + \int_A \rho \bar{v}' v'_n dA - \int_A \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = 0$$

dove i due integrali rappresentano la resistenza al moto.

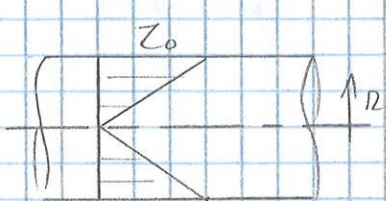
È possibile esplicitare la forza di trascinamento della corrente del volume W in movimento esercitata sul fluido circostante:

$$\vec{T} = \int_A \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA - \int_A \rho \bar{v}' v'_n dA = \vec{C} + \vec{\Pi} \bar{p} + \vec{I} + \vec{M}_{e\bar{v}} - \vec{M}_{u\bar{v}}$$

nel caso di una sezione circolare di diametro D , il raggio idraulico vale:

$$R = \frac{A}{\varnothing} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

Si studia ora l'andamento dello sforzo in direzione radiale in una condotta circolare:



$$z = \gamma \frac{A}{\varnothing} s = \gamma \frac{\pi R^2}{2\pi R} s = \frac{\gamma s}{2} R$$

$$z(r=0) = 0$$

$$z(r=R) = z_0 = z_{\max} = \frac{\gamma s R}{2}$$

lo sforzo ha quindi un andamento lineare al variare della distanza dal centro.

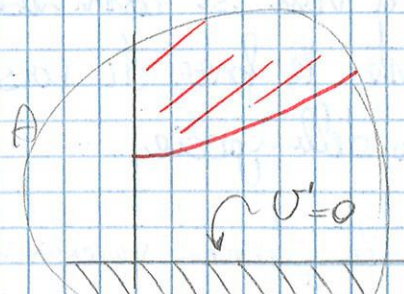
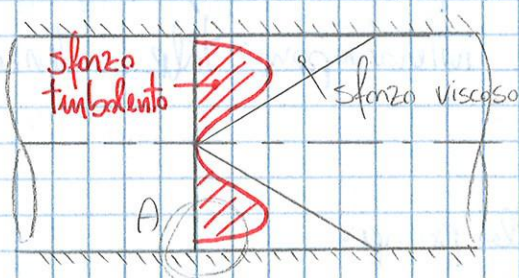
$$T = z A \Delta t = \int_{A \Delta t} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA - \int_{A \Delta t} \gamma \vec{v}' \vec{v}'_n dA$$

↓ moto uniforme

$$T = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \int_{A \Delta t} dA - \gamma \vec{v}' \vec{v}'_n \int_{A \Delta t} dA = (\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} - \gamma \vec{v}' \vec{v}'_n) A \Delta t = z A \Delta t$$

$$z = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} - \gamma \vec{v}' \vec{v}'_n = -\mu \frac{d\vec{u}}{dn} + \int \vec{u}' \vec{v}'$$

$z =$ contributo viscoso + contributo turbolento



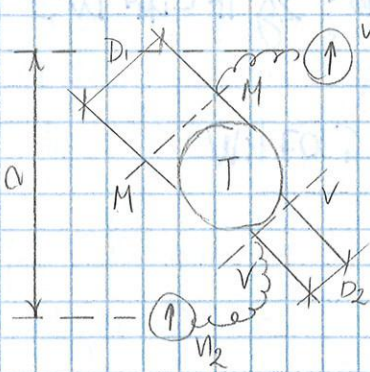
Sulla parete del condotto $v'=0$ quindi esiste solo sforzo viscoso, tale zona prende il nome di strato limite laminare.

$$H_v - H_m = h_v - h_m + \frac{Q^2}{2gA_v} - \frac{Q^2}{2gA_m} = \delta + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\frac{\pi D_2^4}{16}} - \frac{1}{\frac{\pi D_1^4}{16}} \right)$$

$$H_v - H_m = \delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g} \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right) = 3,86 \text{ m}$$

$$W = \frac{1}{\eta} \gamma Q \Delta H = \frac{1}{0,75} 0,05 \cdot 9806 \cdot 3,86 = 2,52 \text{ kW}$$

3) Determinare il rendimento del gruppo turbina-alternatore.



$D_1 = 1 \text{ m}$ $D_2 = 0,8 \text{ m}$ $v_1 = 38 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
 $v_2 = 0,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $a = 3 \text{ m}$ $Q = 3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
 $W = 9000 \text{ kW}$

$$H_m - H_v = z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{v_m^2}{2g} - z_v - \frac{p_v}{\gamma} - \frac{v_v^2}{2g}$$

$$z_m + \frac{p_m}{\gamma} = h_m = h_{man1} = z_{man1} + \frac{v_1}{\gamma}$$

$$z_v + \frac{p_v}{\gamma} = h_v = h_{man2} = z_{man2} + \frac{v_2}{\gamma}$$

$$\left[\frac{9,81}{10^4} \right] = [Pa]$$

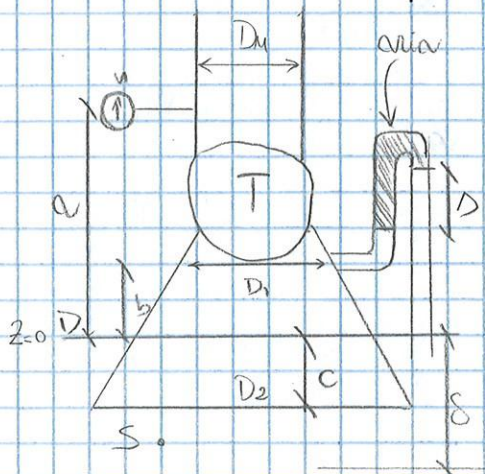
$$H_m - H_v = z_{man1} + \frac{v_1}{\gamma} - z_{man2} - \frac{v_2}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g} \left[\frac{1}{A_m^2} - \frac{1}{A_v^2} \right]$$

$$H_m - H_v = a + (v_1 - v_2) \frac{1}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g} \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4} \right] = 376,92 \text{ m}$$

$$P_{H2O} = \gamma Q (H_m - H_v) = 9806 \cdot 3 \cdot 376,92 = 11.088 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{W}{P_{H2O}} = \frac{9000}{11.088} = 0,81$$

a) Determinare la portata e la potenza idrica generata.



$D_m = 0,8 \text{ m}$ $D_1 = 1 \text{ m}$ $D_2 = 3 \text{ m}$ $C = 2 \text{ m}$

$b = 3 \text{ m}$ $a = 6 \text{ m}$ $\gamma = 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

$v = 26 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $\eta = 0,82$ $\Delta = 0,3 \text{ m}$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} = \frac{9806 - 12 \cdot 9,8}{9806} 0,3 \approx 0,3 \text{ m} = \Delta$$

$$H_1 - \frac{v^2}{2g} = H_5$$

↳ perdita alla strocca del diffusore

Per una corrente in moto uniforme in una condotta circolare valgono:

$$T = \gamma W S$$

$$z = \frac{T}{A \rho \dot{u}} = \gamma Q S = \gamma \frac{R}{2} S = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \gamma \mu \bar{v}'$$

$$\gamma \frac{R}{2} S = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \gamma \mu \bar{v}'$$

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{R}{2} S + \frac{\gamma}{\mu} \bar{v}'$$

$$\bar{u} = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{R^2}{4} S + \int_0^r \frac{\gamma}{\mu} \bar{v}' dr + C_1$$

per determinare la costante d'integrazione si impone:

$$\bar{u}(r=R) = 0$$

$$0 = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{R^2}{4} S + \int_0^R \frac{\gamma}{\mu} \bar{v}' dr + C_1$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{\mu} S \frac{R^2}{4} - \int_0^R \frac{\gamma}{\mu} \bar{v}' dr$$

$$\bar{u}(r) = \frac{\gamma}{\mu} S \left(\frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) - \int_r^R \frac{\gamma}{\mu} \bar{v}' dr$$

Questa relazione rappresenta il profilo di moto. Nel caso di moto laminare la relazione diventa:

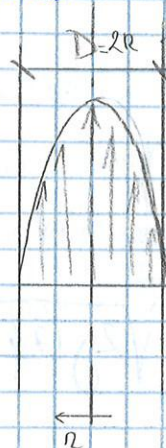
$$u' = v' = 0$$

$$\bar{u}(r) = \frac{\gamma S}{4\mu} (R^2 - r^2) \rightarrow \text{profilo parabolico}$$

$$u_{\max}(r=0) = \frac{\gamma S}{4\mu} R^2 = \frac{\gamma S}{16\mu} D^2$$

$$u_{\text{media}} = \frac{Q}{A} = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{\gamma S}{32\mu} D^2$$

$$Q = \frac{\gamma S}{\mu} \frac{D^2}{32} \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \gamma S}{128\mu} D^4$$



$$\begin{aligned}
 H_m = H_{\text{serbatoio}} &= z_s + \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g_0} = 0 \\
 H_v = H_m = H_f = z_f &= a + b + h = 23 \text{ m}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} H_m = H_{\text{serbatoio}} \\ H_v = H_m = H_f = z_f \end{aligned}} \right\} \text{ x assenza di perdite}$$

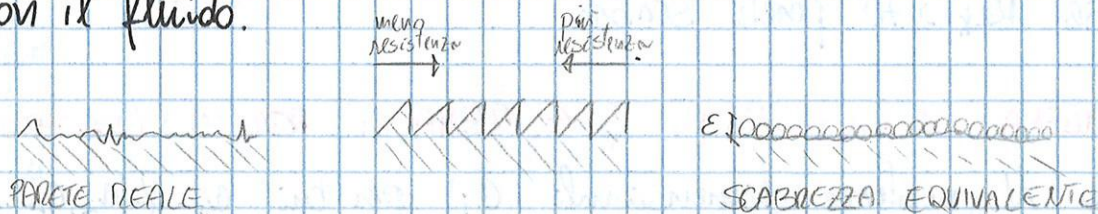
$$W = \frac{1}{\eta} \frac{\rho Q \Delta H}{\eta} = \frac{1}{0,75} \cdot 9806 \cdot 0,039 \cdot (23 - 0) = 11728 \text{ W}$$

DISSIPAZIONI D'ENERGIA

Le dissipazioni d'energia in un fluido sono dovute alla viscosità, quindi gli sforzi τ , e da eventuali turbolenze.

Come già visto nei fluidi perfetti gli sforzi τ sono nulli e le dissipazioni assenti quindi il carico totale si conserva. Ciò non è più vero per i fluidi reali in cui si realizzano fenomeni di perdite di carico.

Si usa la scabrezza per definire come una parete interagisce con il fluido.



La sua valutazione non dipende solo dalla geometria ma anche dall'interazione con il fluido, per semplicità si definisce quindi una scabrezza equivalente uniforme che eguagli quella reale.

Il comportamento della parete dipende dalla dimensione della scabrezza e del substrato laminare: se il substrato è molto più ampio della scabrezza il fluido segue il profilo della parete che si può considerare liscia. Se la scabrezza non è trascurabile la vena fluida non riesce a seguire il profilo e crea dei

3 ($[M]$, $[kg]$, $[S]$). Si può riscrivere la relazione con sole $N-M=3$ grandezze adimensionali:

$$M = \rho, \mu, D$$

$$[Z_0] = ML^{-1}T^{-2} \quad [\rho] = ML^{-3} \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \quad [E] = L$$

$$[\mu] = LT^{-1} \quad [D] = L$$

$$\circ \pi_1 = \frac{Z_0}{\rho^a \mu^b D^c} \begin{cases} [M]: & a = 1 \\ [L]: & -3a + b + c = -1 \\ [T]: & -b = -2 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \quad \pi_1 = \frac{Z_0}{\rho \mu^2}$$

$$\circ \pi_2 = \frac{\mu}{\rho^a \mu^b D^c} \begin{cases} a = 1 \\ -3a + b + c = -1 \\ -b = -1 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho \mu D} = \frac{1}{Re}$$

$$\circ \pi_3 = \frac{E}{\rho^a \mu^b D^c} \begin{cases} a = 0 \\ -3a + b + c = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \quad \pi_3 = \frac{E}{D} \quad \text{scabrezza relativa}$$

$$\frac{Z_0}{\rho \mu^2} = f\left(Re, \frac{E}{D}\right)$$

$$\frac{Z_0}{\rho \mu^2} = \frac{\gamma \frac{D^5}{4}}{\rho \mu^2} = \frac{\gamma \frac{D^5}{4}}{\mu^2} = \frac{DS}{4 \frac{\mu^2}{\rho} \frac{2}{D}} = \frac{DS}{8 \frac{\mu^2}{2\rho}} = \frac{\lambda}{8}$$

dove λ è il fattore di attrito o indice di resistenza

$$\lambda = \lambda\left(Re, \frac{E}{D}\right)$$

La funzione che permette di determinare la caduta diventa:

$$S = \lambda \frac{\mu^2}{2\rho D}$$

della legge di Darcy-Weisbach.

Il fattore di attrito viene determinato con l'ausilio del diagramma di Moody conoscendo lo stato di moto e la scabrezza relativa.

PERDITE CONCENTRATE

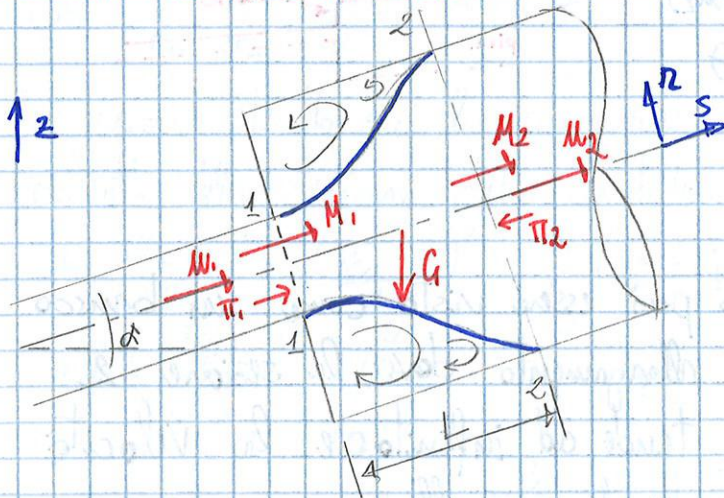
Le perdite concentrate sono perdite che si manifestano in corrispondenza di allargamenti e restringimenti delle condotte.

Queste variazioni portano a variare il profilo della sezione della vena del fluido e alla formazione di vortici di fluido che dissipano energia attorno ad essa.

Si osserva che i restringimenti dissipano meno energia degli allargamenti, in ogni caso si ha una forma del tipo:

$$\Delta H_{conc} = k \frac{u^2}{2g}$$

BRUSCO ALLARGAMENTO



Si ipotizza L piccolo così da poter trascurare le perdite distribuite nell'imbocco iniziale.

La sezione 2 è di men Q e nella sezione 1 si ha una distribuzione idrostatica delle pressioni.

Applicando l'equazione globale tra le sezioni 1 e 2:

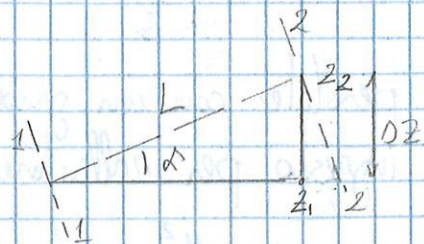
$$\vec{G} + \vec{\pi} + \vec{M} + \vec{z}_{00} - \vec{z}_{00} = 0 \Rightarrow SL \rightarrow 0$$

lungo S : $-G \sin \alpha + \pi_1 - \pi_2 + M_1 - M_2 = 0$

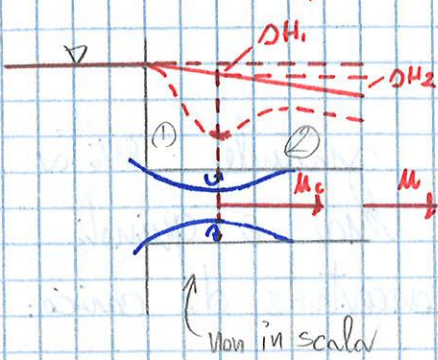
$$-G \sin \alpha = -\gamma W \sin \alpha = -\gamma Q L \sin \alpha =$$

$$= -\gamma Q (z_2 - z_1)$$

$$\pi_1 - \pi_2 = (p_1 - p_2) Q$$



IMBOCCO IN UNA CONDOTTA



Nel primo tratto si ha un'accelerazione del fluido ed un restringimento della sezione. È immediata l'analogia con l'effluvio di fluido attraverso una

luce:

$$M_c = C_v M_{torr} = C_v \sqrt{2gh}$$

$$\Delta H_1 = \frac{u_{max}^2}{2g} - \frac{u_c^2}{2g} = \frac{u_c^2}{2g} \left[\frac{1}{C_v^2} - 1 \right]$$

$$M_c A_c = M A$$

$$M_c = M \frac{A}{A_c} = \frac{M}{C_c} \quad C_c = 0,61$$

$$\Delta H_1 = \frac{u^2}{C_c^2} \frac{1}{2g} \left[\frac{1}{C_c^2} - 1 \right] \approx 0,1 \frac{u^2}{2g}$$

Nel secondo tratto si ha un brusco allargamento della sezione contratta alla sezione della condotta.

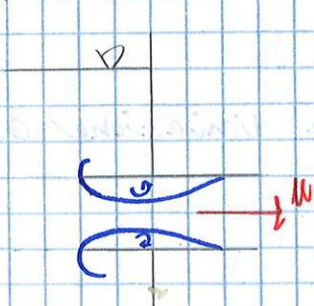
$$\Delta H_2 = \frac{(u_c - u)^2}{2g} = \left(\frac{u}{C_c} - u \right)^2 = \frac{u^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \approx 0,4 \frac{u^2}{2g}$$

L'effetto globale è una sovrapposizione dei due:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = (0,1 + 0,4) \frac{u^2}{2g} = 0,5 \frac{u^2}{2g}$$

Si nota che le perdite all'imbocco (0,1) hanno un'influenza minore (fluido accelerato) rispetto allo sbocco.

IMBOCCO CON TUBO ADDIZIONALE INTERNO



La traiettoria seguita dal fluido è più critica di prima, cioè fa restringere ancora di più la vena. Per il resto il comportamento è analogo:

$$C_c = \frac{A_c}{A} = 0,5$$

$$K = K\left(\frac{A_2}{A_1}, \alpha\right)$$

Riducendo di la sezione di valle contratta viene spostata verso valle dove il fluido è più lento e le perdite diventano trascurabili:

$$DH=0$$

PERDITE DISTRIBUITE: FORMULE EMPIRICHE

Per il moto turbolento sono state trovate varie formule empiriche per determinare le perdite distribuite senza dover usare

Moody:

- Darcy: $J = \beta \frac{Q^2}{D^5}$ con $n=5$ $\beta = \beta(\text{scabrezza, diametro})$
 con $n=5,33$ $\beta' = \beta'(\text{scabrezza})$

- CHEZY: $J = \frac{u^2}{c^2 R}$

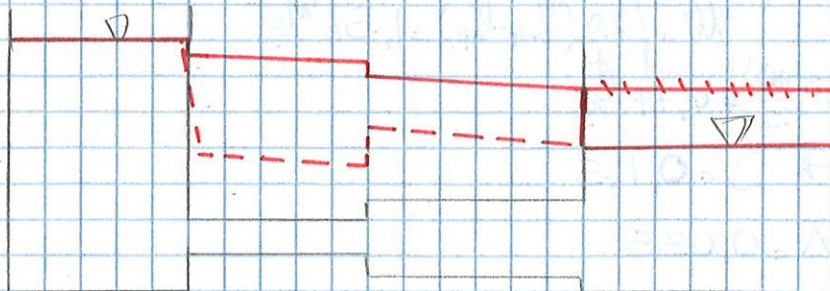
dove c valo:

- STRICKLER: $c = k_s R^{1/6}$

- MANNING: $c = \frac{1}{n} R^{2/3}$

con $k_s = \frac{1}{n} = f(\text{scabrezza})$

TRACCIAMENTO LCT/LCP



$$H_{tot} - H_{st} = \sum (H_{conc} + H_{loss}) = 0.5 \frac{u^2}{2g} + \sum L_i + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2g} + \sum L_i + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$J_i = \lambda_i \frac{u_i^2}{2g D_i}$$

$$u_i = \frac{Q}{A_i}$$

$$H_{tot} - H_{st} = f(Q^2)$$

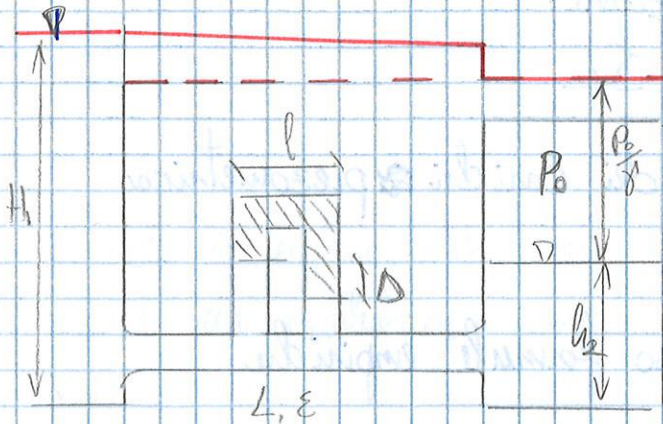
ESERCITAZIONE

Es n°1: Determinare la caduta di carico h_f .

$D = 10 \text{ cm}$, $L = 10 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$, tubo liscio, $Q = 28 \text{ l/s}$

Es. n°3: Determinare il diametro della condotta.

$L = 50\text{m}$ $l = 1\text{m}$ $h_2 = 4\text{m}$ $P_0 = 0,4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
 $\gamma = 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ $\gamma_m = 7860 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ $D = 0,25\text{m}$ $Q = 0,046 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
 $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$



$$H_2 = h_2 + \frac{P_0}{\gamma} = 4 + \frac{0,4 \cdot 98000}{9806} = 8\text{m}$$

$$S = \frac{\delta}{2} = \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} D \frac{1}{C} = 0,05$$

$$S = \lambda \frac{u^2}{2gD} = \frac{\delta Q^2}{g \pi^2 D^3}$$

λ e D incogniti: soluzione per tentativi:

$$\lambda^{(1)} = 0,02 \rightarrow D^{(1)}$$

$$D^{(1)} \rightarrow \text{MOODY} \rightarrow \lambda^{(2)} \rightarrow D^{(2)} \rightarrow \text{MOODY} \rightarrow \lambda^{(3)} \rightarrow D^{(3)} = 0,20\text{m}$$

LUNGHE CONDOTTE

Quando una condotta è sufficientemente lunga, le perdite distribuite sono prevalenti e quelle concentrate sono trascurabili.

Ciò permette di semplificare le equazioni e quindi di risolvere problemi più complessi.

Tale approccio può essere usato come prima approssimazione anche quando non si hanno lunghe condotte.

Una condotta è lunga se:

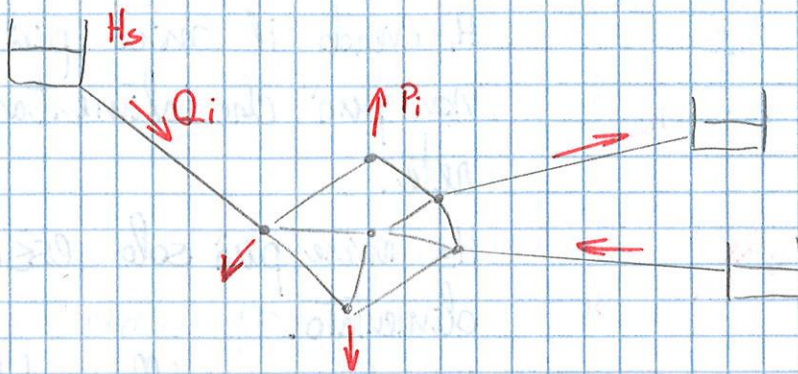
$$\Delta H_{\text{conc}} \ll \Delta H_{\text{DIST}}$$



$$\frac{u^2}{2g} \leq 0,04 SL$$

$$\frac{u^2}{2g} \leq 0,04 \lambda \frac{u^2}{2gD} L$$

VERIFICA DI UNA RETE



Ciò che è rappresentato come serbatoio non è necessariamente, ma è un qualunque componente della rete con un carico noto.

Sono note anche le caratteristiche delle condotte (L_i, D_i, β_i) e le portate ai nodi (P_i).

Si indica con "l" il numero di luti, cioè tronchi di condotta con caratteristiche uniformi, ed "n" il numero di nodi, cioè i punti d'intersezione delle condotte.

Sono incognite le portate nelle condotte (Q_i) e i carichi di ogni nodo. Il numero di incognite è pari a $l+n$.

Su ogni condotta si può scrivere:

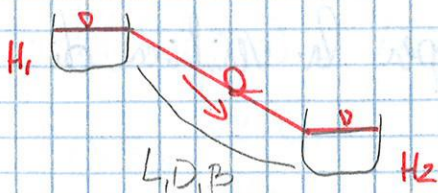
$$\Delta H = SL$$

su ogni nodo:

$$\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$$

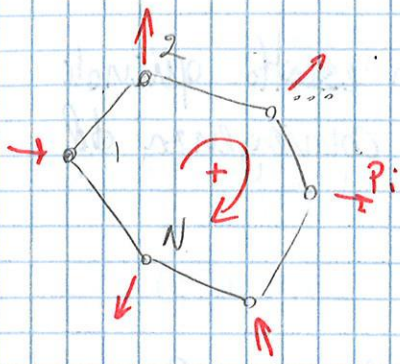
I problemi di verifica sono quindi sempre determinati.

ES. CONDOTTA SINGOLA



$$l=1; n=0$$

$$H_1 - H_2 = \beta \frac{Q^2}{D^5} L \Rightarrow Q$$



- Si sceglie un verso positivo per la portata: $Q > 0$ se concorde; $Q < 0$ se discorde.

- Per la differenza di carico vale:

$$H_i - H_{i+1} = k_i Q_i / |Q_i|$$

per mantenere l'informazione del

segno della portata.

$$H_1 - H_2 = k_1 Q_1 / |Q_1|$$

$$H_2 - H_3 = k_2 Q_2 / |Q_2|$$

...

$$H_N - H_1 = k_N Q_N / |Q_N|$$

Sommando le relazioni si ottiene:

$$0 = \sum_i k_i Q_i / |Q_i| = f(Q_i)$$

- Si ipotizza una valore di portata per tutte le condotte (\bar{Q}_i). I valori devono essere coerenti con l'equazione di continuità:

$$Q_i = \bar{Q}_i + \Delta Q$$

↑ vera
↑ ipotesi
↑ correzione

il valore della correzione è unico per tutta la maglia, ciò semplifica di molto la soluzione.

Si ha quindi:

$$\sum k_i (\bar{Q}_i + \Delta Q) / |\bar{Q}_i + \Delta Q|$$

Se la correzione è piccola si può fare uno sviluppo di $f(\bar{Q}_i + \Delta Q)$ per linearizzare l'equazione:

$$f(\bar{Q}_i + \Delta Q) \approx f(\bar{Q}_i) + f'(\bar{Q}_i) \Delta Q \approx 0$$

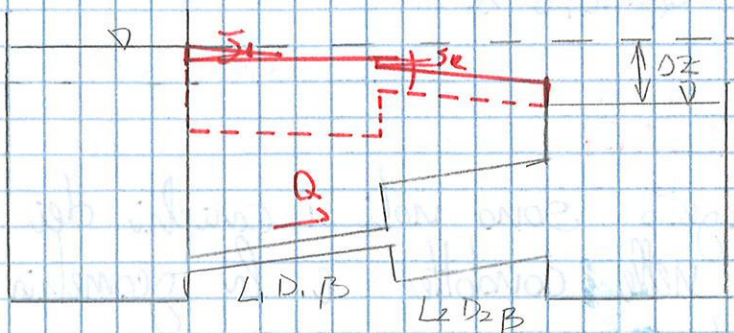
$$\Delta Q \approx - \frac{f(\bar{Q}_i)}{f'(\bar{Q}_i)} = - \frac{\sum k_i \bar{Q}_i / |\bar{Q}_i|}{2 \sum k_i / |\bar{Q}_i|}$$

$$z_1 - z_2 = \beta_1 \frac{Q^2}{D_1^5} L_1 + \beta_2 \frac{Q^2}{D_2^5} L_2 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} + 0,28 \frac{Q^2}{2gA_2^2} + \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

$$z_1 - z_2 = \left(\beta_1 \frac{L_1}{D_1^5} + \beta_2 \frac{L_2}{D_2^5} + \frac{1}{2gA_1^2} + \frac{0,28}{2gA_2^2} + \frac{1}{2gA_2^2} \right) Q^2$$

$$Q = 0,367 \text{ m}^3/\text{s}$$

Es 2: Determinare la portata



$$\Delta z = 1,2 \text{ m}$$

$$L_1 = 5 \text{ m} \quad L_2 = 10 \text{ m}$$

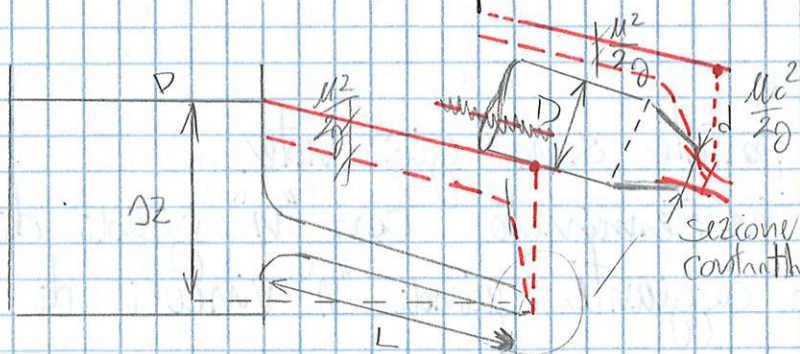
$$D_1 = 125 \text{ mm} \quad D_2 = 200 \text{ mm}$$

$$\beta = 0,0019 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5}$$

$$\Delta z = 0,5 \frac{u_1^2}{2g} + \beta_1 L_1 + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2g} + \beta_2 L_2 + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$\Delta z = \left(\frac{0,5}{2gA_1^2} + \frac{\beta L_1}{D_1^{5,33}} + \dots \right) Q^2 \Rightarrow Q = 0,033 \text{ m}^3/\text{s}$$

Es 3: Determinare velocità e portata con e senza l'ugello



$$C_c = 0,85$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$D = 8 \text{ cm}$$

$$d = 4 \text{ cm}$$

$$\Delta z = 1 \text{ m}$$

$$K_s = 93 \frac{\text{m}^5}{\text{s}} \quad (\text{Strickler})$$

$$\text{Chézy: } S = \frac{u^2}{C^2 R} \quad R = \frac{D}{4}$$

$$C = K_s R^{1/6} = 48,5 \frac{\text{m}^{1/2}}{\text{s}}$$

$$\Delta z = SL + \frac{u^2}{2g} = \frac{u^2 L}{C^2 \left(\frac{D}{4}\right)} + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\text{con } A_c = C_c A \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta z = \left(\frac{1}{C^2 \frac{D}{4} A^2} + \frac{1}{2g A_c^2} \right) Q^2$$