



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1616A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Santoro

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Eserc.
Prof. Cornetti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

4/3/2013

(70 anni Lucio Dalla)

prof. Cornetti Pietro

Testi:

Lez. 1

- "Scienze delle costruzioni" - A. Carpinteri (volume 1 e 2)

Esame:

- Scritto + orale → anche nella sessione successiva
↳ insieme

→ Videolezioni - UNINETTUNO (anche su YouTube)

- Analisi della deformazione e sollecitazione in materiali e strutture soggetti a carichi statici -

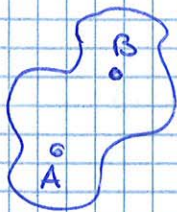
Programma:

- progetto/verifica di una struttura

- ↳ calcolo reazioni vincolari
- ↳ calcolo sollecitazioni interne
- ↳ calcolo tensioni nei punti più sollecitati
- ↳ verifica che la tensione sia inferiore ai valori ammissibili del materiale

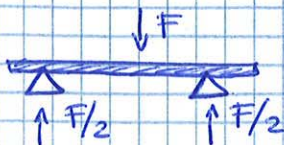


CORPO RIGIDO = distanza tra 2 punti rimane invariata nel moto, concetto che viene qui adottato -



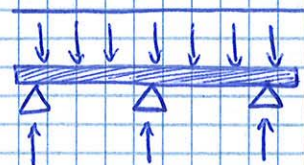
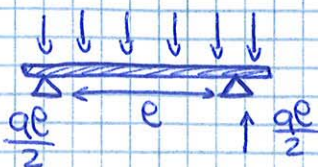
CORPO DEFORMABILE

- ↳ calcolare gli spostamenti della struttura
- ↳ calcolare aree iperstatiche



ISOSTATICA

q = carico per unità di lunghezza



↳ Ho infinite possibilità di ottenere l'equilibrio

$$\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{op}$$

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \vec{u}_z$$

↳ ROTOTRASLAZIONE

◦ Atto di moto:

1) pura traslazione se $\omega = 0$ ($\vec{v}_p = \vec{v}_0$)

2) pura rotazione se $\omega \neq 0$ (esiste un punto c per cui la velocità è nulla)

$$\exists c / \vec{v}_c = 0$$

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{oc} = 0 \Rightarrow \vec{v}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{oc}$$

$$\Rightarrow \vec{oc} \perp \vec{v}_0$$

[c è detto CENTRO di ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR)]

$$\|\vec{oc}\| = \frac{\|\vec{v}_0\|}{\|\vec{\omega}\|}$$

◦ Il centro di istantanea rotazione giace sulla normale alle traiettorie dei punti del sistema -

$$\frac{d\vec{sp}}{dt} = \frac{d\vec{S}_0}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \hat{k} \times \vec{op}$$

Linealizzando:

$$d\vec{sp} \approx \mu_p \vec{i} + \nu_p \vec{j} = \vec{\gamma}_p$$

$$d\vec{S}_0 \approx \mu_0 \vec{i} + \nu_0 \vec{j} = \vec{\gamma}_0$$

$$d\alpha \approx \varphi_2 \quad \vec{p}_2 = \varphi_2 \vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} \mu = \text{spostam. lungo } x \\ \nu = \text{ " " } y \\ \varphi_2 = \text{ " " } z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_p = \vec{\gamma}_0 + \vec{p}_2 \times \vec{op}$$

$$(\mu_p - \mu_0) \vec{i} + (\nu_p - \nu_0) \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varphi_2 \\ x_p - x_0 & y_p - y_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{i}(\mu_p - \mu_0) + \vec{j}(\nu_p - \nu_0) = -\vec{i}(y_p - y_0)\varphi_2 + \vec{j}(x_p - x_0)\varphi_2$$

$$\begin{cases} \mu_p - \mu_0 = -\varphi_2 (y_p - y_0) \\ \nu_p - \nu_0 = \varphi_2 (x_p - x_0) \end{cases}$$



incastro
(blocca ogni spostamento)

$$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H \neq 0 \\ U \neq 0 \\ R \neq 0 \end{cases}$$

non esiste

③

- $U=1 \rightarrow$ vincolo semplice
- $U=2 \rightarrow$ vincolo doppio
- $U=3 \rightarrow$ vincolo triplo

VINCOLI INTERNI (legano due parti della stessa struttura) relativi



bielletta interna

$$\begin{cases} u_A = u_B \\ u_A \neq u_B \\ \varphi_A \neq \varphi_B \end{cases}$$

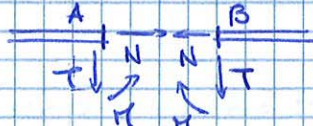
$$\begin{cases} N \neq 0 \\ T = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

CIRCO
sull'asse della bielletta

①



bielletta interna asse verticale



$$\begin{cases} u_A \neq u_B \\ u_A = u_B \\ \varphi_A \neq \varphi_B \end{cases}$$

doppio pendolo interno

$$\begin{cases} u_A = u_B \\ u_A \neq u_B \\ \varphi_A = \varphi_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \neq 0 \\ T = 0 \\ R \neq 0 \end{cases}$$

all'infinito sull'asse X

②



cerniera interna

$$\begin{cases} u_A = u_B \\ u_A = u_B \end{cases}$$

$$\varphi_A \neq \varphi_B$$

$$\begin{cases} N \neq 0 \\ T \neq 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

in A=B

②



incastro interno

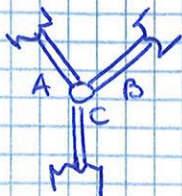
$$\begin{cases} u_A = u_B \\ u_A = u_B \\ \varphi_A = \varphi_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \neq 0 \\ T \neq 0 \\ R \neq 0 \end{cases}$$

non esiste

③

Vincoli composti



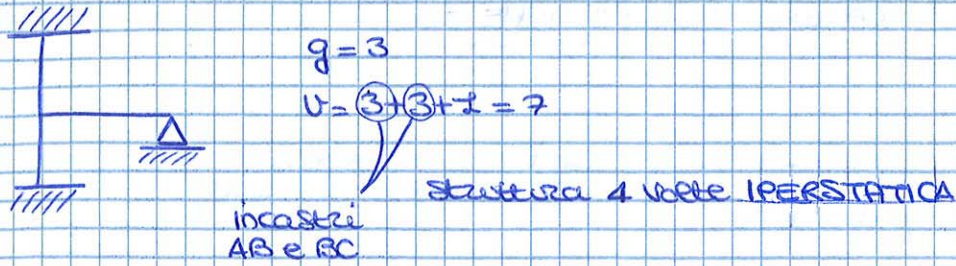
$$u_A = u_B$$

$$u_A = u_B$$

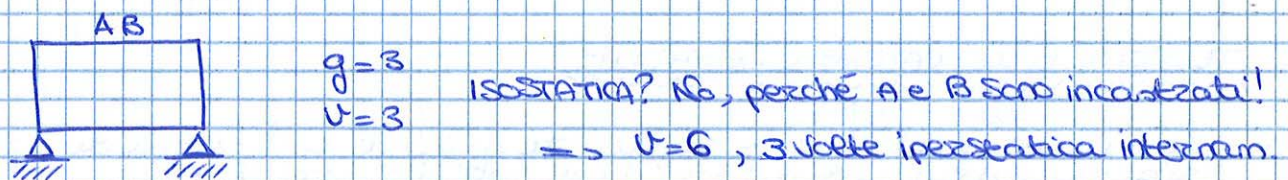
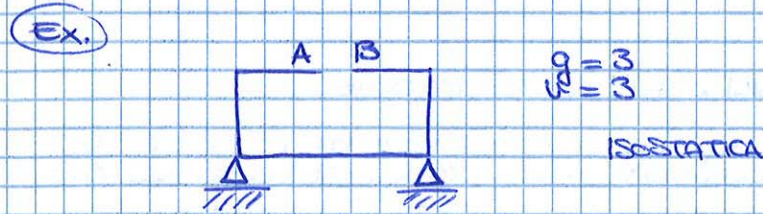
$$u_A = u_C$$

$$u_A = u_C$$

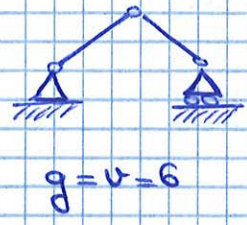
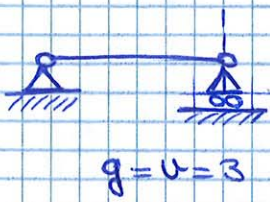
grado di vincolo = 4



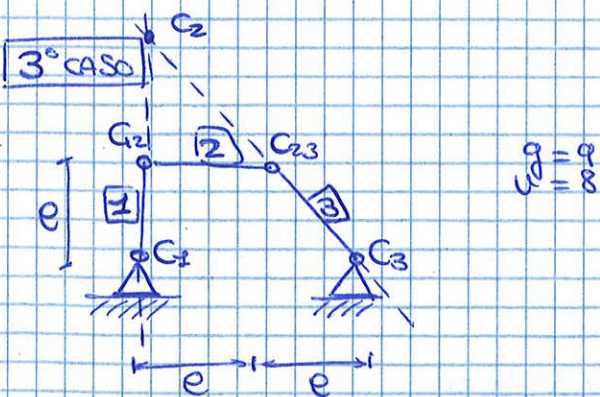
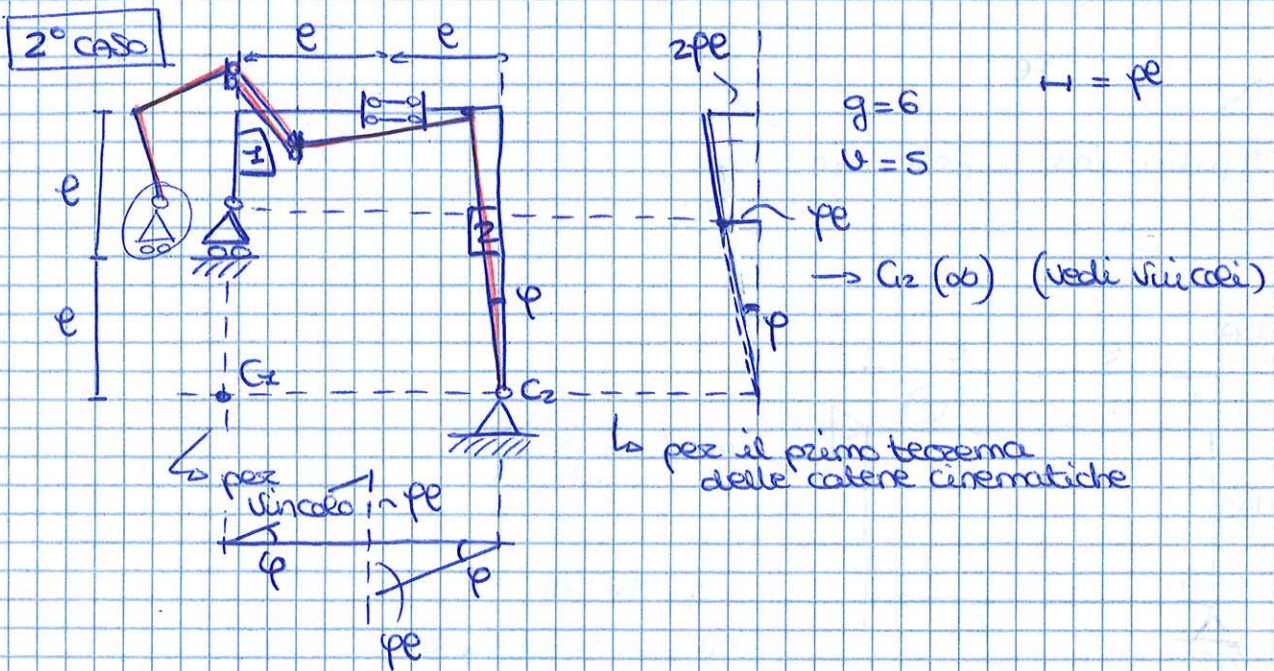
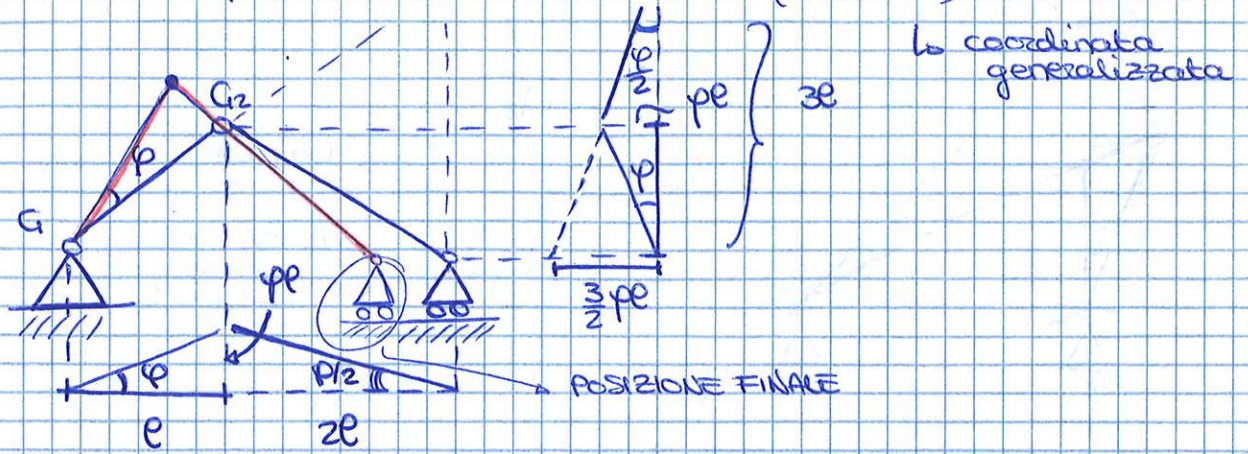
• N.B. $g = U$ è solo una condizione necessaria per l'isostaticità, ma non SUFFICIENTE!



MALDISPOSIZIONE VINCOLARE → messo in modo che la struttura non zeppe



• Decido che il corpo 1 ruoti in senso antiorario (decido io)



• Per trazione G_2 , applico 2 volte il primo teorema per 2 coppie di travi

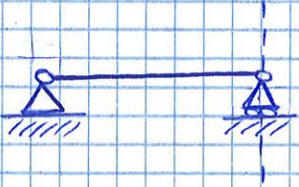
Ipotesi che 1 ruoti in senso antiorario di φ

STUDIO MALDISPOSIZIONE VINCOLARE

$|g = u| \Rightarrow$ ISOSTATICA?

- Considero la struttura come catena cinematica
- Se $g = u$ c'è MALDISPOSIZIONE, se non è $g = u$ è struttura ISOSTATICA.

Ex.



$g = 3$
 $u = 3$

$\nexists C_2$ (deve stare sulla normale al cardello e sul vincolo)

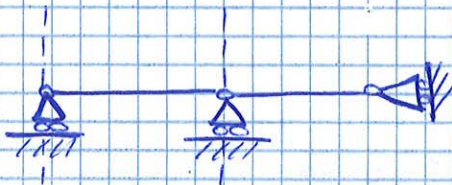


C esiste, struttura LABILE

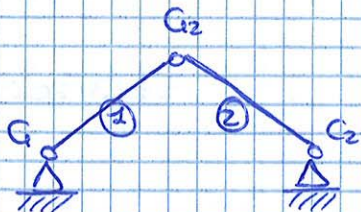


$\uparrow C$ è all' ∞ , ma ESISTE

\hookrightarrow maldisposizione, LABILE

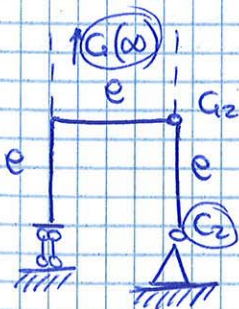


$C \nexists$

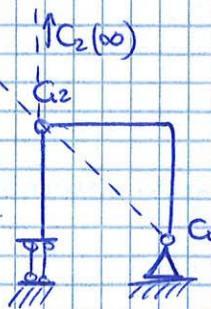


$g = 6$
 $u = 6$

C e C_2 non esistono (non sono allineati)



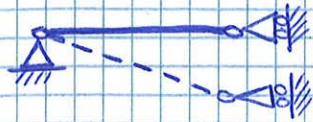
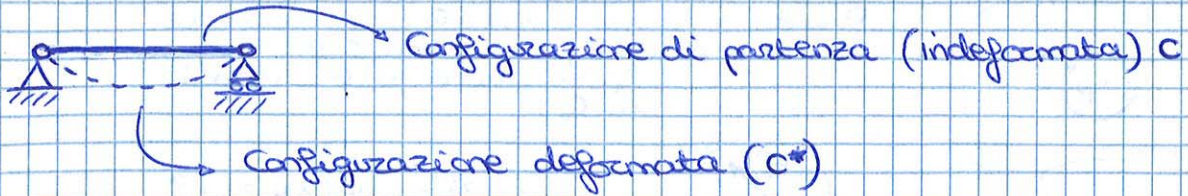
$g = 6$ $u = 6$



Non sono allineati

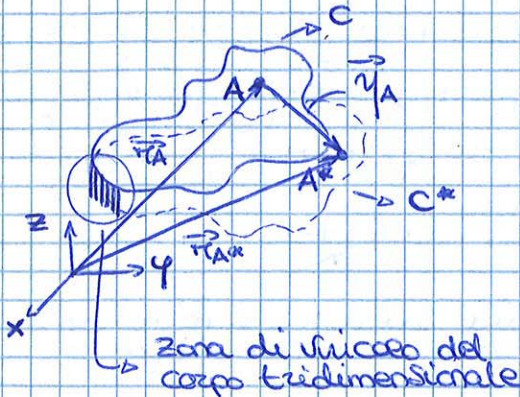
\hookrightarrow Non è catena cinematica

Esistono C e C_2 , anche se C è all' ∞ (rette // sono allineate all' ∞)



Atto di ROTAZIONE RIGIDA = non c'è deformazione, c'è un movimento di un corpo o mente rigido.

Quando ho messo male i vincoli



A causa dell'elasticità del corpo, e dei carichi esterni, i punti del corpo mutano la loro posizione.

r_A e r_{A^*} indicano le posizioni iniziali e finali.

$$\{r_{A^*}\} = \{r_A\} + \{y_A\}$$

↳ Vettore spostamento $f(x, y, z)$

$$\vec{r}_{A^*} = \vec{r}_A + \vec{y}_A$$

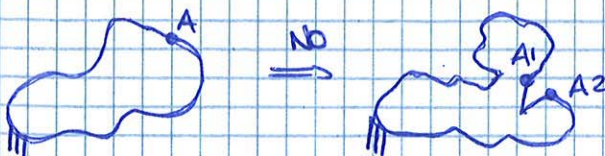
$$\begin{Bmatrix} x_A^* \\ y_A^* \\ z_A^* \end{Bmatrix} (x, y, z) = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

↓
dopo la deformazione

Generalizzando:

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{o meglio} \quad \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} (x, y, z) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

↳ lo spostamento è funzione della posizione iniziale

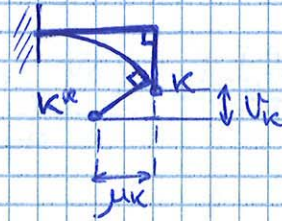


- Voglio che il corpo si deformi senza avere fratture (cioè u, v e w devono essere funzioni di un solo valore → ad un punto di partenza voglio evitare che ci siano 2 punti d'arrivo - FRATTURA) e/o compenetrazione di materia.

$$[Y_P] = \begin{bmatrix} 0 & -P_y & P_x \\ P_y & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix}$$

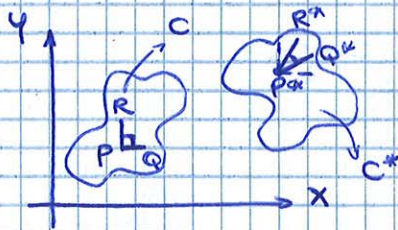
MATRICE PERO RIGIDO = antisimmetrica, e sulla diagonale compaiono solo zeri.

$$[E_P] = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right) & \frac{du}{dy} & \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dz} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) & \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2} \delta_{xy} & \frac{1}{2} \delta_{xz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \delta_{yz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & E_z \end{bmatrix}$$



↳ SIGNIFICATO FISICO?

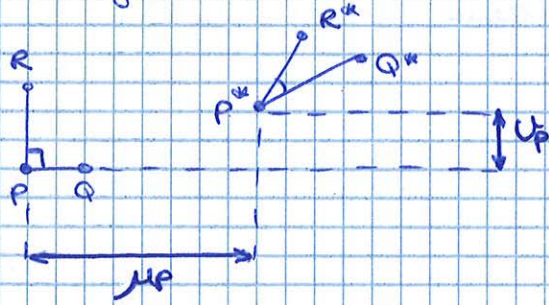
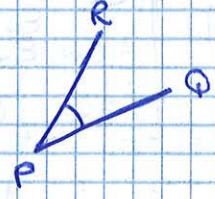
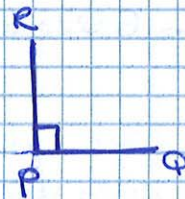
• DIMENSIONI FISICHE [E] → SONO NUMERI PURI (senza dimensioni)



CASO PIANO

è l'elementino su PQ dx e l'elementino su PR dy curvano delle lunghezze diverse - Indtze, e l'angolo varia nello spostamento.

↳ Sono sempre spostamenti infinitesimi

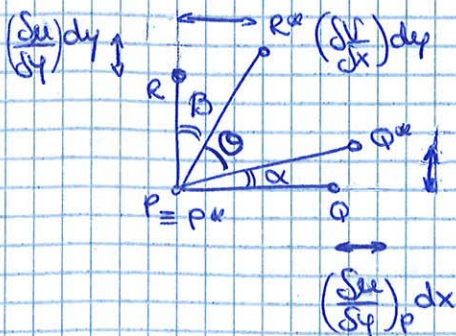


$$\{\vec{PQ}\} = \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{PR}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

metto una volta PQ e una volta PR

$$\{\gamma_{PQ}\} = \{\gamma_{PR}\} + [J_P] \{drc\}$$



Sovrapprendo P e P^* , mi considero gli spostamenti nel piano

↳ Considero \vec{PQ} e \vec{PR} , perché sono vettori a una sola componente, e calcolo il loro spostamento.

$$\{ \eta \} = [E] \{ n \}$$

↳ Solo deformazione

$\{ \eta \}$ È UN VETTORE a 3 componenti, posso trasformarlo per la rotazione del sistema -

$$[N][N]^t \{ \eta^* \} = [N][E][N]^t \{ n^* \}$$

$$\{ \eta^* \} = [N] \{ \eta \}$$

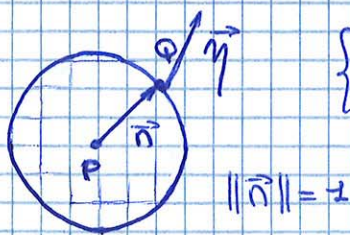
$$\{ \eta^* \} = \underbrace{[N]^t [N]}_I \{ \eta \} = \{ \eta \}$$

$$\{ n^* \} = [N] \{ n^* \}$$

$$\{ \eta \} = [E] \{ n \} \quad \hookrightarrow \{ \eta \} = [N]^T \{ \eta^* \} \quad \{ \eta^* \} = \underbrace{[N][E][N]^t}_{[E^*]} \{ n^* \}$$

$$[E] = [N][E][N]^T \quad \leftarrow \quad \boxed{\{ \eta^* \} = [E^*] \{ n^* \}}$$

DIREZIONI PRINCIPALI DELLA MATRICE DELLE DEFORMAZIONI



$$\{ \eta_n \} = [E] \{ n \}$$

↳ Cerco un sistema in cui l'operazione $[E] \{ n \}$ sia originario di un vettore allineato con quello di partenza

$$\{ \eta_n \} = [E] \{ n \}$$

$$\{ \eta_n \} = [E_n] \{ n \}$$

$$\{ 0 \} = [E] \{ n \} - [E_n] \{ n \} = [E] \{ n \} - [E_n][I] \{ n \} =$$

$$= ([E] - [E_n][I]) \{ n \} = 0 \quad \rightarrow \text{SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI OMOGENEO}$$

$$[A] \{ x \} = \{ 0 \}$$

(NB)

1) Soluzione banale: $\{ n \} = 0 \begin{pmatrix} n_x = 0 \\ n_y = 0 \\ n_z = 0 \end{pmatrix}$, ma $\| \vec{n} \|$ deve valere 1!

2) $\det([E] - [E_n][I]) = 0$

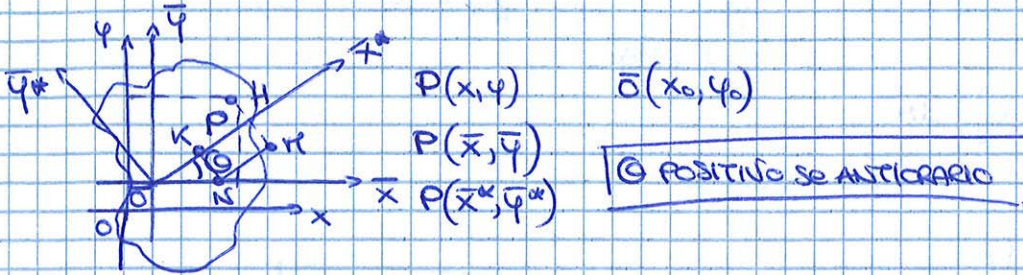
$$\begin{pmatrix} E_x & \frac{1}{2} \delta_{xy} & \frac{1}{2} \delta_{xz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \delta_{yz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & E_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = 0$$

Lez. 5

12/3/2013

GEOMETRIE DELLE AREE

• Consideriamo una sezione A



Qual è la legge di trasformazione che lega \bar{x}, \bar{y} a x, y ?

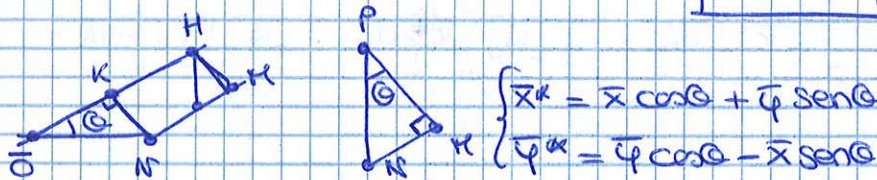
$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases} \quad \text{dove } (x_0, y_0) \text{ sono coordinate di } \bar{O} \text{ rispetto a } Oxy$$

• In forma vettoriale:

$$\{\bar{p}\} = \{p\} - \{r_{O\bar{O}}\}$$

Qual è la legge di trasformazione per rotazione del sistema di riferimento?

$$\bar{x}^* = \bar{O}H = \bar{O}K + KH = \bar{O}K + KN = \bar{O}N \cos \Theta + PN \sin \Theta = \boxed{\bar{x} \cos \Theta + \bar{y} \sin \Theta}$$



$$\begin{cases} \bar{x}^* = \bar{x} \cos \Theta + \bar{y} \sin \Theta \\ \bar{y}^* = \bar{y} \cos \Theta - \bar{x} \sin \Theta \end{cases}$$

$$\bar{y}^* = PH = PN - HN = PN - KN = \bar{P}N \cos \Theta - \bar{O}N \sin \Theta = \boxed{\bar{y}^* \cos \Theta - \bar{x}^* \sin \Theta}$$

$$\{\bar{p}^*\} = [N] \{\bar{p}\}$$

La matrice ortogonale che dipende dal seno e coseno dell'angolo di rotazione

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

LEGGE ROTOTRANSLAZIONE

$$\{\bar{e}^*\} = [N] (\{\bar{e}\} - \{r_{O\bar{O}}\})$$

$$S_y = \int_A x \, dA$$

$$S_x = \int_A y \, dA$$

→ MOMENTI STATICI (Vettore momento statico nel sistema assegnato)

MOMENTI D'INERZIA ASSIALI

• $I_x = \int_A y^2 dA > 0$ (mom. d'inerzia rispetto all'asse x)

• $I_y = \int_A x^2 dA > 0$ (mom. d'inerzia rispetto all'asse y)

• $I_{xy} = \int_A xy dA \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} 0$ (rispetto ad entrambi gli assi)

↳ MOMENTO CENTRIFUGO

↳ diverso da zero perché dai centri
avrebbe area nulla (x e $y = 0$)
↓
uguale a zero se appartiene ad un asse

$$[I] = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} = \int_A \{r\} \{r\}^t dA$$

$$\{r\} \{r\}^t = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{I}] = \int_A \{\bar{r}\} \{\bar{r}\}^t dA =$$

$$= \int_A (\{r\} - \{r_0\}) \{\bar{r}\}^t dA = \int_A (\{r\} - \{r_0\}) (\{r\} - \{r_0\})^t dA =$$

$$= \int_A (\{r\} - \{r_0\}) (\{r\}^t - \{r_0\}^t) dA =$$

$$= \underbrace{\int_A \{r\} \{r\}^t dA}_{[I]} - \underbrace{\int_A \{r\} \{r_0\}^t dA}_{\{r_0\}^t \cdot S} - \underbrace{\int_A \{r_0\} \{r\}^t dA}_{r_0 \int_A \{r\}^t dA} + \underbrace{\int_A \{r_0\} \{r_0\}^t dA}_{\{r_0\} \{r_0\}^t \int_A dA}$$

$$= [I] - \{r_0\}^t S - \{r_0\} S^t + \{r_0\} \{r_0\}^t \cdot A$$

$$[\bar{I}] = [I] - \{r_0\}^t S - \{r_0\} S^t + \{r_0\} \{r_0\}^t A$$

$$\bar{I}_y = I_y + 2S_y x_0 + A x_0^2$$

$$\bar{I}_x = I_x - 2S_x y_0 + A y_0^2$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - S_x x_0 y_0 + A x_0 y_0$$

LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE MOMENTO DI INERZIA NELLA TRASLAZIONE DEL SISTEMA DI PARTENZA

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2\bar{I}_{xy}}{(\bar{I}_y - \bar{I}_x)} \right]$$

arctan = arco da cui tangente da'

$-\frac{\pi}{4} < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$ → Zotta di $\frac{\pi}{4}$ sono con Sezioni Giroscopiche (momenti inerzia uguali)

MOMENTI DI INERZIA PRINCIPALE

$$\begin{cases} I_\xi = \bar{I}_x^*(\theta) \\ I_\eta = \bar{I}_y^*(\theta) \end{cases}$$

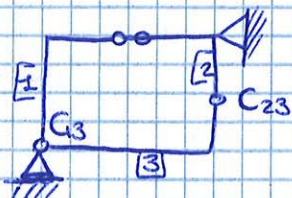
Sistema di riferimento PRINCIPALE
↳ CENTRALE se è anche baricentrico

$$\frac{I_\xi}{I_\eta} = \left(\frac{\bar{I}_x + \bar{I}_y}{2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{I}_x - \bar{I}_y)^2 + 4\bar{I}_{xy}^2}$$

- $\bar{I}_x < \bar{I}_y \Rightarrow I_\xi < I_\eta$ (uso il + per I_η e il - per I_ξ)
- $\bar{I}_x > \bar{I}_y \Rightarrow I_\xi > I_\eta$ (uso il + per I_ξ e il - per I_η)

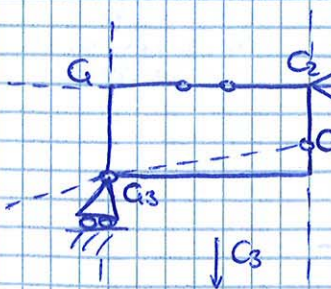
Lez. **7**

18/3/2013

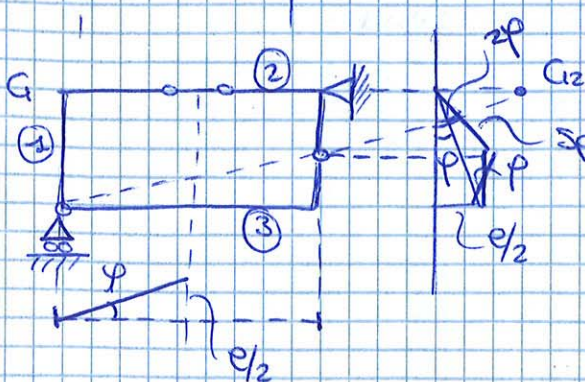


$g = 9$
 $v = 2 + 2 + (2) + (3) = 8$

↳ corzello + cerniera pendolo



$G-C_2-C_23$ allineati (2° teorema)
 $G-C_2-C_2$ allineati
 $G-C_23-C_2$ " ⇒ C_3 è all'infinito
 $C_2-C_23-C_3$ "



Il corpo 3 non si sposta sulla verticale

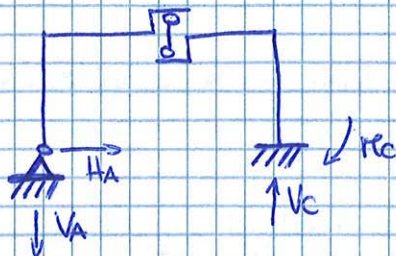
spostamento del corpo 2



• In totale:

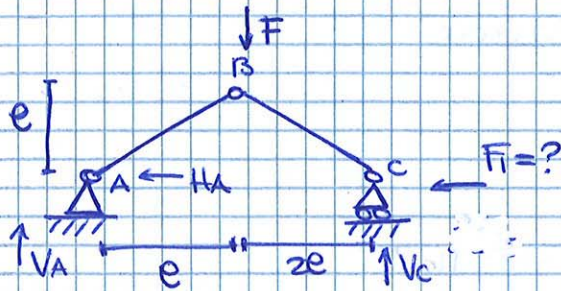
$$\begin{cases} H_A + H_C - F = 0 \\ V_C + V_A = 0 \\ V_C 2e - F e + M_C = 0 \\ H_C = 0 \\ F e - H_A 2e + V_A e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = F \\ \rightarrow V_C = F \\ M_C = -F e \\ // \\ \rightarrow V_A = -F e \end{cases}$$



Se vengono negative, vuol dire che il senso ipotizzato è sbagliato.

METODO DEI LAVORI VIRTUALI (struttura isostatica)



logico trovare valore F_2 per cui rimane in equilibrio.

$$\begin{cases} H_A - F_2 = 0 \\ V_A + V_C - F = 0 \\ V_C 3e - F e = 0 \quad (R \equiv A) \\ H_A e - V_A e = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = 2/3 F \\ F_2 = 2/3 F \\ V_C = F/3 \\ H_A = 2/3 F \end{cases}$$

• Altro metodo:

"Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo sia in equilibrio in una data configurazione è che il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne per qualunque insieme di spostamenti virtuali sia nullo."

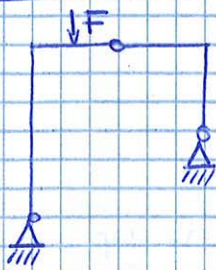
- 1) Vale per corpi rigidi.
- 2) Esprime il fatto che se c'è uno spostamento per cui le forze esterne compiono L > 0, quel movimento deve avvenire necessariamente.
- 3) Spostamenti virtuali perché non reali, ma compatibili con i vincoli.

$$PLV = -F \cdot \frac{pe}{2} + Vc \cdot 3pe = 0$$

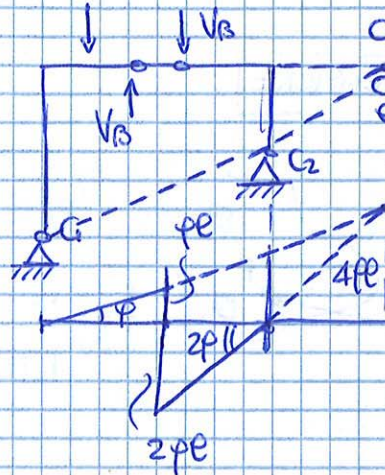
$$Vc = \frac{F}{6}$$

Lo spostamento è solo di $e/2$, lui è già al centro.

Calcolo V_B



Degrado



Cost. V_B più compiere lavoro.

Nel punto in cui si proietta C_2 le rette di C_1 e C_2 si devono incontrare!

$$L_v = -F \cdot \frac{pe}{2} + V_B \cdot pe + V_B \cdot 2pe = 0$$

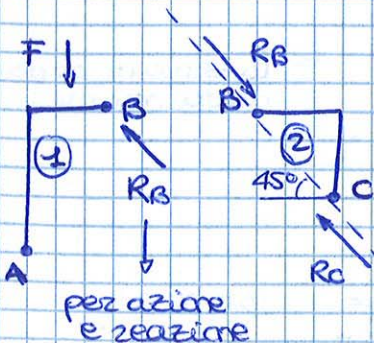
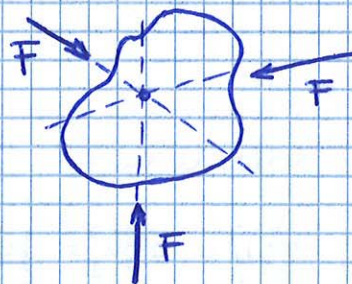
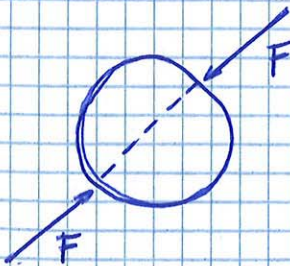
$$-F \cdot \frac{pe}{2} + 3V_B \cdot \frac{pe}{2} = 0$$

$$V_B = \frac{F}{6}$$

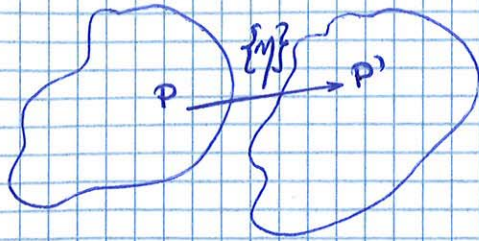
METODO GRAFICO

→ Un corpo soggetto a 2 forze ⇒ le forze hanno la stessa retta d'azione, stesso modulo e verso opposto.

→ Un corpo soggetto a 3 forze ⇒ le tre rette d'azione devono concorrere in un unico punto.



retta d'azione delle reazioni V_C e V_B (conosco due punti, una e una sola retta)



COMPRESSI

→ Teoria Cauchy esclude forze e momenti concentrati

→ Il vettore tensione è proporzionale a:

$$\boxed{\{t_u\} = FL^{-2}}$$

$$\int_{V_t} \{f\} dV + \int_{S_t} \{p\} dS + \int_{\Omega} \{t_u\} d\Omega = \{f_0\}$$

- Al variare della tensione varia la sezione di taglio, o meglio,
 ⇒ LA TENSIONE DIPENDE DALLA SEZIONE DI TAGLIO E DALLA SUA NORMALE.

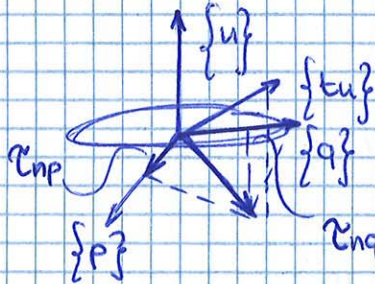
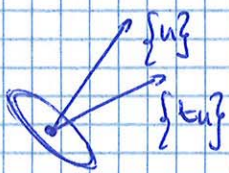
$$\{t_u\} = f(\{r\}, \{u\})$$

$$\{t_u\} = t_{ux} \hat{i} + t_{uy} \hat{j} + t_{uz} \hat{k}$$

$$\{t_u\} = \tau_{un} \hat{n} + \tau_{np} \hat{p} + \tau_{nq} \hat{q}$$

Riferimento esterno

Riferimento del punto (tangenziale e normale)

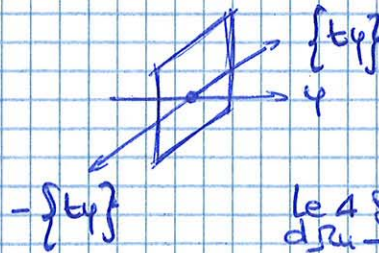
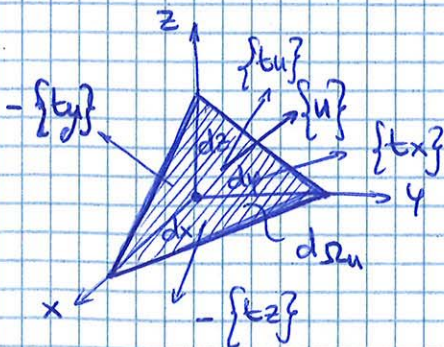


ESISTONO 2 COMPONENTI TANGENZIALI!!

$$\tau_u = \sqrt{\tau_{np}^2 + \tau_{nq}^2}$$

Dim.

TETRAEDRO DI CAUCHY = tetraedro con origine assi nel punto P e quarta faccia ortogonale a n.



Le 4 facce sono dS_x, dS_y, dS_z e dS_n.

$$\{t_u\} dS_n - \{t_x\} dS_x - \{t_y\} dS_y - \{t_z\} dS_z + \{f\} dV = \{f_0\}$$

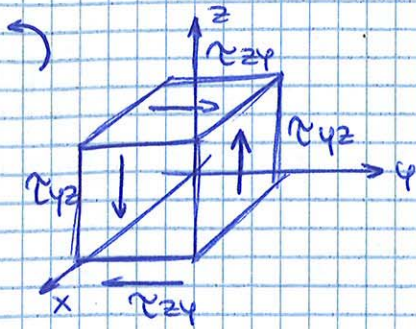
• $dS_x = dS_n \cos \hat{x}\hat{n}$

• $dS_y = dS_n \cos \hat{y}\hat{n}$

• $dS_z = dS_n \cos \hat{z}\hat{n}$

↳ forze di volume

• EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO X •



Momento coppia τ_{yz} (deve moltiplicare per l'area per ottenere F)

$$\tau_{yz} \cdot dx dz$$

$$M = \tau_{yz} \cdot dx dz \cdot (dy) \rightarrow \text{braccio}$$

$$\tau_{zy} \rightarrow \tau_{zy} \cdot dy dz$$

$$M = \tau_{zy} \cdot dx dy \cdot dz$$

$$\Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Lez. **8**

19/3/2013

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

• $\{u\}^T \{v\} = \{u_x \ u_y \ u_z\} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

• $\{u\}^T$ è la trasposta di un vettore colonna \rightarrow vettore ziga

$$\{tu\} = [G] \{n\}$$

$$\begin{pmatrix} t_{ux} \\ t_{uy} \\ t_{uz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & G_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & G_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g: \{n\} \rightarrow \{tu\}$$

ENDOMORFISMO
SIMMETRICO

• Proprietà endomorfismi:

$$- \bar{x} \cdot g(\bar{y}) = \bar{y} \cdot f(\bar{x}) \Rightarrow \{n\}^T \cdot [G] \{m\} = \{m\}^T \cdot [G] \{n\}$$

$$\{n\}^T \cdot \{tm\} = \{m\}^T \cdot \{tn\}$$

$$\boxed{t_{mn} = t_{nm}} \rightarrow \text{LEGGE DI RECIPROCA}$$

$G_1^3 - J_2 G_1^2 - J_2 G_1 - J_3 = 0 \rightarrow$ EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\begin{cases} J_2 = G_x + G_y + G_z \\ J_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - G_x G_z - G_y G_z - G_x G_y \\ J_3 = \det [G] \end{cases} \quad \begin{array}{l} [J_2, J_2, J_3 \text{ sono}] \\ [INVARIANTI] \end{array}$$

• Essendo endomorfo simmetrico, ha 3 soluzioni reali

G_1, G_2, G_3 $\left\{ \begin{array}{l} \text{autovalori} \\ \text{tensioni principali} \end{array} \right.$

$G_1 \rightarrow \{n_1\}$ autovettore

$G_2 \rightarrow \{n_2\}$

$G_3 \rightarrow \{n_3\}$

• n_1, n_2, n_3 sono DIREZIONI PRINCIPALI della tensione

- Se $G_1 \neq G_2 \neq G_3 \Rightarrow \{n_1\} \perp \{n_2\} \perp \{n_3\} \rightarrow$ Base ortogonale di autovettori

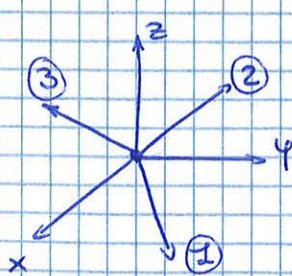
- Se $G_1 = G_2 \neq G_3 \Rightarrow$ un autovettore è $\{n_3\}$

\hookrightarrow qualsiasi vettore $\perp n_3$ è un autovettore \rightarrow sono ∞

- Se $G_1 = G_2 = G_3 \Rightarrow$ qualsiasi vettore è un autovettore

\hookrightarrow caso dei FLUIDI

• Nel sistema di riferimento principale:

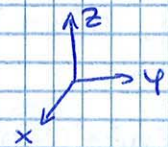
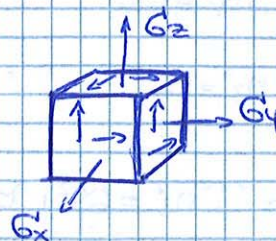


$\{tn\} = [G]\{n\}$

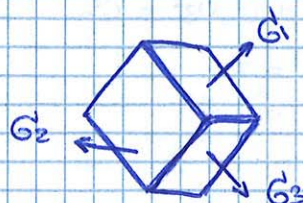
$$\begin{pmatrix} tn_1 \\ tn_2 \\ tn_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Componenti, non autovettori}$$

①-②-③ sono componenti di un generico vettore n rispetto al riferimento xyz

\hookrightarrow NO autovettori



NON ci sono componenti TANGENZIALI



- Risolvendo il sistema: \rightarrow Equazioni in n_1^2, n_2^2 e n_3^2

La Kramer

$$n_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1^2 + \tau_u^2 & G_2^2 & G_3^2 \\ G_1 & G_2 & G_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1^2 & G_2^2 & G_3^2 \\ G_1 & G_2 & G_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} G_1^2 & G_2^2 & G_3^2 \\ G_1 & G_2 & G_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & G_2^2 & G_3^2 \\ 0 & G_2 & G_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(G_1 - G_2)(G_2 - G_3)(G_1 - G_3)}$$

$$\hookrightarrow (G_1 - G_2)(G_2 - G_3)(G_1 - G_3)$$

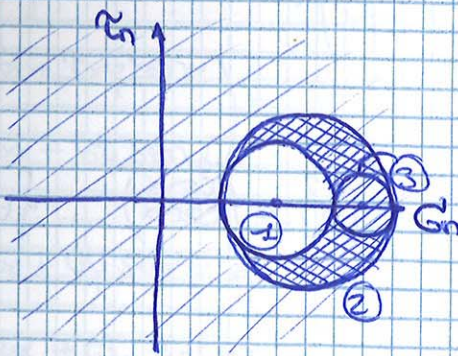
$$= \frac{(G_1 - G_2)(G_1 - G_3)(G_2 - G_3) + \tau_u^2(G_2 - G_3)}{(G_1 - G_2)(G_1 - G_3)(G_2 - G_3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1^2 = \frac{(G_1 - G_2)(G_1 - G_3) + \tau_u^2}{(G_1 - G_2)(G_1 - G_3)} \geq 0 \\ n_2^2 = -\frac{(G_1 - G_1)(G_1 - G_3) + \tau_u^2}{(G_1 - G_2)(G_2 - G_3)} \geq 0 \\ n_3^2 = \frac{(G_1 - G_1)(G_1 - G_2) + \tau_u^2}{(G_1 - G_3)(G_2 - G_3)} \geq 0 \end{cases}$$

Sembra che possa imporre valori \neq di τ_u e G_n , ma essendo quadrati DEVONO ESSERE ≥ 0 !!

• Trovando il dominio: (denominatore positivo perché $G_1 > G_2 > G_3$)

- ① $(G_1 - G_2)(G_1 - G_3) + \tau_u^2 \geq 0$
- ② $(G_1 - G_1)(G_1 - G_3) + \tau_u^2 \leq 0$
- ③ $(G_1 - G_1)(G_1 - G_2) + \tau_u^2 \geq 0$



La ① è una circonferenza:

$$C_1 \left(\frac{G_2 + G_3}{2}, 0 \right)$$

$$R_1 = \frac{G_2 - G_3}{2}$$

Idem e altre

\rightarrow Il dominio sarà:



τ_u MAX è il RAGGIO della ②

$$\hookrightarrow \tau_{u \text{ MAX}} = \frac{G_1 - G_3}{2}$$

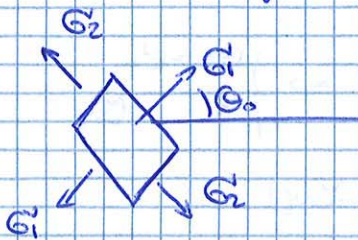
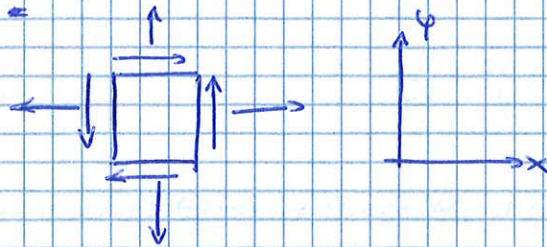
autovettori $\begin{vmatrix} G_x - G_u & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & G_y - G_u \end{vmatrix} = 0$

$$(G_x - G_u)(G_y - G_u) - \tau_{xy}\tau_{yx} = 0$$

$$G_u^2 + G_x G_y - (G_x + G_y)G_u - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix} \right\} = \frac{G_x + G_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(G_x + G_y)^2 - 4G_x G_y + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{G_x + G_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(G_x - G_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{G_x - G_y}$$

$$G_n = \{n\}^t \{t_n\} = \{n\}^t [G] \{n\} = (\cos \alpha \quad \sin \alpha) \begin{pmatrix} G_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & G_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= (\cos \alpha \quad \sin \alpha) \begin{pmatrix} G_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{yx} \cos \alpha + G_y \sin \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= G_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + G_y \sin^2 \alpha =$$

$$= G_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \tau_{xy} \sin 2\alpha + G_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} =$$

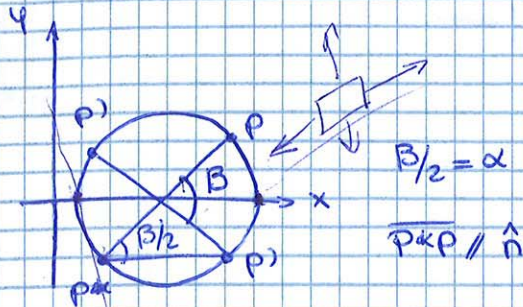
$$= \frac{G_x + G_y}{2} + \frac{G_x - G_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = \{t\}^t \{t_n\} = \{t\}^t [G] \{n\} = (\sin \alpha \quad -\cos \alpha) \begin{pmatrix} G_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{yx} \cos \alpha + G_y \sin \alpha \end{pmatrix} =$$

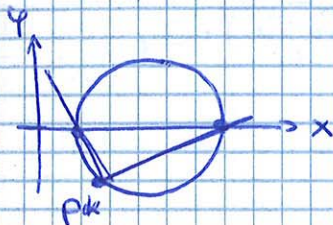
$$= G_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \cos^2 \alpha - G_y \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ -\tau_{xy} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]}_{R^2} \cos 2\alpha = R^2 \cos^2 \alpha$$

$2\alpha = \beta$



Le componenti σ_n e τ_n tangenti sulla giacitura di normale \hat{n} sono le coordinate del punto di intersezione tra il cerchio di Mohr e la parallela a \hat{n} passante per P^* .



- 1 - Cerco punti intersezione asse x - cerchio Mohr
- 2 - Unisco questi punti a P^*
- 3 - Se l'ascissa del punto a destra $\epsilon > 0$, la forza è "tirante" all'esterno.

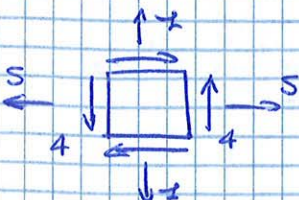


- 4 - Se l'ascissa di s_x è < 0 , la forza è "tirante" in alto e in basso.

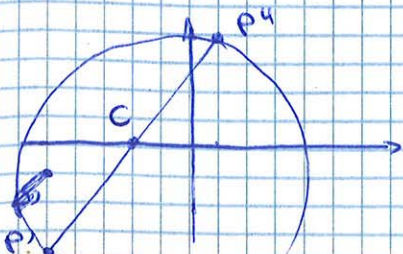


COSTRUZIONE CERCHI DI MOHR

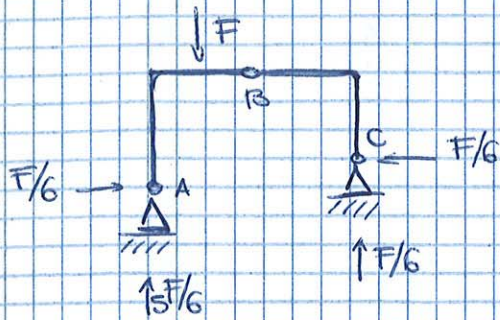
- 1) Traccio punti $P^1(\sigma_x, -\tau_{xy})$ $P^4(\sigma_y, \tau_{xy})$
unisco P^1 e P^4 → trovo centro e raggio del cerchio
- 2) Traccio retta orizzontale per P^1 o verticale per P^4 e trovo P^*
- 3) Traccio $ea \parallel a \hat{n}$ per P^*



$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 & \sigma_x &= -5 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 2 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 4 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} &= 0 \text{ MPa} \end{aligned}$$

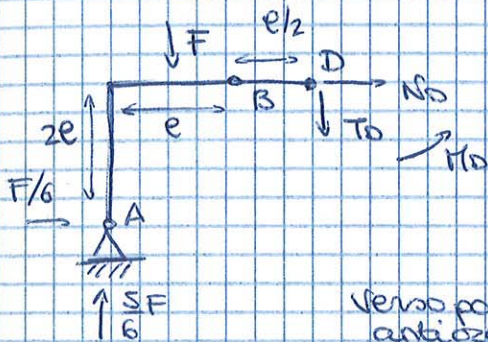


- M, N e T sono risultante e momento risultante rispetto al baricentro G della tensione che si scambiano se due porzioni.



calcio = pezzettino o simo di trave

- Calcolo M, N e T in D :



$$N_D = -F/6$$

$$T_D = \frac{5F}{6} - F = -F/6$$

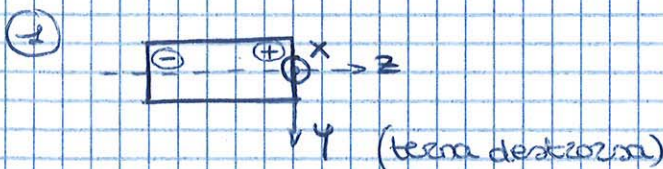
$$M_D + Fe + \frac{Fe}{3} - \frac{5F}{6} \cdot \frac{3e}{2} = 0$$

verso positivo antiorario

$$\rightarrow M_D = F \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{4} \right) = -F/12$$

- Se non si sa qual è la sezione sollecitata, traccio i diagrammi della sollecitazione, e da lì capisco che cosa è più sollecitato.

CONVENZIONI DI SEGNO



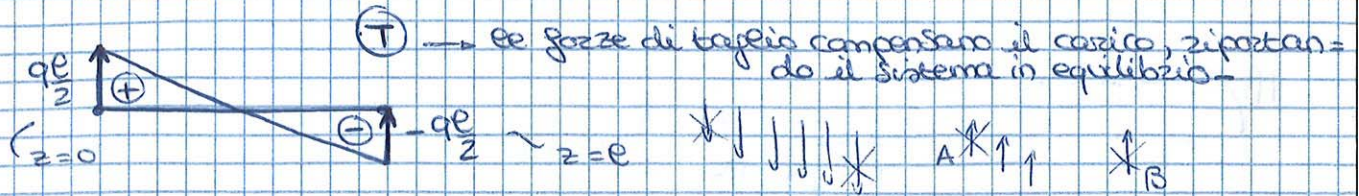
- La faccia POSITIVA è quella con z uscente
- NEGATIVA è quella con z entrante

- $N > 0$ se diretto lungo z su faccia positiva e viceversa.

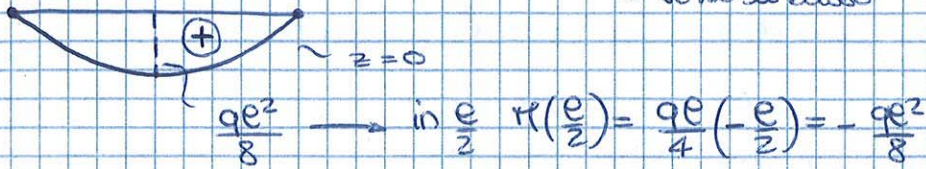


- N — POSITIVO se di trazione
- NEGATIVO se di compressione

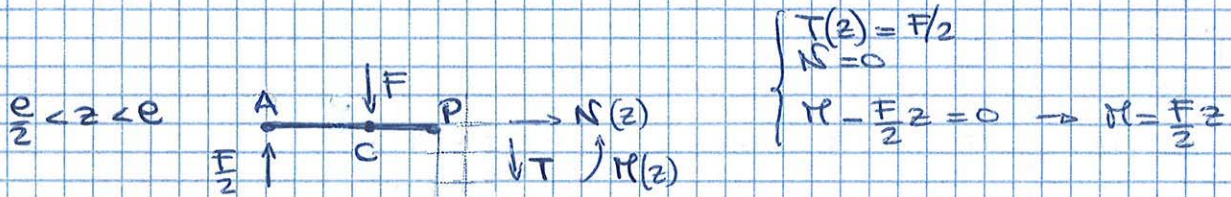
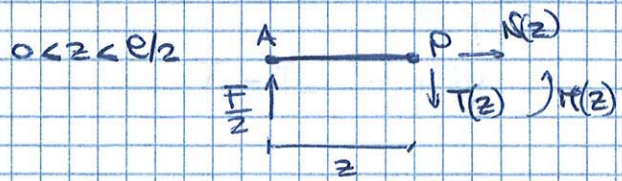
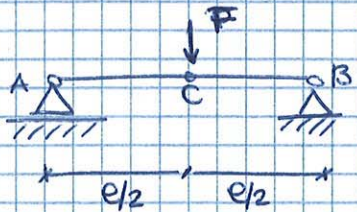
• Traccio il diagramma - Calcolo il valore nei due punti estremi ($z=0$ e $z=e$)



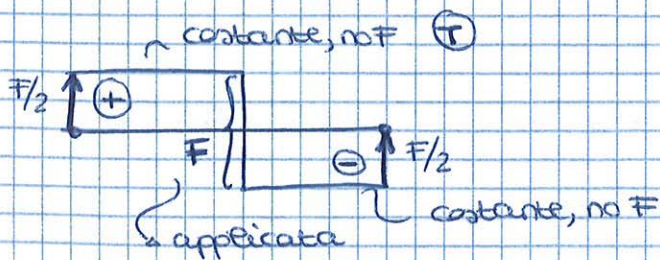
(M) → è una parabola, e agli estremi vale 0, se no è positiva. ↳ verso il basso



ESEMPIO

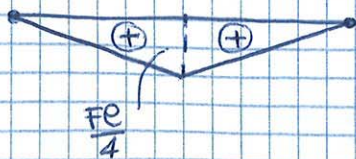


$$\begin{cases} M(z) + F(z - e/2) - \frac{F}{2}(z) = 0 \rightarrow M(z) = \frac{F}{2}(e - z) \\ N = 0 \\ \frac{F}{2} - F - T(z) = 0 \rightarrow T(z) = F/2 \end{cases}$$



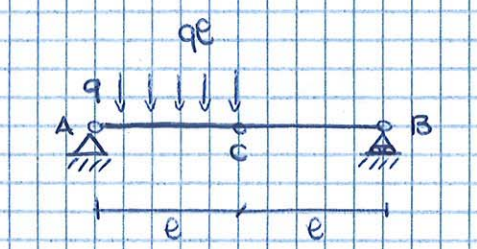
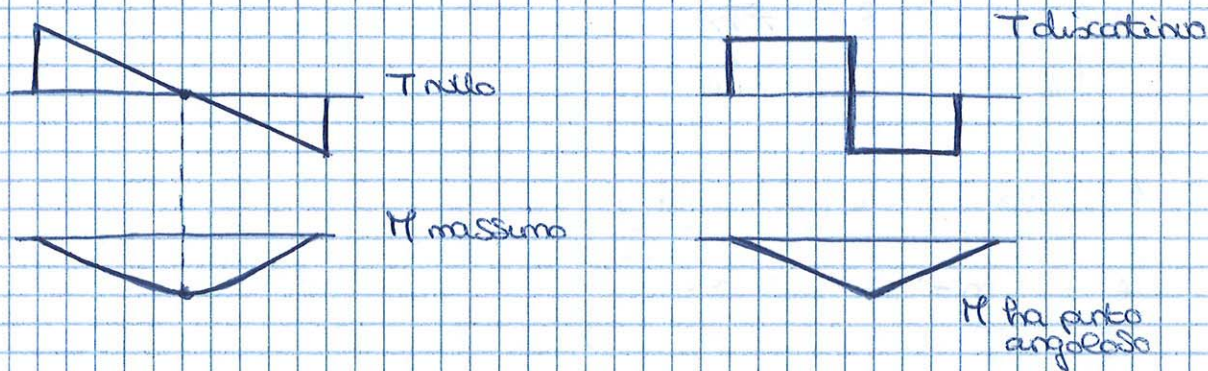
LE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA COINCIDONO CON LE REAZIONI VINCOLARI IN CORRISPONDENZA DEI VINCOLI.

(R) $M(e/2) = \frac{Fe}{4}$



3) In base alle equazioni differenziali e alle considerazioni d'equilibrio posso dire:

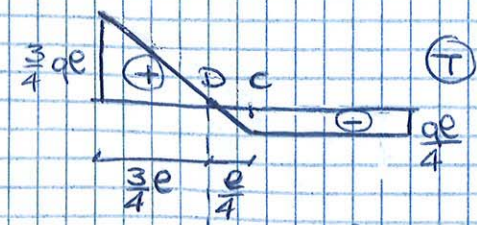
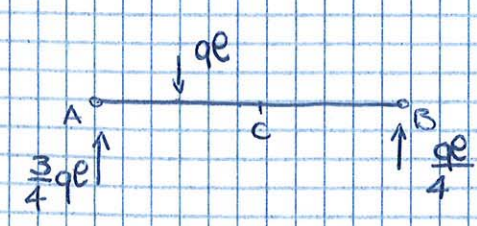
1. - dove $T=0 \rightarrow M$ è minimo/massimo
2. - Se $q \equiv 0 \rightarrow T$ è costante $\rightarrow M$ è lineare
3. - Se $q \equiv \text{cost.} \rightarrow T$ è lineare $\rightarrow M$ è parabolico
4. - Discontinuità in $q \rightarrow T$ ha un punto angoloso
5. - Presenza di $F \rightarrow T$ discontinuo $\rightarrow M$ ha un punto angoloso
6. - Presenza di $m \rightarrow M$ discontinuo
 \hookrightarrow coppia concentrata



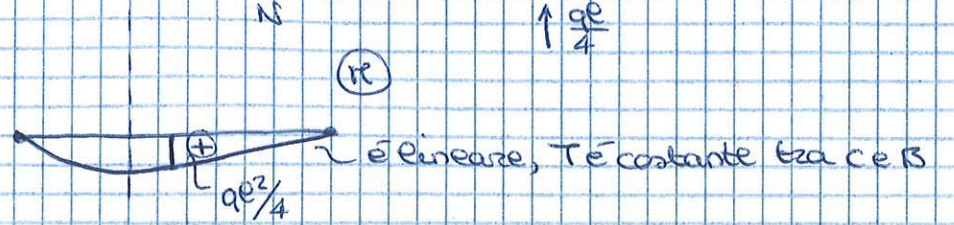
$\rightarrow \boxed{H_A = 0}$
 $\uparrow V_A + V_B - qe = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{3}{4} qe}$
 $\curvearrowright - q \frac{qe^2}{2} + V_B \cdot 2e = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = \frac{qe}{4}}$



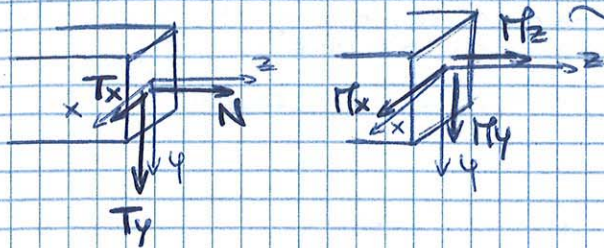
$T_A = \frac{3}{4} qe$ (positivo perché faccia negativa)
 $T_B = \frac{qe}{4}$ (negativo perché faccia positiva)



• Calcolo $M(c)$ $\curvearrowright c = 11 - \frac{qe \cdot e}{4} \rightarrow \boxed{M = \frac{qe^2}{4}}$

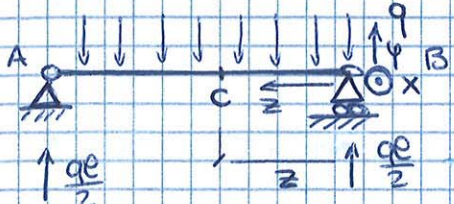


SISTEMI DI TRAVI TRIDIMENSIONALI

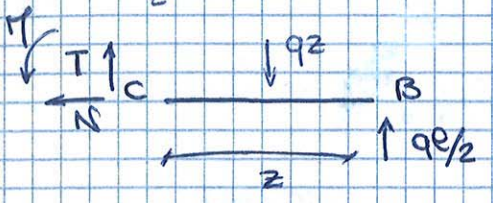


Momento torcente (assente nel piano)

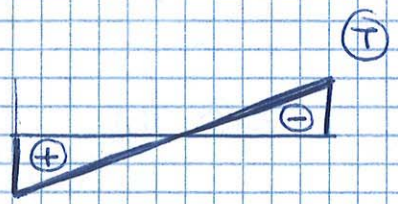
Cambia verso z



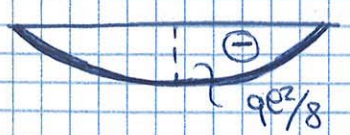
Essendo destrorsa, se invertito z automaticamente invertito anche y.



$$\begin{cases} N=0 \\ T + \frac{qe}{z} - qz = 0 \rightarrow T = q(z - e/2) \\ M + \frac{qe}{z} \cdot z - \frac{qz^2}{2} = 0 \rightarrow M = -\frac{qz}{2}(e-z) \end{cases}$$



$T(0) = -\frac{qe}{2}$



I valori sono gli stessi di prima, cambia solo la parte da cui riportarlo a causa del sistema di riferimento.

Il valore è esattamente l'opposto di quello di prima, ma non cambia la parte da cui è riportato.

CONVENZIONE DI SEGNO ②

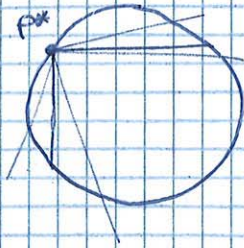
↳ Sruvicciata dal sistema di riferimento

↳ SEMPRE DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE

- $N > 0$ se di trazione
- $T > 0$ se fa ruotare il corpo di trave su cui agisce in senso orario
- $M > 0$ più di segno ma riportato dalla parte delle fibre tese

↳ ASSOLUTO

• Al variare dell'angolo:

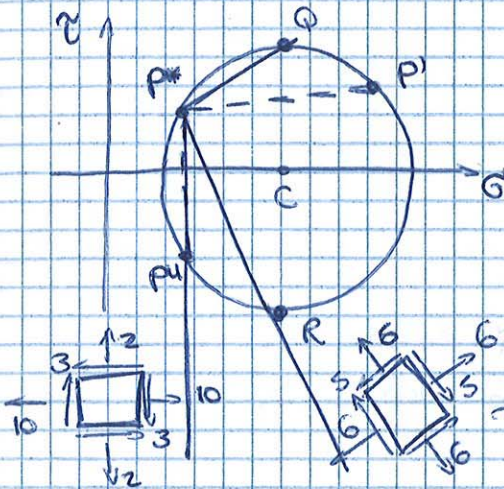


Tra le punti in base all'inclinazione e considerato ee asse coordinate -

$$\tau_{MAX} = \tau_{MIN} = 5 \text{ MPa}$$

↳ Quando il corpo ruota variano ee tensioni

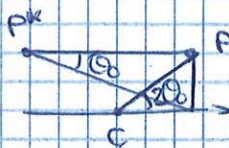
• Quando ho τ_{MAX} ?



In Q e R τ_{MAX} (τ_{MIN})

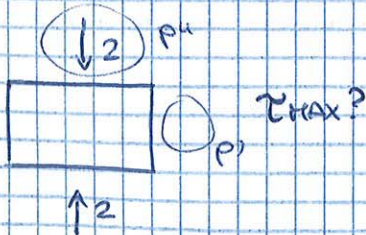
↳ Ruota in senso orario

• L'angolo tra le giaciture con τ_{MAX} e σ_{MAX} vale $\pi/4$ -



$$|2\theta| = \left| \arctan \frac{3}{\frac{10-2}{2}} \right| = \left| \arctan \frac{3}{4} \right|$$

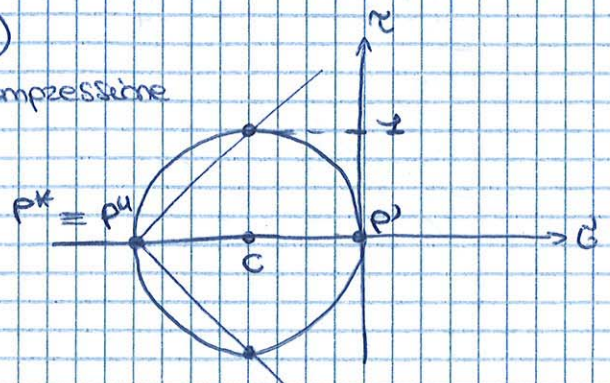
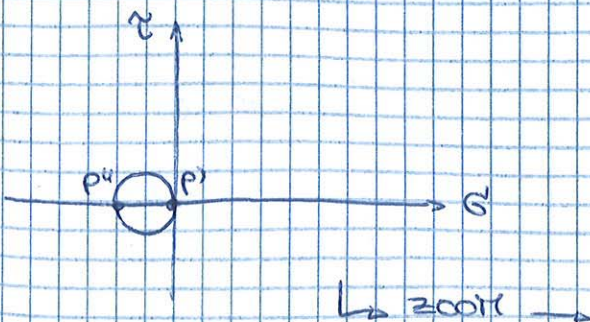
$$\Rightarrow \boxed{|1\theta| = 18,4^\circ} \rightarrow (-18,4^\circ \text{ per rotazione oraria})$$

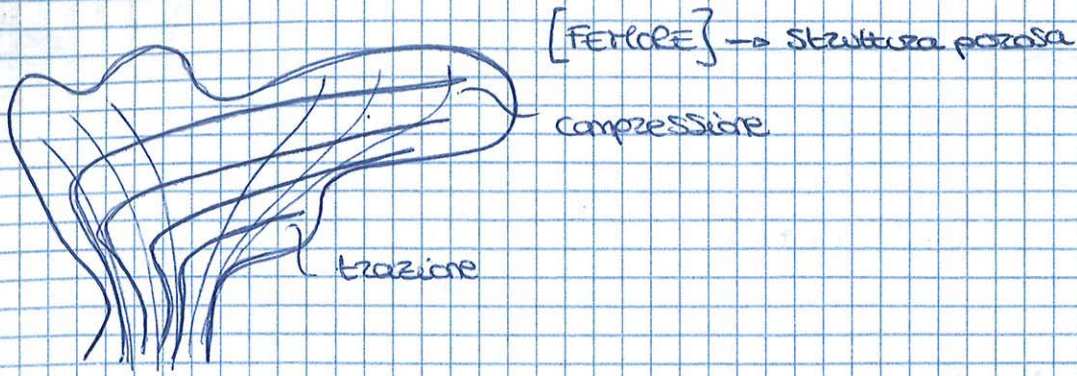


↳ τ_{MAX} dove $\tau = \text{raggio} \text{ MPa} = 1 \text{ MPa}$

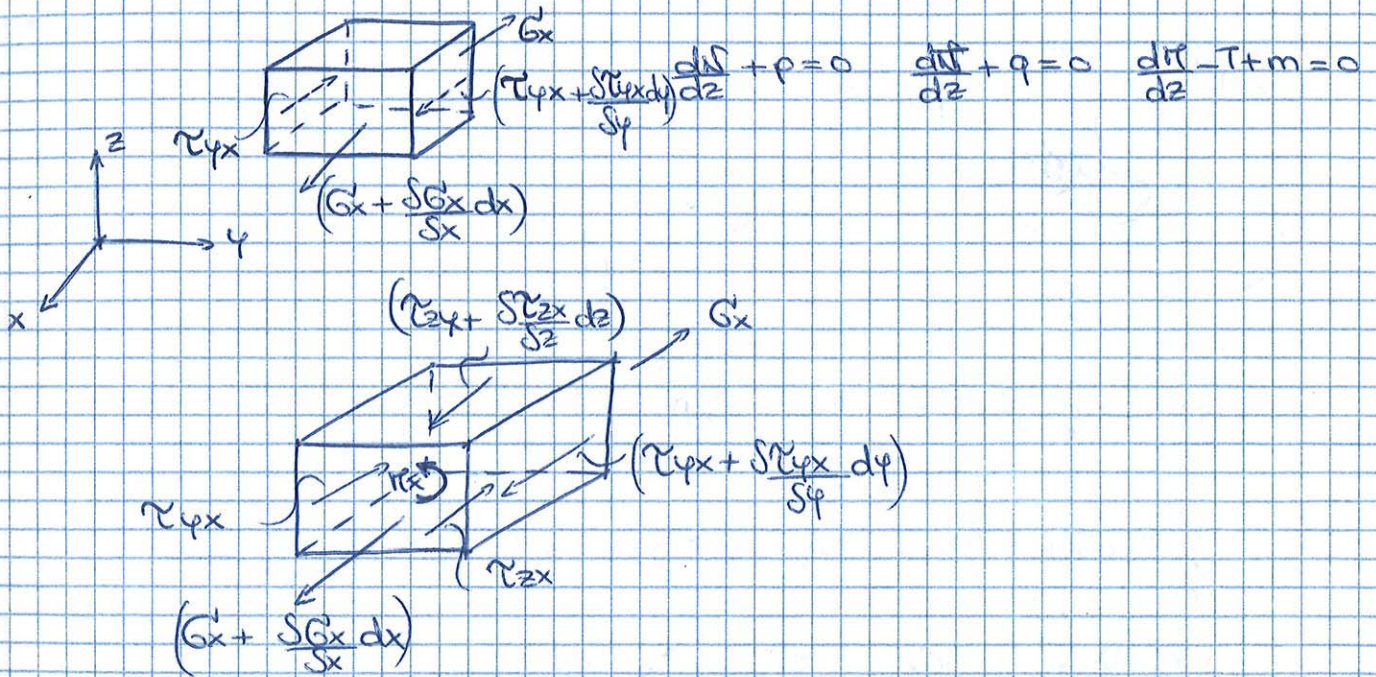
$P^1(0,0)$
 $P^4(-2,0)$

↳ compressione





EQUAZIONI DI EQUILIBRIO INDEFINITE PER SOLIDO 3D



$$\begin{aligned}
 & -G_x dx dy dz + (G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} dx) dx dy dz + T_{yx} dx dz + (T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy) dx dz + \\
 & + T_{zy} dx dy + (T_{zy} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} dz) dx dy + F_x dx dy dz = 0
 \end{aligned}$$

↳ pezzo di volume

→ Divido per $dx dy dz$ e ottengo

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} dz dx dy + F_x dx dy dz = 0$$

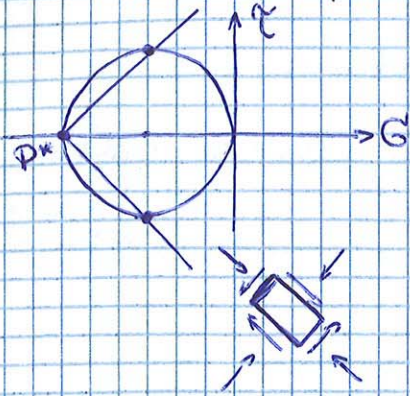
$$\Rightarrow \left[\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + F_x = 0 \right]$$

- Analogamente:

$$\left[\begin{aligned}
 & \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\
 & \frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + F_z = 0
 \end{aligned} \right]$$

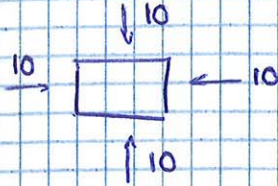
Lez. **12**

8/4/13



$P' (2, 0)$
 $P'' (-2, 0)$

①

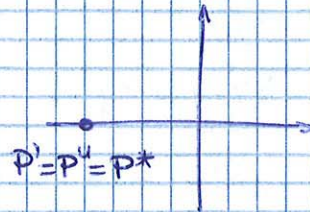


$P' (-10, 0)$
 $P'' (-10, 0)$

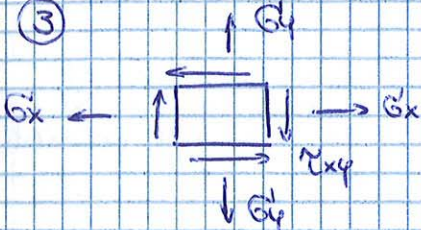
②

IDROSTATICO

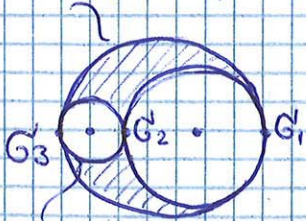
↳ Cerchio di Mohr collassa in un punto.



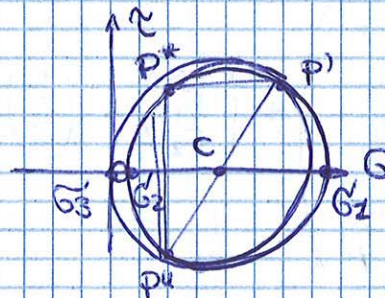
③



$\hat{n} \in \pi(\hat{n}_1, \hat{n}_3)$



$\hat{n} \in \pi(\hat{n}_2, \hat{n}_3)$



Se è stato piano, $G_3 = 0$, posso costruire anche gli altri 2 cerchi di Mohr usando G_3 con G_1 e G_2 .

La tensione MASSIMA non è da cercarsi solo nel cerchio principale.

LA SECONDA COSTRUZIONE DEI CERCCHI DI MOHR PERMETTE DI DETERMINARE LO STATO TENSIONALE SU GIACITURE LA CUI NORMALE APPARTIENE AL PIANO PRINCIPALE.

- Qualsiasi stato tensionale triassiale può essere visto come la somma di uno stato tensionale piano e uno stato uniaxiale ad esso perpendicolare.

$$[G] = \begin{pmatrix} G_1 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix}$$

$G_1 \neq 0 \quad G_2 \neq 0$
 $G_3 = G_3 \neq 0$

$G_1 \neq 0 \quad G_2 \neq 0$
 $G_3 = 0$

$G_1 = G_2 = 0$
 $G_3 \neq 0$

uniaxiale

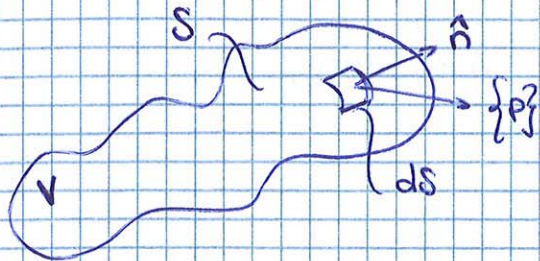
Stato tensionale piano

$$\{E\} = [D] \{m\}$$

6x1 6x3 3x1

• L'OPERATORE MATRICIALE CINEMATICO È IL TRASPOSTO DELL'OPERATORE MATRICIALE STATICO.

CAUCHY $\{t_n\} = [G] \{n\}$



Sulla superficie del corpo:

$$\boxed{\{t_n\} = \{p\}}$$

$$t_{nx} = G_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = P_x$$

$$t_{ny} = G_y n_y + \tau_{yx} n_x + \tau_{yz} n_z = P_y$$

$$t_{nz} = G_z n_z + \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = P_z$$

$$\begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[N]^T \{G\} = \{p\}}$$

3x6 6x1 3x1

CONDIZIONI DI EQUIVALENZA AL CONTORNO

$$\begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{pmatrix}$$

È simile all'operatore statico
($\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow n_y$)

• La parte su S_T (Superficie vincolata) è nulla -

$$L_{V,EXT} = \int_V \{F_A\}^T \{m\} dV + \int_S \{P_A\}^T \{n\} dS = \int_V [G_A]^T \{E_A\} dV$$

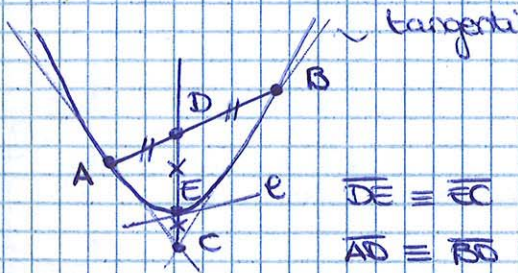
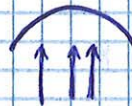
$$L_{V,EXT} = L_{V,INT}$$

- I SISTEMI NON SONO COLLEGATI!
- SE CORPO RIGIDO, LE DEFORMAZIONI SONO ZERO ($E \equiv 0$)
 $\hookrightarrow L_{V,EXT} = 0$

• Possiamo farlo perché operatore statico e cinematico sono trasportati tra loro -

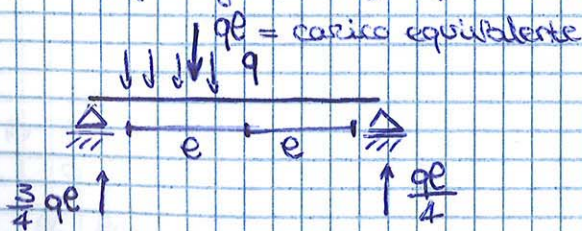
[COSTRUZIONE PARABOLA DI MOMENTO] \rightarrow con carichi distribuiti uniformi

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q$$

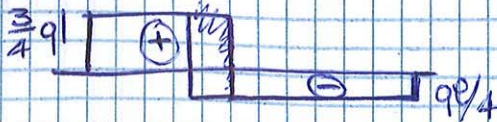


- 1) tangenti
- 2) Unisco A e B
- 3) Verticale per C

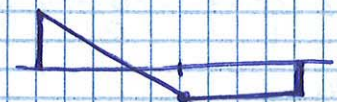
E (tangente in E) è parallela ad AB



(T)



Se la forza è concentrata:

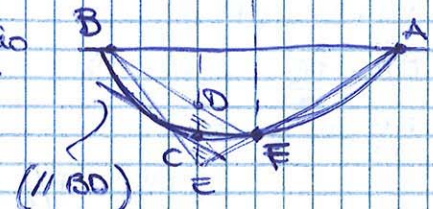


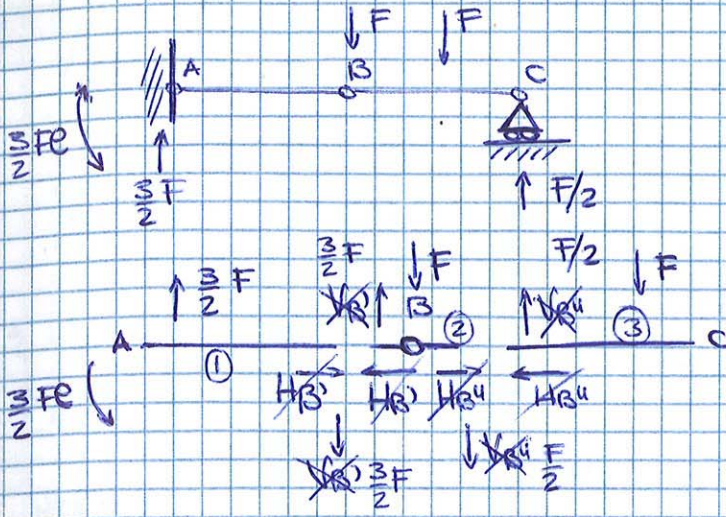
Unisco i valori iniziali e finali della zona di carico -

(M)



C'è il punto medio del segmento che unisce C e D





① $H_B^1 = 0$

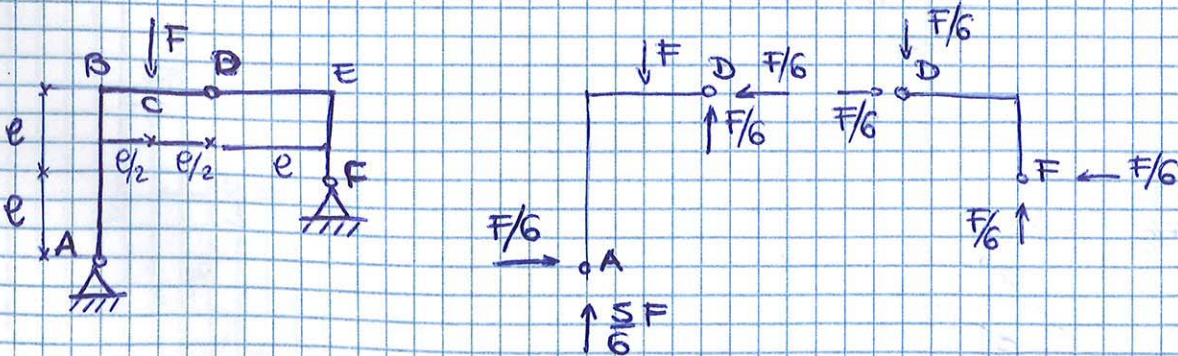
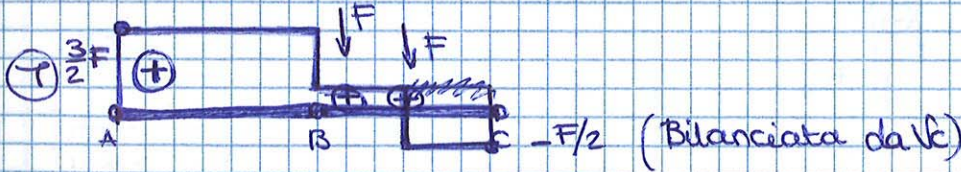
$\frac{3F}{2} - V_B^1 = 0 \Rightarrow V_B^1 = \frac{3F}{2}$

② $-H_B^2 = H_B^3 = 0$

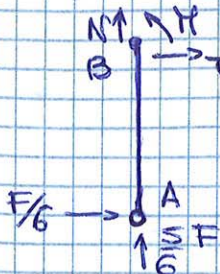
$F + V_B^2 = \frac{3F}{2} \Rightarrow V_B^2 = \frac{F}{2}$

③ $F/2 - F/2 = 0 \rightarrow \text{VERO}$

$\frac{F}{2} - \frac{F}{2} = 0 \rightarrow \text{VERO}$



• Calcolo M, N, T in B sul zutto



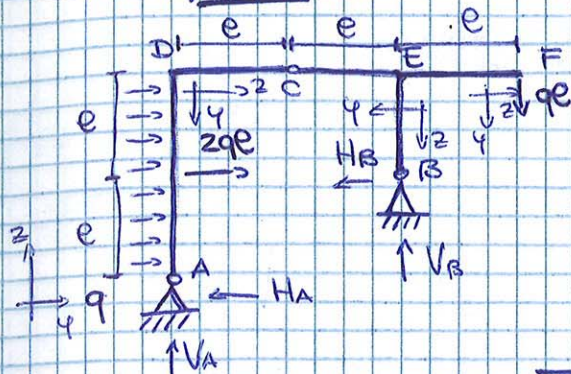
$N = -5/6 F$

$T = -F/6$

$\sum M = M + F/6 \cdot 2e \rightarrow M = -\frac{Fe}{3}$

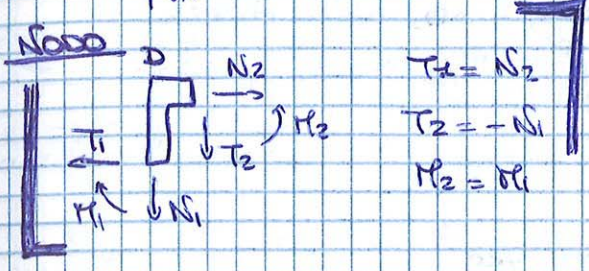
9/4/13

Lez. 13



$$\begin{cases} \leftarrow H_A + H_B - 2qe = 0 \\ \uparrow V_A + V_B - qe = 0 \\ \textcircled{B} H_A e + V_A 2e + qe^2 = 0 \end{cases}$$

AUX. C1) $H_A 2e + V_A e - 2qe^2 = 0$



→ Nel nodo normale e taglio si scambiano, al massimo cambia il segno.

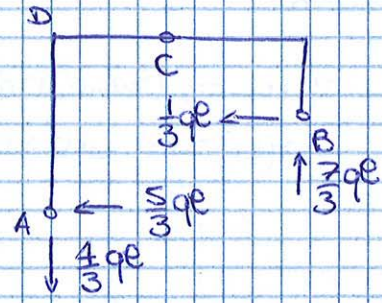
• Dal sistema sopra:

$$3V_A + 4qe = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{4}{3}qe$$

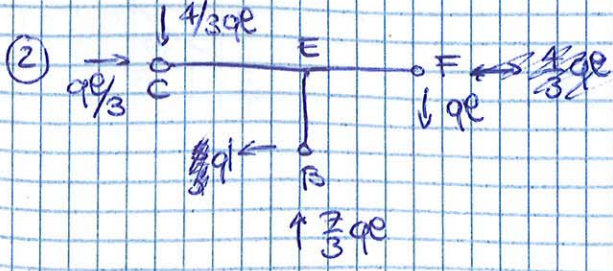
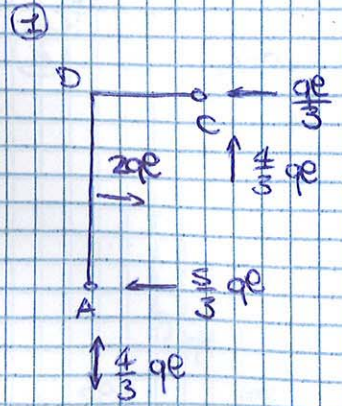
$$-3H_A + 5qe = 0 \Rightarrow H_A = \frac{5}{3}qe$$

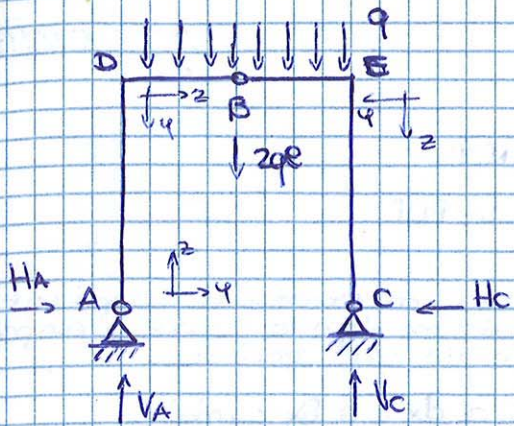
$$V_B = \frac{7}{3}qe$$

$$H_B = \frac{1}{3}qe$$



→ Le forze in C sono ricavate in modo che le risultanti su x e y siano nulle.





• Struttura simmetrica, basta studiare solo metà, i diagrammi N, T e M pesano non saranno sempre simmetrici.

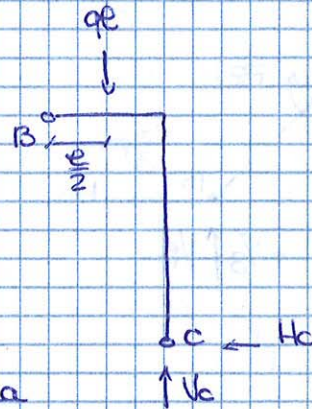
- NORMALE SIMMETRICA → stesso segno
- TAGLIO ANTISIMMETRICO → ruota opposto
- MOMENTO SIMMETRICO → segno stesso

$$V_A + V_C - 2qe = 0 \Rightarrow V_A = qe$$

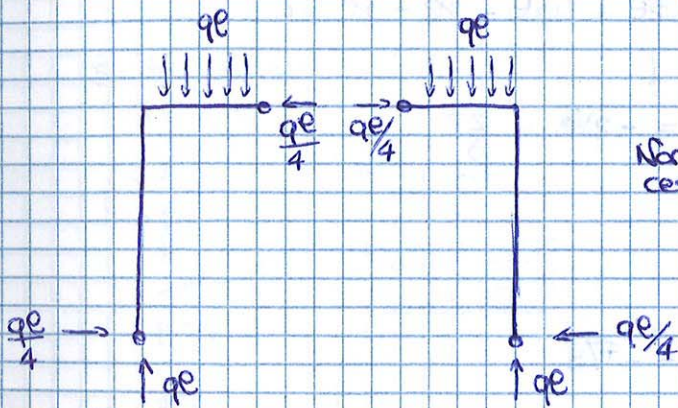
$$H_A = H_C \Rightarrow H_A = qe/4$$

$$A) V_C/2e - 2qe/2 = 0 \Rightarrow V_C = qe$$

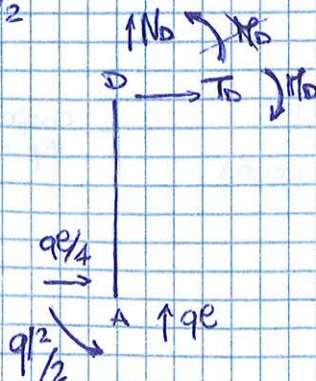
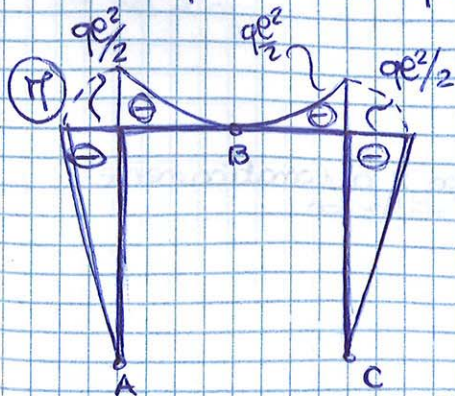
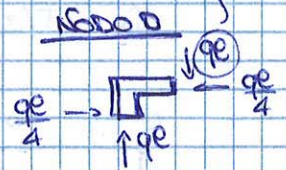
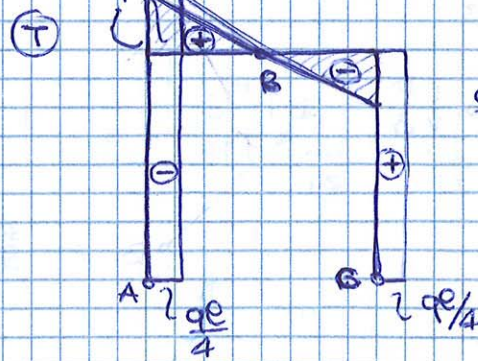
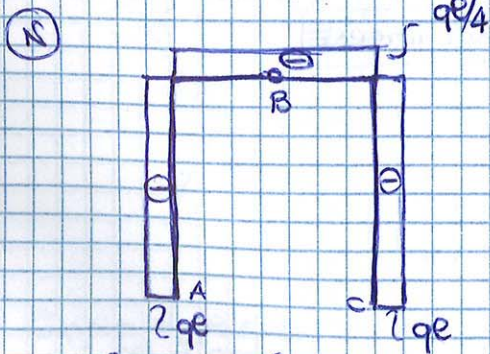
$$B_2) qe^2/2 + H_C 2e - V_C e = 0 \Rightarrow H_C = \frac{qe}{4}$$



Non c'è V nella cerniera B



ruota orario, positivo

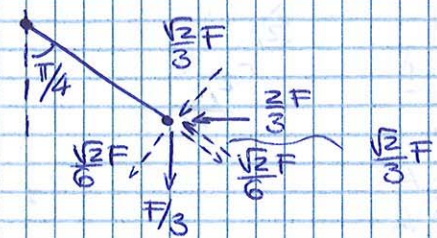


$$D) = H_D + qe \cdot 2e = 0$$

$$H_D = -\frac{qe^2}{2}$$

TRACCIO I DIAGRAMMI

Per trovare valori sulla parte diagonale, uso la trigonometria:



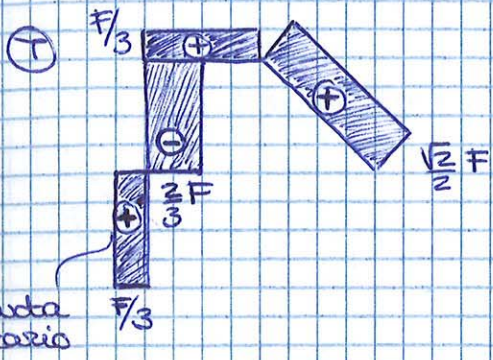
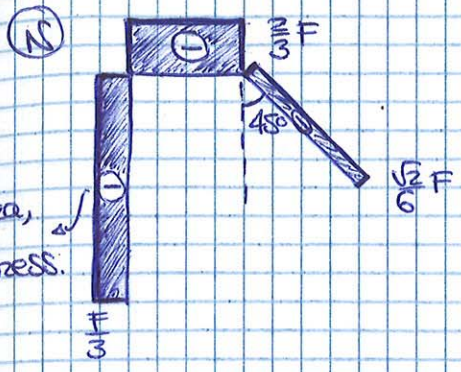
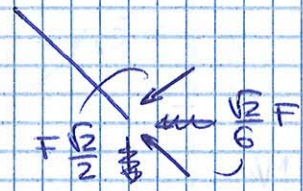
lungo e_a // alla sbarra ottengo

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{6} \quad \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{tor} = \frac{\sqrt{2}}{6} \leftarrow$$

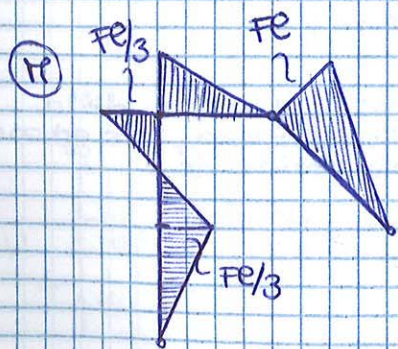
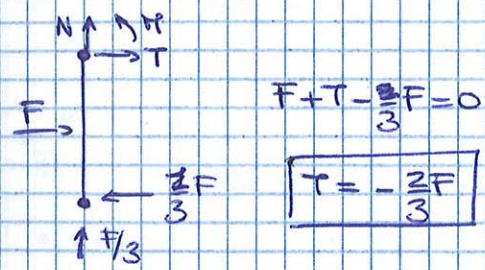
lungo e_a \perp alla sbarra ottengo

$$\downarrow \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \downarrow \frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{tor} = \frac{\sqrt{2}}{3} \downarrow$$

(TOR.)

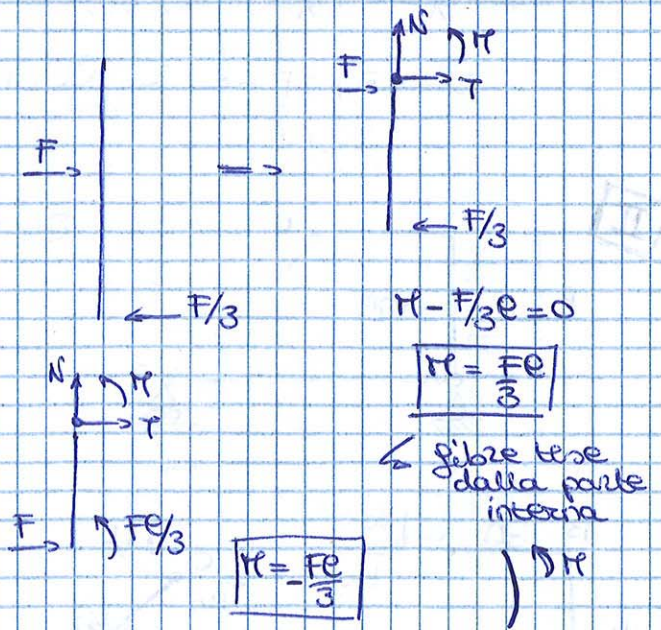


Se ho dubbi:

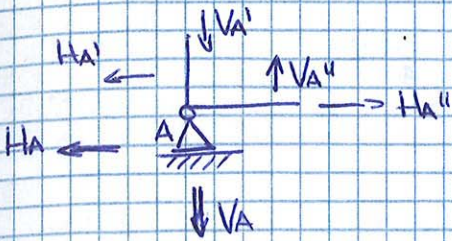


Coppia applicata \Rightarrow discontinuità nel diagramma di momento

Non essendoci carichi distribuiti, il momento sarà lineare in ogni tratto.



Nel nodo:

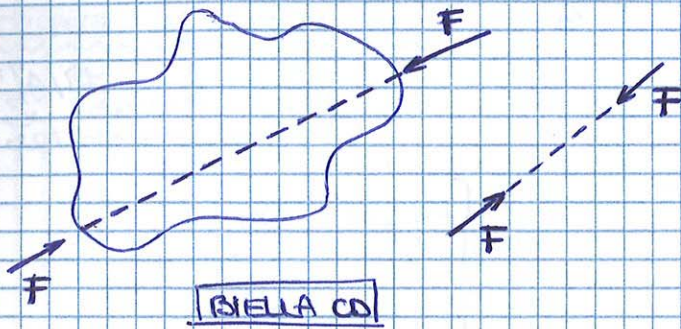


$g = 3 \times 3 = 9$
 $v = 4 + 3 + 2 = 9$
 ↳ cerniera interna ed esterna
 ↳ cerniera interna ed esterna

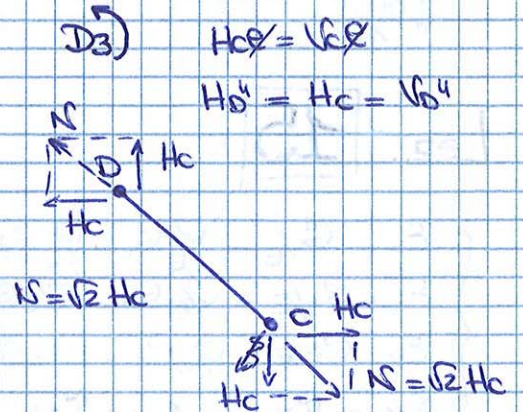
• Abbiamo 13 equazioni da tralciare (13 incognite):

$\left\{ \begin{array}{l} 9 \text{ eq. equilibrio corpi generali (3 per corpo)} \\ 4 \text{ equazioni di nodo (trasazioni in A e in B)} \end{array} \right.$

Per equilibrio statico:

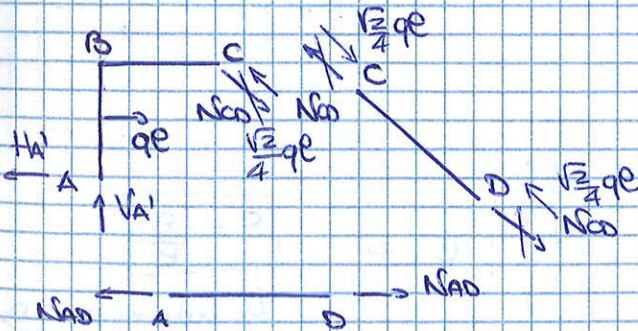


IN CASO DI BIELLA



• Nel caso di due forze agenti sullo stesso corpo, l'unica incognita è la componente

IN ORIZZONTALE

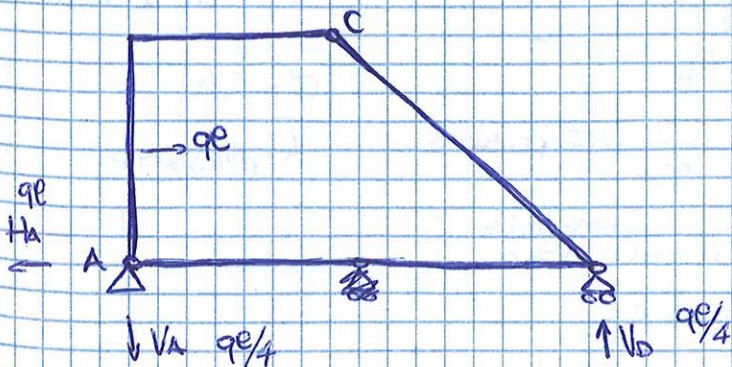


A) $Vb \cdot ze - qe \cdot \frac{ze^2}{2} = 0$

$\Rightarrow Vb = \frac{qe}{4}$

$\uparrow Vb = Va = \frac{qe}{4}$

$\rightarrow Ha = qe$



A1) $\frac{qe \cdot ze}{2} + Ncd \cdot \frac{ze}{\sqrt{2}} = 0$

$Ncd = -\frac{\sqrt{2}}{4} qe \rightarrow$ tratto compresso

- Per avere ulteriori allungamenti, debb' ancora aumentare il carico, fase di INCRUDIMENTO, che porta, dopo una certa pressione, alla rottura -

Dopo la snervatura del materiale, avrò anche una deformazione PLASTICA residua, ottengo cioè una dissipazione di energia -

≡ NOI VOGLIAMO RIMANERE NELLA FASE ELASTICA LINEARE -

- Materiali duttili → compressione e trazione hanno stesso comportam.

$$\boxed{|G| < G_p} \quad \text{con } G_p = \text{pressione di snervamento}$$

$$\boxed{-G_p < G < G_p} \rightarrow \text{Condizione di Sicurezza per lo stato tensionale UNIASSIALE}$$

↳ come faccio se ho stato BI o TRI ASSIALE di tensione?

CRITERIO di RESISTENZA

→ Si identifica un parametro che viene ritenuto responsabile della crisi del materiale -

$$\hookrightarrow \left[G_{eq} = G_{eq}(G_x, G_y, G_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) < G_p \right]$$

↳ riconduciamo uno stato triassiale a uno monoassiale equivalente (detta anche ideale) -

- Se materiale è isotropo:

$$\left[G_{eq} = G_{eq}(G_1, G_2, G_3) < G_p \right]$$

CRITERIO di RANKINE DELLA MASSIMA TENSIONE NORMALE

$$\boxed{G_{max}}$$

↳ parametro considerato responsabile della crisi

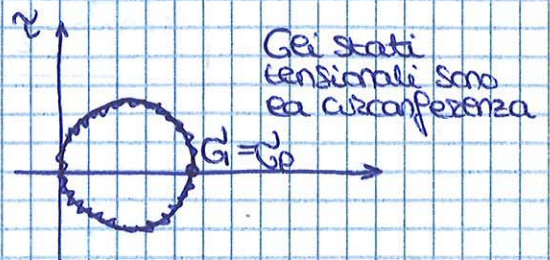
$$\boxed{G_{max} < K} \rightarrow \text{condizione necessaria}$$

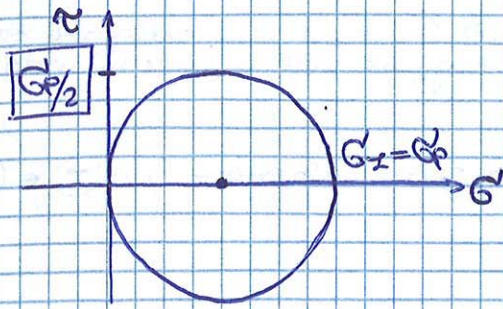
↳ lo conosco attraverso i CERCHI di MOHR

STATO MONOASSIALE (prova di laboratorio)



$$G_i \leq G_{max}$$





• Per geometria, la τ_{MAX} è esattamente la metà della G_p , vale in crisi per valori di tensione più bassi.

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2} \max \{ (G_1 - G_2), (G_1 - G_3), (G_2 - G_3) \} < G_p/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{eq} = \max \{ (G_1 - G_2), (G_1 - G_3), (G_2 - G_3) \} < G_p}$$

CRITERIO DI TRESCA

STATO TENSIONALE PIANO ($G_3=0$)

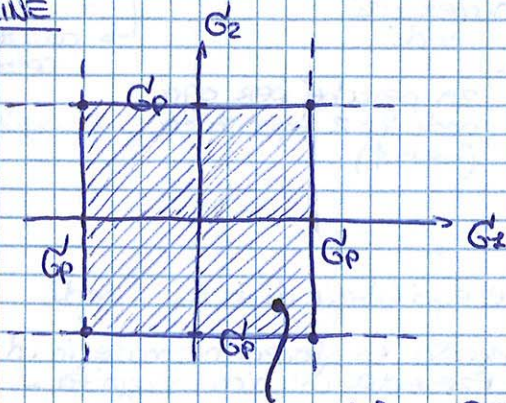
• Rankine: $\max \{ |G_1|, |G_2| \} < G_p$ $\begin{cases} |G_1| < G_p \\ |G_2| < G_p \end{cases}$

• Tresca: $\max \{ |G_1 - G_2|, |G_1|, |G_2| \} < G_p$

TRESCA Sottinsieme RANKINE

↳ pare un vincolo in più

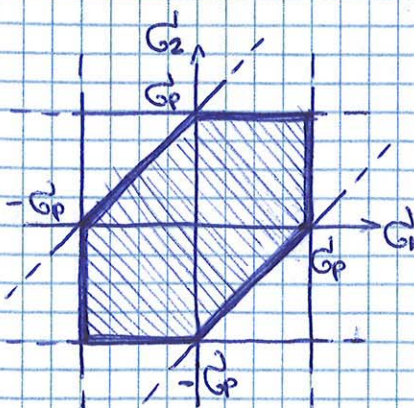
RANKINE



$$\begin{cases} |G_1 - G_2| < G_p \\ |G_1| < G_p \\ |G_2| < G_p \end{cases}$$

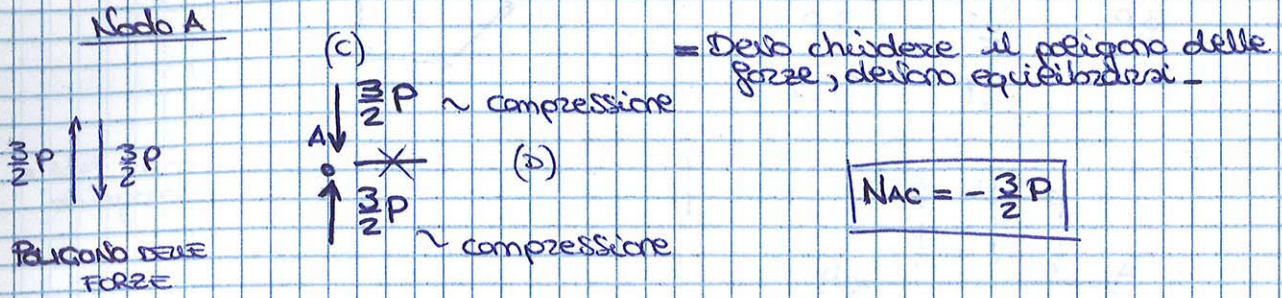
DOPPIO DI RESISTENZA, se il valore cade all'interno di questo quadrato sono in sicurezza.

RANKINE + TRESCA

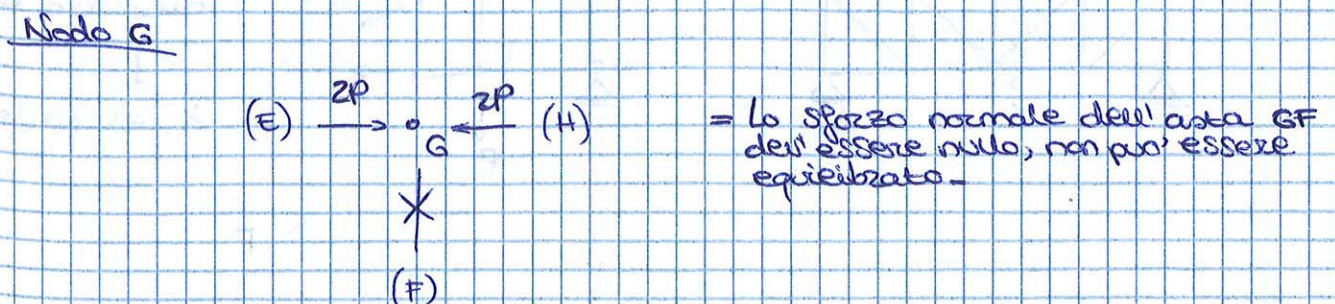
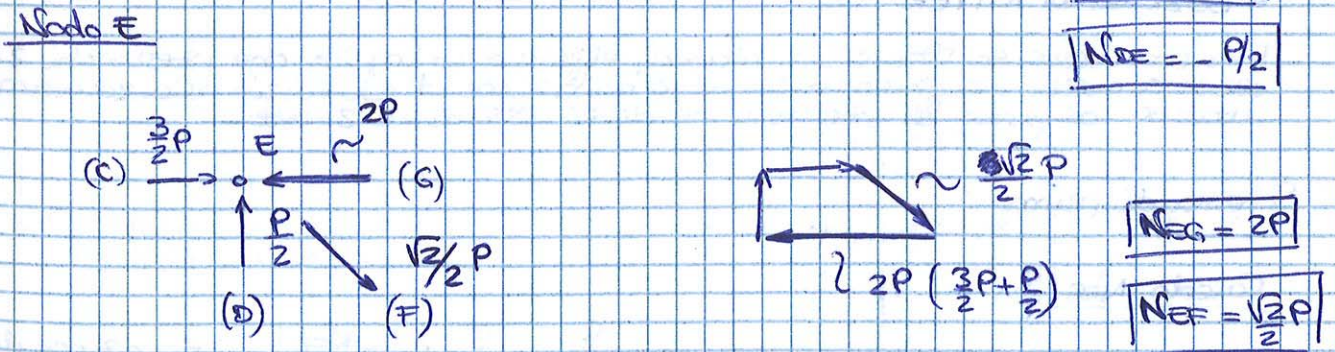
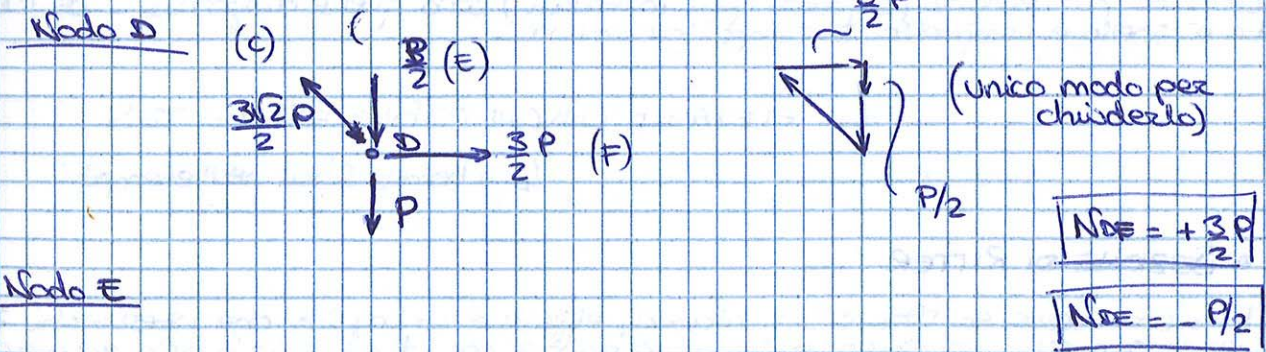
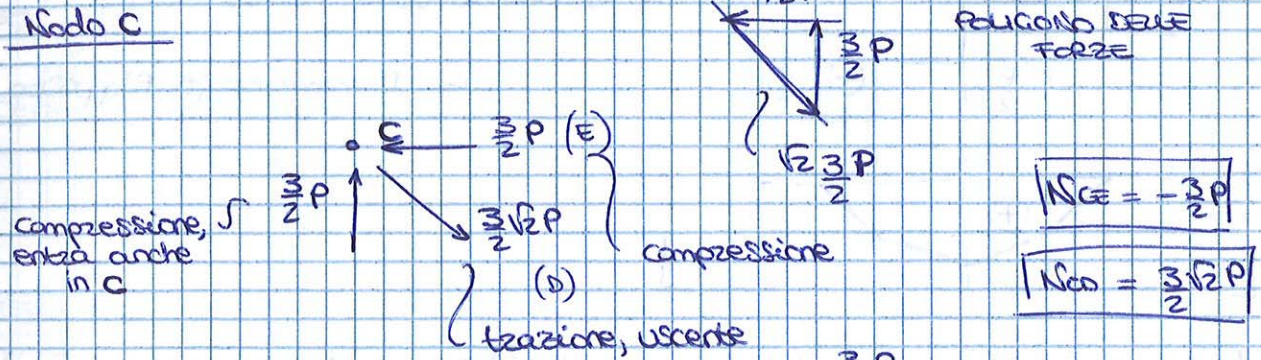


ESAGONO DI TRESCA

- Essendo struttura simmetrica, posso studiarne solo la metà -
- Parto da un nodo con solo 2 incognite, in questo caso il nodo A -



{ Elementi tesi → TIRANTI } (N' positiva)
 { Elementi compressi → FUNTONI MM } (N' negativa)



$$F) \quad N_{eq} \ell + \frac{3}{2} P \cdot 2\ell - P\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_{eq} = -2P}$$

RITTER → se voglio conoscere una sola asta
NODI → se le voglio conoscere tutte

- Nel caso volessi conoscere la reazione dell'asta diagonale, avrei che il centro di rotazione è all'∞

⇒ DIVENTA EQUAZIONE D'EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE VERTICALE

$$\uparrow \frac{3}{2} P - P - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{eq} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} P} \quad (\text{tirante})$$

Lez. **16** (dopo mozte don Parnozzi ñ)

22/4/13

CRITERI DI RESISTENZA ENERGETICI

- BELTRAMI
- VON MISES

TEOREMA DI BECCI = Similitudine e uguaglianza dei lavori mutui

$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab} \quad \Rightarrow \quad L_{ba} = L_{ab}$$

$$L_{b+a} = L_b + L_a + L_{ba}$$

L_{ab} = Lavoro generato dalle forze del sistema **a** per gli spostamenti generati nel sistema **b**.

$$\{F_a\} \Rightarrow \{G_a\}$$

$$\{F_b\} \Rightarrow \{G_b\}$$

$$\{F\} = \{F_a\} + \{F_b\} \quad \Rightarrow \quad \{G\} = \{G_a\} + \{G_b\}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- Per lavoro di deformazione Non vale la sovrapposizione degli effetti, se non in un caso specifico, se

$$L_{ab} = L_{ba} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{a+b} = L_a + L_b$$

↳ a e b sono detti energeticamente ortogonali $\{G_a\}^T \{G_b\} = 0$

BELTRAMI → $\boxed{\phi < \phi_p}$ con ϕ = energia di deformazione
 ϕ_p = energia di plastificazione

$$\boxed{\phi = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II}^2}$$

→ Non soddisfa l'evidenza sperimentale (circa la non influenza dell'isostatico)

→ Poiché la componente DELL'ATTOICA sarà responsabile delle variazioni di forma - È detta anche energia di DISTORSIONE -

$$[G^i] \rightarrow \text{Volume} \quad [G^d] \rightarrow \text{forma}$$

• I due sistemi (idrostatico e deviatorio) sono energeticamente ortogonali?

$$\begin{aligned} & \{G^d\}^T \{E^i\} = \{G^i\}^T \{E^d\} = \\ & = (G_x - \bar{G}) E_x^i + (G_y - \bar{G}) E_y^i + (G_z - \bar{G}) E_z^i = \frac{1-2\nu}{E} \bar{G} [G_x + G_y + G_z - 3\bar{G}] = 0 \end{aligned}$$

↳ I DUE SISTEMI SONO ENERGETICAMENTE ORTOGONALI

$$\boxed{\phi^d < \phi_p}$$

$$\phi^d = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II} = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II}^d$$

Essendo energeticamente ortogonale, vale la sovrapposizione dell'energia di distorsione.

↳ lavoro mutuo è nullo

$$\begin{aligned} \boxed{\phi^d} = \phi - \phi^i &= \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II} - \frac{1}{2E} J_I^i - \frac{1}{2G} J_{II}^i = \phi^d = \phi - \phi^i \quad (\phi = \phi^i + \phi^d) \\ &= \frac{1}{2G} J_{II} - \frac{1}{2G} J_{II}^i = \frac{1}{2G} (J_{II} + \frac{J_I^2}{3}) \\ &= \frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{3} (3J_{II} + J_I^2) = \boxed{\frac{1}{6G} (3J_{II} + J_I^2)} \end{aligned}$$

$$J_{II}^i = -3\bar{G}^2 = -\frac{J_I^2}{3}$$

[CONDIZIONI DI CARICO INERZIALE IN CONDIZIONE DI INSCUENZA]

$$[G] = \begin{pmatrix} G_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\phi_p^d = \frac{1}{6G} (G_p^2)}$$

→ Non va in crisi perché $G = G_p$, ma perché l'energia ha superato un certo valore.

$$J_I = G_p$$

$$J_{II} = 0$$

SCUREZZA: $\frac{1}{6G} (3J_{II} + J_I^2) < \frac{1}{6G} (G_p^2)$

$$3J_{II} + J_I^2 < G_p^2 \quad \text{imponendo} \quad G_{eq} = \sqrt{J_I^2 + 3J_{II}}$$

$$\boxed{G_{eq} < G_p}$$

$$G_{eq} = \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - G_1 G_2 - G_1 G_3 - G_2 G_3} \quad [\text{se } G_1 = G_2 = G_3 \text{ vale } 0]$$

$$G_{eq} = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 - (G_x G_y + G_x G_z + G_y G_z) + \frac{1}{3}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

↳ Se ha stato IDROSTATICO sono sempre in sicurezza

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\left. \begin{matrix} I_x \\ I_y \end{matrix} \right\} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}((I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2)}$$

[Segno lo prendo in base alla relazione d'ordine]

$$I_x > I_y \Rightarrow I_y > I_y \quad (\text{relazione d'ordine})$$

⊕ ⊖

$$I_x < I_y \Rightarrow I_y < I_y$$

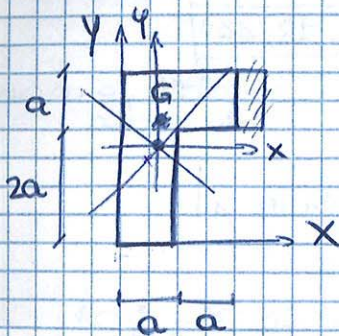
⊖ ⊕

3) $I_x = I_y, I_{xy} = 0 \Rightarrow$ qualsiasi sistema baricentrico è centrale

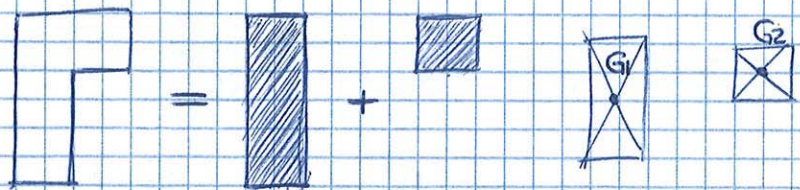
↳ la sezione è GIROSCOPICA

4) $I_x = I_y, I_{xy} \neq 0$

$$\theta_0 = \pi/4 \quad \begin{cases} I_y = I_x - I_{xy} \\ I_x = I_y + I_{xy} \end{cases} \rightarrow \text{IMPRO SE SISTEMA È RUOTATO DI } \pi/4$$



• Dalle tabelle sul portale Zicarb e formule, poi scompongo in due figure geometriche elementari:



$$S(X_1) = A_1 \cdot Y_{G1} = 3a^2 \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{2}$$

$$S(X_2) = A_2 \cdot Y_{G2} = a^2 \cdot \frac{5a}{2} = \frac{5a^3}{2}$$

$$S_x = S(X_1) + S(X_2) = 7a^3 \Rightarrow X_G = \frac{S_x}{A_{tot}} = \frac{7a^3}{4a^2} = \frac{7a}{4}$$

$$S(Y_1) = A_1 \cdot X_{G1} = 3a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^3}{2}$$

$$S(Y_2) = A_2 \cdot X_{G2} = a^2 \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{2}$$

$$S_y = 3a^3 \Rightarrow X_G = \frac{S_y}{A_{tot}} = \frac{3a^3}{4a^2} = \frac{3a}{4}$$

$$G_1(x, y) = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

↳ nel nuovo riferimento

$$G_2(x, y) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$$

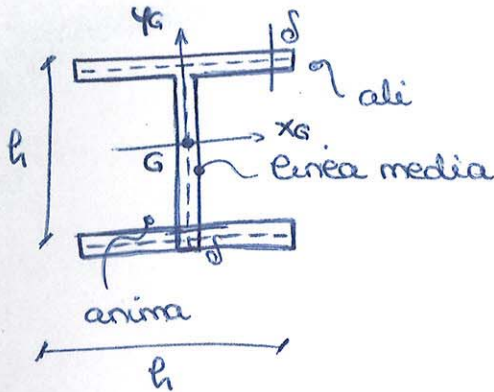
$$(I_x)_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{a(3a)^3}{12} + 3a^2 \left(-\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{39a^4}{16}$$

$$(I_x)_2 = \frac{a^4}{12} + a^2 \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{37a^4}{48}$$

↳ quadrato, è sotto rettangolo

SEZIONI SOTTILI

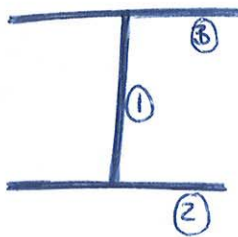
- Costituite da tratti con $S \ll h \Rightarrow$ i termini dell'ordine $\frac{S}{h}$ sono trascurabili - Equivale a concentrazione tra sezione lungo la sua linea media -



Altezza totale = $h + \delta$

distanza tra le linee medie

CONSIDERO SOLO LA LINEA MEDIA:

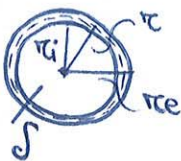


$$(I_x)_1 = \frac{S h^3}{12}$$

$$(I_x)_2 = 0 + S h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{S h^3}{4}$$

$$(I_x)_3 = \frac{S h^3}{4}$$

$$(I_x) = (I_x)_1 + (I_x)_2 + (I_x)_3 = \boxed{\frac{7}{12} S h^3}$$



$$I_x = \frac{\pi}{4} r_e^4 - \frac{\pi}{4} r_i^4 = \frac{\pi}{4} (r_e^2 + r_i^2)(r_e + r_i)(r_e - r_i) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\left(r + \frac{\delta}{2} \right)^2 + \left(r - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right] (S r) \left(\frac{\delta}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left[r^2 + \frac{\delta^2}{4} \right] S r =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[S r^3 + r \frac{\delta^3}{4} \right] = \pi S r^3 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right] \approx$$

$$\approx \boxed{\pi S r^3}$$

Calcolo esatto

$$I_x = \frac{h (h + \delta)^3}{12} - \frac{(h - \delta)^4}{12} =$$

momento d'inerzia dell'anima
momento inerzia rettangolare

$$= \frac{1}{12} \left[h^4 + 3h^3\delta + 3h^2\delta^2 + h\delta^3 - h^4 + 4h^3\delta - 6h^2\delta^2 + 4h\delta^3 - \delta^4 \right] = \frac{1}{12} \left[7h^3\delta - 3h^2\delta^2 + 5h\delta^3 - \delta^4 \right] =$$

$$= \frac{7 S h^3}{12} \left[\left(1 - \frac{3}{7} \frac{\delta}{h} + \frac{5}{7} \frac{\delta^2}{h^2} - \frac{1}{7} \frac{\delta^3}{h^3} \right) \right] \approx$$

$$\approx \boxed{\frac{7}{12} S h^3}$$

$$I_x = \frac{2}{3} da^3 + 2 da^3 = \boxed{\frac{8}{3} da^3}$$

$$(I_y)_1 = 2 da \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{da^3}{8}}$$

↳ trascurato momento sull'asse

$$(I_y)_2 = \frac{da^3}{12} + da \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{7}{48} da^3}$$

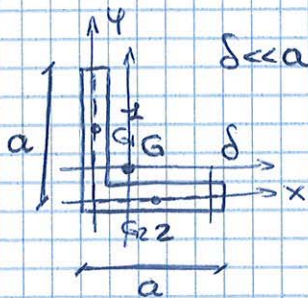
$$I_y = \frac{2 \cdot \frac{7}{48} da^3}{24} + \frac{da^3}{8} = \boxed{\frac{10}{28} da^3} = \boxed{\frac{5}{12} da^3}$$

Raccolgo i risultati che interessano:

• $I_x = \frac{8}{3} da^3$

• $I_y = \frac{5}{12} da^3$

(2)

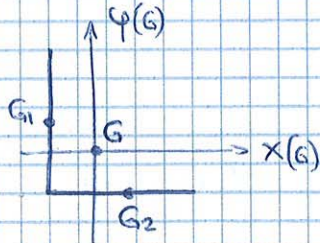


$$S_x = (S_{x1}) + (S_{x2}) = da \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + da \cdot (0) = \boxed{\frac{da^2}{2}} \rightarrow y_G = \frac{a}{4}$$

$$S_y = (S_{y1}) + (S_{y2}) = da \cdot (0) + (da) \cdot \frac{a}{2} = \boxed{\frac{da^2}{2}} \rightarrow x_G = \frac{a}{4}$$

$$A_{tot} = 2dA$$

- Se momento centrifugo è zero, sarà sistema centrale, se no dovrà effettuare una rotazione



$$(I_x)_1 = \frac{da^3}{12} + da \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} da^3$$

$$(I_x)_2 = \frac{a^3}{12} + da \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{da^3}{16}$$

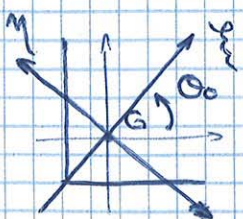
$$I_x = \frac{7}{48} da^3 + \frac{da^3}{16} = \frac{10}{48} da^3 = \boxed{\frac{5}{24} da^3}$$

$$I_y = \boxed{\frac{5}{24} da^3}$$

$$(I_{xy})_1 = 0 + da \left(-\frac{a}{4}\right) \left(\frac{a}{4}\right) = \boxed{-\frac{da^3}{16}}$$

$$(I_{xy})_2 = 0 + da \left(\frac{a}{4}\right) \left(-\frac{a}{4}\right) = \boxed{-\frac{da^3}{16}}$$

$$I_{xy} = -\frac{da^3}{16} - \frac{da^3}{16} = \boxed{-\frac{da^3}{8}} \rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$



↳ ≠ da zero, deve ruotare

Analogamente, $I_y = 5a^4$

• Calcolo del momento centrifugo:

$$(I_{xy})_1 = 0$$

$$(I_{xy})_2 = + \frac{1}{72} (a^2 \cdot 4a^2) = \frac{1}{18} a^4 + a^2 \left(\frac{4}{3}a \right) \left(\frac{a}{3} \right) = \frac{a^4}{2}$$

$$(I_{xy})_3 = + \frac{1}{72} (a^2 \cdot 4a^2) + a^2 \left(-\frac{4}{3} \right) \left(\frac{a}{3} \right) (-a) = \frac{a^4}{2}$$

$$I_{xy} = a^4$$

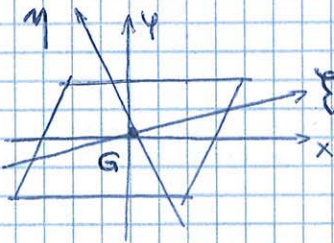
Serifano:

$$I_x = 2a^4$$

$$I_y = 5a^4$$

$$I_{xy} = a^4$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2a^4}{5a^4 - 2a^4} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2}{3} \right) = 16,84^\circ$$



$$I_x < I_y$$

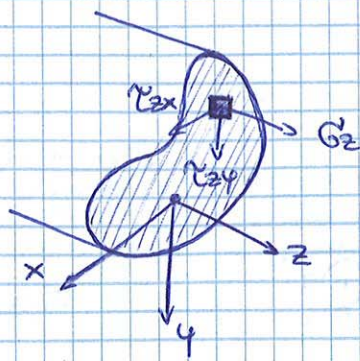
$$I_\xi < I_\eta$$

$$I_\xi = \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2} \right) a^4 \approx 1,697 a^4$$

$$I_\eta = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2} \right) a^4 \approx 5,303 a^4$$

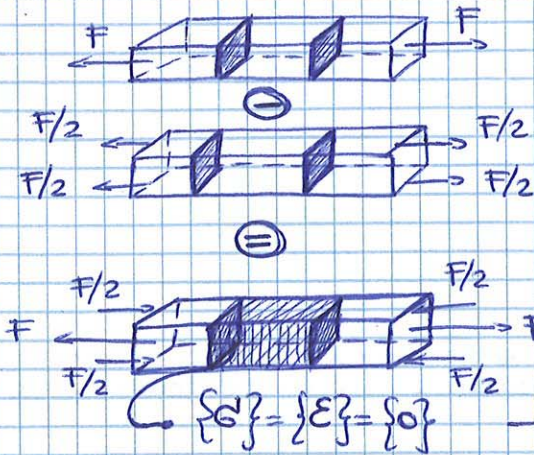


↳ Dopo aver calcolato I_ξ e I_η



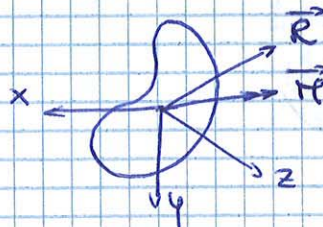
H_p • A una certa distanza dalle basi, la soluzione dipende solo dalla risultante e dal momento risultante della distribuzione di tensione sulle basi.
 $d \leq h$ (distanza di estrusione)

DIP.



• Grazie alle ipotesi di DSI, la soluzione si riduce alla somma di sei casi elementari, dette SOLLECATAZIONI SEMPLICI.

3 componenti di \vec{R}
 3 componenti di \vec{M}

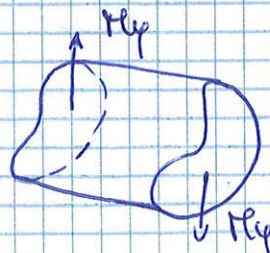
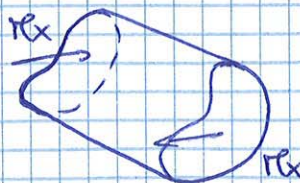
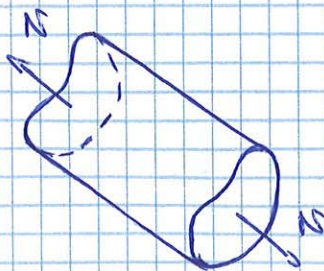


$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j} + N \vec{k}$$

$$\vec{R} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j} + N \vec{k}$$

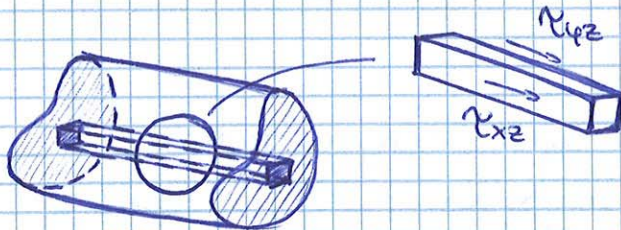
$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{momenti flessionali}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{momento torzente}}$



- La soluzione delle sollecitazioni elementari valgono per una determinata distribuzione tensionale sulle basi, ma, per e' Hp di DSU, la soluzione oltre la distanza di estinzione e' la stessa per qualsiasi distribuzione con ugual \vec{R} e \vec{M} .

Ipotesi semi-inflessa: cerco soluzioni che abbiano $G_x = G_y = \tau_{xy} = 0$.



- Scelta Saint-Venant: insieme di fibre che si scambiano solo tensioni tangenziali dirette lungo l'asse z.

$$[G] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & G_z \end{pmatrix}$$

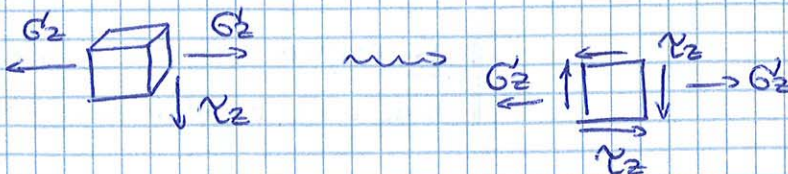
$$G_{eq} = \sqrt{(G_x^2 + G_y^2 + G_z^2) + (G_x G_y + G_y G_z + G_x G_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{eq} = \sqrt{G_z^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{G_z^2 + 3\tau_z^2} < G_p} \quad \text{VON MISES}$$

- Stato tensionale piano (dal calcolo degli autovalori, $J_{III} = \det[G'] = 0$)

[STATO TENSIONALE E' (LOCALMENTE) PIANO]

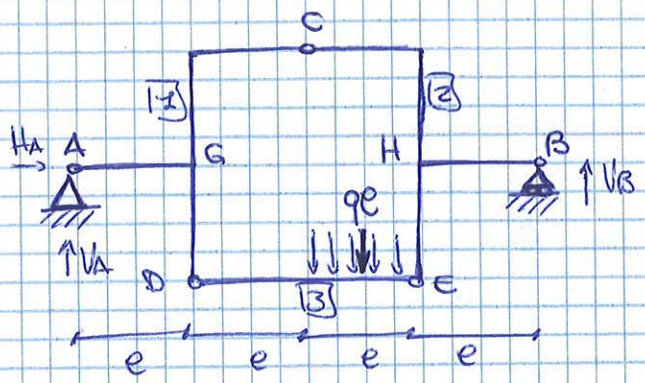
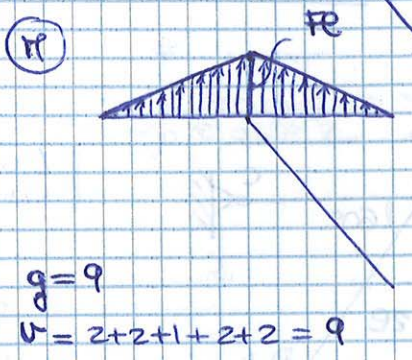
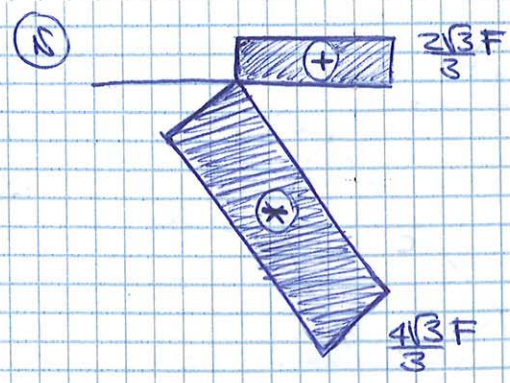
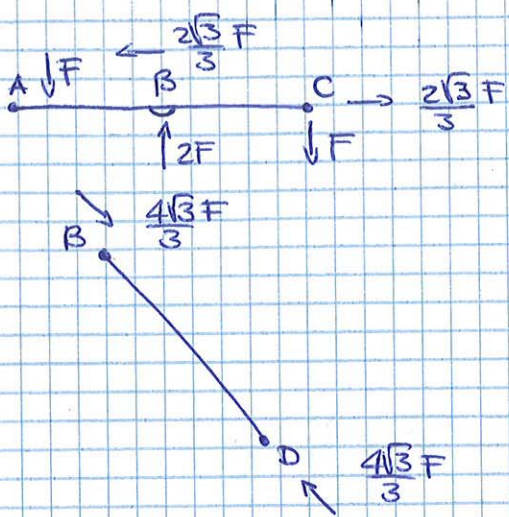
Il piano delle tensioni e' quello definito da G_z e τ_z .



- Per trovare la massima tensione, uso i cerchi di Mohr.

$$P^I(G_1, \tau_z)$$

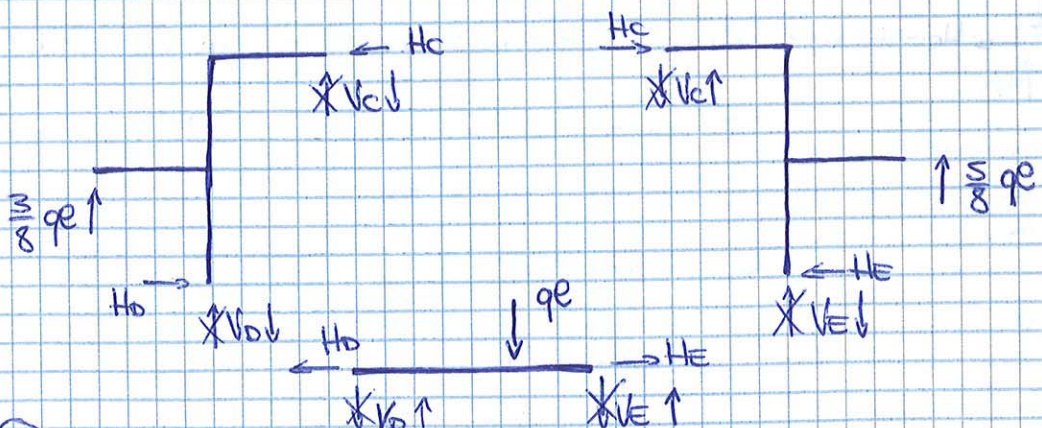
$$P^{II}(G_2, -\tau_z)$$



→ $H_A = 0$

↑ $V_A + V_B - qe = 0 \rightarrow V_A = \frac{3}{8} qe$

A) $V_B - qe \frac{5e}{2} = 0 \rightarrow V_B = \frac{5}{8} qe$



③

D3) $-V_c - qe \frac{3e}{2} = 0 \rightarrow V_c = -\frac{3}{4} qe = \frac{3}{4} qe$

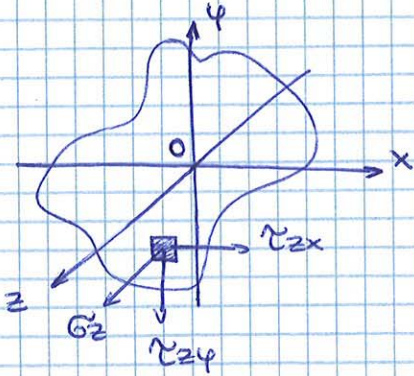
↑3 $V_c - V_b + qe = 0 \rightarrow V_b = -\frac{qe}{4}$

Lez. 19

30/4/13

• SFORZO NORMALE N' SUL SOLIDO DI DE SAINT VENANT

Condizione di equilibrio sulle basi



$$N = \int_A G_z dA$$

$$T_x = \int_A T_{zx} dA$$

$$T_y = \int_A T_{zy} dA$$

$$M_x = \int_A G_z dA \cdot y \quad \hookrightarrow \text{braccio}$$

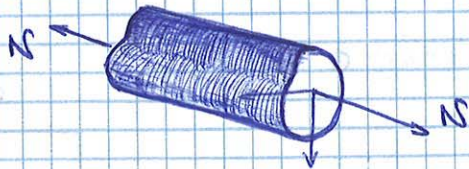
$$M_y = - \int_A G_z dA \cdot x$$

$$M_z = \int_A (T_{zy} \cdot x) dA - (T_{zx} \cdot y) dA$$

Derivazione diretta delle formule analitiche

• La soluzione non dipende dalla distribuzione particolare

Sforzo N'



$$T_{xy} = G_x = G_y = 0$$

$$T_x = T_y = 0$$

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

$$T_{zx} = T_{zy} = 0 \rightarrow T_x = T_y = M_z = 0$$

RIPANE SOLO:

$$N = \int_A G_z dA = CA$$



$$C = N/A$$

=>

$$G_z = N/A$$

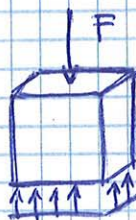
soluzione molto semplice, facile da calcolare

$$G_z = C$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_A G_z dA y = C \int_A y dA = C(S_x) = 0 \\ M_y &= - \int_A G_z x dA = -C \int_A x dA = -C(S_y) = 0 \end{aligned} \right\}$$

= 0, sistema baricentrico

$$N = -F$$



$$G = -F/A$$

• Lavoro di deformazione per unita di lunghezza (algebra e energia elastica immagazzinata nel carico elementare).

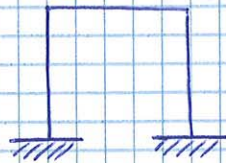
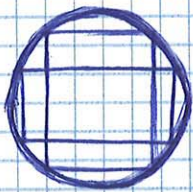
Teorema di Clapeyron $\boxed{dL = \frac{1}{2} N du}$ $\rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} N \frac{du}{dz} \rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} N \epsilon_z$

$\rightarrow \boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} N \cdot \frac{N}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA}}$

$\phi = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II}^2 = \frac{G_z^2}{2E}$ (energia per unita di volume)

$\boxed{\frac{dL}{dz} = \int_A \phi dA = \int_A \frac{G_z^2}{2E} dA = \frac{N^2}{2EA^2} \int dA = \frac{N^2}{2EA}}$

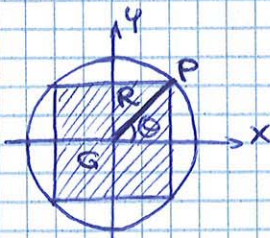
Esercizi



$G_z = \frac{N}{A} \rightarrow$ per minimizzare la tensione, devo massimizzare l'area

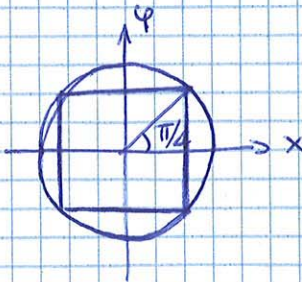
$G_{eq} = \sqrt{G_z^2 + 3 \frac{N^2}{A^2}} = G_z < G_p$

$A = (2R \cos \theta)(2R \sin \theta) = \frac{4R^2 \sin 2\theta}{2}$



$\frac{dA}{d\theta} = 4R^2 \cos 2\theta = 0$ (massimizzo l'area)

$\hookrightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \pi/4}$



$\boxed{G_{min}} = \frac{N}{A_{max}} = \frac{N}{2R^2}$

$2R^2 \sin 2(\pi/4)$

