



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1614A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Pullara

MATERIA: Scienza delle Costruzioni esame orale con dimostrazioni. Prof. Chiaia-Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

SCIENZA
delle
COSTRUZIONI I

ESAME ORALE

Prof. CHIAIA , SURACE

Studente : PULLARA

In termini vettoriali

$$\{u_Q\} = \{u_P\} + [J_P] \{dr\} \quad [J_P] : m. \text{ ROTAZ + DEFORM}$$

Se consideriamo roto-traslazioni

$$\{u_Q\} = \{u_P\} + [\psi_P] \{dr\} \quad [\psi_P] : m. \text{ ROTAZ.}$$

Per la proprietà delle matrici quadrate, possiamo scomporre la Jacobiana come somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica.

Quindi

$$[J_P] = \underbrace{\frac{1}{2} ([J_P] - [J_P]^T)}_{[\psi_P]} + \underbrace{\frac{1}{2} ([J_P] + [J_P]^T)}_{[\epsilon_P]}$$

ROTAZIONE
SIMMETRICA
DEFORMAZIONE

$$[\psi_P] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon_P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi scrivere lo spostamento di P come

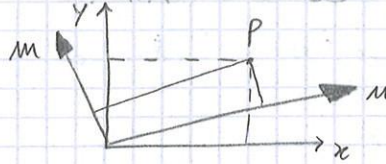
$$\{u_Q\} = \{u_P\} + [\psi_P] \{dr\} + [\epsilon_P] \{dr\}$$

TRASLAZIONE
ROTAZIONE
DEFORMAZIONE

③ LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI PER ROTAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Consideriamo un punto

$$\{P\}_{xyz} = [N] \{P\}_{mml}$$



Consideriamo un vettore

$$\{dr\}_{xyz} = [N] \{dr\}_{mml}$$

Consideriamo le deformazioni

$$\{\eta\}_{xyz} = [N] \{\eta\}_{mml}$$

$$\{\eta\}_{xyz} = [\varepsilon] \{dr\}_{xyz}$$

Dalle ultime 2 equazioni ottengo

$$[N] \{\eta\}_{mml} = [\varepsilon] \{dr\}_{xyz}$$

$$[N] \{\eta\}_{mml} = [\varepsilon] [N] \{dr\}_{mml}$$

Pre-moltiplicando per $[N]^T$

$$[N]^T [N] \{\eta\}_{mml} = [N]^T [\varepsilon] [N] \{dr\}_{mml}$$

$[N]^T = [N]^{-1}$ perché matrice ortogonale

$$[N]^T [N] = [I]$$

$$\{\eta\}_{mml} = [N]^T [\varepsilon] [N] \{dr\}_{mml}$$

$$\{\eta\}_{mml} = [\varepsilon^*] \{dr\}_{mml}$$

$$[\varepsilon^*]_{mml} = [N]^T [\varepsilon] [N]$$

Dall'equazione otteyo

- $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (AUTOVALORI) \Rightarrow Dilatazioni principali

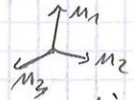
Sostituendo, dall'equazione matriciale:

- $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$ (AUTOVETTORI) \Rightarrow Direzioni principali

Analizzando gli autovettori

• $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$

Terza principale



• $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$

∞^1 terne (stato deformativo PIANO)

• $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$

∞^2 terne (stato deformativo SFERICO)

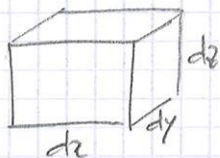
Sostituendo le dilatazioni principali nei 3 invarianti

$$J_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$J_2 = -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3)$$

$$J_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$$

Per capire meglio il significato di tali invarianti considero un parallelepipedo:



$$dV_0 = dx dy dz$$

Sottoposto a deformazione, lo stato finale sarà

$$dV = (1 + \epsilon_x) dx (1 + \epsilon_y) dy (1 + \epsilon_z) dz$$

Quindi, lo aumento di volume

$$\frac{\Delta V}{dV_0} = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{[(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1] dx dy dz}{dx dy dz}$$

$$= 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z - 1 =$$

$$= J_1 + \underbrace{J_2}_{\approx 0} + \underbrace{J_3}_{\approx 0}$$

$$\frac{\Delta V}{dV_0} \approx J_1$$

5) EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{funz. spostamento} \quad \{dr\} \rightarrow \{q\}$$

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 \quad \text{" deformazione} \quad \{dr\} \rightarrow (\epsilon_x, \dots, \epsilon_{rz})$$

La funzione p è derivabile dalla funzione f , ma sono necessarie delle equazioni de limitino la mutua indipendenza delle componenti delle deformazioni (EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ).

Quindi, partendo dalla definizione del tensore delle deformazioni, ottergo:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Quindi posso scrivere le prime 3 equazioni

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} \quad (3)$$

Derivando ϵ per le componenti ortogonali e combinando le equazioni, ottergo

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial x} \quad (6)$$

Dalla Teoria limite di Cowdy

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\{\Delta R\}}{\Delta R} = \{t_n\}$$

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\{\Delta M\}}{\Delta R} = \{0\} \rightarrow \text{Assente di microscopie.}$$

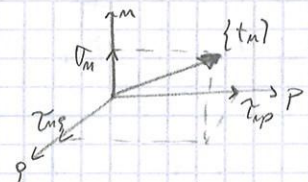
Ritornando al vettore deformativo, in componenti cartesiane:

$$\{t_n\} = t_{nx} \vec{i} + t_{ny} \vec{j} + t_{nz} \vec{k}$$

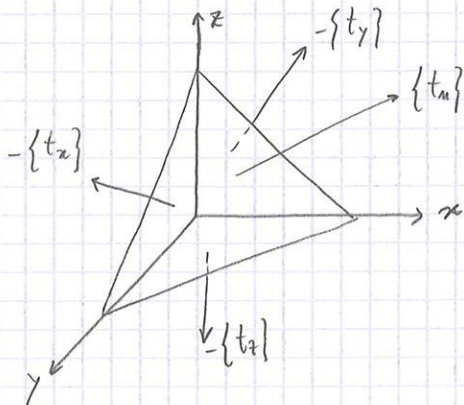
una scomposizione più "comoda" è quella in componenti spicci (sul piano di taglio)

$$\{t_n\} = \tau_m \vec{m} + \tau_{mp} \vec{p} + \tau_{mq} \vec{q}$$

$$\tau_m = \sqrt{\tau_{mp}^2 + \tau_{mq}^2}$$



Per introdurre il tensore di tensioni, realizzeremo un tetraedro:



Trascurando le forze di volume perché $\propto 3$ ordine

$$dR_x = dR_m M_x$$

$$dR_y = dR_m M_y$$

$$dR_z = dR_m M_z$$

$$\{t_n\} dR_m - \{t_x\} dR_x - \{t_y\} dR_y - \{t_z\} dR_z = 0$$

dividendo per dR_m

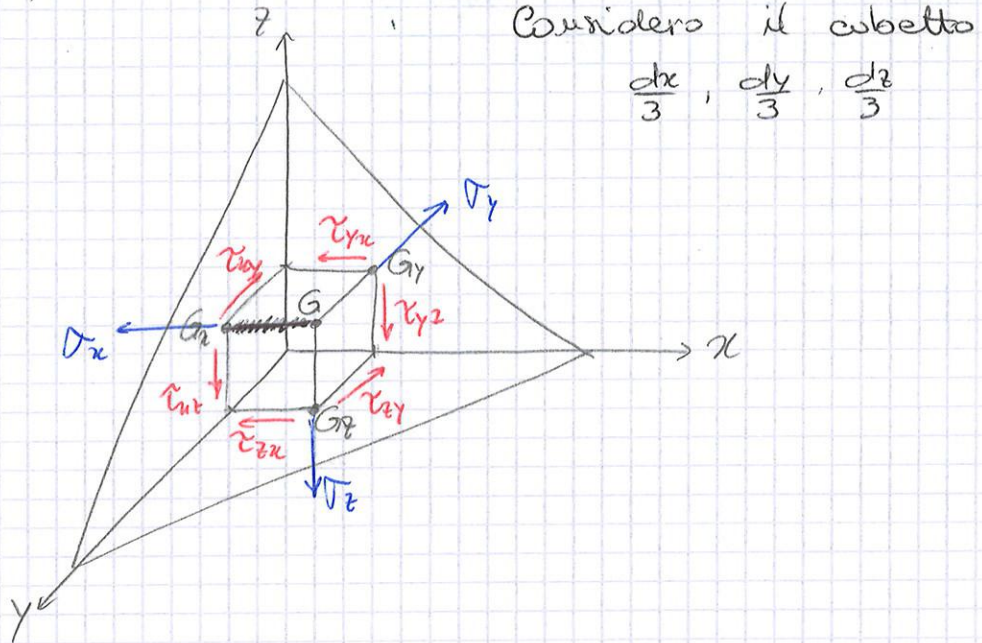
$$\{t_n\} = \{t_x\} M_x + \{t_y\} M_y + \{t_z\} M_z = 0$$

Relazione di Cowdy

② RECIPROCA' DELLE TENSIONI TANGENZIALI

La matrice $[\sigma]$ è simmetrica per dimostrazione.
 // $[\epsilon]$ // definitivamente.

Considerando il tetraedro di Cauchy, e esprimendo la teoria limite di Cauchy (assenza di microscopie).



Equilibrio alle notazioni intorno a \bar{GG}_x :

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ braccia nullo
- τ_{xy}, τ_{xz} //
- τ_{zx}, τ_{yx} paralleli

$$\Rightarrow \tau_{xy} dl_z \frac{dz}{3} - \tau_{yz} dl_y \frac{dy}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3} dl_z dz = \frac{1}{3} dl_y \cdot dy = \frac{1}{3} dV$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{cases}$$

↓
Assenza di microscopie

④ DIREZIONI PRINCIPALI DELLA TENSIONE

Sono le direzioni in cui ho solamente sforzi normali e non tangenziali.

$$\sigma \neq 0 \quad \tau = 0$$

Per ottenere tale risultato è necessario avere parallelismo tra il vettore tensoriale e la direzione dello spostamento.

In generale $\{t_m\} = [\sigma] \{m\}$

Con Parallelismo $\{t_m\} = \sigma_m \{m\}$

Dalla differenza delle due equazioni ottengo:

$$\{0\} = ([\sigma] - \sigma_m [I]) \{m\}$$

Problema agli
Autovalori

Le soluzioni possibili sono:

* $\{m\} = 0 \rightarrow$ non ammissibile (NO direzione)

* $\det([\sigma] - \sigma_m [I]) = 0$

Ottengo

$$\sigma_m^3 - T_1 \sigma_m^2 - T_2 \sigma_m - T_3 = 0$$

$$T_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$T_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$T_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z$$

Quindi ottengo:

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (AUTOVALORI) \Rightarrow Tensioni principali

- $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$ (AUTOVETTORI) \Rightarrow Direzioni principali

⑤ TENSORE IDROSTATICO, TENSORE DEVIATORICO

È possibile dividere il tensore $[\sigma]$ come somma di tensore idrostatico e di uno deviatorico.

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

$$[\sigma^i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Variazioni di volume}$$

$$\left(\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{T_1}{3} \right)$$

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Deformazioni, cambiamenti di forma.}$$

Molto spesso i materiali non risentono del $[\sigma^i]$, in quanto è difficile una variazione di volume.

È quindi necessario solamente analizzare $[\sigma^d]$.

Definendo

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

è necessario che i secondi membri siano positivi, quindi analizzando i denominatori possiamo avere

$$\tau_m^2 + (\sigma_m - \sigma_2)(\sigma_m - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau_m^2 + (\sigma_m - \sigma_1)(\sigma_m - \sigma_3) \leq 0$$

$$\tau_m^2 + (\sigma_m - \sigma_1)(\sigma_m - \sigma) \geq 0$$

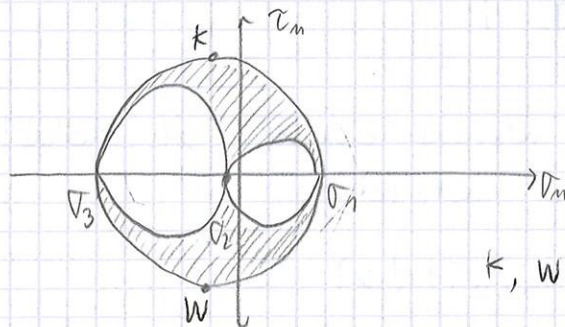
modificando le espressioni:

$$\tau_m^2 + \left(\sigma_m - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\tau_m^2 + \left(\sigma_m - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

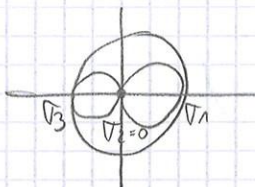
$$\tau_m^2 + \left(\sigma_m - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

Risultano essere equazioni di CIRCONFERENZE che determinano dei domini:

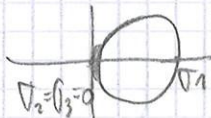


$$k, w = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

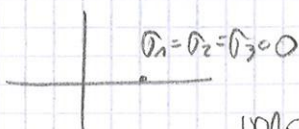
Possiamo avere dei casi particolari



BIASSIALE



MONOASSIALE



IDROSTATICO

e ottergo

$$\sigma_m^2 - T_1 \sigma_m - T_2 = 0$$

$$T_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Si nota da tali espressioni come

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$: ascissa del centro del c. di Mohr

$\sqrt{\quad}$: diametro del cerchio di Mohr

È possibile ottenere lo stesso risultato diagonalizzando la matrice degli sforzi

$$[\sigma^*]_{3 \times 3} = [N]_{3 \times 3} [\sigma]_{3 \times 3} [N]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

annullando il termine non diagonale si ottiene

$$\theta_0 = \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

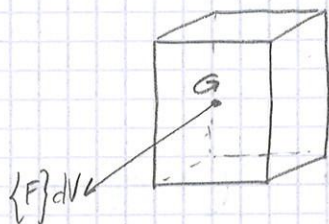
* SOLIDO ELASTICO

① EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

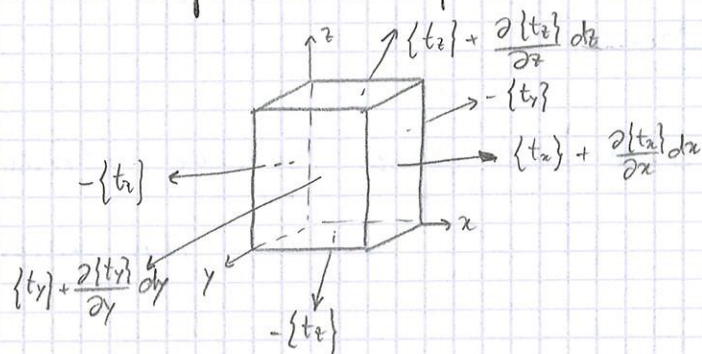
Due equazioni differenziali de legge lo stato tensionale di due punti posti a distanze infinitesime tra loro.

Analizziamo l'equilibrio statico di un elemento infinitesimo

Considero un parallelepipedo sottoposto a forze di volume, applicate nel baricentro.



Tale corpo è sottoposto anche a tensioni sulle facce



Considero l'equilibrio alle traslazioni lungo l'asse z .

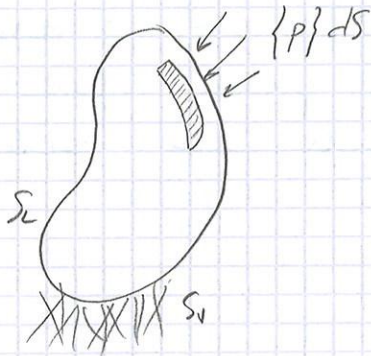
È importante notare come queste volte non è possibile trascurare le forze di volume in quanto sono dello stesso ordine delle variazioni di tensione:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz (dydz) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx (dydz) + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy (dydz) + F_z (dxdydz) = 0$$

Stesso ragionamento per gli altri 2 assi.

1* EQUAZIONI DI EQUIVALENZA ALLA FRONTIERA

Sulla frontiera del dominio, il vettore tensione coincide con le forze di superficie



$$\begin{cases} t_{mx} = \sigma_x \cdot m_x + \tau_{xy} \cdot m_y + \tau_{xz} \cdot m_z = p_x \\ t_{my} = \tau_{xy} \cdot m_x + \sigma_y \cdot m_y + \tau_{yz} \cdot m_z = p_y \\ t_{mz} = \tau_{xz} \cdot m_x + \tau_{yz} \cdot m_y + \sigma_z \cdot m_z = p_z \end{cases}$$

Possiamo dunque concludere che per il Teorema di Green-Gauss le equazioni di equivalenza sono legate da

- derivate nel volume
- coseni direttori sulla frontiera

* EQUAZIONI DI EQUIVALENZA AL CONTOURNO

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & 0 & 0 & M_y & M_z & 0 \\ 0 & M_{yy} & 0 & M_{xy} & 0 & M_z \\ 0 & 0 & M_{zz} & 0 & M_{xz} & M_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}$$

$$[N]^T \{a\} = \{P\}$$

Per il teorema di Green-Gours possiamo dire che alle derivate del volume corrispondono i coseni direttori al contorno.

Inoltre si esiste anche in una situazione di corpo elastico e non rigido, la dualità e corrispondenza tra le matrici statiche e quelle cinematiche

$$\begin{matrix} [a] & \longleftrightarrow & [a]^T \\ \text{cinematiche} & & \text{statiche} \end{matrix}$$

- forze $\tau_{xy}^{(a)} \cdot (dydz)$

- spost. $dU^{(b)} = f_{xy}^{(b)} dx$

$$dL_{int}^* = \tau_{xy}^{(a)} \cdot dydz \cdot dU^{(b)} = \tau_{xy}^{(a)} \cdot dydz \cdot f_{xy}^{(b)} dx = \tau_{xy}^{(a)} \cdot f_{xy}^{(b)} dV$$

Facendo lo stesso ragionamento per gli altri assi ottengo, essendo tensioni e deformazioni indipendenti tra loro, un'equazione vettoriale

$$L_{int}^* = \int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_b\} dV$$

• LAVORO ESTERNO

Calcolo di un classico lavoro meccanico

$$L_{est}^* = \int_V \{F_a\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{u_b\} dS$$

Quindi

$$L_{int}^* = L_{est}^*$$

$$\int_V \{F_a\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{u_b\} dS = \int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_b\} dV$$

* ASSIOMI DI NOLL

① PRINCIPIO DEL DETERMINISMO

Lo stato tensionale nel continuo dipende dalla storia della sua deformazione

② PRINCIPIO DELL'AZIONE LOCALE

Lo stato tensionale di un punto P può essere determinato ignorando la deformazione di punti posti a sufficiente distanza dello stesso.

③ PRINCIPIO DELL'INDIFFERENZA MATERIALE

La risposta di un materiale alle sollecitazioni deve essere indipendente dell'osservatore.

Ottenendo un sistema staticamente ammissibile

$$\{F\}, \{P\} \rightarrow \{0\}$$

e uno cinematicamente ammissibile

$$\{dq\} \rightarrow \{d\varepsilon\}$$

Applicando il PLV (trascurando le forze incrementali $\{dF\}$ e $\{dP\}$ perché infinitesimi di ordine superiore) tale lavoro non risulta virtuale, ma REALE

$$dL_e = \int_V \{F\}^T \{dq\} dV + \int_S \{P\}^T \{dq\} dS$$

$$dL_i = \int_V \{0\}^T \{d\varepsilon\} dV$$

Porremo la nostra attenzione su dL_i .

② POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE Ψ (LEGAME COSTITUTIVO)

Considerando il lavoro virtuale infinitesimo

$$d\Psi = \{d\sigma\}^T \{\varepsilon\}$$

osservo che

$$d\phi + d\Psi = d(\{\sigma\}^T \{\varepsilon\})$$

essendo $d\phi$ e $\{\sigma\}^T \{\varepsilon\}$ differenziali esatti, lo sono anche $d\Psi$.

Posso indicare

$$\Psi = \Psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz}$$

ricordando

$$d\Psi = \{d\sigma\}^T \{\varepsilon\}$$

$$d\Psi = \varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \varepsilon_z d\sigma_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$$

Ottengo quindi il legame costitutivo

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}}$$

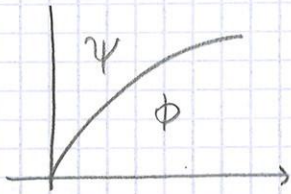
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}}$$

Componenti
DEFORMAZIONE

* ELASTICITA' NON LINEARE

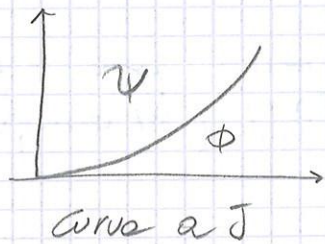
Molto spesso $\phi \neq \psi$

* GOMME $\phi > \psi$



Forte resistenza iniziale, ma indebolimento successivo.

* MATERIALI BIOLOGICI $\phi < \psi$



Debole resistenza iniziale, ma successiva resistenza

Materiali tenaci

Vantaggi / Svantaggi

Anche le derivate prime saranno nulle, in questo rappresentiamo le tensioni nell'origine

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 = 0$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 = 0$$

Ottengo dunque una matrice Hessiana $[H]$ con _{6x6} 6 derivate doppie sulla diagonale principale e le 15 derivate miste.

Per il Teorema di Schwarz le derivate miste sono uguali tra loro.

È importante osservare come ottengo una matrice con 21 VALORI indipendenti e determinabili, in punti calcolati nell'intorno dell'origine.

Riprendendo in forma compatta

$$\phi = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\}$$

derivando ϕ rispetto a ε :

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\}$$

LEGAME COSTITUTIVO
ELASTICO LINEARE

Il potenziale lo possiamo scrivere in una doppia maniera:

$$\phi = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\}$$

Forma QUADRATICA

$$\phi = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$$

Forma BILINEARE

④ PROBLEMA ELASTICO LINEARE

Con le solo 3 eq. indefinite di equilibrio non è possibile determinare le 6 incognite della tensione.

Si aggiungono quindi le 6 eq. costitutive e si risolve il sistema di 9 eq. in 6 incognite.

Possiamo quindi risolvere tutto rispetto al vettore spostamento $\{u\}$.

Considero

$$[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{F\} \quad \text{EQ. EQUILIBRIO}$$

$$\{\sigma\} = [H] \{E\} \quad \text{EQ. COSTITUTIVE}$$

$$\{E\} = [\epsilon] \{u\} \quad \text{EQ. CONGUMENTA}$$

Combinando ottengo

$$[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{F\}$$

$$[\sigma]^T [H] \{E\} = -\{F\}$$

$$[\sigma]^T [H] [\epsilon] \{u\} = -\{F\}$$

$$[\sigma]^T [H] [\epsilon] = [L]$$

$[L]$: OPERATORE DI CAVEAU

Ottengo così un sistema composto da equazioni di campo ed equazioni di equivalenza ed equilibrio

$$[L] \{u\} = -\{F\}$$

EQ. CAMPO

$u \in V$

Problema
Elastico
Lineare

$$[N]^T [H] [\epsilon] \{u\} = \{P\}$$

EQ. EQUIVALENZA

$u \in S_c$

$$\{u\} = \{u_0\}$$

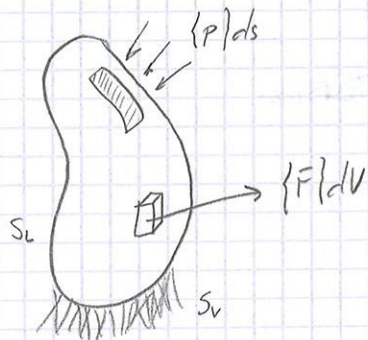
$u \in S_v$

È importante osservare come il passaggio da 3 equazioni a una in funzione del solo vettore spostamento viene pagato dal fatto che sono passati da delle derivate prime a derivate seconde.

⑥ TEOREMA DI KIRCHHOFF (ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE)

Un corpo elastico sollecitato esternamente da un sistema di forze, risponde con uno ed uno solo campo di tensioni e deformazioni.

Considero un corpo elastico sollecitato da forze di volume $\{F\}$ e forze di superficie $\{p\}$.



Dimostrazione (per assurdo):

Assumiamo che a tale sistema di forze il corpo risponde con due soluzioni.

Applichiamo il PLV al sistema differenza di forze

$$\int_V \underbrace{\{0\}^T}_{L=0} \{D\eta\} dV + \int_{S_L} \underbrace{\{0\}^T}_{L=0} \{D\eta\} dS + \int_{S_V} \underbrace{\{DR\}^T}_{L=0} \{0\} dS = \int_V \{D\sigma\}^T \{DE\} dV$$

osserviamo che l'ultimo integrale equivale a essere il doppio del potenziale elastico Φ .

$$\int_V \{D\sigma\}^T \{DE\} dV = 2 \int_V \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \tau_{xy}) dV$$

Affinché il potenziale sia nullo è necessario che lo siano tutte le componenti ϵ e σ .

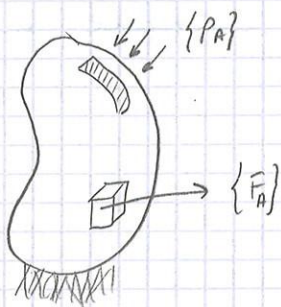
Dunque le differenze finite sono pari a zero se e solo se la soluzione è UNICA.

⑧ TEOREMA DI BETTI

Il lavoro mutuo compiuto da due sistemi di forze risulta essere uguale indipendentemente dal processo di carico

$$L_{AB} = L_{BA}$$

Considero un corpo elastico sollecitato da un sistema di forze



$$\{F_A\}, \{P_A\} \Rightarrow \{\sigma_A\}, \{\epsilon_A\}, \{\eta_A\}$$

Aggiungo un sistema di forze tali per cui:

$$\{F_B\}, \{P_B\} \Rightarrow \{\sigma_B\}, \{\epsilon_B\}, \{\eta_B\}$$

Calcolo il lavoro

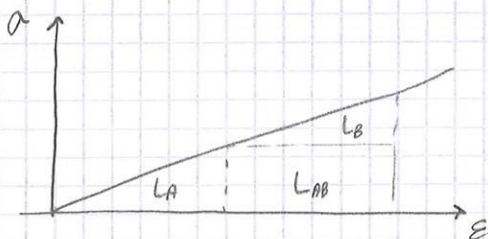
$$L_A = \int_V \{F_A\}^T \{\eta_A\} dV + \int_{S_e} \{P_A\}^T \{\eta_A\} dS$$

$$L_B = \int_V \{F_B\}^T \{\eta_B\} dV + \int_{S_e} \{P_B\}^T \{\eta_B\} dS$$

è inoltre presente un lavoro di trascinamento dovuto al fatto che le forze A trovano uno spostamento generato dal sistema di forze B.

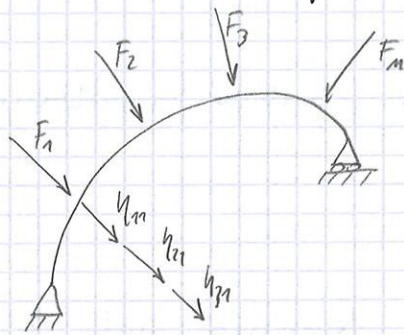
$$L_{AB} = \int_V \{F_A\}^T \{\eta_B\} dV + \int_{S_e} \{P_A\}^T \{\eta_B\} dS$$

$$L_{A+B} = L_A + L_B + L_{AB}$$



⑨ TEOREMA DI CASTIGLIANO

La derivata del lavoro di deformazione rispetto ad una forza applicata al sistema e' pari allo spostamento duale delle forze.



Per il Principio di Sovrapposizione Effetti

$$\eta_i = \sum_{j=1}^m \psi_{ij} F_j$$

ψ_{ij} = coefficienti di influenza

η_i = spostamenti duali delle forze

Calcolando il lavoro di deformazione con Clapeyron

$$L_{def} = \frac{1}{2} \sum_i F_i \eta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i F_j \psi_{ij}$$

Derivando rispetto a una forza

$$\frac{\partial L_{def}}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^m F_j \psi_{ij}$$

da quindi, per definizione iniziale

$$\frac{\partial L_{def}}{\partial F_i} = \eta_i$$

Calcolando le componenti ottengo

$$E_x = 2a (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 1 + b (-\sigma_y - \sigma_z)$$

$$E_y = 2a (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 1 + b (-\sigma_x - \sigma_z)$$

$$E_z = 2a (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 1 + b (-\sigma_x - \sigma_y)$$

$$j_{xy} = \phi + b(2\tau_{xy})$$

$$j_{xz} = \phi + b(2\tau_{xz})$$

$$j_{yz} = \phi + b(2\tau_{yz})$$

In forme matriciale

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ j_{xy} \\ j_{xz} \\ j_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2ab & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 2a & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 2ab & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Definendo

$$2a = \frac{1}{E}$$

$$2ab = -\frac{\nu}{E}$$

$$a = \frac{1}{2E}$$

$$b = \frac{(\nu+1)}{E}$$

Posso dunque scrivere

$$\psi = \frac{1}{E} T_1^2 + \frac{\nu+1}{E} T_2$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ j_{xy} \\ j_{xz} \\ j_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

* SOLIDO DI SAINT-VENANT

* IPOTESI DI PARTENZA

Il solido di Saint-Venant si avvera' a calcolare $\{\sigma\}$ e $\{\epsilon\}$ in funzione delle caratteristiche M, N, T alle basi e sottoposto un corpo.

Le equazioni che governano il solido e le trattazioni:

$$[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{F\}$$

Ep. Equilibrio (STATICA)

$$[N]^T \{\sigma\} = \{P\}$$

$$\{\epsilon\} = [\sigma] \{\eta\}$$

Ep. Cinematiche

$$\{\eta\} = \{\eta_0\}$$

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$$

Ep. Costitutive

E' necessario inoltre fare delle ipotesi in questo il calcolo risulterebbe eccessivamente complesso.

IPOTESI

- GEOMETRIA : X e Y assi principali e Z asse di rotazione ($I_{xy} = 0$)
- MATERIALE : corpo elastico lineare, omogeneo, isotropo; con:
 - E : modulo elastico lineare
 - ν : coeff. di contrazione trasversale
 - G : modulo di resistenza al taglio $G = G(E, \nu)$
- FORZE : le risultanti sulle superficie laterali $\{P\} = 0$
 le forze di volume $\{F\} = 0$
 Solo forze di superficie alle basi
- CILINDRO SNELO : $l \gg h$
- PRINCIPIO FONDAMENTALE

La risposta di un corpo e' dovuta esclusivamente, a una determinate distanza di omogeneizzazione, della risultante delle forze applicate sulle basi $\{PB\}$ e dei rispetti momenti calcolati rispetto al baricentro della base considerata.

LIMITI : punti applicazione, vincoli, mod.

Analizzando lo stato deformativo, delle leggi costitutive elastiche (rispetto all'unità $\sigma \neq 0 \Rightarrow \sigma_z$)

$$\{\varepsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \sigma_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\nu \varepsilon_z = -\frac{\nu N}{EA}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

Possiamo definire

EA : rigidità estensionale della sezione

$\frac{EA}{L}$: rigidità estensionale della trave

Riassumendo:

Stato tensionale massimale: $\sigma_z = \frac{N}{A}$

Stato deformativo pluriassiale:
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = \frac{N}{EA} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu N}{EA} \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

Altro

- Cerchiaggio delle colonne
- Svergolamento o instabilità dell'equilibrio (Eulero)

Per ottenere lo stato tensionale, delle ep. costitutive

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \cdot y$$

Devo ancora esprimere lo stato tensionale in funzione del momento M_x applicato
Equilibrio alle rotazioni

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y \, dA \\ &= \int_A E \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) y^2 \, dA \\ &= E \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \int_A y^2 \, dA \\ &= E \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) I_x \end{aligned}$$

Definisco la CURVATURA FLESSIONALE χ_x

$$\chi_x = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

E quindi ottengo

$$M_x = -E \chi_x I_x$$

$$\chi_x = -\frac{M_x}{EI_x}$$

EI_x : rigidità torsionale sezione

Sostituendo nelle formule di σ_z

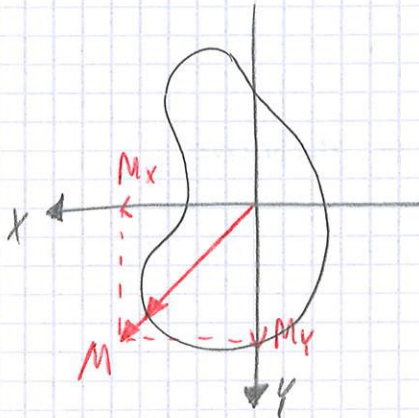
$$\sigma_z = E \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) y$$

$$\sigma_z = \cancel{E} \cdot \frac{M_x}{EI_x} y$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{NAVIER}$$

③ FLESSIONE DEVIATA

Siamo in presenza di una flessione non applicata in uno degli assi principali d'inerzia



Dal Principio di sovrapposizione degli effetti e dalla formula di Navier:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Stato tensionale monoassiale

L'asse neutro AN

$$AN: \sigma_z = 0$$

$$\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

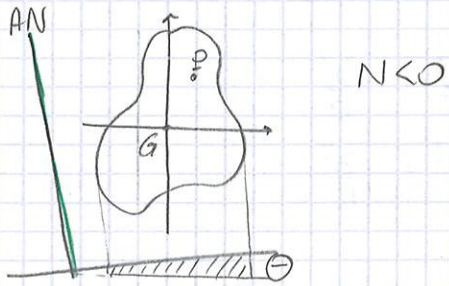
$$M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right) = 0$$

$$y = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha x$$

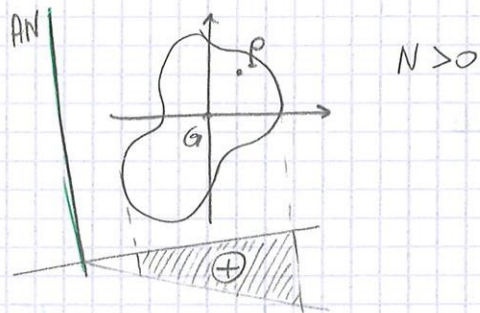
⑤ NOCCIOLA CENTRALE DI INERZIA

È il luogo dei centri di pressione il cui asse neutro è esterno o al più tangente alla regione considerata.

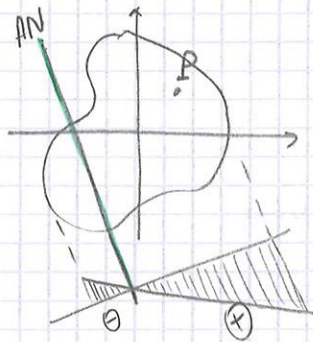
* PRESSOFLESSIONE



* TENSOFLESSIONE



* PARZIALIZZATA



Considerando adesso la retta b

$$b: x = -\frac{b}{2}$$

Stesso ragionamento precedente

$$1 + 0y + \frac{2}{b}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e_y}{\rho_x^2} = 0$$

$$\frac{e_x}{\rho_y^2} = \frac{2}{b}$$

$$e_y = 0$$

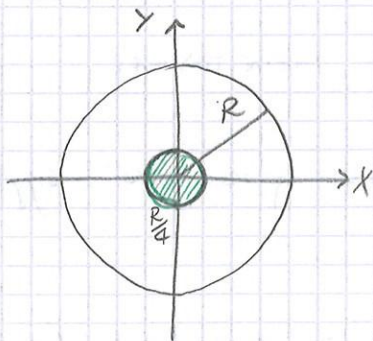
$$e_x = \frac{2}{b} \cdot \frac{b^2}{12}$$

$$e_x = \frac{b}{6}$$

$$B = \left(\frac{b}{6}, 0\right)$$

Per simmetria e' possibile tracciare il nocciolo!

* NOCCILO SEZIONE CIRCOLARE



$$I_{xx} = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$I_{yy} = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$\rho_x^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$\rho_y^2 = \frac{R^2}{4}$$

Scegliamo la retta passante per estremo inferiore

$$y = -R$$

Stesso ragionamento

$$1 + \frac{1}{R}y + 0x = 0$$

$$e_x = 0$$

$$\frac{e_y}{\rho_x^2} = \frac{1}{R}$$

$$e_y = \frac{1}{R} \cdot \frac{R^2}{4}$$

$$e_y = \frac{R}{4}$$

$$\rightarrow A = \left(0, \frac{R}{4}\right)$$

Dalle equazioni del campo di spostamento $\{u\}$ posso ottenere le deformazioni tramite le equazioni cinematiche:

⇒ Stato deformativo

$$\begin{cases} u = -\theta z y \\ v = +\theta z x \\ w = 0 \end{cases} \xrightarrow{\{\epsilon\} = [D]\{u\}} \begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = -\theta y \\ \gamma_{yz} = +\theta x \end{cases}$$

Tramite le equazioni costitutive ottengo quindi lo stato tensionale

⇒ Stato tensionale

$$\xrightarrow{\{\sigma\} = [H]\{\epsilon\}} \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = -G\theta y \\ \tau_{yz} = G\theta x \end{cases} \Rightarrow \tau_z(r) = G\theta r$$

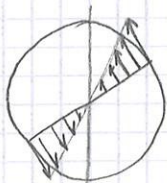
Ricapitolando:

Stato deformativo biassiale $\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} = -\theta y \\ \gamma_{xy} = \theta x \end{cases}$

Stato tensionale biassiale

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -G\theta y \\ \tau_{xy} &= G\theta x \end{aligned} \Rightarrow \tau_z(r) = G\theta r$$

TENSIONE
TANGENZIALE



Andamento lineare tensioni tangenziali

Ottengo quindi

$$M_z = G \theta I_p$$

$$\theta = \frac{M_z}{G I_p}$$

$G \cdot I_p$: rigidità torsionale sezione

Considerando che in sezione circolare ($I_p = I_x + I_y$)

$$I_p = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\theta = \frac{2 M_z}{G \pi R^4}$$

Volendo ricavare la tensione in funzione del momento torcente M_z

$$\tau_z(r) = G \theta r = G \cdot \frac{M_z}{G I_p} \cdot r = \frac{M_z r}{I_p}$$

$$\tau_z^{\max} = \frac{2 M_z}{\pi R^3}$$

sezioni circolari piene

Quando ho la rotazione di una estremità di una asta lunga l

$$\varphi_z = \frac{M_z}{G \cdot I_p} \cdot l$$

$\frac{G \cdot I_p}{l}$: rigidità torsionale asta

⑧ TAGLIO RETTO

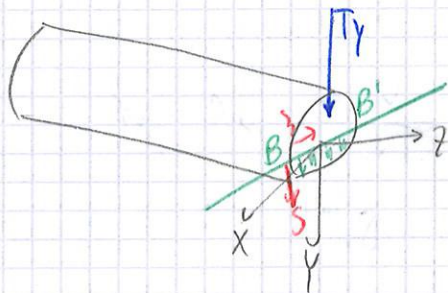
Siamo in presenza di taglio applicato lungo un asse centrale.

Il taglio genera un momento flettente.

Bisogna ricordare Navier

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Consideriamo

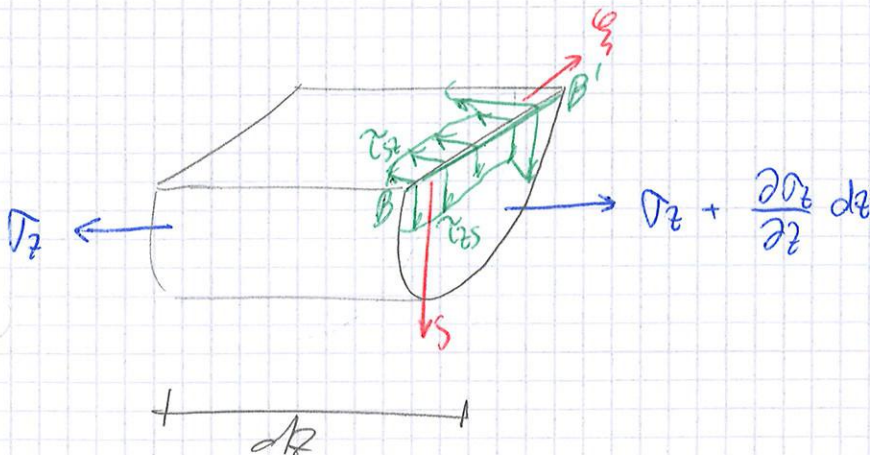


Condizioni di equilibrio alle basi

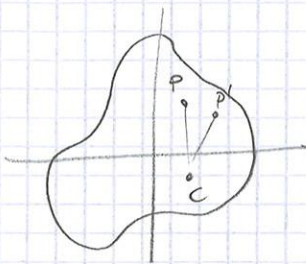
$$\int_A \{p\} dA = \int_A \{t_m\} dA = \begin{cases} \int_A \tau_{xz} dA = 0 \\ \int_A \tau_{yz} dA = T_y \\ \int_A \sigma_z dA = 0 \end{cases}$$

Sezioniamo la trave con una corde BB' e vediamo che per la reciprocità e l'equilibrio otteniamo

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$



⑨ TORSIONE PER SEZIONE GENERICA



Ipotesi cinematica: il cilindro è composto da dischi che ruotano attorno all'asse z e NON rimangono piane per $w(x, y)$ FUNZIONE INGOMBAMENTO

Campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = -\theta z (y - y_c) \\ v = +\theta z (x - x_c) \\ w = \theta w(x, y) \end{cases}$$

Stato deformativo

$$\begin{cases} \epsilon_x = 0 \\ \epsilon_y = 0 \\ \epsilon_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{yx} = -\theta (y - y_c) + \theta \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right) \\ \gamma_{zy} = \theta (x - x_c) + \theta \frac{\partial w}{\partial y} = \theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right) \end{cases}$$

Stato tensionale $(\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\})$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right) \\ \tau_{zy} = G\theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right) \end{cases} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

* Verifico le equazioni di equilibrio

$$[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{F\}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\rightarrow \nabla^2 w = 0$$

Sostituendo allo 2° op. del P. di Neumann

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} - y + \frac{1}{A} \int w dy \right] m_x + \left[\frac{\partial w}{\partial y} + x + \frac{1}{A} \int w dx \right] m_y = 0$$

Non è possibile ottenere una soluzione, ma è possibile dimostrare l'UNICITA'.

Dalle condizioni di equivalenza alle basi:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \{r\} \wedge \{\tau_z\} dA \\ &= \int_A (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) dA \\ &= G\theta \int_A \left[x \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \right] dA \\ &= G\theta \int_A \underbrace{\left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{I_t} dA \end{aligned}$$

I_t : fattore di inerzia torsiva
 $I_t \leq I_p$

$$M_z = G\theta I_t$$

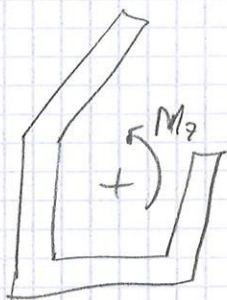
$$\theta = \frac{M_z}{GI_t}$$

Sostituendo ottergo

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{I_t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y + \frac{1}{A} \int w dy \right)$$

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{I_t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x - \frac{1}{A} \int w dx \right)$$

12) TORSIONE SEZIONE SOTTILE APERTA COMPOSTA M RETTANGOLI



$$I_t = \frac{ab^3}{3}$$

$$\tau_z^{\max} = 3 \frac{M_z}{ab^2} = \frac{M_z}{I_t} \cdot b$$

$$M_z = M_z^{(1)} + M_z^{(2)} + \dots + M_z^{(n)}$$

$$\Rightarrow M_z = \sum_1^n M_z^{(i)} \quad \text{Ciascun tratto assorbe } M_z^{(i)}$$

$$\theta = \theta^{(1)} = \theta^{(2)} = \dots = \theta^{(n)}$$

Per ragioni di CONGIUNGENZA ogni rettangolo deve ruotare dallo stesso angolo unitario di torsione

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{M_z^{(1)}}{G \cdot I_t^{(1)}}$$

$$\frac{M_z^{(1)}}{G I_t^{(1)}} = \frac{M_z^{(2)}}{G I_t^{(2)}} = \dots = \frac{M_z^{(i)}}{G I_t^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \frac{M_z^{(i)}}{I_t^{(i)}} = \text{cost} = \frac{M_z}{I_t}$$

Quindi

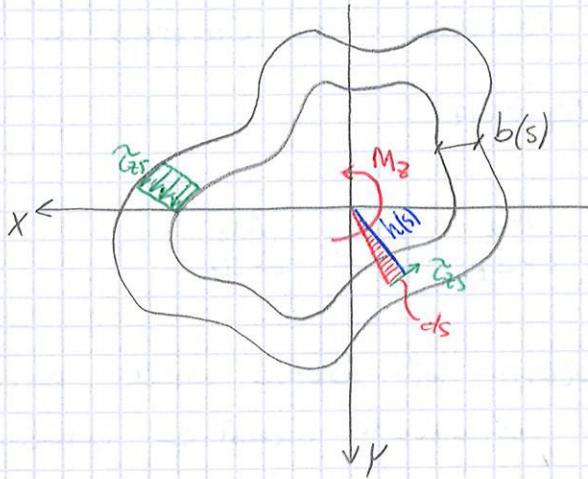
$$M_z = \sum_1^n M_z^{(i)} = \frac{M_z}{I_t} \sum_1^n I_t^{(i)}$$

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_1^n a_i b_i^3$$

$$\tau_z^{\max} = \frac{M_z}{I_t} b_{\max}$$

Tensione MAX in rettangolo con spessore massimo

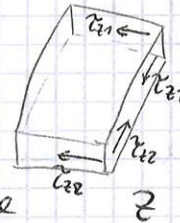
13 TORSIONE PER SEZIONI SOTTILI BICONNESSE CHIUSE (BREDT)



Ipotesi:

- τ_{zs} ovunque tangente alle linee medie
- τ_{zs} costante sullo spessore $b(s)$

Consideriamo un cuneo desimo.



Equilibrio alle trazioni in direzione

$$\tau_{z1} \cdot b_1 \cdot dz - \tau_{z2} \cdot b_2 \cdot dz = 0$$

$$\tau_{z1} b_1 = \tau_{z2} b_2$$

Chiamiamo ρ il braccio delle tensioni e scriviamo l'eq. del momento

$$M_z = \int \underbrace{\tau_{zs} \cdot b \cdot ds}_{\text{FORZA}} \cdot \underbrace{h(s)}_{\text{BRACCIO}}$$

$$= \tau_{zs} b \int h ds$$

Avendo $d\rho = \frac{h ds}{2}$

$$M_z = 2 \tau_{zs} \rho b$$

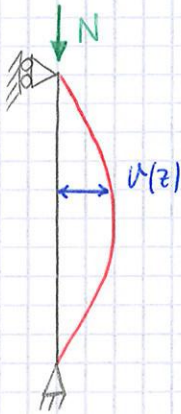
$$\Rightarrow \tau_{zs} = \frac{M_z}{2 \rho b}$$

$$\tau_{zs}^{\text{MAX}} = \frac{M_z}{2 \rho b_{\text{min}}}$$

* INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

① CARICO CRITICO DI EULERO

Considero un'asta compressa tra carrello e cerniera



Introduco una perturbazione $u(z)$

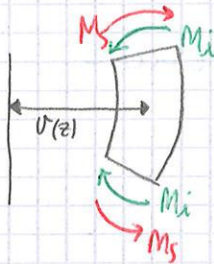
$$\chi = -\frac{M_s}{EI}$$

Calcolo i momenti stabilizzante e instabilizzante

$$M_i = N \cdot u \quad \downarrow \text{BRACCIO}$$

$$M_s = -EI \cdot \chi = -EI \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2}$$

Indico $\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} = u''$



Abbiamo equilibrio indifferente se $M_i = M_s$

$$N \cdot u = -EI u''$$

$$u'' + \frac{N}{EI} u = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}$$

$$\Rightarrow u'' + \alpha^2 u = 0$$

La soluzione è

$$u(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z)$$

Poste le condizioni al contorno $u(0) = u(l) = 0$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\alpha l) = 0 \end{cases}$$

* INTERAZIONE SNERVAMENTO SVERGOLAMENTO

Considero le diverse grandezze

• CARICO CRITICO $N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

• PRESSIONE CRITICA $\sigma_c = \frac{N_c}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$

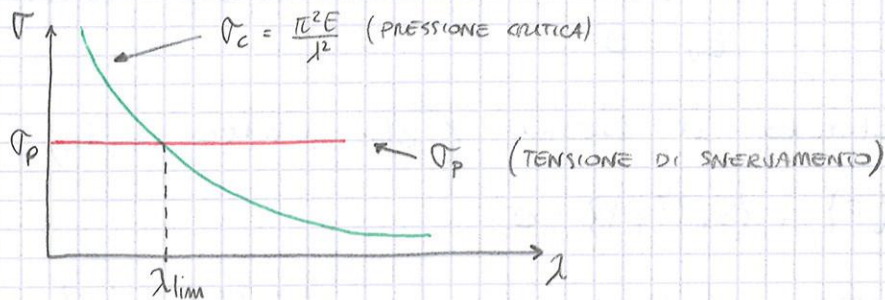
• RAGGIO D'INERZIA $\rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$

• SNELEZZA $\lambda = \frac{l}{\rho}$

Quindi posso scrivere la pressione critica come

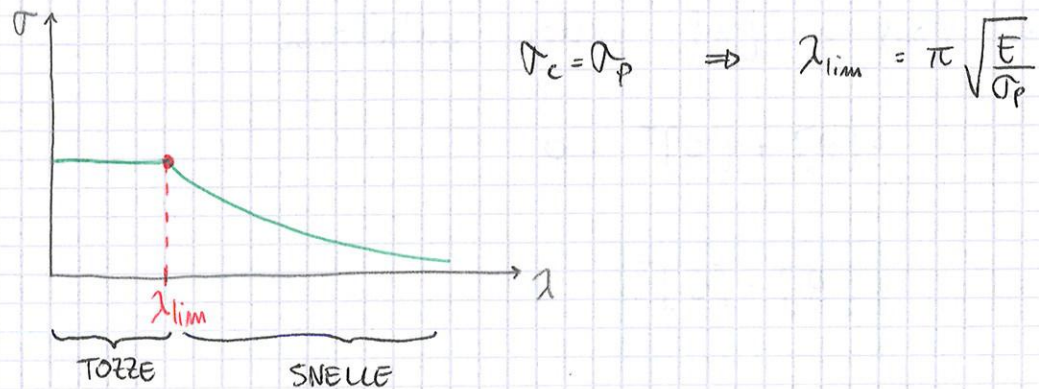
$\Rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Graficamente



non posso considerare che la pressione critica arrivi all'infinito e la trave possa ancora resistere.

Devo quindi inserire un taglio al diagramma in corrispondenza di $\sigma_c = \sigma_p$



Se $\lambda < \lambda_{lim}$, si ha crisi per snervamento (tozze)

Se $\lambda > \lambda_{lim}$, si ha crisi per svergolamento (snelle)

② LEGGE DI HUYGENS

Conoscendo per definizione

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad I_{xy} = \int_A xy dA$$

Il tensore d'inerzia

$$[I] = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} = \int_A \{r\} \{r\}^T dA \quad (\text{prodotto DIADICO})$$

infatti

$$\int_A \{r\} \{r\}^T dA = \int \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) dA = \int_A \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} dA = [I]$$

Considerando adesso il tensore nel SR centrale ($\bar{x}\bar{y}$)

$$[\bar{I}] = \int_A \{\bar{r}\} \{\bar{r}\}^T dA = \begin{bmatrix} \bar{I}_y & \bar{I}_{xy} \\ \bar{I}_{xy} & \bar{I}_x \end{bmatrix}$$

ottenso

$$\begin{aligned} \int_A \{\bar{r}\} \{\bar{r}\}^T dA &= \int_A \{r - r_0\} \{r - r_0\}^T dA = \\ &= \int_A \underbrace{\{r\} \{r\}^T}_{[I]} dA - \int_A \underbrace{\{r\} \{r_0\}^T}_{\{S\}} dA - \int_A \underbrace{\{r_0\} \{r\}^T}_{\{S\}^T} dA + \int_A \underbrace{\{r_0\} \{r_0\}^T}_{\{S\} \{S\}^T} dA \end{aligned}$$

quindi

$$[\bar{I}] = [I] - \{S\} \{r\}^T - \{r_0\} \{S\}^T + \{r_0\} \{r_0\}^T A$$

Quindi il tensore senza

$$\bar{I}_y = I_y - 2 S_y x_0 + x_0^2 A$$

$$\bar{I}_x = I_x - 2 S_x y_0 + y_0^2 A$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - S_x x_0 - S_y y_0 + x_0 y_0 A$$

③ SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE

Consideriamo il tensore d'inerzia nel SR
rotato $\bar{X}^* \bar{Y}^*$

$$\begin{aligned}
 [\bar{I}^*] &= \int_A \{F^*\} \{F^*\}^T dA \\
 &= \int_A ([N] \{F\}) ([N] \{F\})^T dA \\
 &= \int_A ([N] \{F\}) ([N]^T \{F\}^T) dA \\
 &= [N] \underbrace{\int_A \{F\} \{F\}^T dA}_{[I]} [N]^T
 \end{aligned}$$

$$[\bar{I}^*] = [N] [I] [N]^T$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \arctg \frac{2\bar{I}_{xy}}{\bar{I}_y - \bar{I}_x}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{matrix} \bar{I}_x^* \\ \bar{I}_y^* \end{matrix} &= \frac{\bar{I}_x + \bar{I}_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{I}_x - \bar{I}_y)^2 + 4\bar{I}_{xy}^2}
 \end{aligned}$$

$$0 \rightarrow -M + M + dM + m ds - T r \frac{d\theta}{2} - T r \frac{d\theta}{2} - \cancel{dT r \frac{d\theta}{2}} \approx 0$$

$$- P ds \left(\frac{r}{\cos \alpha} - r \right) = 0$$

≈ 1

$$dM + m ds - \cancel{T r \frac{d\theta}{2}} = 0$$

$$\frac{dM}{ds} - \frac{T}{r} \frac{d\theta}{ds} + m = 0$$

$$\frac{dM}{ds} - \frac{T}{r} \cdot \cancel{\frac{d\theta}{ds}} + m = 0$$

$$\frac{dM}{ds} - T + m = 0$$

Riscrivendo i tre sistemi in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ N \\ M \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} q \\ p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[a^*] \{Q\} = - \{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_z}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ N \\ M \end{Bmatrix}$$

$$\{q\} = [H]^{-1} \{Q\}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

$$\{q\} = [a] \{u\}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} [a^*] \{Q\} = - \{F\}$$

$$\textcircled{2} \{Q\} = [H] \{q\}$$

$$\textcircled{3} \{q\} = [a] \{u\}$$

Combinando

$$[a^*] \{Q\} = - \{F\}$$

$$\rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow [a^*] [H] \{q\} = - \{F\}$$

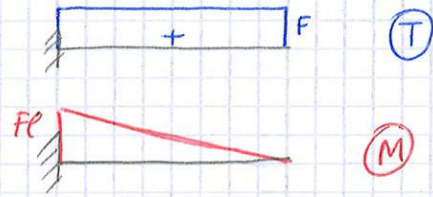
$$\rightarrow \textcircled{3} \Rightarrow [a^*] [H] [a] \{u\} = - \{F\}$$

$[L]$ operatore di Lemel

$$[L] \{u\} = - \{F\}$$

* SPOSTAMENTI TRASVERSALI

* ESEMPIO



$$\chi_x = \frac{M}{EI} = \frac{-Fl + Fz}{EI}$$

$$\chi_x = \frac{F(z-l)}{EI} = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$f_y = \frac{T}{GA} t_y = t_y \frac{F}{GA} = \frac{dU}{dz} + \varphi$$

Ho due differenziali

$$1) \frac{d\varphi}{dz} = \frac{F(z-l)}{EI} \quad \varphi(z=0) = 0$$

$$2) \frac{dU}{dz} + \varphi = t_y \frac{F}{GA} \quad U(z=0) = 0$$

$$\Rightarrow 1) \quad \varphi = \frac{F}{EI} \int (z-l) dz = \frac{F}{EI} \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) + C_1 \quad \begin{matrix} = 0 \text{ per c.c.} \\ \nearrow \end{matrix}$$

stituisco ① in ②

$$\frac{dU}{dz} = t_y \frac{F}{GA} + \frac{F}{EI} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$U = \underbrace{t_y \frac{F}{GA} z}_{\text{contributo di TAGLIO}} + \underbrace{\frac{F}{EI} \left(-\frac{z^3}{6} + \frac{lz^2}{2} \right)}_{\text{contributo di FLESSIONE}} + C_2 \quad \begin{matrix} = 0 \text{ per c.c.} \\ \nearrow \end{matrix}$$

contributo di
TAGLIO
 $U^T(z)$

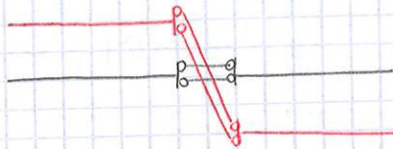
contributo di
FLESSIONE
 $U^M(z)$



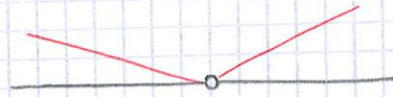
In questo caso e' facile ottenere la soluzione esatta.

Si dimostra che il contributo di taglio $U^T(z)$ e' trascurabile rispetto a quello flessionale, piu' la struttura e' snella

* FONTI DI DISCONTINUITA' NEL TRACCIAMENTO DELLA TRASFORMATA



u



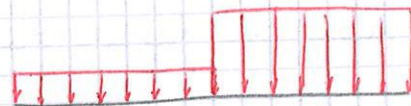
u'



u''



u'''



u^{IV}

$u(0)$ moto

$$\frac{du}{dz} = -\varphi$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = -\frac{I}{EI}$$

$$\frac{d^4u}{dz^4} = \frac{q}{EI}$$

* CRITERIO DI RESISTENZA

E' necessario confrontare lo stato tensionale del corpo con quello limite del materiale per capire se stiamo andando verso la rottura.

Per il confronto di $\sigma_{eq, stato}$ (tensione equivalente dello stato analizzato) e $\sigma_{eq, materiale}$.

$$\sigma_{eq, stato} \leq \frac{\sigma_{eq, materiale}}{f_s}$$

f_s : COEFFICIENTE DI SICUREZZA

Un materiale di qualità, cioè che mantiene costante il suo comportamento, sarà caratterizzato da f_s piccoli.

① CRITERI DI RESISTENZA MATERIALI FRAGILI

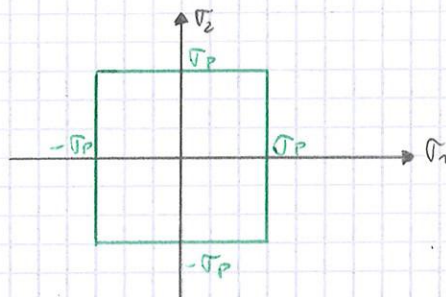
① CRITERIO RANKINE (O DELLE MASSIME TENSIONI)

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq |\sigma_p|$$

Nel caso tridimensionale: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

↳ viene rappresentato da un cubetto

Nel caso bidimensionale



Tutti i punti devono ricadere all'interno del quadrato.

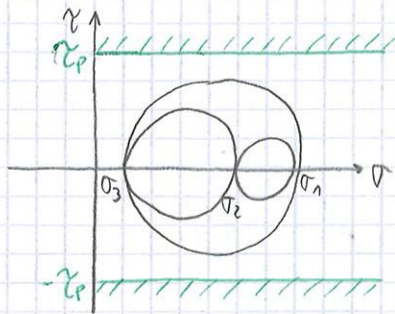
Il criterio Rankine presenta un difetto in quanto, da prove sperimentali, si è notato come il corpo arriva a rottura anche con

$$\tau < \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

② CRITERI DI RESISTENZA MATEMATICI DUTTI

① CRITERIO DI TRESCA (o DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE)

Si raggiunge lo SNERVAMENTO per massime tensioni tangenziali



$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

essendo il problema generato dalle τ , e' bene inserire una FASCIA DI SICUREZZA

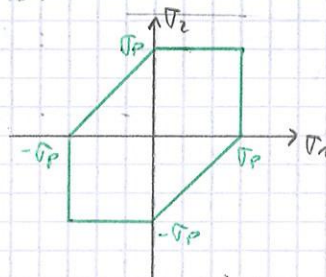
$$\tau_{max} < \tau_p$$

• CASO BIASSIALE

$$|\sigma_1| < \sigma_p$$

$$|\sigma_2| < \sigma_p$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$



Esagono di Tresca

• CASO TRASSIALE

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_p$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_p$$

Prisma a base esagonale

* Caso del solido di SAINT-VENANT

$$N, M_x, M_y \rightarrow \sigma_z$$

$$T_x, T_y, M_z \rightarrow \tau_t = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_t^2} < \frac{\sigma_p}{f}$$