NUMERO: 1613A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Greco S

MATERIA: Applicaz.Avanzate di Fisica Tecnica. Prof.Asinari

APPLICAZIONI AVANZATE DI FISICA TECNICA 05/03/2014

NOTAZIONE

(Annotazione Tensoriale)

(useremo la notazione di Einstein :)

- Grandezze (scalare, vettore, tensore)
- Definiremo diversi prodotti
- Gradiente
- Divergenza
- Laplaciano

} 3 OPERATORI PRINCIPALI

- Notazione di Einstein

- Grandezze:
  - a (minuscolo, senza grassetto) ⟹ numero $\in \mathbb{R}$ SCALARE

    esempio: modulo di un vettore

    $\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \in \mathbb{R}$ è uno scalare

  - **a** (minuscolo, grassetto) $= \underline{a} \in \mathbb{R}^D$ ovvero costituito da D numeri $\in \mathbb{R}$

    $\underline{a}$ = VETTORE

    $$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

    $\underline{a} = a_i$ ← blu con indice, vettore costituito da i termini

  - **A** (maiuscolo, grassetto) $= \underline{\underline{a}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ ha $D \times D$ gradi di libertà

    $\underline{\underline{a}}$ = TENSORE

    es. **A** in spazio tridimensionale ha $3 \times 3 = 9$ g.d.l

    $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1D} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{D1} & \dots & \dots & A_{DD} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D \times D}$$

    $$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij} \\ &= \underline{\underline{A}} \end{aligned} \right\}$$

    A_{ij} ⇓ costituito da $i \times j$ termini

Osservazione:

Ogni volta che c'è un "·" ⇒ c'è una sommatoria
quindi se ci sono ":" ⇒ 2 sommatorie

REGOLA MNEMONICA:

TUTTE LE VOLTE CHE HO UN PRODOTTO SCALARE APPLICATO A UN QUALSIVOGLIA VETTORE (QUALSIVOGLIA QUANTITÀ), SI FA IL PRODOTTO TRA LA GENERICA COMPONENTE DELLA PRIMA QUANTITÀ E LA GENERICA COMPONENTE DELLA SECONDA QUANTITÀ RIPETENDO L'ULTIMO INDICE LIBERO.

- PRODOTTO TRA 2 TENSORI. (PRODOTTO DI SATURAZIONE ":")

Dati $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{\partial \times \partial}$

$$\Rightarrow A:B = \sum_{i=1}^{\partial}\sum_{j=1}^{\partial} A_{ij} B_{ij} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + \dots + A_{1\partial}B_{1\partial} + A_{21}B_{21} + \dots + A_{2\partial}B_{2\partial} + A_{\partial 1}B_{\partial 1} + \dots + A_{\partial\partial}B_{\partial\partial}$$

Osservazione: quando l'indice è nella sommatoria si dice "SATURATO".

Ho 2 pallini, ogni pallino mi porta la sommatoria, ogni sommatoria avrà come indice le finale dei due tensori, e l'altro pallino (somma su indice) sarà riferito all'ultimo indice libero ⇒ ogni pallino avrà la sua sommatoria definita sempre all'ultimo indice libero.

Tutte le volte che un indice è coinvolto in una sommatoria si chiama indice ripetuto (CIOÈ VINCOLATO DALLA SOMMA STESSA, E IL SUO VALORE È DETERMINATO DALLA SOMMA)

Se l'indice NON È RIPETUTO ⇒ L'INDICE È LIBERO (QUINDI POSSO SCEGLIERE IL SUO VALORE)

OPERATORI

06/03/2014

- OPERATORE GRADIENTE $\nabla(\ )$ (nabla)

(operatore che raggruppa tutte e 3 le coordinate spaziali)

VETTORE CHE HA COMPONENTI:

- dato $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \nabla a = \begin{Bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \partial a / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial a / \partial x_D \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^D$ → derivate parziali del parametro a cui applichiamo il gradiente rispetto alle coordinate cartesiane

Se $\underline{a}$ è un vettore a 3 componenti

$\nabla \underline{a} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_j} \Rightarrow$ 1 indice libero $\Rightarrow$ VETTORE

- Se applico il gradiente ad uno scalare ottengo un vettore
- Se applico il gradiente ad un vettore ottengo un tensore

- $\underline{a} \in \mathbb{R}^D$

$$\nabla \underline{a} = \underbrace{\frac{\partial a_i}{\partial x_j}}_{\text{2 indici liberi} \Rightarrow \text{Tensore}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_D} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_D}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_D}{\partial x_D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D\times D}$$

Le righe identificano le componenti, le colonne identificano le direzioni

Proprietà $\Rightarrow$ il gradiente aumenta la dimensione $\Rightarrow$

dato che $x \in \mathbb{R}^{nD} \Rightarrow \nabla(x) \in \mathbb{R}^{(n+1)D}$

(Il gradiente indica la direzione di massima variazione nello spazio di un parametro

o

indica quanto rapidamente varia un parametro nelle direzioni spaziali)

$$\nabla \cdot \underline{a} = \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial a_D}{\partial x_D} \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$ NON CI SONO INDICI LIBERI $\Rightarrow$ LA DIVERGENZA DI UN VETTORE È UNO SCALARE

(mentre il gradiente di un vettore era un tensore, la divergenza è uno scalare)

La divergenza riduce la dimensione dell'oggetto a cui è applicato se parto da un vettore ottengo un numero, mentre la divergenza di un tensore è un vettore:

2° ESEMPIO (si tiene fisso il 1° indice della matrice che ha considerato)

- Dato $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{\underline{A}}$ = vettore:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \dots \frac{\partial A_{1D}}{\partial x_D} \\ \vdots \\ \partial A_{D1}/\partial x_1 + \dots + \frac{\partial A_{DD}}{\partial x_D} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

1 INDICE LIBERO $\Rightarrow$ LA DIVERGENZA DI UN TENSORE È UN VETTORE

osservazione: la divergenza abbassa la dimensione (per questo non ha senso fare la divergenza di uno scalare)

osservazione: la sommatoria è applicata all'ultimo indice del parametro a cui è applicato l'operatore divergenza

"In fisica la divergenza si usa per fare un bilancio energetico nel volume di controllo"

NOTA BENE: Il gradiente valuta la variabilità, la divergenza fa un bilancio. Cioè IL SIGNIFICATO DELLA DIVERGENZA È COGLIERE MEGLIO LA QUANTITÀ CAMPO (BILANCIO) IN UN VOLUMETTO INFINITESIMO; IL SIGNIFICATO DEL GRADIENTE È LA VARIABILITÀ NELLO SPAZIO DI UNA GRANDEZZA.

$$\left\{ \nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a = \sum_k \frac{\partial^2 a}{\partial x_k^2} \right\}$$

forma compatta $\rightarrow$ k è RIPETUTO

IL LAPLACIANO DI UNO SCALARE È UNO SCALARE

$$\nabla^2 a = \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a}{\partial x_D^2} \in \mathbb{R}$$

IL LAPLACIANO DI UN VETTORE È UN VETTORE:

- dato $\underline{a} \in \mathbb{R}^D$

$$\nabla^2 \underline{a} = \underbrace{\sum_{j=1}^{D} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{1^\circ \text{ INDICE LIBERO = VETTORE}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_D^2} \\ \\ \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_D^2} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

OSSERVAZIONE: Il Laplaciano conserva la dimensione perché è l'applicazione di due operatori

ovvero è LA DIVERGENZA DEL GRADIENTE

CONVENZIONE DI EINSTEIN

METODO PER SEMPLIFICARE LA SCRITTURA

Notiamo che ogni volta che c'è una sommatoria l'indice coinvolto compare 2 volte, cioè l'indice saturato

(abbiamo quindi l'indice coinvolto nella sommatoria, indice SATURATO, (MI DÀ LA DIMENSIONE) l'indice non coinvolto, cioè L'INDICE LIBERO)

Cosa distingue un indice LIBERO DA UNO SATURO?

oltre alla sommatoria che c'è, c'è che:

Tutte le volte che ho una sommatoria su k (o j...), k (o j...) c'è 2 volte, quindi non serve più la sommatoria:

$$\nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial a}{\partial x_k} \xrightarrow{\text{EINSTAIN}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial a}{\partial x_k}$$

↑RIPETUTO

Quindi se un indice c'è 2 volte ho una Σ sottointesa.

ESEMPI

(1) • dato $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D\times D}$ $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow$ Ricordando che per la divergenza la derivata satura sempre l'ultimo indice

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{R} \quad \text{(nessuno libero)}$$

(2) • dato $\underline{a} \in \mathbb{R}^D$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D\times D}$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\overbrace{A_{ij}\, a_j}^{\text{RIPETUTI}}) \in \mathbb{R}$$

VETTORE

(1) PARTO DALL' INTERNO
(2) FACCIO LA DIVERGENZA DELL' ULTIMO INDICE LIBERO

$$= A_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}$$

TENSORE TENSORE
(POTREBBERO ESSERE 2 TENSORI E SI SATURANO TRA LORO QUANDO HO UN DOPPIO PRODOTTO)

$i \Rightarrow$ RIPETUTO
j LIBERO (ED È IL 1° NON L'ULTIMO)

1ª cosa
Facciamo il TRASPOSTO x IDENTIFICARE IL GRADIENTE $\Rightarrow$ essendo $\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)^T = (\nabla \underline{a})^T$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (A_{ji})^T}{\partial x_i} = (\nabla \cdot \underline{\underline{A}}^T)$$

$$\Rightarrow A_{ij}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)^T + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\right)^T a_j =$$

← È L'ULTIMO DELLA SEQUENZA NON ULTIMO IN ORDINE ALF.

$$= \underline{\underline{A}} : (\nabla \underline{a})^T + (\nabla \cdot \underline{\underline{A}}^T) \cdot \underline{a} \in \mathbb{R}$$

PROCEDIMENTO CHE SI SEGUE:

Si prende l'espressione completa e la si trasforma nella notazione di Einstein, questa la si svolge come un'espressione normale, ottenuto quello che si ottiene dalla scrittura di Einstein si ripassa alla scrittura normale.

Osservazione su (2): se $\underline{a} \Rightarrow$ vettore direzione, $\underline{\underline{A}} \Rightarrow$ Tensore sforzi $\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{a} \Rightarrow$ OTTENGO LO SFORZO IN QUELLA DIREZIONE

$\nabla \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{a}) \Rightarrow$ BILANCIO SUL VOLUME DI CONTROLLO DELLO SFORZO IN QUELLA DIREZIONE.

12/03/2014

TERMOMECCANICA DEI CONTINUI

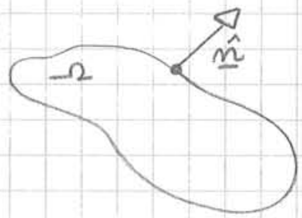
- EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Consideriamo un dominio Ω

→ IDENTIFICA COSA C'È ALL'INTERNO DEL SUO STESSO VOLUME

- Ω volume di controllo di forma arbitraria.
- bordo di Ω (che delimita la superficie)

(ci aiuta a identificare i flussi attraverso esso, per ogni punto del bordo posso identificare un versore uscente)



Il volume in teoria è arbitrario ⇒ può anche essere infinitamente piccolo come nella densità : $\rho = \frac{m_{VE}}{V_{sistema}}$ e tendo a zero il volume di controllo

$$\rho = \lim_{\Delta V_\Omega \to 0} \frac{\Delta m_\Omega}{\Delta V_\Omega}$$

ASSUNSIONE DEL CONTINUO ⇒ IPOTESI DI BASE

Considerato un continuo, qualsiasi sia il volumetto che si prende al suo interno, per quanto esso possa essere piccolo, si suppone che al suo interno (che esso contenga) ci sia abbastanza massa in maniera tale che: $\rho = \lim_{\Delta V_\Omega \to 0} \frac{\Delta m_\Omega}{\Delta V_\Omega}$ cioè $m_\Omega \neq 0$

cioè si presume che le proprietà variano continuamente da un punto ad un'altro e vengono stimate all'interno di REV (elemento di volume preso come riferimento).

(Viene ignorato il fatto che il fluido sia costituito da molecole discrete.)

Quindi proprietà come: densità, temperatura e velocità vengono (definite) considerate ben definite anche per punti infinitamente piccoli, definendo cioè un REV.

- l'effetto del fluido che si sta spostando
- l'effetto mio arbitrario di modificare la forma del volume di controllo

Studio come varia nel tempo la massa a seconda invarianti del campo di moto che lo attraversa.

Fissato il volume, la massa può avere dipendenza esplicita solo dal tempo e quindi $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$

DINAMICA

Cos'è che vado a determinare la Dinamica nel tempo di una certa massa all'interno di un volume affiancato ma fisso?

(È UN VOLUME IDEALE)

DELLA SUPERF

Andiamo a considerare cosa succede in un qualsiasi punto della superficie del mio volume di controllo. (devo fare l'integrale sulle correnti nel bordo del volume di controllo).

LA MASSA ALL'INTERNO DEL VOLUME CAMBIA IN VIRTÙ DEI FLUSSI AL BORDO DEL VOLUME.

In particolare se in alcune porzioni di questo bordo io ho un flusso in massa entrante questo contribuirà ad aumentare la massa all'interno del volume stesso (e viceversa).

Se io traccio tutte le particelle con i loro segni entranti e uscenti al bordo del volume di controllo dovrei riuscire ad avere una stima nella variazione del tempo della massa all'interno.

Quando guardo i flussi l'enfasi è nel bordo del V.C perché i flussi sono quelli che attraversano il V.C (il Bordo del V.C), anche se avessi flussi interni al V.C non andrebbero a modificare la massa nel volume stesso.

SOLO LA FRONTIERA CONTRIBUISCE A MODIFICARE LA QUANTITÀ INTEGRALE DI MASSA all'interno del V.C.

Quindi se siamo interessati a studiare la dinamica della massa, come si vede al 1° membro dell'integrale l'unica componente che ci interessa studiare è quella parallela al versore $\hat{n}$ ossia quella ortogonale alla superficie.

(Da punto a punto cambia sia il versore che il campo di moto).

Le LINEE DI FLUSSO sono linee tangenti in ogni punto al campo di moto, posso utilizzarle per stimare la direzione del vettore velocità, quindi se mi muovo in punti diversi del bordo andrò ad intersecare linee di flusso e quindi vettori diversi.

- quindi per considerare solo la parte parallela e non modificarle le grandezze faccio un prodotto scalare con $\hat{n}$ perché devo considerare solo la parte $\perp$ alla sup ($\parallel$ a $\hat{n}$) → (ADIMENSIONALE)

$$\frac{\partial m_\Omega}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \hat{n} \, dS$$

(+) POSITIVO SE $\underline{u}$ HA UNA COMPONENTE USCENTE DAL V.C.

→ xké versore uscente dal volume di controllo (SEMPRE)

Non posso considerare l'intera superficie per questo scelgo dS (superficie infinitesima) ⇒ dS lo metto per capire che il flusso è applicato solo a dS

Dal concetto di integrale non mi preoccupa il fatto che $\underline{u}$ e $\hat{n}$ cambiano lungo la superficie ⇒ perché l'integrale approssima l'integrando in ciascun punto della superficie.

(−) se io faccio $\underline{u} \cdot \hat{n}$ è positivo se $\underline{u}$ ha una componente uscente del V.C, ma se ha una componente uscente comporterà una perdita di massa e determinerà una riduzione nel tempo della massa contenuta nel V.C..

ORIENTATA SECONDO IL VERSORE $\hat{n}$

Quindi se $\underline{u} \cdot \hat{n}$ è positivo e comporta una perdita di massa, al fine di avere una massa $\frac{\partial m_\Omega}{\partial t}$ negativa (xké parte sta uscendo) ci metto il segno meno

Dalla formula (2) vediamo che entrambi i membri sono funzioni puntuali, ma il 1° è un integrale di volume, mentre il secondo è di superficie. Come faccio a dare la definizione di integrale omogeneo? uso il seguente Teorema

TEOREMA DI GAUSS (O TEOREMA DELLA DIVERGENZA)

(Si applica a campi regolari, non discontinui)

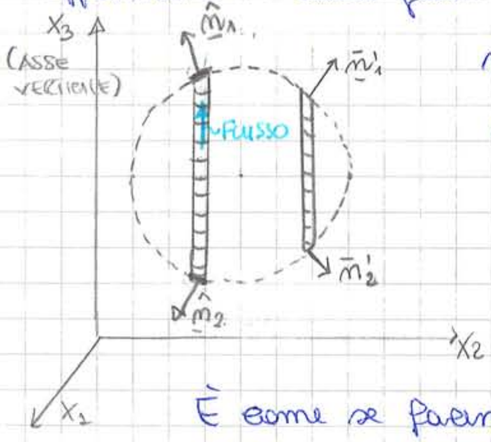
Mi dice che se io ho un integrale su un bordo di un volume su un certo vettore $\underline{F}$ moltiplicato scalarmente per un versore e per dS questo è equivalente ad un integrale di volume della divergenza di F in dV:

$$\int_{\partial\Omega} \underline{F} \cdot \underline{\hat{n}} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{F} \, dV \qquad (3)$$

L'informazione che ci interessa è che è un Teorema in grado di Trasformare l'integrale superficiale sull'intero bordo in un integrale di volume, quindi ci potrebbe aiutare a risolvere l'incongruenza che abbiamo nella nostra espressione (2)

(LA DIMOSTRAZIONE NON SI FA)

Supponiamo di avere questo volume: (come se fosse un pallone)



supponiamo di prendere un piccolo cilindretto secondo x_1 e x_2 ed esteso secondo x_3. Questo cilindretto è come se fosse bucato la parte in sommità e la parte in fondo hanno 2 versori diversi.

È come se facessi un buco, un carotaggio e poi dividessi in tanti volumetti, per ciascuno dei volumetti della carota applico la divergenza, la divergenza fa un bilancio dei flussi attraverso quel volumetto, e poi faccio un integrale. → Rimane

Cominciamo ad utilizzare adesso entrambe le assunzioni che abbiamo scritto: (Ω fisso nel tempo, arbitrario, bordo di Ω) (APPROCCIO EULERIANO)

① Ω FISSO NEL TEMPO

Ω è il dominio dell'integrale volumetrico che sto studiando, è la misura con cui (questo dominio) posso invertire la sequenza tra derivata nel tempo e integrale di volume

solo perché il volume Ω non ha dinamica nel tempo, se fosse fisso nel tempo non importava se facevi prima la derivata poi l'integrale e viceversa, per questo non tengo conto dei termini di configurazione per il dominio.

APPLICANDO L'IPOTESI 1: (POSSO SCRIVERE)

$$\boxed{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \right) dV = 0} \quad (5)$$

Sfruttando l'ipotesi 1 ho invertito la sequenza e portato la derivata all'interno e portato al primo membro il termine che deriva dal Teorema di Gauss.

utilizziamo adesso l'altra assunzione:

② ARBITRARIA

(5) Noi qui abbiamo un integrale volumetrico $\int_V = 0$ ← RISULTATO = 0 DELL'INT.
(definito su tutti i punti del dominio Ω)

dobbiamo prendere l'integrando e porlo uguale a zero, perché l'integrando è una funzione puntuale.

(ma non posso essere sicuro convinto che l'unica soluzione sia questa):

[controesempio: (non posso sempre fare così)

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0 \qquad x \in [0, 2\pi] \rightarrow \sin(x) \neq 0]$$

↑ dà $\sin(x) = 0$ solo per alcuni specifici domini

GENERALIZZAZIONE: FORMA STANDARD o FORMA CANONICA

(forma che questa equazioni soddisfa, tutte le equazioni che vedremo hanno sempre questa forma).

Hanno tutte la stessa forma:

- Una derivata Euleriana (derivata nel tempo) (che tiene conto di una variazione esplicita del campo a cui è applicata rispetto al tempo), derivata nel tempo
- Una divergenza di qualcosa, quel qualcosa lo chiameremo sempre flusso, in questo caso flusso in massa. Quindi la divergenza è sempre la $\nabla \cdot$ flusso
- In alcune equazioni (non tutte) abbiamo a secondo membro un termine che chiamiamo SORGENTE / POZZO

SORGENTE / POZZO → Se c'è un termine positivo ⊕ quindi sorgente contribuisce ad aumentare la quantità di flusso nel tempo (nel nostro caso ρ) quindi è un termine che genera una quantità di interesse. Se è un termine negativo è un pozzo, è qualcosa che distrugge la quantità di interesse

(Globalmente non si può generare o distruggere massa, ma nella combustione si può)

Se il termine SORGENTE nella forma canonica è uguale a zero

SORGENTE = 0 → La grandezza è CONSERVATA

(perché non è generata)

Per adesso consideriamo le grandezze conservate, hanno un termine noto nullo e mantenuta invariata da tutti i processi che consideriamo.

Avere grandezze che dipendono da tempo e spazio definite da fluidi che si spostano fa eggire su poso fare derivate diverse.
Dunque:

L'approccio Euleriano derivata nel tempo di una grandezza a spazio fisso in un punto spaziale fisso rispetto al laboratorio (è la misura fui farla da fare, con sensore fisso e fluido in moto e si analizzano parti diverse del fluido).

Quindi se io vado a fare il limite del rapporto incrementale della variazione misurata in modo euleriano trovo questa derivata

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0} \quad (6)$$

Perché è definita appunto rispetto ad un punto fisso cioè l'ipotesi (1) del punto di partenza del nostro V.e.
approccio che sta lì, guardo un punto fisso e guardo cosa accade anche se fa parte di punti diversi.

L'altro approccio:

L'approccio Lagrangiano consente di studiare esattamente cosa succede ad una certa porzione del fluido in cui abbiamo eseguito diversi "esperimenti". Seguo sempre le particelle che ho → approccio concreto.

Chi ci dice che con un approccio lagrangiano troverei esattamente questa derivata?

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0 \ = ?$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$\rho(t, \underline{x})$ lo spazio cambia

ho $x(t) = \underline{x}(0) + \underline{u}(t_0)\Delta t$

$\rho(t, \underline{x})$

passo da $\rho(t, \underline{x})$ a $x(t)$

$$\rho(t,\underline{x}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1 \Delta t + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_2 \Delta t + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_3 \Delta t =$$

$$= \rho(t,\underline{x}) + \Delta t \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right]}_{\text{DERIVATA LAGRANGIANA}} \qquad u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \underline{u} \cdot \nabla \rho$$

$$= \rho(t,\underline{x}) + \Delta t \frac{D\rho}{Dt}$$

Derivata progettata per inseguire piccole porzioni del fluido.

se $\underline{u} = 0 \Rightarrow$ le due derivate euleriana e lagrangiana coincidono.

$\rightarrow$ In meccanica.

Qui invece il fluido si deforma e abbiamo bisogno di tutte e due le derivate, euleriana e lagrangiana.

Significato fisico della derivata Lagrangiana: (grandezza Lagrangiana)
Andando a guardare punti che giacciono sulla linea che è identificata dal campo velocità $\underline{u}$ sono tutti punti che cercano di inseguire la medesima porzione di massa, quindi la medesima porzione di fluido nel Tempo. Aspetto operativo importante.
Esiste però un'altro aspetto ⇒ L'Invarianza Galileiana

Invarianza Galileiana

Queste due derivate, dal punto di vista Teorico hanno anche un'altra grande differenza: Nel momento in cui abbiamo un fluido in moto, rispetto ad altre applicazioni meccaniche, nasce naturalmente, per il campo di velocità $\underline{u}$ un accoppiamento fra spazio e Tempo (esempio della lavagna x' è una funzione del Tempo intercorso Tra la prima posizione e la seconda). Tutte le volte che questo accade nasce un problema di invarianza galileiana, cioè, cosa succede se due osservatori in moto uniforme, rispetto all'altro, velocità costante uno rispetto all'altro, misurano la stessa cosa?
Abbiamo due osservatori inerziali che osservano lo stesso fenomeno.
Se noi abbiamo delle grandezze che accoppiano spazio e Tempo, il moto o meno dell'osservatore potrebbe giocare un ruolo, (Se parto da l'osservatore stesso si sposta potrebbe, per esempio, andare a modificare le velocità relative che io misuro con un osservatore in moto rispetto ad un fenomeno), a un punto tale che le derivate che ho appena introdotto, potrebbero assumere valori diversi se applicate a sperimenti realizzati da osservatori in moto relativo uniforme l'uno rispetto all'altro → Questo è inaccettabile dal punto di vista ingegneristico e fisico.

EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

L'equazione $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0}$ Non è chiusa.

È un equazione scalare, che descrive la conservazione della massa, infatti il termine a secondo membro, al netto del termine euleriano, al netto della divergenza del flusso è uguale a zero; quindi, in questo modello, non può esserci distruzione o generazione di massa. Però pur essendo un equazione scalare, comunque un flusso, l'argomento della divergenza, che in realtà è un vettore, perché è una quantità di moto per unità di volume $\Rightarrow \rho \underline{u}$.

Quindi non possiamo pensare, anche usando equazioni a contorno, di risolvere quest'equazione per trovare il campo di densità nello spazio e nel tempo, per farlo mi serve un informazione relativa al vettore velocità che in generale non sempre ho.

Quindi l'equazione $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u})$ fatto il suo lavoro, che è quello di scrivere la conservazione della massa, è un informazione non sufficiente per ricavare la densità ρ perché ha bisogno di conoscere il flusso in massa, cioè $\underline{u} \cdot \rho$ (campo di velocità per densità ρ)

Tutte le equazioni hanno questo in comune: si parte da una grandezza, che generalmente è l'argomento della derivata euleriana, in tutte è presente un flusso, che è l'argomento della divergenza, il flusso ha dimensione maggiore e quindi ha bisogno di altre equazioni per riuscire a determinare un valore.

Chi ci da questa grandezza $\rho \cdot \underline{u}$ $\rightarrow$ flusso dell'equazione di conservazione della massa

fluidodinamica $\equiv$ quantità di moto

$\rightarrow$ è una quantità di moto x unità di volume ed anche in assenza di sforzi al bordo la Forza di gravità è in grado di attrarre i corpi verso il centro di gravità della Terra. Quindi è in grado di modificare la quantità di moto della massa contenuta dentro Ω perché la spinge verso il centro di massa. Nelle nostre equazioni vuol dire che al netto del bilancio che io faccio al bordo devo anche includere l'eventuale presenza di campi esterni che agiscono sulla mia massa. Un modo di farlo è quello di prevedere un Termine di SORGENTE / POZZO di tipo volumetrico come $s(\rho u)$ → che è la sorgente della quantità di moto

L'integrale del momento dell'equazione può essere espresso come:

$$\frac{\partial(m_\Omega \underline{U}_\Omega)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho \underline{u}\, dV = -\oint_{\partial\Omega} \underline{\underline{F}}(\rho \underline{u}) \cdot \hat{n}\, dS + \underbrace{\int_\Omega s(\rho u)\, dV}$$

→ TERMINE SORGENTE / POZZO CHE SI RIFERISCE ALLA SORGENTE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

La quantità di moto è un vettore ⇒ la sua sorgente è un vettore

2 NOVITÀ

1. IL FLUSSO È UN TENSORE: (PERCHÈ È IL FLUSSO DI UN VETTORE)
   Significato fisico: È legato agli sforzi che sente il fluido al bordo del volume di controllo, tanto è vero che la risultante in una porzione vicino al bordo si può calcolare facendo $\underline{\underline{F}} \cdot \hat{\underline{n}}$
2. DUE CORPI SI MUOVONO ANCHE SE HANNO DELLE FORZE A RISULTANTE NULLA SULLA LORO SUPERFICIE (se parliamo di quantità di moto), questo perché ci può essere un campo di forze esterno al dominio e che agisce però sulla massa in esso contenuta

$\rho \underline{u} * \underline{u}$

Quale moltiplicazione? quale ci metto come prodotto? quello scalare no perché ridurrei le dimensioni e non è ciò che voglio. Quindi dobbiamo capire qual'è il giusto prodotto.

Dobbiamo lavorare con un componente per volta per semplificare la questione.

Concentriamoci soprattutto sul primo termine, quindi io voglio andare a studiare il flusso avettivo:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{avv} + \dots \left(+ F_{stat} + F_{dyn}\right)$$

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{F}}_{avv} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS}$$ =

non lavoro sull'intera equazione prendo il 1° dei 3 elementi dell'equazione e studio il termine dove c'è il 1° dei 3 flussi;

$\underline{\underline{F}}_{avv} \cdot \hat{\underline{n}} \Rightarrow$ è un vettore (Tensore scalare versore = vettore)

Quindi prendo solo la componente i-esima e diventa:

$$\left(\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{F}}_{avv} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS\right)_i = \int_{\partial\Omega} \sum_j F_{avv_{ij}} \hat{n}_j \, dS$$

(1) (2)

$\rightarrow$ chi è l'indice libero di (2)

dove (2) coinvolge anche j che però è vincolato dalla sommatoria e costretto dalla sommatoria a prendere tutti i valori possibili 1, 2, 3.

$j \rightarrow$ indice ripetuto, saturato

$i \rightarrow$ indice libero

Potrei anche non scrivere la $\Sigma \Rightarrow$ perché j è ripetuto

Il vantaggio di lavorare per componenti è:

è vero che la grandezza di interesse è un vettore, però in questo caso stiamo studiando le variazioni di una delle componenti di questo tensore, ossia di una delle componenti dell'integrale. Quindi se lavoriamo sulla grandezza i-esima quello che stiamo trasportando con il campo di velocità non è più un vettore ma solo una componente di quel vettore ($\rightarrow$ i-esima)

$(\underline{F}_{avv})_{ij}$ è la pressione componente nella pressione rispetto alla pressione esterna.
ed equivale a scrivere:

$$\boxed{\underline{F}_{AVV} = \rho \underline{u} \otimes \underline{u}}$$

prendere due vettori e ottenere un tensore facendo il prodotto di tutte le componenti del primo vettore per tutte le componenti del secondo vettore cioè 9 combinazioni, e fornano invece immagazzinate in un tensore ⇒ è proprio il prodotto diadico
Allora rispondiamo alla domanda su quale moltiplicazione fare: possiamo dire che la moltiplicazione giusta è quella del prodotto diadico ⇒ $\rho \underline{u} \otimes \underline{u}$ è l'unica moltiplicazione che dati 2 vettori mi da un tensore
Il campo vettoriale trasporta ciascuna componente della quantità di moto per velocità

SIGNIFICATO FISICO

Generalizzare per i vettori quello che è l'avvezione, cioè il trasporto rispetto al moto del fluido.
Possiamo vedere che tutte le volte che parliamo di una grandezza, o un coefficiente di trasporto, o un vettore o un flusso qualsiasi cosa, ci dobbiamo scrivere l'unità di misura (sono sempre le stesse)

$$\frac{N}{m^2} \text{ oppure } N \cdot \frac{m}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

$$N \cdot \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^2}$$ diventa

è una energia volumica

$$F_{AVV} = \rho \underline{u} \otimes u$$

$$F_{ij}^{AVV} = \rho u_i u_j = \left[\frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} \frac{m}{s}\right] = \left[\frac{kg}{m\, s^2}\right] = \begin{cases} \dfrac{N\,m}{m^3} = \left[\dfrac{J}{m^3}\right] \\ \dfrac{N\,m}{m^3} = \left[\dfrac{N}{m^2}\right] = [Pa] \end{cases}$$

Lo interpreto

è proprio l'unità di misura degli sforzi

$$\frac{kg \cdot m}{s^2} = m \cdot a = \text{Forza} = \text{Newton}$$ (a = accel.) (ci manca un kg, ci manca un metro)

prendiamo il dominio Ω e sezioniamolo secondo una superficie normale al versore $\hat{\underline{n}}$, e andremo a vedere la forza idrostatica la troviamo orientata secondo $\hat{\underline{n}}$.

Questo succede per qualsiasi superficie,
se iniziamo a ruotare la risposta è sempre la stessa, quindi

$$\boxed{\underline{\underline{F}}_{STAT} \cdot \hat{\underline{n}} \quad // \; \hat{\underline{n}}}$$

ottengo sempre qualcosa che sia $// \; \hat{\underline{n}}$ comunque sia orientato $\hat{\underline{n}}$ → proprietà elementare degli sforzi idrostatici

Ora come deve essere fatto questo tensore per avere questa proprietà?
deve essere proporzionale al tensore identità

$$\boxed{\underline{\underline{F}}_{STAT} \propto \underline{\underline{I}}} \qquad \underline{\underline{F}}_{STAT} \cdot \hat{\underline{n}} \propto \underline{\underline{I}} \cdot \hat{\underline{n}} = \hat{\underline{n}}$$

perché se io se lo vado a prendere il tensore identità $\underline{\underline{I}}$ trovo che:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\underline{\underline{I}})_{ij} = \delta_{ij}$$

δ di Kronecker per identificare le componenti
è = 1 se i = j
è = 0 se i ≠ j
mi da la mappatura di $\underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \hat{\underline{n}} = \sum_j I_{ij} \hat{n}_j = \sum_j \delta_{ij} \hat{n}_j = \hat{n}_i = \hat{\underline{n}}$$

→ sopravvive solo quel $j = i$ dove $\delta = 1$ tutti gli altri due con $j \neq i$ sono moltiplicati per δ e spariscono, quindi sopravvive solo n_i

$\underline{\underline{F}}_{STAT} \cdot \hat{n}$ mi da qualcosa proporzionale a $\hat{n}$

Quindi $\boxed{\underline{\underline{I}} \cdot \hat{\underline{n}} = \hat{\underline{n}}}$

la matrice identità è priva di unità di misura, quindi devo inserire un termine come costante di proporzionalità tra il fluido idrostatico e il tensore identità, questo termine è la pressione.

definiamo:

$$\boxed{p = Tr.(\underline{\underline{\Pi}})/3}$$ Traccia $(\underline{\underline{\Pi}})/3$

Significato fisico:

Questa definizione di pressione si applica a $\underline{\underline{\Pi}}$ generalizzato che include sia la parte statica che la parte idrodinamica.
La Traccia è una grandezza invariante ⇒ non abbiamo problemi per definirla per sistemi differenti. Nel caso particolare in cui il fluido sia fermo, la componente idrodinamica va a zero, rimane solo la parte idrostatica e questa definizione generalizzata di pressione è consistente con l'espressione ricavata per gli sforzi idrostatici, perché se il dinamico va a zero

$\underline{\underline{F}}_{STAT} = \underline{\underline{\Pi}}$ → lo statico va a p sulla diagonale ⇒
la $Tr = 3p/3$ $\left(Tr(\underline{\underline{F}}_{STA}) = p\right)$

Per riuscire a mantenere la consistenza, è necessario soddisfare una condizione ⇒

CONDIZIONE DI CONSISTENZA

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = p\,\underline{\underline{I}}$$

$p = \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\Pi}}) \to p = \frac{1}{3}\left[Tr(\underline{\underline{F}}_{STAT}) + Tr(\underline{\underline{F}}_{DYN})\right]$

$$p = \frac{1}{3}\left(\underbrace{Tr(\underline{\underline{F}}_{STAT})}_{3p} + Tr(\underline{\underline{F}}_{DYN})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3p + Tr(\underline{\underline{F}}_{dyn})\right) =$$

$$= p + \cancel{Tr(\underline{\underline{F}}_{dyn})}_{0}$$

$$\boxed{Tr(\underline{\underline{F}}_{dyn}) = 0}$$ x avere l'uguaglianza

Se $\underline{\underline{F}}_{dyn} \neq 0$ come faccio a soddisfare la congruenza dell'espressione tra la pressione che ho usato nel definire il termine idrostatico e la pressione che uso con questa nuova definizione?
L'unica possibilità è che nel progettare la parte dinamica del tensore degli sforzi noi ci dobbiamo preoccupare di prendere espressioni per cui la Traccia della parte dinamica sia uguale a zero, ma il tensore non abbia traccia.

Quando facciamo di dinamica dobbiamo studiare il gradiente di $\underline{u}$: cioè è di fatto un Tensore

calcolo del gradiente?

- $\nabla \underline{u} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\quad (\nabla u)_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ il gradiente aumenta la dimensione di un indice in più

Quali sono i problemi di questa prima scelta?

Questa scelta ha una serie di problemi:

① non è una scelta a traccia nulla come quella che vogliamo avere

② non è una scelta simmetrica (problema grave) perché $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \neq \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$

Quindi se non è una scelta simmetrica, quindi se non è un Tensore simmetrico, dato che il risultato dipende dalle nostre scelte, non va bene perché se cambiassi l'asse di riferimento cambierebbe il Tensore

Il problema della simmetria essendo il più grave è facile risolverlo, perché se $\nabla \underline{u}$ non è simmetrico basta sommare il suo Trasposto e il risultato diventa simmetrico perché ovviamente facendo il Trasposto della somma si fanno invertire senza cambiare il valore della somma.

- Facciamo una prima correzione: (il Trasposto è simmetrico)

$$\underline{\underline{F}}_{dyn} \propto (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

Considerando $\underline{\underline{F}}_{dyn}$ proporzionale a $\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T$ e così risolviamo il problema della simmetria

Rimane il problema che la prima correzione non è compatibile con il vincolo che abbiamoettato nella nostra definizione di pressione, cioè il fatto che la parte dinamica sia a traccia nulla.

manca ancora introdurre un coefficiente di viscosità e in particolare : $\nu \rightarrow$ viscosità cinematica

$\nu \cdot \rho = \mu \rightarrow$ viscosità dinamica

a meno di introdurre questo, ho tutti i termini per la parte dinamica del flusso che servono qui.

$$(*) \quad \underline{\underline{F}}_{dyn} = -\underbrace{\rho \nu}_{\mu} \left[(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u} \, \underline{\underline{I}} \right] = [Pa]$$

FLUSSO IDRODINAMICO

Quando studio la proporzionalità non mi importa, ma si mette il meno per il secondo principio, perchè quando enunceremo la produzione di entropia dovuta agli sforzi viscosi il fatto che la produzione entropica sia positiva deriva dal fatto di aver assunto il segno negativo

(*) Ci sono 3 flussi per scrivere la quantità di moto:

AVVETTIVO → generalizzazione tensoriale di quello visto ieri

L'IDROSTATICO → apparentemente è semplice, ma devo riuscire a definire in modo univoco la pressione e questo richiede il nesso all'idrodinamico $\left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u} \text{ correzione}\right)$

L'IDRODINAMICO → introduce $\nu \rightarrow$ misura con i viscosimetri

LE 3 ESPRESSIONI SONO A CARATTERE GENERALE, VALGONO PER L'ARIA A Ma = 5 come per l'aria, per l'acqua in moto lento, e anche per alcuni fluidi non Newtoniani

La natura del fluido sta nella definizione di pressione che si ottiene nell'equazione di stato del fluido e nel modo di quantificare le viscosità cinematica e dinamica.

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{S}}_{\text{FORMA CANONICA}} \rightarrow \text{TERMINE DI SORGENTE QUALORA ESSO SIA PRESENTE.}$$

Questa espressione è la forma canonica mi dice che in realtà la quantità di moto è una grandezza conservata se e solo se il termine di vettore sorgente S è nullo, altrimenti io posso avere una non conservazione della quantità di moto in presenza di campi esterni come quello non gravitazionale.
In generale si parla di equazione di bilancio se e se hanno termini di pozzo / sorgente non nulli.
L'equazione di conservazione della quantità di moto è tale se e solo se $S = 0$, se $S \neq 0$ equazioni di bilancio della quantità di moto.
Abbiamo poi una serie di espressioni, da notare che il flusso è la somma di 3, noi abbiamo identificato il 1° e abbiamo poi chiamato $\Pi = \underline{\underline{F}}_{STAT} + \underline{\underline{F}}_{DYN}$

$$\underline{\underline{F}} = \rho \underline{u} \otimes \underline{u} + \underbrace{\underline{\underline{\Pi}}}_{= \underline{\underline{F}}_{STAT} + \underline{\underline{F}}_{DYN}}$$

Alcune volte la parte dinamica si chiama anche:
(parte viscosa del tensore degli sforzi → vedi dopo)

$$\underline{\underline{F}}_{DYN} = -\underline{\underline{\Pi}}_{v} \quad (\text{è ... alla } v)$$

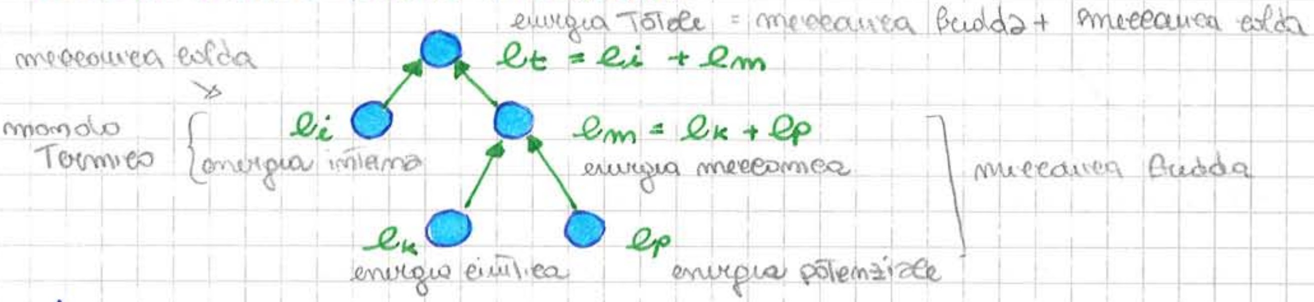
Cambia solo il segno perché il flusso è $\propto$ a $-v\,[\dots]$
Se vado a sostituire tutto nell'equazione di partenza ottengo

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + \underbrace{\rho \underline{\underline{I}}}_{\text{parte statica}} \right) = \underbrace{\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_{v}}_{\text{parte dinamica}} + \underline{S}$$

La divergenza è l'operatore che fa il bilancio del volume di controllo, e indica tutto quello che accade al bordo del volume di controllo e quello che accade all'interno come conseguenza.

ENERGIA TOTALE DI CONSERVAZIONE

ESISTONO DIVERSE FORME DI ENERGIA



La parola energia si applica a diverse grandezze, quindi vediamo qualche energia, come l'energia cinetica, energia potenziale (che deriva da un campo potenziale) se sommiamo la cinetica e la potenziale otteniamo l'energia meccanica.
Di queste 5 forme di energia solo una è conservata e_T

L'energia Totale è conservata: fisicamente vuol dire che si conserva, cioè un sistema può cambiare il bilancio tra forme diverse di energia ma la disponibilità tra quella Totale è invariata. così non sono tutte le altre forme di energia, come sappiamo che l'energia meccanica non viene conservata ma bensì distrutta. A parità di energia Totale vediamo un trasferimento tra energia meccanica ed energia interna (calore). Tutti i termini, incluso quello termico, a livello microscopico derivano da Energia cinetica e potenziale, cioè da E_m nelle sue varie forme, la frattura è tra meccanica macroscopica, dove l'E_m ancora si vede, e la meccanica microscopica, dove non si vede coi nostri sensi ma comunque c'è.

$$e_\Omega = \frac{E_t}{m_\Omega} = \frac{1}{m_\Omega}\int_\Omega \rho\, e_t \, dV$$

$$\boxed{f = f_{adv} + f_{Termico} + f_{molecolare}}$$

f ADV

Il più semplice è il contributo del flusso avvettivo (Trasporto senza scambio $\rho \cdot e_t$ → muove uno scalare)
Quindi se è vero che il flusso di massa è semplicemente $\rho \underline{u}$ il flusso di energia Totale che vediamo adesso è

$$f_{adv} = \rho\, e_t\, \underline{u} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\frac{J}{kg}\frac{m}{s}\right] = \left[\frac{J}{m^2 s}\right] = \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

ENERGIA TOTALE SPECIFICA CHE È LA GRANDEZZA TRASPORTATA

Se il moto spinge una parte contenente energia Totale dentro il mio volume aumenta automaticamente l'e_t del volume. Viceversa se il flusso in moto va ad estrarre a portar via dal mio volume un certo moto automaticamente l'e_t del volume diminuirà
(analogo a quello visto per il Trasporto in massa)

f Termico

Il flusso Termico: $\underline{q}$ è un vettore a 3 componenti

$$f_{Termico} = \underline{q} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \rightarrow \text{FLUSSO SPECIFICO}$$

È PER UNITÀ DI SUPERFICIE

TUTTI I FLUSSI HANNO LA STESSA UNITÀ DI MISURA

(Il flusso è sempre legato a una quantità di moto)

$$\boxed{f_{Termico} = \underline{q} = \lambda \nabla T}$$

CONDUCIBILITÀ TERMICA $\lambda \left[\frac{W}{m\,k}\right]$
LEGGE DI FOURIER

$$\left(\underline{q} = \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{W}{m\,k} \cdot \frac{k}{m}\right] \right)$$

∇T (Il gradiente di Temperatura) $\left[\frac{k}{m}\right]$

La conducibilità λ pur essendo un coefficiente che regola in qualche modo il Trasporto di energia non ha le stesse misure dell'altro coefficiente di Trasporto visto, perciò non è normalizzato secondo la Teoria di Trasporto.

Se vediamo gli altri 2 termini le differenze aumentano.
Le informazioni sono puramente meccaniche ($\underline{\underline{F}}_{STA}$ e $\underline{\underline{F}}_{DYN}$) mentre in f_{STAT} e f_{DYN} sono sì meccaniche ma includono anche una parte termica. ($f_{AVV} \to \underline{\underline{F}}_{AVV}$ IDROST + IDRODY = f mecc.. f termico??)
Io ho delle vibrazioni meccaniche alla nanoscala che non danno moto complessivo, altrimenti ci sarebbe variazione di quantità di moto in assenza di campi esterni, però contribuiscono a una delle forme in cui l'energia può essere immagazzinata nel corpo per via termica; nel mondo macroscopico non è rilevante ma nel microscopico le vibrazioni avvengono anche a Tamb.

$\underline{\underline{F}}_{AVV}$ $\underline{\underline{F}}_{STAT}$ $\underline{\underline{F}}_{DYN}$] molto simili ma anche molto diversi
f_{avv} f_{term} f_{mecc}] $\to$ ha anche $f_{termico}$

Li metto quindi insieme:
($\mathcal{E}$ una quantità conservata quindi devo tener conto solo di derivata euleriana e divergenza con i flussi $\to$ metto $= 0$)

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\overset{AVV}{\rho e_t \underline{u}} + \overset{TERMICO}{\underline{q}} + \overset{MECCANICO}{\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{u}}) = 0$$

quello meccanico è totale ha sia la parte idrostatica che la parte idrodinamica $\boxed{\underline{\underline{\Pi}} = p\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Pi}}_v}$

Se lo faccio $p\underline{\underline{I}}\cdot\underline{u} = p\underline{u}$ = da dove deriva?
(prendo $p\underline{\underline{I}}\cdot\underline{u} = p\underline{u}$ che è uguale a:
Se ricordiamo l'entalpia che è uno dei concetti fondamentali differisce dall'energia interna per il lavoro necessario allo spostamento del fluido e in particolare da una quantità $p\cdot v$ (pressione per volume specifico o massico) quindi
$p\underline{u} = \rho(pv)\underline{u}$ dove $v = \frac{1}{\rho} \Rightarrow$
$\rho(p\frac{1}{\rho})\underline{u} = p\underline{u} \to$ quindi si può vedere che tiene conto dell'effetto di moto del fluido)

SISTEMA DI EQUAZIONI DI NAVIER - STOKES - FOURIER (NSF)

Non stiamo parlando di una singola equazione in grado di descrivere il moto dei fluidi e lo scambio termico di essi, è sempre un SISTEMA DI EQUAZIONI perché sono legate tra loro

$$① \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

PARTE VISCOSA

FORMA COMPLETA → $$② \quad \frac{\partial (\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underbrace{\underline{u} \otimes \underline{u}}_{\text{FONTE DELLA TEORIA DEL CAOS}}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_v + \rho \underline{a}$$

$$③ \quad \frac{\partial (\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u} + p \underline{u}) = \nabla \cdot (-\underline{q}_\alpha + \underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u})$$

dove

$$\underline{\underline{\Pi}}_v = \rho \nu \left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u} \, \underline{\underline{I}} \right) \quad 1^*$$

$$\underline{q}_\alpha = -\lambda \nabla T = -\rho c_p \alpha \nabla T \quad 2^*$$

fermandomi la 1 equazione:

Se io prendessi la 1ª equazione da sola avrei 4 incognite ρ, u_x, u_y, u_z e una sola equazione, quindi non sarebbe risolubile → È SEMPRE INTRINSECAMENTE UN SISTEMA

Vediamo la 2 equazione:

Trasporto della quantità di moto, la parte NAVIER - STOKES che hanno determinato la forma di quest'equazione in forma completa, perché storicamente si possono utilizzare altre forme, ha tutti i termini ~~[illegible]~~ i termini viscosi e i termini non lineari (ho una dipendenza del 2° ordine della velocità $\underline{u} \otimes \underline{u}$ → EFFETTO DI INSTABILITÀ, VERA FONTE DEL TERMINE CAOTICO NELL'EQUAZIONE DI NAVIER STOKES)

Le equazioni di per sé non servono a nulla, perché mi serve l'equazione fenomenologica (il modello che mi descrive come la parte del tensore degli sforzi è calcolabile con le altre grandezze → la 2ª espressione non vive senza la

19/03/2014

Abbiamo parlato di bilancio della quantità di moto, perchè in generale la quantità di moto può avere un'accelerazione esterna dovuta a un campo esterno che generalmente è non nullo.
Allora qualora vi sia un campo esterno non nullo, es gravitazionale, elettrico o magnetico, di fatto la quantità di moto non sarebbe più conservata perchè c'è un agente esterno in grado di accelerare il moto del mio fluido.

Quando devo scrivere delle equazioni in cui c'è il termine di sorgente o pozzo, non posso più parlare di grandezza conservata ma devo parlare di equazioni di bilancio che tiene conto di tutti gli aspetti (azioni) ma anche delle condizioni esterne.

Quindi a volte nei libri troviamo l'equazione di conservazione della quantità di moto, la 2ª equazione di NSF come equazioni di bilancio annullando l'accelerazione a.

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \underline{u}\otimes\underline{u}) + \nabla p = \nabla\cdot\underline{\underline{T}}_v + \rho\underline{a}$$

Oltre a queste grandezze dobbiamo anche definire delle correlazioni fenomenologiche (cioè nella teoria del continuo non è possibile, in teoria, dimostrare in modo univoco l'espressione del tensore degli sforzi e del flusso termico che valga tra qualsiasi fluido, devono essere delle equazioni che si basano su fenomeni e si adattano solo ai fluidi, in particolare l'equazione n° 3 di NSF per il tensore degli sforzi è la relazione per i fluidi Newtoniani) I fluidi Newtoniani sono quelli che hanno una relazione lineare tra gli sforzi e le deformazioni, cioè il gradiente di velocità, si parla di fluidi Newtoniani tutte le volte che si ha una relazione lineare tra gli sforzi viscosi e la deformazione, cioè il gradiente di velocità.

Invece la derivata lagrangiana

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho(t+\Delta t, x + u\Delta t) - \rho(t, x)}{\Delta t} \quad (*)$$

Derivata che ha senso quando studio qualcosa che si sta spostando, derivata traiettorie, che segue il mio fluido.
È possibile scrivere tutte le equazioni anche in forma lagrangiana.
Com'è possibile fare questo?
Io ho delle equazioni in forma di densità di quantità di moto, energia totale e prodotto non conservate (precedenti relazioni di NSF)
Posso scrivere le Equazioni di NAVIER-STOKES-FOURIER in forma Lagrangiana: Come faccio?
Ho le prime relazioni, posso pensare di usare la 1ª relazione per semplificare tutte le altre derivate, innanzitutto posso far comparire la derivata lagrangiana densità nella 1ª equazione scrivo per esteso $\sum_j \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}$ j è ripetuto → NOTAZIONE DI EINSTAIN NON SCRIVO Σ

Semplifichiamo questa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \cancel{\sum_j} \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

possiamo pensare di semplificare ed avere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\nabla\cdot u} + u_j\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_j}}_{\nabla\rho} = 0$$

Possiamo pensare di ritornare alla forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\nabla\cdot\underline{u} + u\cdot\nabla\rho = 0$$

Se andiamo a sviluppare la derivata che dicevamo prima, facciamo un espansione di TAYLOR della lagrangiana (*) per un Δt molto piccolo e viene fuori:

Non è comprimibile nel senso che non vedo variare la sua densità.
Comprimibilità e incomprimibilità non sono proprietà del fluido, dipendono sempre dal campo della pressione a cui è soggetto.
Non è tanto importante il fluido del quale stiamo parlando ma la velocità rispetto a quella del suono in quel fluido quanto vale.
Comprimibile → Ma ordine = 1 velocità molto alta!

Devo adesso far comparire le derivate lagrangiane in tutte le equazioni
Lavoriamo adesso nel generico termine fluido φ=

$$\varphi = \begin{cases} \to u_x \\ \to u_y \\ \to u_z \\ \to e_t \end{cases}$$ (energia tot. specifica per unità di massa)

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} \dots$$

Scrivo $$\frac{\partial \rho(\varphi)}{\partial t} + \underbrace{\dots}_{\nabla \cdot \text{flusso}} = \dots$$

→ SORGENTE / POZZO
può o no esserci (nulli e non c'è)

$\nabla \cdot$ flusso → $\boxed{\text{TIPICAMENTE QUI HO}}$

Ogni grandezza trasportata ha un suo flusso, ma in ogni caso ogni termine ha sempre anche il termine avvettivo, cioè proporzionale alla velocità, esiste questo termine per tutte e 3 le equazioni

1. $\nabla \cdot (\rho \underline{u})$
2. $\nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u})$
3. $\nabla \cdot (\rho e_t \underline{u} + p \underline{u})$

Questi flussi ho sempre

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi \underline{u}) + \underbrace{\dots}_{\text{RESTANTI FLUSSI}} + \dots = \underbrace{\dots}_{\text{SORGENTE / POZZO}}$$

È possibile in qualche modo semplificare questi 2 termini sempre presenti in tutte le equazioni?
Posso dire: $\frac{\partial \rho\varphi}{\partial t}$ devo ricordare di tenere φ fuori

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \varphi \nabla \cdot (\rho \underline{u}) + \rho \underline{u} \cdot \nabla \varphi + \dots$$

(prodotto di 3 fattori)

sono la 1ª EQUAZIONE DI NSF moltiplicata per φ
$$\varphi \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \right)$$

Un concetto importante di base, nel fatto che tutte le nostre equazioni devono essere Invarianti Galileiane

Una Trasformazione Galileiana è una Trasformazione che fa passare da un sistema di riferimento con velocità uniforme non accelerato, quindi con riferimento inerziale ad un altro sistema di riferimento in moto accelerato con velocità costante, ma diversa.

Se metto lo strumento su una nave cosa succede?

(Qualunque sistema di riferimento dovrebbe essere lo stesso indipendentemente da moti uniformemente accelerati)

Vediamo la configurazione:

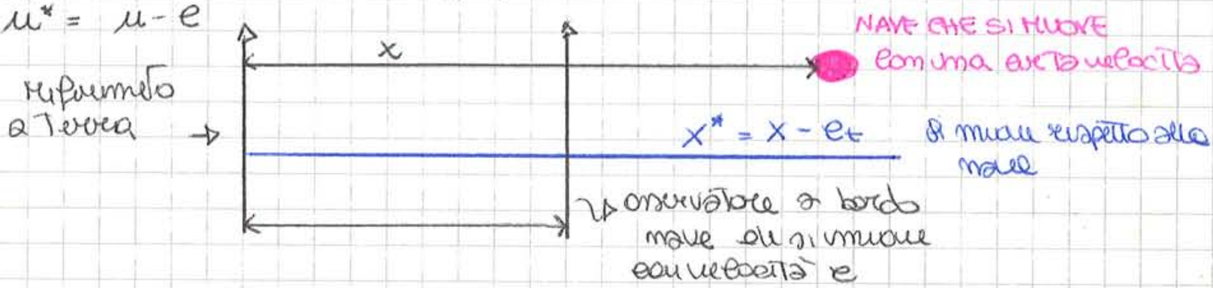
Io ho un sistema di riferimento (frullo di osservatori):

$t^* = t$

$x^* = x - et$

$u^* = u - e$

velocità fissa con cui si muove la nave $e \Rightarrow$



Posso misurare la sua posizione, così come la velocità sua rispetto alla costa, sia rispetto alla nave:

La derivata Lagrangiana $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla \cdot u = 0$

suppongo che la densità ρ sia funzione del tempo e dello spazio

Abbiamo però la regola di derivazione delle funzioni annidate

Vediamo con es:

ATTENZIONE $\rho \rightarrow$ dipende dalla posizione rispetto al moto anche.

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} + \nabla^* \rho \frac{\partial x^*}{\partial t} + (\underline{u} + \underline{e}) \cdot \left[\frac{\partial \rho}{\partial t^*} \nabla t^* + \nabla^* \rho \cdot \nabla \underline{x}^*\right] =$$

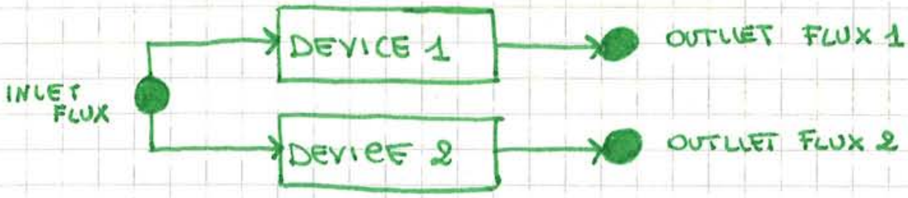
gradiente rispetto a *

$\nabla \rho(t^*, \underline{x}^*)$

Io ho una grandezza con variabili definite dalla nave e voglio derivarla rispetto alla terra, allora tutte le volte faccio:

QUANTITÀ NON CONSERVATE

Supponiamo di usare il sistema di equazioni viste fin ora, conservative per questi due motori chiusi dentro dei cassoni



insonorizzati e che vengono alimentati dagli stessi reagenti, quindi il flusso in ingresso è lo stesso per entrambi, quindi può essere un flusso di quantità di moto, di velocità, di energia totale. Quindi do in pasto ai miei 2 sistemi la stessa energia totale, i sistemi sono così semplici da aver raggruppato ingresso e uscita in modo tale da avere solo un ingresso e solo un'uscita, allora io do in pasto ai 2 sistemi la stessa energia totale e vado a vedere in uscita quanta energia totale esce dai 2 sistemi, e darò misurare la stessa e_t perché è una diretta conseguenza della conservazione dell'energia totale.

La prima macchina è molto economica con delle pessime prestazioni
la seconda macchina è molto costosa con delle ottime prestazioni
Però tutte le macchine conservano l'e_t, quindi non bastano le grandezze conservate, i nostri rendimenti mai considerano grandezze conservate sennò tutte le macchine avrebbero $\eta = 1$.

Noi abbiamo detto che l'energia totale tiene conto sia della parte termica che della parte meccanica ma non è sempre una grande idea perché è come se mischiassi quello che fornisco con quello che cedo.
Quindi dato un flusso termico è difficile convertirlo per più di

La forza conservativa che alimenta l'energia potenziale è potera, finita.
Il problema è il termine cinetico:

TERMINE CINETICO:

$$e_k = \frac{1}{2} \underline{u}^2 = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{u}$$

Il vero ostacolo dell'equazione dell'energia meccanica è riuscire a ricavare l'equazione dell'energia cinetica, che è legata al quadrato della velocità.

Abbiamo l'equazione per la quantità di moto $\underline{u}$, dobbiamo ricavarla per $\underline{u}^2 \to \underline{u} \circ \underline{u}$

Quindi prendiamo l'equazione lagrangiana della quantità di moto:

$$\boxed{\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot \underline{u} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} + \rho \underline{a} \cdot \underline{u}}$$

EQUAZIONE DEL MOMENTO MOLTIPLICATA PER $\underline{u}$

e la moltiplichiamo per tutti i termini, scalarmente per $\underline{u}$

prendo quindi l'equazione lagrangiana della quantità di moto:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \underline{a}$$

uso la forma lagrangiana perché ho già portato la ρ fuori per cui l'argomento rimane la velocità, e moltiplico ogni componente scalarmente per $\underline{u}$.

essendo $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho$

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$$

$$u \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$$

Quindi: $\left(\rho \frac{D\underline{u}}{Dt}\right) \circ \underline{u} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \underline{u} + (\rho \underline{a}) \underline{u}$

$$\left(\rho \frac{D\underline{u}}{Dt}\right) \cdot \underline{u} = \left(\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\right) \circ \underline{u} =$$

$$= \underbrace{\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot \underline{u}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) \cdot \underline{u}}_{\in \mathbb{R}} =$$

ok sono consistenti ok!

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} u_1 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} u_2 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} u_3 + \dots}_{\partial \frac{1}{2} u_1^2 + \partial \frac{1}{2} u_2^2 + \partial \frac{1}{2} u_3^2 \Rightarrow \frac{1}{2} u^2 \Rightarrow \frac{\partial e_k}{\partial t}} + (\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) \cdot \underline{u}$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} + (\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) \cdot \underline{u} \dots$$ CONTINUA DOPO!

Lavoriamo nel secondo termine e mi concentro nel termine (3)

(3) $\rho \underline{a} \cdot \underline{u}$

[SE $\underline{a}$ è dovuto a un campo conservativo vuol dire che a non è un vero vettore, ma esprime tutti e 3 i suoi gradi di libertà potenziali e di fatto è possibile esprimere a in modo conservativo mediante: $\underline{a} = -\nabla e_p$ quindi il vettore accelerazione è esprimibile mediante il gradiente di energia potenziale]

(3) $\rho \underline{a} \cdot \underline{u} = -\rho \nabla e_p \cdot \underline{u}$ e lo posso scrivere come:

$-\rho \nabla e_p \cdot u = -\rho \cdot \underline{u} \cdot \nabla e_p$ analogo col (2)

(3) $\rho \underline{a} \cdot \underline{u} = -\rho \underline{u} \cdot \nabla e_p$

Assumiamo i campi stazionari, cioè non dipendenti dal tempo

Quindi assumiamo e_p non dipenda dal tempo

(semplificazione accettabile per i campi gravitazionali)

$\Rightarrow \dfrac{\partial e_p}{\partial t} = 0$

Quindi essendo (3) analogo a (2) sposto il termine (3) al secondo membro nell'equazione e diventa:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial e_k}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\rho \underline{u} \cdot \nabla e_k}_{(2)} + \underbrace{\rho \underline{u} \nabla e_p}_{(3)} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

Analoghi

$$\rho \frac{\partial e_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot (\nabla e_k + \nabla e_p) = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

$$\rho \frac{\partial e_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \nabla (e_k + e_p) = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

$$\rho \frac{\partial e_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \nabla e_m = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

Cosa faccio invece per quanto riguarda la derivata nel tempo della sola energia cinetica $\rho \dfrac{\partial e_k}{\partial t} = ?$ sfrutto la proprietà

$$\boxed{\frac{\partial e_p}{\partial t} = 0} \Rightarrow \rho \frac{\partial e_k}{\partial t} = \rho \frac{\partial (e_k + e_p)}{\partial t} = \rho \frac{\partial e_m}{\partial t}$$

DERIVATA EULERIANA DELL'EN. MECCANICA

STO SOMMANDO UNO ZERO

Il problema è che il termine $\left(\frac{\partial \Pi_{i j} u_i}{\partial x_j}\right)$ anzi di saturare l'ultimo indice mi satura il primo perché ha u_i → quindi per risolvere e far diventare i l'ultimo indice faccio il trasposto così sposto i in ultima posizione
(lo facciamo una sola volta però per tutti e 3 i termini)

$$\underbrace{\frac{\partial (\Pi_{ji}^T u_i)}{\partial x_j}} - \boxed{\Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

QUI STO SATURANDO UN INDICE QUINDI QUELLO CHE RIMANE È J LIBERO → ∇
→ QUI INVECE HO 2 TENSORI SCRITTI IN FORMA CANONICA CHE SI SATURANO TRA LORO QUINDI È UN DOPPIO PRODOTTO SCALARE TRA 2 TENSORI
o PRODOTTO DI SATURAZIONE →

Adesso scritto al trasposto è un prodotto scalare per tensore per vettore ma essendo $\underline{\underline{\Pi}}$ simmetrico $\underline{\underline{\Pi}}^T = \underline{\underline{\Pi}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\Pi_{ji} u_i)}{\partial x_j} - \Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$= \underbrace{\nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u})} - \underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u}$$

↳ TENSORE DEGLI SFORZI

↑ flusso meccanico: quota parte che contribuisce al bilancio di Energia Totale per la parte meccanica

Quindi posso pensare di isolare il flusso meccanico

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial e_m}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e_m = \rho \frac{D e_m}{Dt} = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$
$$= -\nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u}) + \underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u}$$

ISOLO IL FLUSSO MECCANICO

ho scelto isolare il flusso meccanico perché essendo un flusso posso portarlo a primo membro con tutti gli altri flussi ed abbiamo così la forma finale dell'equazione

$$-\nabla \cdot (\rho \underline{u})$$

$$\underbrace{\rho \frac{D e_m}{Dt} = \rho \frac{\partial e_m}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e_m} + \underbrace{e_m \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_m \cancel{\underline{u}}\, \nabla \cdot (\rho \underline{u})} =$$

HO RISCRITTO QUELLO CHE AVEVO — TERMINE AGGIUNTO

Adesso vorrei evitare di passare dalla scrittura lagrangiana a quella euleriana, sfrutto l'equazione di conservazione della massa, a secondo membro avrò zero moltiplicato l'e_m rimane zero.
Quindi aggiungo: $e_m \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_m \underline{u}\, \nabla \cdot (\rho \underline{u}) =$

e combino i termini ⌒ ⌒ 〰 〰 ottenendo:

ANTICIPO

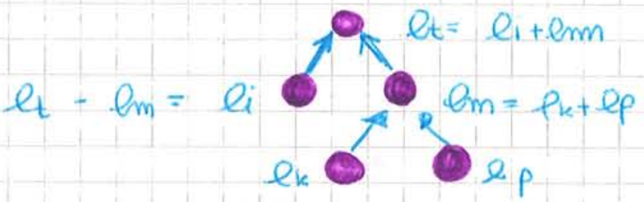
Quando io vado a considerare le perdite (IRREVERSIBILITÀ) sia di tipo meccanico, generate dai gradienti di velocità, sia di tipo termico, dove avrò i gradienti di temperatura. Quando le avrò considerate entrambe allora qui capirò qui cosa mi consente non solo di quantificare le due irreversibilità ma di vedere quanto pesa una rispetto all'altra.

A questo punto abbiamo fatto solo una delle energie non conservate. Possiamo continuare da questa per determinare l'energia interna che è semplicemente combinazione e si ottiene prendendo l'equazione dell'energia totale e togliendo quella meccanica.

Equazione dell'Energia Interna

$e_i = e_t - e_m \qquad (e_t = e_m + e_i)$

Se nell' e_t ho tutti i flussi termici e meccanici e tolgo l'e_m dove ho solo flusso meccanico vuol dire che l'e_t e l'e_i rimangano solo con il flusso termico che rimane una cosa che ci aspettiamo:



Partiamo dall'equazione dell'energia totale → NSF sistem of equation

$e_t = e_i + e_m$

Π → TENSORE DEGLI SFORZI COMPLESSIVI IDROSTATICO + IDRODINAMICO

$$e_t \rightarrow \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla\cdot\Big(\underbrace{\rho e_t \underline{u}}_{\text{flusso avettivo}} + \underbrace{\underline{q}}_{\text{flusso termico}} + \underbrace{\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{u}}_{\text{flusso meccanico}}\Big) = 0 \rightarrow \text{grandezza conservata} \quad (1)$$

Vediamo per confronto l'e_m che è quella ricavata precedentemente

$$e_m \rightarrow \frac{\partial(\rho e_m)}{\partial t} + \nabla\cdot\Big(\underbrace{\rho e_m \underline{u}}_{\text{flusso avettivo}} + \underbrace{0}_{\text{flusso termico nullo}} + \underbrace{\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{u}}_{\text{flusso meccanico}}\Big) = \underline{\underline{\Pi}}:\underline{u} \neq 0 \ \text{non è conservata} \quad (2)$$

$e_i = e_t - e_m$

Posso scrivere: (avendo l'equazione dell'energia interna)

APPLICHIAMO A TUTTI I TERMINI

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt}\left(e_i + \frac{p}{\rho}\right) = \rho \frac{De_i}{Dt} + \cancel{\rho} \frac{1}{\cancel{\rho}} \frac{Dp}{Dt} + \cancel{\rho} p \left(-\frac{1}{\cancel{\rho}\rho}\right) \frac{D\rho}{Dt}$$

$$= \rho \frac{D}{Dt}\left(e_i + \frac{p}{\rho}\right) = \underbrace{\rho \frac{De_i}{Dt}}_{*1} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}_{*2}$$

equazione dell'e_i però in forma lagrangiana

derivata della ρ in forma lagrangiana utilizzo la conserv. della massa

Come facciamo ad ottenere l'espressione della lagrangiana? utilizziamo lo stesso trucchetto, prendo la $\frac{\partial(\rho \cdot e_i)}{\partial t}$ (derivata euleriana di ρ per la quantità di interesse)

$$\frac{\partial(\rho\, e_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \underline{u} + \underline{q}) = -\underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u}$$

[Proprietà Generale : $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot \text{quantità di interesse}\right) + \nabla \cdot \left(\rho \cdot \text{qnt di interesse} + \ldots\right) = \ldots$]

(Possiamo anche sommare l'equazione di continuità per la quantità di interesse)

Quindi prendiamo

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \underline{u}}_{\rho \frac{De_i}{Dt}} + \underline{q}) = -\underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u}$$

$= \rho \frac{De_i}{Dt}$

ottengo

$$\boxed{\rho \frac{De_i}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} - \underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u}} \quad *1$$

Per la lagrangiana della densità prendo l'equazione di continuità scrivo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

da cui → SONO LA DERIVATA LAGRANGIANA DELLA DENSITÀ

ottengo

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot u} \quad *2$$

Adesso abbiamo tutti i pezzi quindi $*1$ lo metto nell'equazione dell'e_i e $*2$ lo metto nella derivata della ρ e ottengo la derivata dell'entalpia:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} - \underline{\underline{\Pi}} : \nabla \underline{u} + \frac{p}{\cancel{\rho}} \cancel{\rho}\, \nabla \cdot \underline{u} + \frac{Dp}{Dt}$$

→ PRESSIONE

Equazione dell'Entropia

durante il 2° anno uso il differenziale → piccolo rapporto incrementale, adesso però abbiamo sia i differenziali euleriani (l'operatore delle derivate euleriane) che i differenziali lagrangiani (gli operatori delle derivate lagrangiane)

Quindi quando ho: (ad esempio con h:)

$\frac{Dh}{Dt} \to Dh$

$\frac{\partial h}{\partial t} \to \partial h$

→ 2° anno: $dh = c_p\, dt$ — chi è Dh o ∂h

dal 1° principio: $\delta q - \delta l_i = de_i$

$$T ds - p dv = de_i$$

$$T dS = de_i + p dV \to \boxed{T dS = dh - v dp}$$ RELAZIONE DI GIBBS

Devo usare Dh → le derivate lagrangiane perché le relazioni devono essere uguali in tutti i sistemi di riferimento, quindi l'unico modo di generalizzare e far rimanere valide le relazioni del 2° anno è usare le derivate lagrangiane e incrementi lagrangiani.

Quindi scrivo le relazioni di Gibbs con le derivate lagrangiane

$$T Ds - p Dv = De_i \to T DS = Dh - v Dp \qquad v = 1/\rho$$

$$T DS = Dh - \frac{1}{\rho} Dp \to T DS - Dh + 1/\rho\, Dp = 0$$ divido tutto per Dt

$$T \frac{DS}{Dt} - \frac{Dh}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = 0$$ moltiplicando tutto per ρ:

$$\boxed{\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}} \quad o \quad \boxed{T \frac{DS}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}}$$

È interessante perché noi abbiamo già l'equazione dell'entalpia quindi possiamo usare direttamente la seguente relazione:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \frac{Dp}{Dt} + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u}$$

che avrei idealmente per secondo termine $\frac{dq}{T}$, l'eventuale eccesso,
so che l'entropia è positiva per il 2° principio della Termodinamica,
sarà dovuto alle irreversibilità, quindi aggiungere S_{irr} è un modo per
giustificare lo secondo termine più grande rispetto a quello ideale.

Il problema è: supponiamo che questa irreversibilità sia troppo grande,
cosa faccio?

Io so cos'è il minimo posso cercare di avvicinarmi alle condizioni
ideali, ma a livello di macchina non so cosa fare, se la mia macchina
è formata da tanti deflussi, da tanti passaggi ecc... devo prendere
atto che l'irreversibilità è quello secondo in più da giustificare dell'entropia
la variazione di stato.

Invece di calcolare una variazione di entropia per le irreversibilità
punto per punto, cerchiamo di fare una mappa dell'irreversibilità,
non ci accontentiamo del valore totale.

Allora cominciamo con la seguente equazione:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u}$$

questa relazione nelle irreversibilità chiama in causa la parte
viscosa del Tensore degli sforzi

Lo sforzo viscoso di un fluido è legato alla viscosità, è legato
alle irreversibilità, ma non c'è una relazione e cerchiamo di
trovare la relazione per le irreversibilità.

(2) Un'altro aspetto che vediamo è quello relativo al prodotto di saturazione, (DECOMPOSIZIONE)

Dato $\nabla \underline{u}$ si introduce la parte simmetrica del $\nabla \underline{u}$ che è definita:

$$\nabla \underline{u}^S = \frac{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T}{2} \quad \rightarrow \text{PARTE SIMMETRICA}$$

Si introduce anche una parte antisimmetrica:

$$\nabla \underline{u}^{AS} = \frac{\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}^T}{2} \quad \rightarrow \text{PARTE ANTISIMMETRICA}$$

- Una matrice si dice simmetrica quando ne faccio il trasposto e ottengo la matrice stessa $\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$
- Una matrice si chiama antisimmetrica se $\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$

Quindi è possibile partendo dal tensore costruire altri 2 tensori, uno simmetrico e uno antisimmetrico in questo modo se io sommo la parte simmetrica e quella antisimme ottengo proprio il tensore delle deformazioni:

$$\nabla \underline{u}^S + \nabla \underline{u}^{AS} = \nabla \underline{u}$$

$$= \frac{\nabla \underline{u}}{2} + \cancel{\frac{\nabla \underline{u}^T}{2}} + \frac{\nabla \underline{u}}{2} - \cancel{\frac{\nabla \underline{u}^T}{2}} = \nabla \underline{u}$$

Quindi è possibile suddividere il tensore delle deformazioni in una parte simmetrica e una antisimmetrica, lo facciamo perché $\nabla u + \nabla u^T$ è un pezzo del tensore degli sforzi, perché noi abbiamo scelto di avere un tensore degli sforzi simmetrico e quindi prendiamo la parte simmetrica, ma il termine che rimane lo proviamo a scrivere secondo questa nuova decomposizione

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \nabla \circ (\lambda \nabla T) + \overbrace{\mu}^{\rho \cdot \mu}\, \overbrace{2 \nabla \underline{u}^S}^{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T} : \overbrace{\left(\nabla \underline{u}^S + \nabla \underline{u}^{AS} \right)}^{\nabla \underline{u}}$$

di saturazione, questo termine di autoriscaldamento dovuto alla viscosità di un fluido chiamo in causa 6 termini perché è il quadrato di un tensore simmetrico $(2\nabla \underline{u}^S : \nabla \underline{u}^S)$.

divido la seguente equazione per la temperatura

$$\left(\rho T \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + 2\mu \nabla \underline{u}^S : \nabla \underline{u}^S \right) \cdot \frac{1}{T}$$

e rimane:

$$\rho \frac{Ds}{DT} = \overbrace{\frac{1}{T} \nabla \cdot (\lambda \nabla T)}^{①} + \underbrace{\frac{2\mu}{T} (\nabla \underline{u}^S)^2}_{\geq 0 \text{ SEMPRE}}$$

È IN KELVIN ⇒ SEMPRE ≥ 0

l'idea è cercare di portare la temperatura all'interno del gradiente.

MI CONCENTRO SUL TERMINE ①

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{T} \lambda \nabla T \right) - \overbrace{\lambda \nabla T \cdot \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{T} \right)}_{(*)}}^{\text{TERMINE DI COMPENSAZIONE}}$$

$q = -\lambda \nabla T$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{T} \cdot \underline{q} \right) + \frac{\lambda}{T^2} \nabla T \cdot \nabla T$$

(*)

$$\nabla \left(\frac{1}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_s} = -\frac{1}{T^2} \nabla T$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{T} \cdot \underline{q} \right) + \underbrace{\frac{\lambda}{T^2} (\nabla T)^2}_{\geq 0 \text{ grandezza positiva}}$$

Adesso abbiamo due termini, quindi anche l'irreversibilità ha due contributi, ha un contributo meccanico e un contributo termico.

Quindi le irreversibilità non si devono associare alla sola parte meccanica

Mettiamo tutto insieme: (prendo la lagrangiana, la scrivo nell'euleriana)

$$\underbrace{\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla u)}_{\text{VARIAZIONE LAGRANGIANA}} = \underbrace{-\nabla \cdot \left(\frac{1}{T} \underline{q} \right)}_{\text{FLUSSO ENTROPICO}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\lambda}{T^2} (\nabla T)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{2\mu}{T} (\nabla u^s)^2}_{\geq 0}}_{\text{IRREVERSIBILITÀ (LA SOMMA È POSITIVA)}}$$

$\nabla \cdot (\rho \underline{u} s)$

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta i s$$

(confronto col 2° anno) vale il 2° PT

Quindi perché un gradiente termico dovrebbe dare origine a una produzione di Entropia? (perdita di capacità di fare lavoro)

Ripasso cose precedenti:

$$T ds = \delta q + T \delta i_s$$

$$\delta q - \delta l = de_i \qquad \text{SOSTITUISCO } \delta q = T ds - T\delta i_s$$

$$T ds - T\delta i_s - \delta l = de_i$$

$$\delta l = T ds - T\delta i_s - de_i$$

$$\delta l = \underbrace{(T ds - de_i)}_{\delta l_{max}} - \underbrace{T\delta i_s}_{irrev.}$$

Questa relazione mi dice che il massimo lavoro che io posso produrre, e mi aspetto positivo, è uguale a una certa quantità fui un lavoro che dipende dalle irreversibilità

$$\delta l = \delta l_{max} - T\delta i_s$$

quindi maggiori sono le irreversibilità e minore è il lavoro che riesco a produrre nel motore, quindi in teoria dovrei avere meno irreversibilità possibile, quindi minori attriti, ma in realtà per ridurre δi_s è necessario anche ridurre il gradiente di Temperatura.

- Com'è possibile che un gradiente di Temperatura locale vada a determinare una perdita di capacità di produrre lavoro meccanico?

Questo rimane vero anche in totale assenza d'attrito ⇒ Cioè $\mu = 0$ il 2° termine di irreversibilità meccanica sparisce ma il primo no! (irreversibilità interna)

Quindi: **QUESTO IN TOTALE ASSENZA D'ATTRITO**

UN GRADIENTE DI TEMPERATURA COMPORTA UNA PERDITA DI CAPACITÀ DI PRODURRE LAVORO MECCANICO UTILE

(un ∇T comporta una perdita di exergia, perché l'exergia è la capacità di produrre lavoro meccanico utile).

e produce una potenza $W' = \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right)\phi$, quale delle due potenze è meglio? più $T\uparrow$ più $\frac{T_0}{T_2} \simeq 0$ (trascurabile) e più $W = \phi$ se $T_2 \downarrow$ quando $T_2 = T_0$ $W' = 0$,

quindi macchine assolutamente ideale, attrito inesistente e nonostante ciò il puro passaggio attraverso il tubo di flusso porta a una riduzione della potenza meccanica.

Perché c'è comunque una riduzione di W?

Perché c'è un $\underbrace{|\nabla T| = \frac{T_1 - T_2}{s}}$ $\rightarrow$ $\nabla T \neq 0$ STESSO FLUSSO ISOLATO

Qualora avessi un ϕ a T_0 (T_{amb}) non riuscirei più a produrre W (potenza meccanica) perché non avrei più una differenza di temperatura che la generi $\rightarrow \nabla T \rightarrow$ IRREVERSIBILITÀ ESTERNA, TERMICA che mi da una perdita di capacità di produrre lavoro meccanico

$$d\ell = (\underbrace{T ds - de_i}_{d\ell_{max}}) - di_s \qquad di_s \geq 0$$

Perdita di capacità di produrre lavoro

COMMENTI:

- La presenza di gradienti termici riduce la possibilità di produrre Potenza Meccanica
- Entrambi i termini di irreversibilità sono calcolabili puntualmente
- Non solo ho due termini, uno intuitivo $\rightarrow$ meccanico, uno meno intuitivo $\rightarrow$ termico, ma questi due termini normalmente sono ANTAGONISTI: cioè quando cerco di RIDURNE UNO cresce l'altro. RIDURRE LA PORTATA, RIDURRE LE AREE DI SCAMBIO migliora le irreversibilità meccaniche e peggiora quelle termiche e viceversa aumentare LA PORTATA, AUMENTARE LE AREE DI SCAMBIO peggiora le irreversibilità meccaniche e migliora quelle termiche.

morale: È una funzione convessa $\Rightarrow$ ESISTE UN PUNTO DI OTTIMO, ESISTE UN PUNTO DI BILANCIAMENTO IN CUI LA SOMMA DEI DUE È NULLA.

LEZIONE 03/04/2014

Elenchiamo i 3 aspetti più significativi del sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier (che descrivono moto e campo di Temperatura all'interno dei fluidi).

Il 3 aspetti fondamentali sono:

ADVECTION, DIFFUSION E NON LINEARITY

- CONTRIBUTO, ASPETTO AVVETTIVO (ADVECTION → MUOVERSI)

è uno dei flussi visti ricavando le equazioni NSF, tra l'altro è l'unico flusso visto che è presente in tutte le grandezze considerate, c'è un flusso avvettivo di massa, c'è un flusso avvettivo di quantità di moto, c'è un flusso avvettivo di e_t, e_m, e_i .... Termine presente in tutte le equazioni. Si descrive matematicamente come il prodotto della quantità di interesse per la velocità $\underline{u}$, quindi è direttamente legato al moto del fluido.

Dal punto di vista fisico è interessante perché le particelle che compongono il fluido non hanno una struttura precisa e il fluido prende forma a seconda del campo di moto che agisce.

Dal punto di vista matematico la cosa interessante è che essendo governato dal campo di velocità si dice che è un flusso ANISOTROPO

È matematicamente anisotropo perché se ho un campo di velocità che mi spinge in una certa direzione plausibilmente avrò un accumulo della grandezza trasportata (m, $\rho\underline{u}$, e_t ...) in quella direzione e avrò un impoverimento della medesima quantità dal punto di partenza, invece, opposto alla direzione considerata.

Il fatto che il campo di moto affligga la grandezza considerata rispetto ad altre zone induce un'ANISOTROPIA

$\rho\underline{u}$ $\quad$ $\rho\underline{u}\otimes\underline{u}$ $\quad$ $\rho e_t\,\underline{u}$

(Simmetrico, operatori spaziali del 1° ordine) quindi di nuovo è associato ad α ed ad un'operatore spaziale del 2° ordine. La cosa migliore è avere discretizzazioni isotropiche

FISICO: La differenza tra un contributo avvettivo e uno diffusivo consiste nel fatto che il 1° termine dipende dalla sua velocità e dalla sua direzione → DISOTROPICO, il secondo termine invece è puramente simmetrico e quindi tende ad affiorare tutti i disturbi e tutte le perturbazioni rispetto al campo medio

MATEMATICO: ma lo fa allo stesso modo in tutte le direzioni. Nel termine diffusivo ho derivate del secondo ordine simmetriche che in qualche modo non dipendono dalla direzione a differenza della componente avvettiva che ha derivate spaziali e che dipende dalla direzione, affiora la perturbazione del campo di moto

Dal punto di vista INGEGNERISTICO hanno conseguenze del tutto differenti: mentre il flusso avvettivo "porta a spasso" una certa perturbazione il termine diffusivo tende in qualche modo a far sparire le perturbazioni. Il termine avvettivo farebbe a spasso quella perturbazione per sempre, quindi a distanze infinite. Nella pratica la viscosità che esiste fa sì che a una certa distanza la perturbazione si sia affiorata, quindi che la variazione di velocità sia sparita.

Commutazione positiva → ciò che stabilizza il flusso

Commutazione negativa → ciò che instabilizza il flusso

- ASPETTO DI NON LINEARITÀ [QUANDO L'AVVETTIVO PREVALE SULL'ALTRO]

esempio di funzioni non lineari $\boxed{\rho u \otimes u}$ è il termine di trasporto della quantità di moto, quando un termine trasporta in qualche modo se stesso, nasce una non linearità. responsabile della produzione di soluzioni discontinue e soluzioni caotiche (Turbolente) [→ alti numeri di Re]

$$\boxed{\sum_{j=1}^{M} \Phi_j - W_t^* = \frac{d}{dt}(U + E_K + E_P)_{cv} + \sum_{i=1}^{N} G_i\,(h + e_k + e_p)_i}$$

Il primo Φ senza pedici è quello dovuto all'intero volume di controllo mentre $\sum_{j=1}^{M} \Phi_j$ → si suddivide il bordo in tante porzioni omogenee

Applico di nuovo il Teorema di Gauss ma al contrario

$$\Phi = \int_{\partial\Omega} -\underline{q}_\alpha \cdot \underline{\hat{n}}\, ds \xrightarrow{\text{SUDDIVIDO}} \partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{M} A_j$$

IL $\partial\Omega$ è l'unione delle varie aree A_j, SUDDIVIDO

DOPO AVER SUDDIVISO: $\boxed{\partial\Omega^{\Phi}_{j}}$ SUDDIVISIONE

numero di suddivisioni

$$\Phi = \underbrace{\int_{A_1} -\underline{q}_\alpha \cdot \underline{\hat{n}}\, ds}_{\Phi_j \quad j=1} + \underbrace{\int_{A_2} -\underline{q}_\alpha \cdot \underline{\hat{n}}\, ds}_{\Phi_j \quad j=2} \dots = \sum_{j=1}^{M} \Phi_j$$

La suddivisione è arbitraria, nel numero e nel tipo di superficie l'importante è che mappo tutto il bordo

Proiezione esterna $-\underline{q} \cdot \underline{\hat{n}}$ e lo integro su tutta la SUPERF.

- La stessa cosa la possiamo fare anche per l'altro termine che è il secondo $(-W_t^*)$, dobbiamo stare attenti perché per la potenza meccanica non abbiamo nessun segno meno. Si introduce quindi il segno meno per convenzione secondo la quale la potenza meccanica è positiva se uscente (convenzione opposta al primo termine)

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u}) = -\nabla \cdot (-\underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u})$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-\underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u})\, dV = \int_{\partial\Omega} -(\underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u}) \cdot \underline{\hat{n}}\, dS = \boxed{W_t^*}$$

- Dipende dalla viscosità (trasmissione di sforzi dal fluido al ROTORE mediante la viscosità stessa → Π_v)
- Dipende dalla velocità (l'oggetto deve essere in moto x trasferire l'energia meccanica)

: EVIDENZIA ALCUNI ASPETTI

POTENZA MECCANICA ALL'ALBERO (Rotore)

- Rimane l'ultimo pezzo $\left(\sum_{i=1}^{N} G_i \, (h + e_k + e_p)_i \right)$ che doveva invece del flusso avvettivo.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho e_i \underline{u}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \rho e_i \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS$$

TEOREMA DI GAUSS

$$= \int_{\partial\Omega} e_i \, \underbrace{\rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}}}_{\left[\frac{kg}{m^3} \frac{m}{s}\right]} \, \underbrace{dS}_{[m^2]} \qquad \left[\frac{kg}{m^3} \frac{m}{s}\right] [m^2] = \left[kg/s\right] \rightarrow$$ È UNA PICCOLA PORTATA INFINITESIMA

$$\left[\frac{J}{kg}\right] \cdot \left[kg/s\right] = \frac{J}{s} = W \rightarrow \text{flusso}$$

definiamo:

$$G = \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS$$ una certa portata complessiva.

$$\int_{\partial\Omega} e_i \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS = \bar{e}_i \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS$$

$\bar{e}_i$ ↓ ENERGIA INTERNA SPECIFICA MEDIA

$$\bar{e}_i = \frac{\int_{\partial\Omega} e_i \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS}{G} = \frac{\int_{\partial\Omega} e_i \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS}{\int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS} = \frac{\int_{\partial\Omega} e_i \, dW}{\int_{\partial\Omega} dW}$$

media definita rispetto alla portata ⇒ se noi dobbiamo definire ai fini del flusso avvettivo una grandezza specifica media bisogna farlo rispetto alla portata dando più importanza a quelle energie specifiche che sono veicolate da più massa

$$\left[(h + e_k + e_p)_i = \frac{1}{G_i} \oint_{\partial\Omega_i^G} \rho (h + e_k + e_p) \, \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS \right]$$

G → i-ESIMO

GIÀ SUDDIVISO ↓ grandezza media.

Questo è per tutti i tubi, su tutto il bordo e definisco tante grandezze specifiche per ciascun condotto

$$G_i = \oint_{\partial\Omega_i^G} \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS \qquad \text{PORTATA i-esima}$$

Il peso dW → è la portata infinitesima