



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1611A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Giai Pron

MATERIA: Meccanica delle Macchine. Prof. Quaglia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FORMULARIO CINEMATICA

(4)

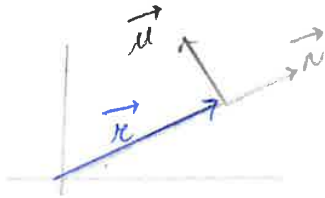
$\vec{\mu} = i\vec{N}$. Nota

1) Derivata di un vettore \vec{N} : $\frac{d\vec{N}}{dt} = \dot{\theta}\vec{\mu}$ dove $\vec{\mu}$ è il versore ruotato di 90° in senso antiorario rispetto a \vec{N} .

2) Coordinate Cartesiane

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$; $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

3) Coordinate polari



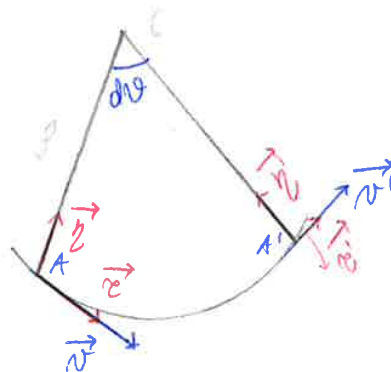
$\vec{r} = r\vec{N}$
 $\vec{v} = \dot{r}\vec{N} + r\dot{\theta}\vec{\mu}$
 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{N} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\mu}$

a di Coriolis.

3) Coordinate locali

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e} = \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e} = \rho\dot{\theta}\vec{e}$

$\vec{a} = \dot{v}\vec{e} + v\dot{\theta}\vec{n} = \dot{v}\vec{e} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$



4) Corpo rigido

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{l}$ ($l = \text{cost.}$)

T. fondamentale della cinematica: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + l\dot{\theta}\vec{\mu}$

T. di Kowalski: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_{B/A}^c$ $\vec{a}_B = \vec{a}_A + l\ddot{\theta}\vec{\mu} - l\dot{\theta}^2\vec{n}$

$l\dot{\theta}\vec{\mu}$ $-l\dot{\theta}^2\vec{n}$
 velocità relativa di B.

5) Mobili relativi

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + l\vec{n}$; $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \underbrace{l\dot{\theta}\vec{\mu}}_{\text{velocità di trascinamento}} + \underbrace{l\dot{\theta}^2\vec{n}}_{\text{velocità di Coriolis}}$; $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{n}(l\ddot{\theta} - l\dot{\theta}^2) + \vec{\mu}(2l\dot{\theta}\dot{\theta} + l\ddot{\theta})$

\vec{v}_A velocità di B

velocità di trascinamento

(3)

Attrito volvente

- Reazione del piano di rotolamento è spostata di $r \mu$ (proiettore di attrito volvente) nella direzione del moto (senza modo di appross. ad esso)

- Coef. di attrito volvente: $f_v = \frac{\mu}{r}$

Formule per su lavoro ed energia

1 $dE = \text{Lavoro compiuto da una f. il cui punto di applicazione si sposta di}$
 $ds = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds$

2 Lavoro compiuto da una coppia $dL = r d\theta$

3 $L = \frac{1}{2} M (v_f^2 - v_i^2) = \Delta E_c$ (Per un corpo esteso si mette lo v_G)

se il moto è traslatorio.

4 $L = \frac{1}{2} I_G (\omega_f^2 - \omega_i^2)$ corpo esteso che ruota attorno al baricentro

5 $L = \frac{1}{2} (M v_f^2 + I_G \omega_f^2 - M v_i^2 - I_G \omega_i^2)$ corpo esteso che brucia e ruota attorno a G

6 Equazione dell'energia: $E + L_e + L_i = \Delta E_p + \Delta E_c + \Delta E_c$

L. fatto dalle forze esterne

L. fatto dalle f. interne scomparse tra gli elementi del sistema.
 (= 0 se gli elementi scivolano senza attrito)

7 $P = \frac{dL}{dt} = F v$ (potenza sviluppata da una forza)

8 $P = M \omega = \text{pot. sviluppata da una coppia}$

9 $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$

Freccia

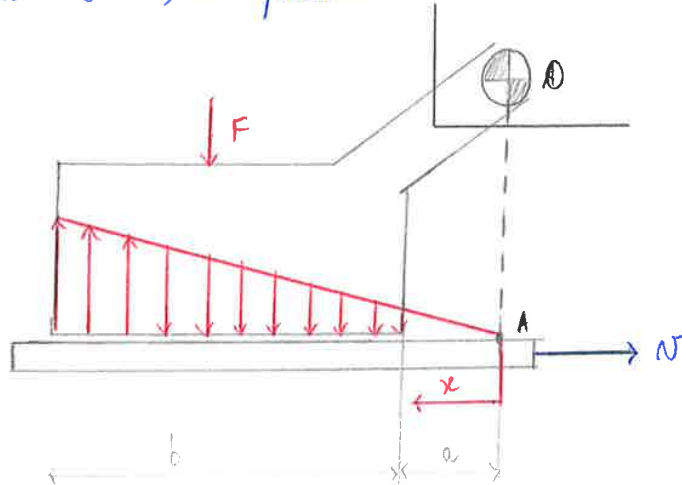
(5)

Ipotesi di Reye

$dV = k \cdot N_R \cdot f \cdot p dA$

Freccia a pannello ad accostamento rigido

- Freccia enervata ad un telero fino in A
- spessore unitario ($\lambda = 1$) del pannello
- $\sigma = k' \cdot x$
- $N_R = \text{cost}$



$\xrightarrow{1} p = k \sigma$ dove $k = k' f N_R$

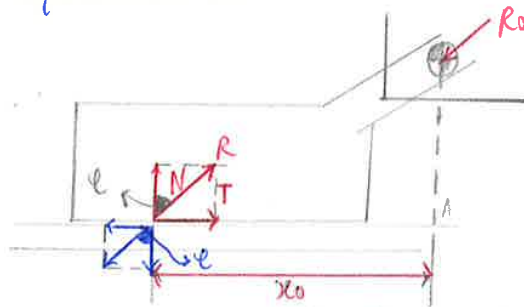
DIR

- Ip di Reye: $dV = \sigma dA \underset{\lambda=1}{=} \sigma dx = k \cdot f p dA \cdot N_R = k \cdot f \cdot p dx N_R = k'' p dx$
 $N_R \cdot f \cdot k = \text{cost}$

$\rightarrow \sigma dx = k'' p dx \rightarrow p = k \sigma$

$\xrightarrow{2}$ Il diagramma delle p lo cui andamento trapezoidale.

$\xrightarrow{3}$ Il sistema è equivalente a



dove

$N = \text{Risultante delle forze normali} = \frac{1}{2} k [(a+b)^2 - (a)^2] = N$

$x_0 = \frac{2}{3} \frac{[(a+b)^3 - (a)^3]}{[(a+b)^2 - (a)^2]} = \text{baricentro del diagramma delle pressioni}$

$T = f N = \frac{1}{2} f k [(a+b)^2 - (a)^2]$

Freno a ceppo/al tomburo

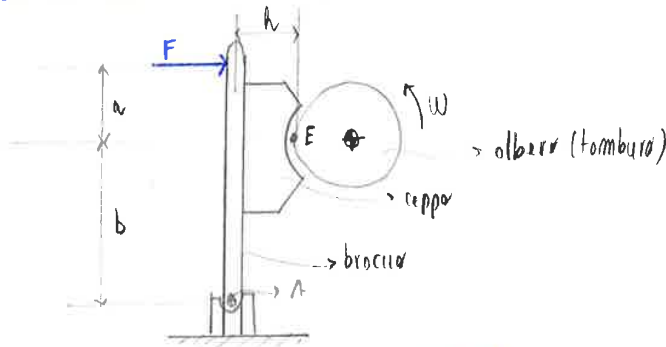
(7)

- Freno costituito da:

- 1 Tomburo (elemento frenato) con forma cilindrica
- 2 Conca (o ceppi) che possono essere parte fissa o fissa al tomburo

il ad accostamento rigido

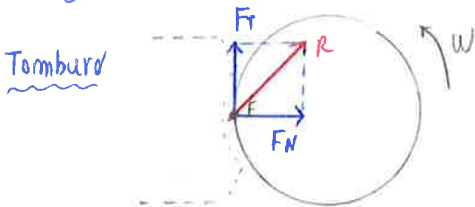
- Ceppo: solidale ad un braccio che ha 1 grado di libertà (può solo ruotare intorno ad A) premuto dalla forza F contro il tomburo.
- Conoscere prop. geometriche;
- Il tomburo ruota in verso antiorario.
- * La risultante delle forze applicate tra ceppo e tomburo è concentrata nel punto medio della zona di contatto.



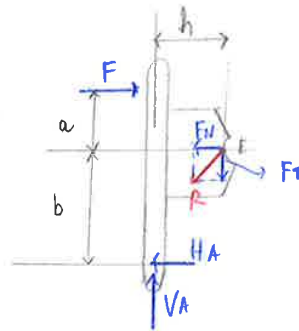
1 → La Forza frenante $F_T = F \frac{a+b}{b_f+h}$

DIM 1

Decompono di corpo libero albero



Ceppo + albero



A) $F(a+b) - F_N \cdot b + F_T h = 0$

• Attrito dinamico

→ $F_T = f F_N$

→ $F(a+b) - \frac{F_T}{f} b + F_T h = 0$ → $F(a+b) + F_T \left(h - \frac{b}{f} \right) = 0$

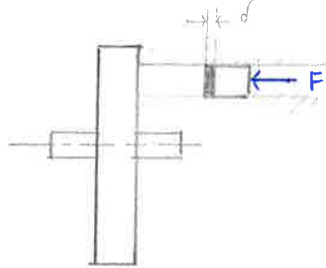
→ $F_T = \frac{F(a+b)}{b/f - h}$ c.v.d.

Freno a disco - accostamento regido

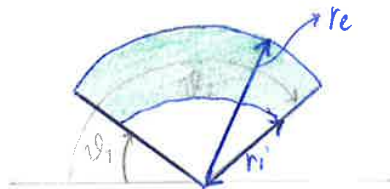


= sost. costituito da:

- A Disco solido con il corpo frenato;
- B Pastiglia (= pattino piano) avente 1 grado di libertà (in seguito all'applicazione di una forza d'azionamento F può scorrere lungo una guide pneumatica in direzione \perp alla sep. del disco)



• Forma della pastiglia = settore di corona circolare esteso tra i raggi r_1, r_2 , tra gli angoli ϑ_1, ϑ_2



• Ipotesi dell'esura (di Reye)

A La spessore δ di materiale consumato è lo stesso in ogni punto della zona di contatto $\delta = \text{cost}$, a causa del moto di accostamento.

• Velocità relativa tra pattino e disco: $v_r(r) = \omega r$

$\xrightarrow{2} p = \frac{k}{r}$ se $\omega r = \text{cost}$

$\delta k' f \omega = \text{cost}$

$\delta dA = k' p dA f v_r = k' p dA f \omega r = k' p r$

$\rightarrow \frac{\delta}{k' r} = p \rightarrow p = \frac{k}{r}$

N.B:
Le grandezze sono considerate costanti perché hanno lo stesso valore istante per istante in tutti i punti dell'area di contatto, mentre possono variare nel tempo.

$\xrightarrow{2}$ La forza complessiva trasmessa dalla pastiglia al disco ($= F$) vale

$F_r = k (r_2 - r_1) (\vartheta_2 - \vartheta_1)$

DIH

$F_r = \int p dA = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{k}{r} r d\vartheta dr = k (\vartheta_2 - \vartheta_1) (r_2 - r_1)$

$\xrightarrow{3}$ Il momento frenante complessivo sul disco vale

$M = \int r \times dF_r = \frac{f k}{2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot (r_2^2 - r_1^2) = f F_r \bar{r}$

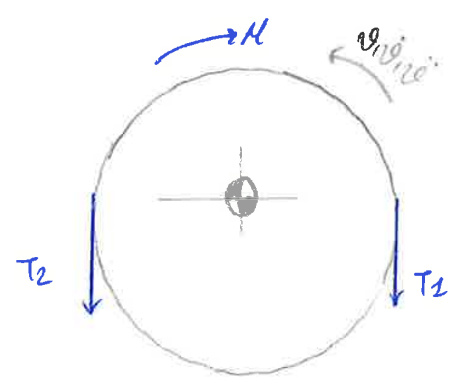
$$\left. \begin{aligned} &\rightarrow T \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + dF_T - (T+dT) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (11) \\ &\uparrow dF_T = T \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (T+dT) \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \\ &dF_T = f dF_T \\ &\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1 \\ &\operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow T + dF_T = T + dT \rightarrow dT = dF_T \text{ (trascurabile)} \\ &\rightarrow \frac{dF_T}{f} = T \frac{d\theta}{2} + T \frac{d\theta}{2} + dT \frac{d\theta}{2} = T d\theta \rightarrow \frac{dT}{T} = f d\theta \\ &\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f d\theta \rightarrow \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = e^{f(\theta_2 - \theta_1)} \Rightarrow e^{f\theta} = \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{2}$ Il momento frenante varrà $M = (T_2 - T_1)r = T_1 r (e^{f\theta} - 1)$

DIMOSTRAZIONE

• Diagramma corpo libero tamburo

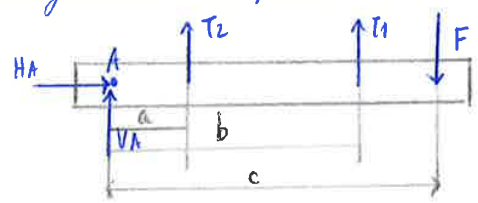


$$\begin{aligned} \rightarrow M &= (T_2 - T_1)r = (T_1 e^{f\theta} - T_1)r \\ &= T_1 (e^{f\theta} - 1)r \end{aligned}$$

$\xrightarrow{3}$ $T_2 a + T_1 b = Fc$

DIMOSTRAZIONE

• Diagramma di corpo libero dell'asta

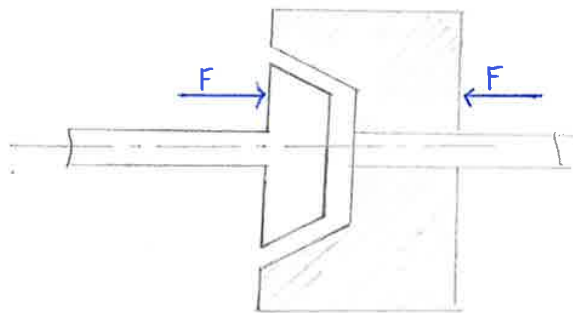


$$\uparrow T_2 a + T_1 b = Fc$$

Frizioni coniche

13

= sistema in cui i due alberi da collegare sono solidali a due elementi con superficie coniche, che possono essere premute uno contro l'altro.



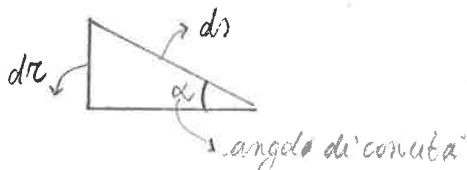
• Ipotesi usata: $p = \frac{k}{c}$

1 → La forza assiale applicata sulla frizione conica:

$$F_A = 2\pi K (r_e - r_i)$$

DIMOSTRAZIONE

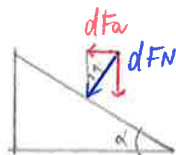
- L'area di contatto infinitesima $dA = \text{sup. troncoconica di } \bar{r} \text{ e larghezza } ds$



$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{dr}{ds}$$

$$\implies dA = 2\pi \bar{r} ds = 2\pi \bar{r} \frac{dr}{\sin \alpha}$$

- La forza normale infinitesima



scombinata tra i due coni roto.

$$dFN = p dA$$

$$\rightarrow dFa = \text{forza infinitesima assiale} = dFN \cdot \sin \alpha$$

$$\rightarrow F_A = F = \int dFa = \int dFN \cdot \sin \alpha = \int p dA \cdot \sin \alpha = f \int \frac{k}{c} \cdot 2\pi \bar{r} \frac{dr}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = 2\pi f k \int_{r_i}^{r_e} dr = 2\pi f k (r_e - r_i)$$

2 → Il momento trasmesso dalla frizione roto

$$M = \frac{f}{\sin \alpha} F \cdot \frac{(r_e + r_i)}{2} = f' F \frac{r_e + r_i}{2} = f k \frac{2\pi}{\sin \alpha} \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2} \quad \text{dove } f' = \frac{f}{\sin \alpha}$$

DIMOSTRAZIONE

$$M = \int r dF_r = \int r \cdot f \cdot dFN = \int r \cdot f \cdot p dA = \int r \cdot f \cdot \frac{k}{c} \cdot 2\pi \bar{r} \frac{dr}{\sin \alpha} = \frac{2\pi k f}{\sin \alpha} \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2}$$

$$= \frac{2\pi k f}{\sin \alpha} \frac{(r_e + r_i)}{2} (r_e - r_i) = \frac{f}{\sin \alpha} F \bar{r} = f' F \bar{r}$$

Ruote Dentate (generali)

(15)

= Ruote di frizione che permettono la trasmissione del moto tra assi:

• paralleli

• incidenti

• sghembi



~~Formule~~

Ingranaggi cilindrici

- Considero es. pagina prima
- Z_1, Z_2 = numeri di denti delle due ruote

→ I passi angolari delle due ruote $v_1 = \frac{2\pi}{Z_1}$; $v_2 = \frac{2\pi}{Z_2}$; $v_i = \frac{2\pi}{Z_i}$

→ I punti delle ruote vengono compiuti da esse nello stesso tempo
 $v_1 = \omega_1 \Delta t$; $v_2 = \omega_2 \Delta t$; $v_i = \omega_i \Delta t$

→ Il rapporto di trasmissione vale

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

AGGIUNTA

$$m = \frac{p}{\pi}$$

$$\tau = \frac{mZ}{2}$$

DIM

1) $v_1 = \omega_1 \Delta t$; $v_2 = \omega_2 \Delta t \rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$

2) $v_1 = \frac{2\pi}{Z_1}$; $v_2 = \frac{2\pi}{Z_2} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi}{Z_1} \cdot \frac{Z_2}{2\pi}$

3) $v_{Ac1} = \omega_1 r_1$; $v_{Ac2} = \omega_2 r_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$

→ Il passo della dentatura vale $p_i = r_i v_i$ e si ha che $p_1 = p_2 = p$

DIM

$p_1 = v_1 r_1$; $p_2 = v_2 r_2 \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} = i \cdot \frac{1}{i} = 1$

→ I raggi primitivi delle due ruote valgono $r_1 = a \frac{1}{1+i}$; $r_2 = a \frac{i}{1+i}$

DIM

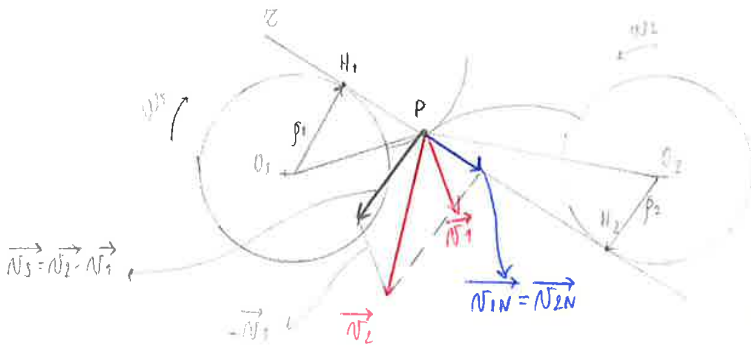
$$\begin{cases} a = r_1 + r_2 \rightarrow a = r_1 + i r_1 = r_1(1+i) \rightarrow r_1 = \frac{a}{1+i} \rightarrow r_2 = a \frac{i}{1+i} \\ i = \frac{Z_2}{Z_1} \rightarrow r_2 = i r_1 \end{cases}$$

Corso 1

ANALISI CINEMATICA E OSSERVAZIONI

(17)

• I cerchi di base di due ruote di un ingranaggio dove:



• P = punto di contatto tra le due evolventi
 $\perp r$ e \perp .

• H_1H_2 = segmento definito come LUOGO DEI CONTATTI = luogo dei punti in cui il contatto tra le due ruote può avvenire in modo corretto, (corsa dove le evolventi hanno la stessa normale)

1 → Per un corretto funzionamento degli ingranaggi le velocità v_1, v_2 devono avere nel punto P le stesse componenti normali (parallele per la retta r)

($\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}$) (altrimenti i denti si strocerebbero o si compenetrerebbero)

2 → $\vec{v}_s = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ = velocità di strisciamento = velocità relativa tra i due denti

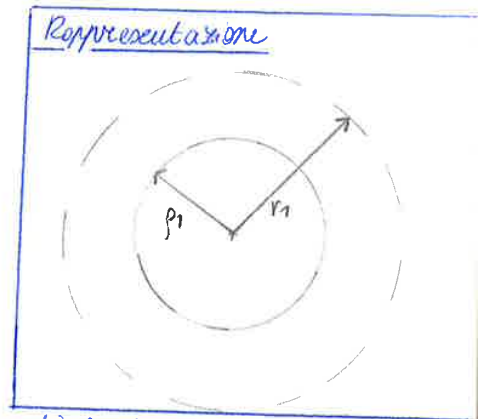
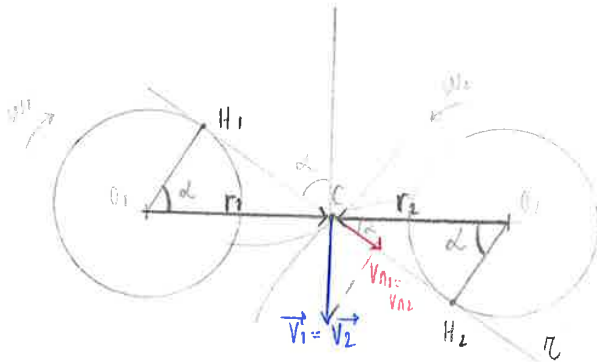
= • tg alle evolventi
 • $\perp r$

3 → Il centro di istantanea rotazione è l'intersezione tra r ed il segmento O_1O_2 .
 ↓ (del moto relativo tra i due denti) le due ruote)

perché in questo punto $\vec{v}_s = 0$

Corso 2

• Il contatto tra i denti delle due ruote avviene in c



1 → $\alpha =$ (retta d'azione tg comune ai cerchi primitivi su c) = angolo di pressione.

2 → $r_1 = \frac{p_1}{\cos \alpha}$; $r_2 = \frac{p_2}{\cos \alpha}$

Nota bene

- Se allontanano i cerchi primitivi le ruote

→ i non cambia; r_1, r_2 variano.

$\cong p_1 p_2 = r_{\text{cassa}}$ di base = caratteristiche costruttive delle ruote

PIM $i = \frac{p_2}{p_1}$
 $i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{p_2}{\cos \alpha} \frac{\cos \alpha}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}$ che non variano.

Ruote cilindriche a denti dritti

(19)

Analoga

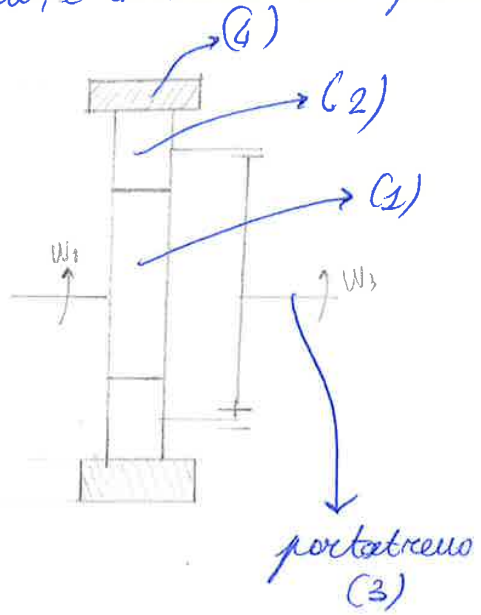
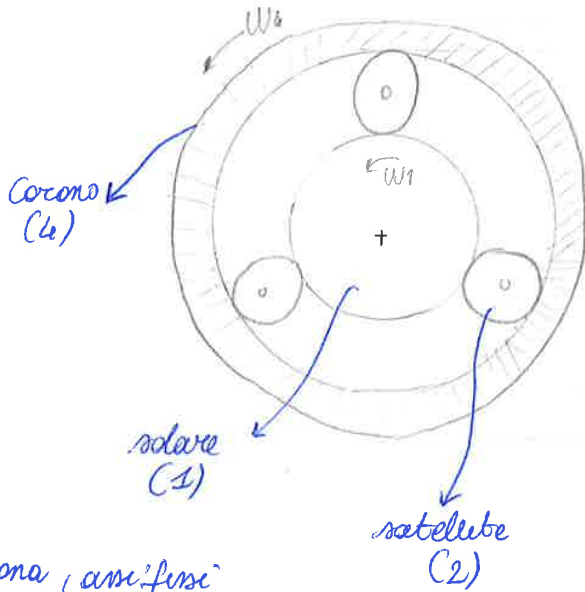
- Al cerchio di base corrisponde il cilindro di base;
- La sup. del dente è generata da una retta // all'asse della ruota e giacente su un piano generatore che rotola senza strisciare sul cilindro di base
- l'intersezione tra lo sup. del dente e un piano \perp all'asse della ruota è una curva evolvente.
- ~ La sup. del dente si ottiene per traslazione rettilinea dell'evolvente.
- Linea caratteristica = linea lungo la quale si toccano le superfici di due denti
- Piano d'azione = piano definito dalle successive posizioni occupate dalla linea caratteristica durante la trasmissione del moto.
- retta d'azione = intersezione tra piano d'azione e un piano \perp agli assi delle ruote;
- angolo di pressione = angolo tra piano d'azione e piano tg al cilindro primitivo.

Stad. cilindriche

Rotismi epicycloidal

(24)

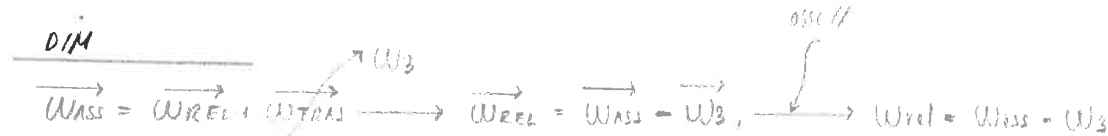
= Rotismi in cui gli assi delle ruote sono mobili, e che hanno ^{più di 1} ~~un~~ grado di libertà.



- Solare, Corona, assi fissi
- Satelliti, assi mobili messi in moto dal portatreno, avente assi di rotazione coincidente con quello del solare.

→ Per risolvere il sistema bisogna rendere ordinario il rotismo, considerando un sistema di riferimento solidale con il portatreno ($\omega_{base} = \omega_3$)

$$\rightarrow i = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_4 - \omega_3} = -\frac{z_4}{z_1}$$



$$\rightarrow i = \frac{\omega_{rel}(in)}{\omega_{rel}(out)} = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_4 - \omega_3}$$

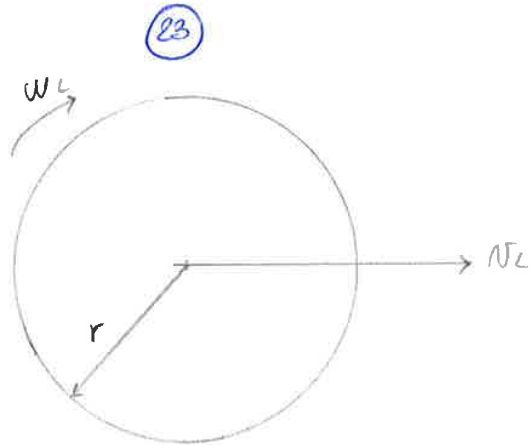
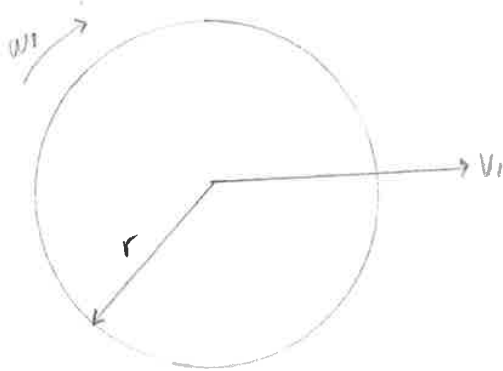
$$\rightarrow i = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} \cdot \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_4 + \omega_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_2}\right) = -\frac{z_4}{z_1}$$

$\frac{1}{2}$ (inter) $\frac{1}{2}$ (inter)

Di solito
 • Portatreno legato al motore

$$i = \frac{z_4}{z_1}$$

DIM.



$$\begin{aligned} \rightarrow v_1 &= \omega_1 r \left(r + \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{v}{r} \left(r + \frac{a}{2} \right); \end{aligned}$$

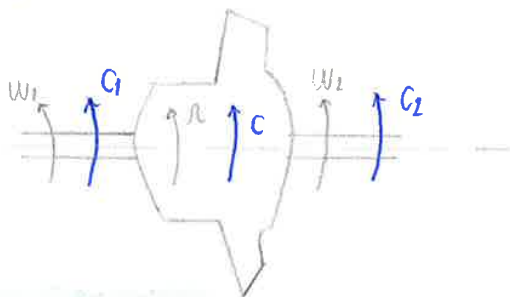
$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 r \left(r - \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{v}{r} \left(r - \frac{a}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{r} = \frac{v}{r^2} \left(r + \frac{a}{2} \right)$$

$$\omega_2 = \frac{v}{r^2} \left(r - \frac{a}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v}{r^2 a} \left(r + \frac{a}{2} + r - \frac{a}{2} \right) = \frac{v(2r)}{2r^2 a} = \frac{v}{ar}$$

Analisi dinamica: Come si comporterà la coppia C tra le due ruote.



$$\rightarrow C_1 = C_2 = -\frac{C}{2}$$

DIM.

$$\begin{cases} \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \\ C + C_1 + C_2 = 0; \\ (\mathcal{B}=1); C r + C_1 r_1 + C_2 r_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 1, 2 \text{ nella } 3$$

$$\rightarrow (-C_1 - C_2) \cdot \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + C_1 r_1 + C_2 r_2 = 0 \rightarrow -\frac{C_1 \omega_1}{2} - \frac{C_1 \omega_2}{2} - \frac{C_2 \omega_1}{2} - \frac{C_2 \omega_2}{2} + C_1 r_1 + C_2 r_2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{C_1 \omega_1}{2} + \frac{C_2 \omega_2}{2} - \frac{C_1 \omega_2}{2} - \frac{C_2 \omega_1}{2} = 0 \rightarrow C_1 (\omega_1 - \omega_2) - C_2 (\omega_1 - \omega_2) = 0 \rightarrow C_1 = C_2$$

(25)

Osservazione

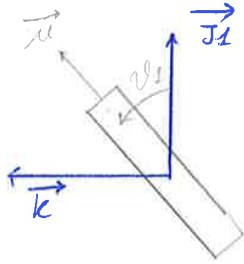
- 1) Il braccio dello scivolo solidale ad \vec{u} ruota nel piano \vec{J}_1, \vec{K}
- 2) Il braccio dello scivolo solidale a \vec{v} ruota nel piano \vec{F}_2, \vec{K} .

Corollario

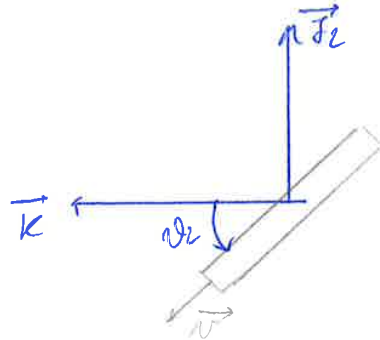
- L'albero è ruotato di $\pi/2$ \vec{x}
- da scivolo scivola: una rotazione di tre secondi momenti $\pi/2$ \vec{x}
- rotazione propria intorno ad $\vec{u} - d\vec{u}$

Configurazione generica dello scivolo

Visita A



Visita B



1 → $\vec{u} = \sin \theta_1 \vec{K} + \cos \theta_1 \vec{J}_1$;
 $\vec{v} = \cos \theta_2 \vec{K} - \sin \theta_2 \vec{F}_2$

2 → $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 \cos \alpha$

DIMOSTRAZIONE

- Condizione di perpendicolarità dei bracci ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

→ $(\sin \theta_1 \vec{K} + \cos \theta_1 \vec{J}_1) \cdot (\cos \theta_2 \vec{K} - \sin \theta_2 \vec{F}_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 (\vec{K} \cdot \vec{K}) - \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\vec{K} \cdot \vec{F}_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\vec{J}_1 \cdot \vec{K}) - \cos \theta_1 \sin \theta_2 (\vec{J}_1 \cdot \vec{F}_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha = 0$

→ $\sin \theta_1 \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha \rightarrow \tan \theta_1 = \tan \theta_2 \cos \alpha$

3 → Il rapporto di velocità vale $\mu = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \theta_1}{\cos \alpha}$

DIMOSTRAZIONE

$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 \cos \alpha \xrightarrow{d/dt} (1 + \tan^2 \theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} = \cos \alpha (1 + \tan^2 \theta_2) \frac{d\theta_2}{dt}$

→ $(1 + \tan^2 \theta_1) w_1 = \cos \alpha (1 + \tan^2 \theta_2) w_2 \rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \cos \alpha \frac{1 + \tan^2 \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_1} =$

$\cos \alpha \frac{1 + \frac{\tan^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_2}}{1 + \tan^2 \theta_1} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \theta_2} \frac{\cos^2 \theta_2 + \tan^2 \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_1} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{(\cos^2 \theta_2 + \tan^2 \theta_2)}{1 + \tan^2 \theta_1} =$

$\tan \theta_2 = \tan \theta_1 \cos \alpha$

$= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1}}{1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1}} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1}}{\frac{1}{\cos^2 \theta_1}} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_1}{\cos \alpha}$

4 → $\mu_{MAX} \neq \mu(\cos \theta_1 = 0; \theta_1 = \pi/2) = \frac{1}{\cos \alpha}$

$\mu_{MIN} = \mu(\theta_1 = 0) = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$

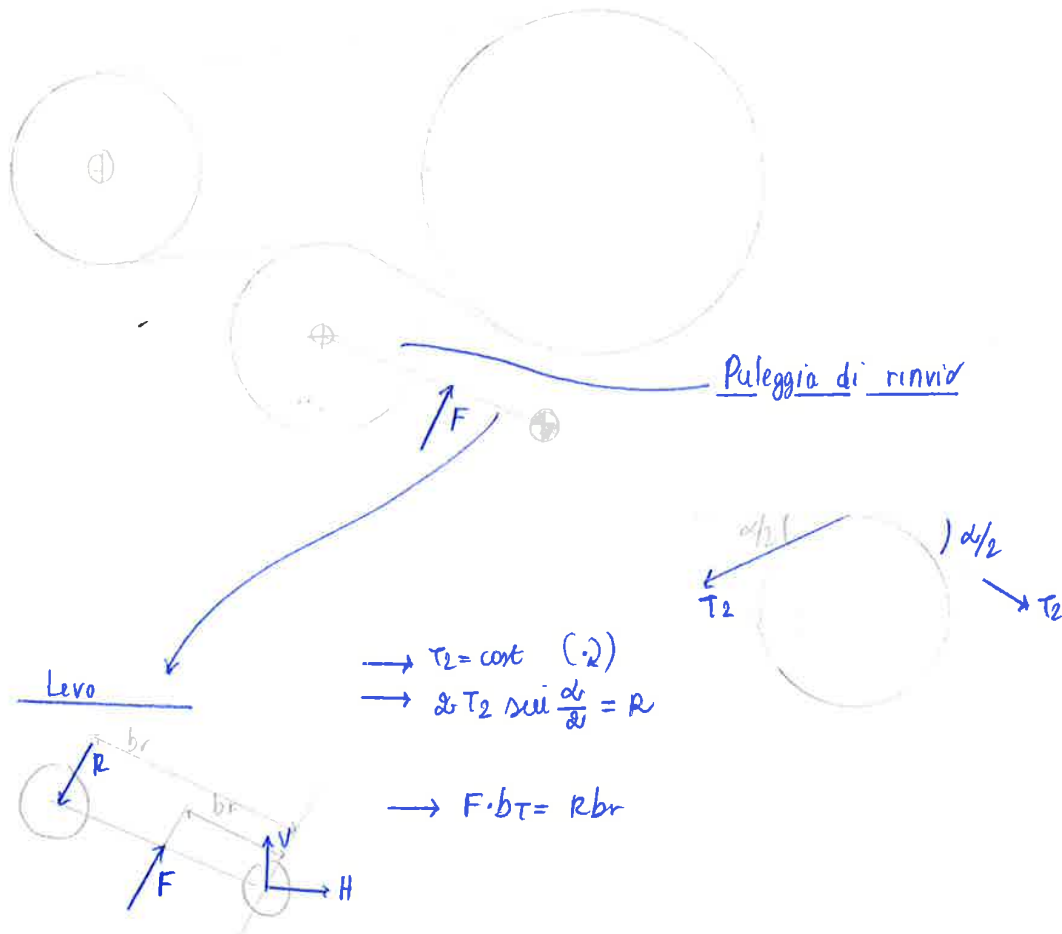
FORZAMENTO ~~FRIZIONE~~

(27)

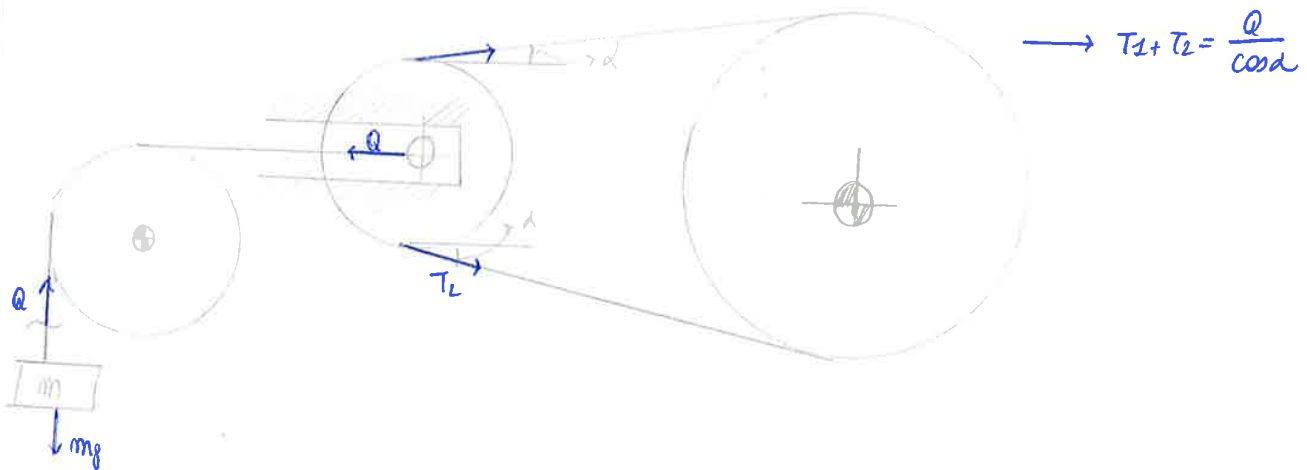
= Operazione con cui si garantisce l'aderenza tra cinghia e puleggia.

Metodi

1) Forzamento con Gollopino.

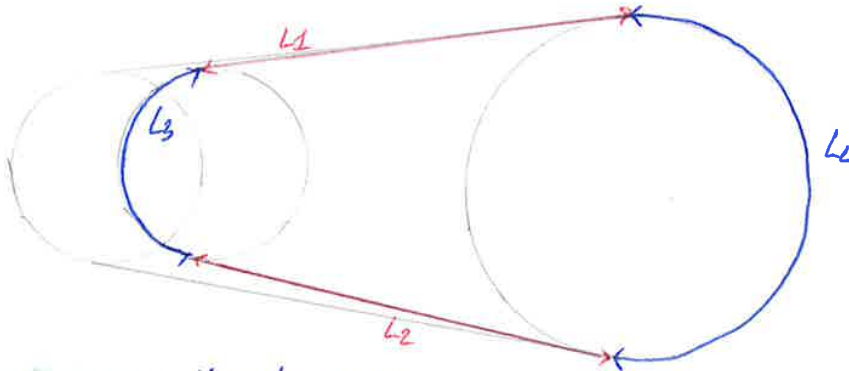


2) Forzamento con tenditore;



Forsamento ensiale

- si provoca un allontanamento delle ruote accompagnata da un certo allungamento.



$\sigma = \epsilon E$ Modulo elastico
 deformazione % $\sim \frac{T_0}{S} = E \cdot \frac{\Delta l_0}{l_0}$ dove
 tensione

$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

$\Delta l_0 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4$

$\Delta l_1 = \frac{T_1}{ES} l_1$; $\Delta l_2 = \frac{T_2}{ES} l_2$; $\Delta l_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{l_3}{ES}$; $\Delta l_4 = \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{l_4}{ES}$

$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$
 $\implies T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$

Si considera un valore medio.

DIMOSTRAZIONE

$\frac{T_0}{ES} = \frac{E}{L} \Delta l_0 \implies \Delta l_0 = \frac{T_0}{ES} \frac{L T_0}{E}$

$\frac{T_1}{ES} l_1 + \frac{T_2}{ES} l_2 + \frac{T_1 + T_2}{2} \frac{l_3}{ES} + \frac{T_1 + T_2}{2} \frac{l_4}{ES} = \frac{T_0}{ES} 4l$

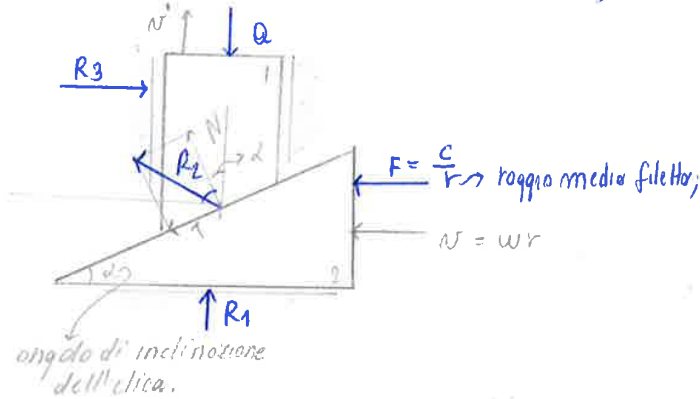
$2T_1 + 2T_2 = 4T_0 \implies T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$

Guardare passo dopo sul quadrando.

CASO: VINCOLI SENZA ATRIBITO (CROSSA)

• Esiste attrito solo fra i due cunei

→ Si vuole sollevare con velocità costante \vec{v} , un carico \vec{a} .



dove:

- R_3, R_4 forze dei viti esterni
- R_2 f. trascorrenza del cuneo 2 o il 1.

1 → $C = F \cdot r = a \cdot r \cdot \tan(\alpha + \epsilon)$

DIN



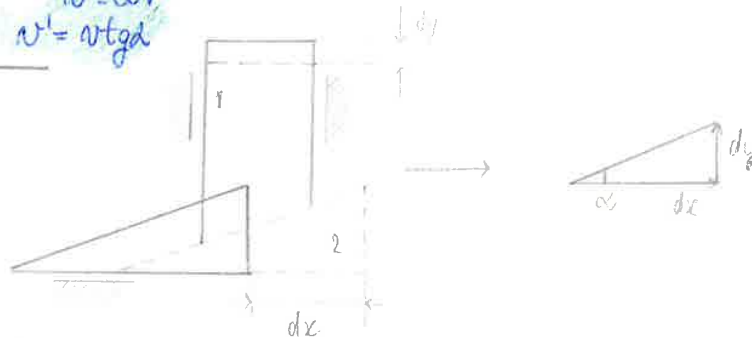
↑ Cuneo 1: $R_2 \cos(\alpha + \epsilon) = a$

→ Cuneo 2: $F = \frac{C}{r} = R_2 \cos(90 - \alpha - \epsilon) = R_2 \sin(\alpha + \epsilon)$

ad cuneo 1 al 2
 (→ R_2 opposto al pedice)
 $\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$

⇒ $\frac{F}{a} = \tan(\alpha + \epsilon)$ c.v.d

2 → ~~$\frac{a \cdot w \cdot r}{\tan \alpha} = \frac{a \cdot w \cdot r}{\tan \alpha}$~~ $w' = w \cdot \tan \alpha$



→ $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = dx \cdot \tan \alpha \rightarrow N' = N \cdot \tan \alpha$

3 → $\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \epsilon)}$

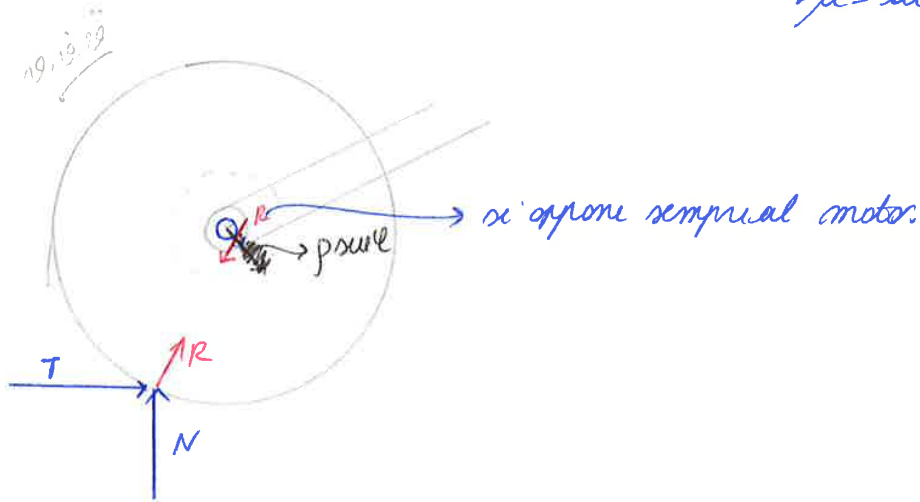
DIN

$\eta = \frac{a \cdot w'}{F \cdot N} = \frac{a \cdot w'}{a \cdot \tan(\alpha + \epsilon) \cdot N} = \frac{1}{\tan(\alpha + \epsilon)} \cdot \frac{w'}{N} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \epsilon)}$

Attrito al perno

- Coda collegata ad un'asta con un perno

• $\mu =$ attrito radente



- Faccia la disco $dA = r dr d\theta$

Facciamo il perno $dA = 2\pi r dr$



Facciamo il cerchio $2\pi r dr$

- Cerchio permutabile = quello che c'è il contatto (verrà)

$$\chi_{st} = \frac{F_0}{K}$$

$$\mu = \text{Fattore di attrito} = \frac{\chi_{st}}{\chi_0}$$

VIBRAZIONI

= Moto che consiste di oscillazioni del corpo intorno a certe posizioni di equilibrio e che è reso possibile dalla capacità dei materiali costituenti il corpo di immagazzinare energia potenziale elastica.

Obiettivi

- = Contenere le ampiezze e le frequenze delle oscillazioni entro certi limiti, per
 - Ridurre disturbi fastidiosi alle persone;
 - per non deformare e sollecitare troppo i materiali;

Modelli utilizzati

- 1) Modello a parametri distribuiti = modello che considera lo massa e gli elementi elastici come distribuiti con continuità nello spazio
 - È descritto da eq differenziali alle derivate parziali;
- 2) Modello a parametri concentrati (eq. differenziali ordinarie)

Gradi di libertà

- = minimo numero di grandezze indipendenti necessarie a descrivere il moto di un sistema
- sistema continuo → ha ∞ gradi di libertà
- sistema discreto → numero finito di gradi di libertà.

Classificazione s. vibranti

- 1) Sistemi lineari → per cui vale il principio di sovrapposizione degli effetti.
 - descritti da eq. lineari
 Sistemi non lineari
- 2) vibrazioni libere → sistema vibra in assenza di forze esterne impresse
 -
 vibrazioni forzate → sistema vibra in sotto l'azione di forze esterne che permangono nel tempo.
- 3) sistema smorzato → nel sistema sono presenti forze d'attrito che dissipano energia e tendono a smorzare il moto oscillatorio
 -
 sistema non smorzato → quando non sono presenti forze d'attrito.

DIM 2

• Formula di Eulero, $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$; $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$

$$\rightarrow x = a \cdot [\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] + b [\cos(i\omega t) - i\sin(\omega t)] = (a+b)\cos(\omega t) + i(a-b)\sin(\omega t)$$

$$A = a+b; \quad B = i(a-b) \rightarrow x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

DIM 3

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow x = x_0 [\sin(\omega t) \cos \varphi_0 + \cos(\omega t) \sin \varphi_0]$$

$$= (x_0 \cos \varphi_0) \cos(\omega t) + (x_0 \sin \varphi_0) \sin(\omega t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow A = x_0 \cos \varphi_0; \quad B = x_0 \sin \varphi_0 \rightarrow \tan \varphi_0 = \frac{B}{A}$$

$$\rightarrow \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 = 1 \rightarrow x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

→ Questo moto è detto moto armonico semplice

= oscillazioni sinusoidali intorno alla posizione di equilibrio ($x=0$)

- Moto periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$ ($f = \frac{\omega_n}{2\pi}$)

DIM

Una f è periodica se $f(t+T) = f(t) \forall t$

- La funzione sin ha $T = 2\pi$

→ Durante una oscillazione completa lo- φ_0 variano di 2π

$$\Rightarrow (\omega_n(t+T) + \varphi_0) - (\omega_n(t) + \varphi_0) = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

DIM 0 CON METODO ENERGETICO

• Sistema non smorzato

→ L'energia cinetica e potenziale si conservano $E_c + E_p = \text{cost}$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{cost} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) + \frac{1}{2} k \frac{d}{dt} (x^2) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} k (2x) \dot{x} = 0$$

$$\rightarrow m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0 \rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$$

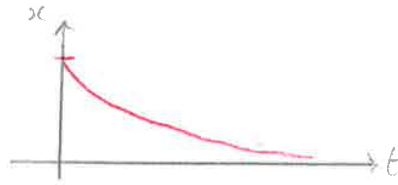
CASI POSSIBILI

1) $\zeta > 1 \longrightarrow$ Il sistema è sovra smorzato

$\stackrel{1}{=} N_1, N_2 \in \mathbb{R}_1 < 0.$

$\stackrel{2}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

$\stackrel{3}{=} \Delta$ l'andamento $x(t)$



DIM

$x = e^{-\zeta \omega_n t} \left(a e^{(\sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + b e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$

decreciente
decrecente
ma con esp < di quello fuori delle parentesi.

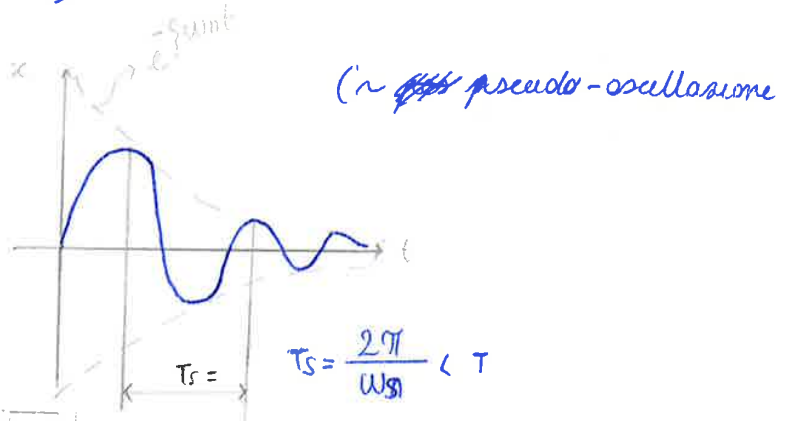
2) $\zeta < 1 \longrightarrow$ Il sistema è sotto smorzato

$\stackrel{1}{=} x = a e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}) \omega_n t} + b e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}) \omega_n t} = x_0 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi_0)$

dove $\omega_n =$ pulsazione propria del sistema smorzato
 $= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

$\stackrel{2}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

\Rightarrow l'andamento è



DIMOSTRAZIONE 1

$-x = a e^{\omega_n t (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + b e^{\omega_n t (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta < 1$
 $\rightarrow x = a e^{\omega_n t (-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})} + b e^{\omega_n t (-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})}$

$= a e^{-\zeta \omega_n t} \cdot e^{i \omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}} + b e^{-\zeta \omega_n t} \cdot e^{-i \omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\zeta \omega_n t} \left[a e^{i \omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}} + b e^{-i \omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}} \right]$

$= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ a \left[\cos(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) + i \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) \right] + b \left[\cos(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) - i \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) \right] \right\}$

$= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ (a+b) \cos(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) + i (a-b) \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) \right\} = e^{-\zeta \omega_n t} x_0 \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi_0)$

3) $\zeta = 1 \longrightarrow$ Il polo di smorzamento critico

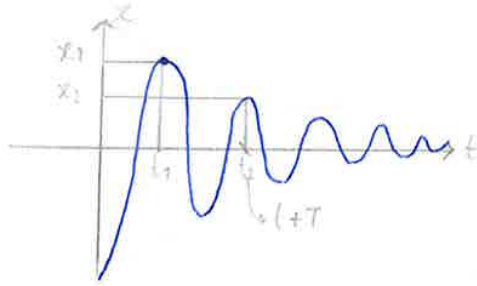
$\Rightarrow x = Ca + b t e^{-\omega_n t}$

$- \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

DECREMENTO LOGARITMICO

• sistema sottosmorzato

$$\frac{\beta}{m} = \zeta \omega_n 2$$



1 → Si definisce decremento logaritmico $\sigma = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

Dim 2

$$\frac{x_1 = x_0 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi_0)}{x_2 = x_0 e^{-\zeta \omega_n (t+T)} \sin(\omega_n (t+T) + \varphi_0)} = e^{\zeta \omega_n T} \rightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T$$

Dim 2

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n} = \zeta \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

2 → $\zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{4\pi^2 + \sigma^2}}$

$$1 \rightarrow x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega n^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi \omega n \Omega)^2}}$$

D/M

Considered triangle OAB, $\rightarrow \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2$

$(\frac{F_0}{m})^2$ $(\omega n^2 x_0 - \Omega^2 x_0)^2$ $(2\xi \omega n \Omega x_0)$

$$2 \rightarrow x_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega n}\right)^2}}$$

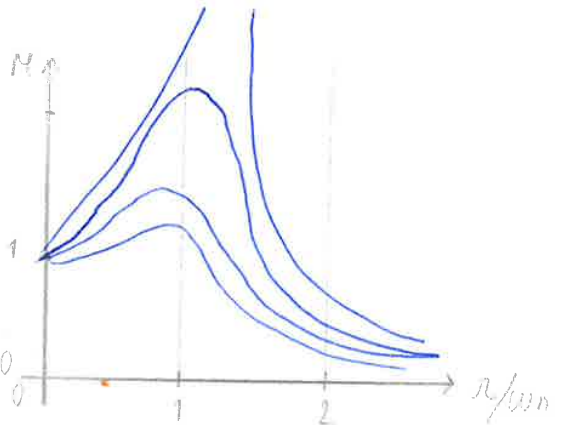
D/M.

Da 1 divido al numeratore e denominatore per $\omega n^2 = k/m$

$$3 \rightarrow x_{st} = \frac{F_0}{k} = x_0 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega n}\right)^2} = \text{deformazione del sistema in condizioni stazionarie (sotto l'applicazione di una forzante } F_0 \text{ costante)}$$

4 \rightarrow Si definisce Fattore di amplificazione

$$M = \frac{x_0}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega n}\right)^2}}$$



N.B

Si definisce risonanza la condizione per cui si ha la massima ampiezza della risposta

CASI

- sistema non smorzato
- \rightarrow la risonanza si ha quando la frequenza di eccitazione Ω coincide con quello proprio
- sist. smorzato
- \rightarrow la risonanza si ha per un valore ^{di Ω} più piccolo del frequenza proprio del sistema

$$\rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{2 \zeta \omega_n \Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

