



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1608A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Giai Pron

MATERIA: Fondamenti di Ingegneria Nucleare. Prof. Ravetto.

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Bilancio di massa di un atomo

pag 9

Massa atomica \approx Massa nuclea + $Z M_{e^-}$ + massa associata all'energia di legame tra gli e ed il nucleo
 ↳ trascurata perché è di tipo Coloumbiano.

Energia di legame (in generale)

En di legame = En. associato al sistema - E associato ai singoli agenti interagenti

Bilancio di massa del nuclea

$M_N(A, Z) - Z M_p - N \cdot M_n \neq 0 \quad (< 0)$

~ La massa del nuclea è minore della massa degli Z protoni e degli N neutroni poiché parte della massa è associata all'energia B.E.

Bilancio di energia del nuclea

$M_N(N, Z) \cdot c^2 - (N \cdot M_n + Z \cdot M_p) c^2 = B.E. (N, Z)$

energy at rest of the system bonded → energia dei nucleoni separati

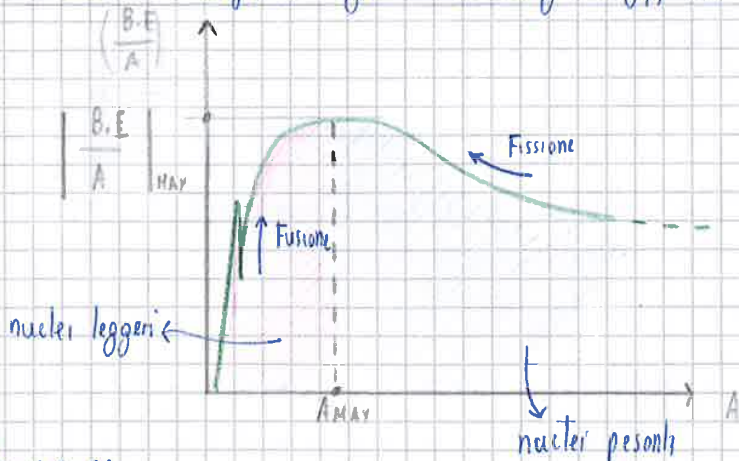
dove:

• M_N = Massa nuclea con $\begin{cases} N \text{ neutroni} \\ Z \text{ protoni} \end{cases}$

• $(N M_n + Z M_p)$ = somma delle masse dei contribuenti;

• B.E. = Energia di legame (Binding energy) che risulta < 0 (perché tra i nucleoni vi è una forza attrattiva

→ energia potenz. che diminuisce la massa del sistema)



sull'asse y: energia di legame media che ha ogni particella nel nuclea;

Osservazione

1 Il punto di massimo della curva corrisponde al ^{56}Fe (ferro) che risulta quindi l'atomo da cui si vede più energia per stappare un neutrone/protone.

2 L'energia di legame è maggiore dove il nuclea è più stabile (ci vogliono energie maggiori)

3 Fusione = fusione di nuclei di elementi leggeri (→ con elevato energia di attivazione, essendo nella zona centrale) in seguito al quale si ottiene un atomo più massivo (ci si sposta vs dx lungo la curva) liberando energia

5 Tanto più si è a dx/sx del massimo, tanto maggiore sarà il salto energetico (→ l'energia ottenuta)

4 Fissione = scissione di un nuclea pesante in due nuclei circa uguali (con $A \approx 100$) (→ ci si sposta vs sx lungo la curva) liberando energia (aumento energia di legame)

Forma semi-empirica di massa (Bethe-Weizsöcker)

pag 11

$$B.E. = -b_{vol} \cdot A + b_{sup} \cdot A^{2/3} + b_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} + b_{col} \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + \Delta_{sping}$$

dove:

1. $-b_{vol} \cdot A =$ Termine di volume

- < 0 (\rightarrow attrattivo)
- proporzionale ad A (\rightarrow al volume) ($V \propto R^3 = R_0^3 A \rightarrow V \propto A$)
- $b_{vol} = \text{cost} = 15.6 \text{ MeV}$

2. $b_{sup} \cdot A^{2/3} =$ Termine di superficie

\downarrow 17,2 MeV

- = Termine che tiene conto degli effetti di superficie (o)
- = Correzione al termine di volume per tenere conto degli effetti di superficie, ossia del fatto che i nucleoni superficiali, rispetto a quelli presenti nel volume, hanno meno nucleoni vicini con cui interagire \rightarrow hanno un'energia media minore che va ad abbassare il B.E.I.
- Esso è rilevante nei nuclei leggeri-medi ($A < 20$) perché la percentuale dei nucleoni superficiali (rispetto ai nucleoni totali contenuti nel nucleo) è maggiore nei nuclei più piccoli.
- Esso risulta proporzionale alla superficie ($\rightarrow A^{2/3}$)

D.I.M

$$S \propto R^2 = (R_0 A^{1/3})^2 = R_0^2 A^{2/3} \rightarrow S \propto A^{2/3}$$

3. $b_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} =$ Termine di simmetria

\downarrow = 23,3 MeV

- $b_{sup} = 17.2 \text{ MeV}$
- = termine che tiene conto degli effetti di simmetria, ossia del fatto che i nuclei non simmetrici ($\rightarrow N > Z$) hanno un'energia minore in quanto sono presenti meno legami p-n e più legami n-n e p-p che risultano più deboli
- se $N = Z \rightarrow$ il termine di simmetria si annulla.

4. $b_{col} \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} =$ Termine Coulombiano

termine che tiene conto dell'energia potenziale dell'interazione elettromagnetica tra i protoni del nucleo che, a causa della loro carica (positiva) subiscono una repulsione elettrostatica.

- = energia necessario per caricare il nucleo da una carica iniziale $q=0$ ad una carica $q=Q$, considerandolo come una sfera di raggio R e densità di carica uniforme ($\rho(r) = \text{cost}$)
- $\rightarrow b_{col} \approx \frac{3}{5} \frac{k_e e^2}{R_0} \approx 0.72 \text{ MeV}$

VALORE DI Z (FISSATO A) CHE MASSIMIZZA L'ENERGIA DI LEGAME (B.E.) (→ LA STABILITÀ DEL NUCLEO)

pag 13

Osservazione

- < B.E
- 1 → più l'atomo è stabile
- 2 → più l'energia legata alla massa dell'atomo è grande
- 4 → più la massa del nucleo è piccola

Formule

• Fissato A (→ A = cost)

→ il valore di Z per cui M_A è minimo, ossia per cui B.E è massimo

$$Z_N = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{1 + \frac{b_{col}}{b_{sim}} \cdot \frac{A^{2/3}}{4}} \right]$$

DIMOSTRAZIONE

$$B.E = M_A - M_N - Z M_e = M_A - [Z M_p + N M_n + Z M_e]$$

$$\xrightarrow{c^2} M_A = Z M_p + (A - Z) M_n + Z M_e + \frac{1}{c^2} \left[-b_{col} \cdot A + b_{sup} A^{1/3} + b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + b_{col} \frac{(Z^2 - Z)}{A^{1/3}} + \Delta \right]$$

$$\implies \frac{\partial M_A}{\partial Z} \Big|_{A=const} = M_p - M_n + M_e + \frac{1}{c^2} \left[\frac{b_{sim}}{A} (8Z - 4A) + \frac{b_{col}}{A^{1/3}} (2Z - 1) \right] = 0$$

$$\implies (M_p - M_n + M_e) c^2 + 8 \frac{b_{sim}}{A} Z - 4 b_{sim} + 2 \frac{b_{col}}{A^{1/3}} Z - \frac{b_{col}}{A^{1/3}} = 0$$

$$\implies Z \left(8 b_{sim} A^{-1} + 2 b_{col} \cdot A^{-1/3} \right) = b_{col} \cdot A^{-1/3} + 4 b_{sim} + (M_n - M_e - M_p) c^2$$

$$\implies Z_N = \frac{b_{col} A^{-1/3} + 4 b_{sim} + (M_n - M_e - M_p) c^2}{8 b_{sim} A^{-1} + 2 b_{col} A^{-1/3}}$$

Ipotesi

• Trascurare $\left\{ \begin{array}{l} (M_n - M_e - M_p) c^2 \sim \text{frazioni di MeV} \\ b_{col} A^{-1/3} \sim \text{frazione di MeV} \end{array} \right\} \rightarrow \ll 4 b_{sim} (\sim 100 \text{ MeV})$

$$\implies Z_N = \frac{4 b_{sim}}{8 b_{sim} A^{-1} + 2 b_{col} A^{-1/3}} \cdot \frac{4 b_{sim}}{4 b_{sim}} = \frac{1}{\frac{2}{A} + \frac{b_{col}}{2 b_{sim} A^{1/3}}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_{col}}{4 b_{sim}} A^{2/3}}$$

Corollario

• $\frac{b_{col}}{4 b_{sim}} A^{2/3} \ll 1 \rightarrow Z_N \approx \frac{A}{2}$

• $\frac{b_{col}}{4 b_{sim}} A^{2/3} \approx 1 \rightarrow Z_N < \frac{A}{2}$

Legge dei decadimenti radioattivi (di natura statistica)

pag 15

• Considero un campione che contiene N nuclei radioattivi

→ Lo ATTIVITÀ = frequenza di decadimenti (decadimenti per unità di tempo) in un campione radioattivo;

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = + \lambda \cdot N(t) \quad \text{dove:}$$

- $N(t)$ = numero di ^{nuclei non decaduti} particelle al tempo t ;
- λ = costante di decadimento = probabilità per unità di tempo che il nucleo decada
 - esso non dipende dal numero di nuclei decaduti
 - ha un valore cost. per ogni nucleo
 - $[\lambda] = T^{-1}$

Soluzione eq. di conservazione

• Condiz. iniziali: $N(t=0) = N_0$ (numero di nuclei non decaduti al tempo $t=0$)

→ $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \sim \quad A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ (essendo $A(t) = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda t} \rightarrow \lambda \cdot N_0 = A_0$)

DIM

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \rightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt \quad (\text{integrare tra } t=0 \rightarrow N=N_0 \text{ e } t=t; N=N(t))$$

→ $\log \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda(t-0) \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Tempo di dimezzamento = tempo necessario perché il numero di nuclei radioattivi sia la metà di quello iniziale.

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

= tempo necessario xK la metà di un dato numero di nuclei radioattivi decada

DIMOSTRAZIONE

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \rightarrow \log_e \left(\frac{1}{2} \right) = -\lambda T_{1/2}$$

→ $-\ln 2 = -\lambda T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Unità di misura dell'attività

1 bequerel = 1 Bq = 1 $\frac{\text{decadimento}}{s}$

1 Curie = 1 Ci = $3,7 \cdot 10^{10} \frac{\text{dec}}{s} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

pag 17

Energia di legame del nucleo di partenza (x')

$$B.E |_{x'} = (M_{x'} - Z M_p - N M_n) c^2$$

// nucleo risultante (x)

$$B.E |_x = c^2 [M_x - (Z-2) \cdot M_p - (A-4-Z+2) \cdot M_n] = c^2 [M_x - (Z-2) M_p - (A-Z-2) M_n]$$

// nucleo α

$$B.E |_{\alpha} = [M_{\alpha} - 2 \cdot M_p - 2 M_n] c^2$$

Relazione tra le energie di legame

$$\Delta B.E = B.E |_{x'} - (B.E |_x + B.E |_{\alpha}) = c^2 (M_{x'} - M_x - M_{\alpha}) = Q > 0$$

~ Si libera sempre energia ($Q > 0 \rightarrow$ esotermica). infatti, la reazione, se avviene, è spontanea.

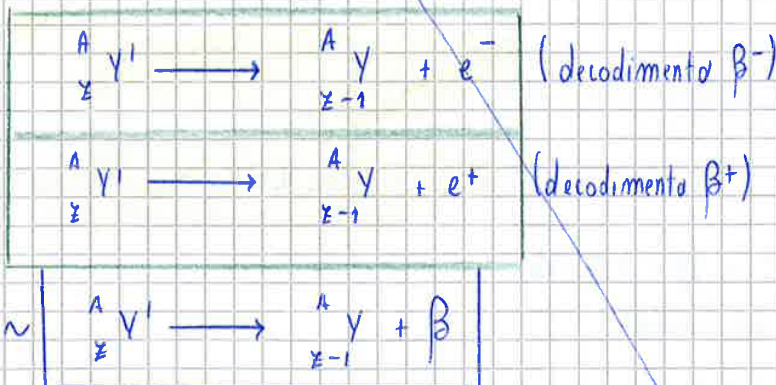
DIMOSTRAZIONE

Basta svolgere i calcoli.

DECADIMENTO β

= Reaz. nucleare in cui un nucleo Y' decade in uno più leggero Y emettendo una particella β (un elettrone e^- , o un protone e^+)

N.B.



Decadimento più comune



Conservazione energia

$$0 = (M_n - M_p - m_e) c^2 = K_p + K_e + K_{\bar{\nu}} - K_n^0 = K_p + K_e + K_{\bar{\nu}}$$

N.B.

• Essendo $M_p \gg m_e \gg m_{\nu} \longrightarrow K_p$ sarà trascurabile risp. a $K_{\bar{\nu}}$ e K_e (il protone si comporta come un cannone, gli altri \sim proiettili)

DECADIMENTO γ

- = Decadimento in seguito al quale si ha l'emissione di un fotone con energia dell'ordine del MeV.
- Solitamente esso è successivo a decadimenti α e β .

pag 20

COME DISTINGUERE I TRE DECADIMENTI

- La radiazione di una sorgente radioattiva viene fatta passare all'indietro per un campo magnetico, per poi incidere su una rete di rivelatori
- Le particelle γ non vengono deviate (perché non trasportano carica)
- Le particelle α vengono deviate verso l'alto (hanno carica +)
- Le particelle β^- vengono deflesse verso il basso (hanno carica -)
- // β^+ // l'alto, con un raggio di curvatura diverso dalle particelle α

- M_p = massa protoni ecc...
- M_N = massa nuclei

dove:
$$c^2 M_N (A, Z) - c^2 (Z \cdot M_p + N \cdot M_n) < 0$$

Bilancio di massa

Es 1

$$\bullet \text{ Sr} \Rightarrow M_{\text{Sr}} = 89,9077 \mu$$

$$T_{1/2} = 29,1 \text{ y} = 917697 \cdot 600 \text{ s}$$

$$\bullet M = 5 \text{ kg} = 5 \cdot 1000 \text{ g}$$

$$\bullet A_{\text{sic}} = 10 \frac{\text{cont}}{\text{min}}$$

$$A(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\longrightarrow A_{\text{sic}} = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \longrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$\longrightarrow A_{\text{sic}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N_0 e^{-\lambda t}$$

$$n = \frac{M}{M_{\text{Sr}}} \longrightarrow N_0 = \frac{M}{M_{\text{Sr}}} N_A$$

$$A_{\text{sic}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{M}{M_{\text{Sr}}} N_A e^{-\lambda t}$$

$$\longrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{A_{\text{sic}} \cdot T_{1/2} \cdot M_{\text{Sr}}}{\ln 2 \cdot M \cdot N_A}$$

$$-\lambda t = \ln \left(\frac{A_{\text{sic}} \cdot T_{1/2} \cdot M_{\text{Sr}}}{\ln 2 \cdot M \cdot N_A} \right)$$

$$t = \frac{-T_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(\frac{A_{\text{sic}} \cdot T_{1/2} \cdot M_{\text{Sr}}}{\ln 2 \cdot M \cdot N_A} \right)$$

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \left(\frac{M \cdot N_A \ln 2}{A_{\text{sic}} \cdot T_{1/2} \cdot M_{\text{Sr}}} \right)$$

" "
1/n

Es 3



- $k_N \approx 0$
- $M_N c^2 =$

Svolg

$$Q = (M_N - M_p - M_\pi) c^2 \longrightarrow \underline{Q = 37.7 \text{ MeV}}$$

$$Q = k_p + k_\pi$$

$$\underline{|k_p| = |k_\pi| = k}$$

$$p) \quad k_p^2 c^2 = k_p^2 + 2 m_p c^2 k_p$$

$$\pi) \quad k_\pi^2 c^2 = k_\pi^2 + 2 m_\pi c^2 k_\pi$$

$$k_p^2 + 2 m_p c^2 k_p = k_\pi^2 + 2 m_\pi c^2 (Q - k_p)$$

$$k_p^2 + 2 m_p c^2 k_p = (Q - k_p)^2 + 2 m_\pi c^2 Q - 2 m_\pi c^2 k_p$$

$$\longrightarrow \underline{k_p^2 + 2 m_p c^2 k_p} = \underline{Q^2 + k_p^2} - \underline{2 Q k_p} + \underline{2 m_\pi c^2 Q} - \underline{2 m_\pi c^2 k_p}$$

$$k_p (2 m_p c^2 + 2 m_\pi c^2 + 2 Q) = Q^2 + 2 m_\pi c^2 Q$$

$$k_p = \frac{11947,13 \text{ MeV}^2}{2231,2 \text{ MeV}}$$

$$\implies \underline{k_p = 5,35 \text{ MeV}}$$

$$\underline{k_\pi = 32,35 \text{ MeV}}$$

3.c

$$m \quad k_p : N_p \approx d_{238, U}$$

$$N = \frac{h}{\lambda} = \frac{h c}{\lambda c} = \frac{h c}{\sqrt{k^2 + 2 m_p c^2 k}} \approx \frac{h c}{k}$$

$$\approx \frac{h c}{\sqrt{2 m_p c^2 k}} \approx 2 R_0 A^{1/3}$$

$$\underline{k = 2,14 \text{ MeV}}$$

$$\underline{k = 4,27 \text{ MeV}}$$

$$\longrightarrow k \approx \frac{h^2 c^2}{4 R_0^2 A^{2/3} 2 m_p c^2}$$

3

3



- $K_\alpha = 8,784 \text{ MeV}$
- $M_{{}^{208}\text{Pb}} = 207,98 \mu = 193,733,37 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
- $M_\alpha = 3726 \text{ MeV}/c^2$

→ $K_{\text{Pb}}, M_{\text{Po}}?$

svolg

$$\begin{cases} Q = (M_{\text{Po}} - M_{\text{Pb}} - M_\alpha)c^2 = K_\alpha + K_{\text{Pb}} \\ \vec{0} = \vec{K}_{\text{Pb}} + \vec{K}_\alpha \longrightarrow |p_{\text{Pb}}| = |p_\alpha| = p \end{cases}$$

• N.R. (si parla di $A > 150 \longrightarrow Q$ sono piccole $\longrightarrow K_\alpha, K_{\text{Pb}} \ll \text{Masse}$)

$$\implies Q = \frac{p^2}{2m_\alpha} + \frac{p^2}{2M_{\text{Pb}}} = \frac{p^2}{2m_\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{\text{Pb}}} \right) = K_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{\text{Pb}}} \right)$$

$$Q = 8,784 \text{ MeV} \cdot \left(1 + \frac{3726}{193 \cdot 733,37} \right) =$$

$$\implies \underline{Q = 8,953 \text{ MeV}}$$

$$\implies \underline{K_{\text{Pb}} = 1,17 \text{ MeV}}$$

$$c^2 M_{\text{Po}} = Q + (M_{\text{Pb}} + M_\alpha)c^2$$

$$\implies \underline{M_{\text{Po}} = 193,751 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 208 \mu}$$

1b

$$\bullet p = mc \quad (p^2 c^2 = K^2 + 2mc^2 K \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4)$$

→ $v, \gamma, K?$

svolg

$$\bullet p = \gamma m v = mc \longrightarrow v = \frac{c}{\gamma} = c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

$$\implies v^2 = (c^2 - v^2) \longrightarrow 2v^2 = c^2 \longrightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}} = 212,132,03 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{c^2}{2 \cdot c^2} \right)^{-1/2} \longrightarrow \underline{\gamma \approx 1,41}$$

$$a) p^2 c^2 = K^2 + 2mc^2 K \longrightarrow \underline{m^2 c^4 = K^2 + 2mc^2 K}$$

$$b) \underline{K = (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma - 1)pc}$$

Prova 2 (coniglioro)

1

• $R_d: N \approx \text{dim } ^{208}\text{Pb}$ (di suo $\frac{d}{\text{raggio}}$)

Svolgimento

$$R = R_0 A^{1/3} \longrightarrow R = 1,12 \text{ fm} \cdot (208)^{1/3} \longrightarrow R \approx R_0 =$$

$d = 13,27 \text{ fm}$

$$N = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{p^2 + 2mc^2}c} \longrightarrow \sqrt{K} \approx \frac{hc}{N\sqrt{2}mc^2}$$

2



- $\tau_{\text{Pu}} = 127 \text{ y}$
- $\tau_{\text{U}} = 3,5 \cdot 10^5 \text{ y}$
- $K = 5,59 \text{ MeV}$
- $E_{\alpha} = 0,31 \text{ MeV}$
- $T = 4 \text{ anni}$
- $P = 395 \text{ W}$

Svolg

~~$$P = N_0 N (\overline{E E}) = N_0 \cdot \frac{1}{\tau_{\text{Pu}}(s)} \overline{E E}$$~~

$\longrightarrow N_0 =$

$$A = N_0 N e^{-Nt} \left[\frac{\text{dec}}{s} \right] \longrightarrow \frac{A}{N} \overline{E A E} = P_{el}$$

$$\longrightarrow P_{el} = \overline{E E} N_0 e^{-Nt} N = \overline{E E} \frac{1}{\tau_{238}} N_0 e^{-\frac{t}{\tau_{238}}}$$

$$\implies N_0 = \frac{P_{el} \cdot \tau_{238} \cdot e^{\frac{t}{\tau_{238}}}}{\overline{E E}}$$

• $P_{el} = 395 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 2,46875 \cdot 10^{21} \frac{\text{eV}}{\text{s}}$

• $\tau_{238} = 4005072000 \text{ s}$

• $t = 4 \text{ y} = 126144000 \text{ s}$

• $K = 5,59 \cdot 10^6 \text{ eV}$

$$\longrightarrow N_0 = 3,116 \cdot 10^{25}$$

$$n = \frac{M}{238 \text{ g/mol}} \longrightarrow N_A \frac{M}{238} = N_0 \implies \underline{M = 12,31 \text{ kg}}$$

2.b

• Un campione contiene atomi stabili

$$\longrightarrow \bar{\tau} = \infty$$

$$\bullet T_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9 \text{ y}$$

$$\bullet \frac{N_{AR}}{N_X} = 10,3$$

→ h campione ?

Svolg

$$T_{1/2X} = \frac{\ln 2}{\lambda} \longrightarrow \lambda = 17,58 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{N_{TOT}}{N_X} = \frac{N_X + N_{AR}}{N_X} = 1 + \frac{N_{AR}}{N_X} = \frac{N_{TOT}^0 e^{-\lambda_{TOT} t}}{N_X^0 e^{-\lambda_X t}} = e^{\lambda_X t}$$

= 1 perché $\bar{\tau} = \infty$ (cont. atomi stabili)

= 1 (tutti gli at. di cui derivano da X)

$$\longrightarrow \lambda_X t = \ln \left(1 + \frac{N_{AR}}{N_X} \right) \sim t = \frac{1}{\lambda_X} \ln \left(1 + \frac{N_{AR}}{N_X} \right)$$

$$\longrightarrow t = 4,37 \cdot 10^9 \text{ y}$$

3

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$Q = (M_n - M_p - m_{e^-}) c^2 = K_{e^-} + K_{p_H}$$

$$Q = 0,27 \text{ MeV}$$

$$|p_n| = |p_p| = p$$

3. c

• N.R.

• $\lambda' = 2\lambda$ Svolg.

$$\begin{cases} p^2 c^2 = \lambda^2 + 2mc^2 \lambda \\ E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \end{cases} \quad \cdot \text{N.R.} \longrightarrow p^2 c^2 = 2mc^2 \lambda$$

$$\longrightarrow \frac{p^2}{p} = 2m\lambda \longrightarrow p = \sqrt{2m\lambda}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \longrightarrow N = \frac{h}{\lambda}$$

$$N = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\sqrt{2m\lambda}}$$

$$N' = \frac{h}{\sqrt{4m\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{2} \sqrt{2m\lambda}}$$

$$N' = \frac{N}{\sqrt{2}}$$

• $\lambda'' = 2\lambda'$

$$\longrightarrow N = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{m\lambda'} ; \quad N'' = \frac{h}{2m\lambda'} = \frac{N}{2}$$

$$N'' = \frac{N}{2}$$



3 $\implies \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t} = \text{probabilità che il nuclide } N(t) \text{ raggiunga il tempo } t \text{ senza decadere}$

Condizioni stazionarie / asintotiche)

= Condizione che si verificano per $t \rightarrow +\infty$

- In questo caso $N_{as} = 0$

DIM

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} N_0 e^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_0}{e^{\lambda t}} = 0$$

Tutti i tipi di probabilità

1 - $\lambda = \text{probab. per unità di } t \text{ che il nuclide decada } [s^{-1}]$

2 - $\lambda dt = \text{prob. che il nuclide decada tra } t, t+dt$

3 - ~~$\int_{t_1}^{t_2} \lambda dt$~~ $\neq N(t) \cdot \lambda dt = \text{numero di decod. tra } t, t+dt$

4 - $\int_{t_1}^{t_2} N(t) \lambda dt = \text{numero di decod. tra } (t_1, t_2)$

5 - ~~N.B.~~ $\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t} = \text{prob. che il nuclide raggiunga il tempo } t \text{ senza decadere}$

6 - $e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt = \text{probabilità che il nuclide raggiunga il tempo } t \text{ senza decadere e che decada tra } t, t+dt$

7 - $\int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt = // \text{ tra } t_1, t_2.$

N.B.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt = 1 \text{ (perché prima o poi decade per forza se è instabile)}$$

// in presenza di un pozzo

$$\Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + s(t) - p(t)$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t dt' \cdot (s(t') - p(t')) \cdot e^{-\lambda(t-t')}$$

I NEUTRONI PRONTI HANNO $E > E_0$ DI QUELLI RITARDATI

$$\bar{E} = \int_0^{+\infty} \chi(E) \cdot E \cdot dE = \text{ENERGIA MEDIA DI EMISSIONE DEI NEUTRONI PRONTI (PRODOTTI DA FISSIONE)}$$

$$\int_0^{+\infty} \chi(E) \cdot dE = 1$$

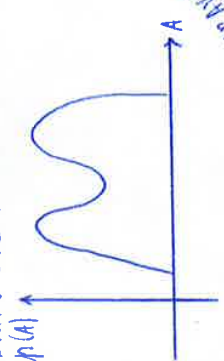
SINGOLO
 $\chi(E) \cdot dE = \text{PROB. CHE UN N. VIA EMESSO CON } E \text{ COMPRESA TRA } E \text{ E } E+dE$

$\chi(E) [J^{-1}] = \text{DISTRIBUZIONE ENERGETICA DEI NEUTRONI SEC} = \text{SPETTRO DI FISSIONE}$

IN SEGUITO ALLA FISSIONE VENGONO EMESSI ν NEUTRONI ($\nu = 2.5$) - SECONDARI

NEUT. PRONTI = EMESSI Istantaneamente
 RITARDATI = EMESSI dopo molto lunghi
 risp alla vita (λ^{-1} min)

LA FISSIONE NUCLEARE NON E' SIMMETRICA
 → L'ADAPTAMENTO DELLA PROB. CHE DALLA FISSIONE SI GENERINO DUE NUCLEI DI MASSA IDENTICA A, E;



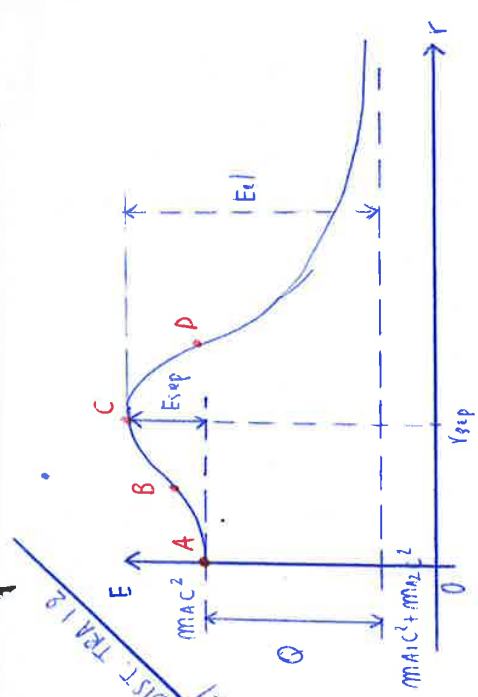
SPESO E_{exp} E' FORNITA ALTREMENTE L'ASSEGNAZIONE DI UN NEUTRONE
 DI ENER. IN SEGUITO ALLA SUA EN. DI LEGAME AL NUCLEO FORMATO
 → TUTTI GLI ATOMI SONO FISSIONABILI, QUELLI NON FISSIONABILI POSSONO DIVENTARE CON UNA SERIE DI TRASFORMAZIONI (ACQUISTO LESSIONE 2/11)
 ELEMENTO FISSIONE = ELEMENTO LA CUI FISSIONE PUO' ESSERE PROVOCATA ANCHE DA UN n CON $E_n = 0$ ($E_{cin} = 0$)
 // FISSIONABILE = // FISSIONE PUO' ESSERE PROVOCATA SOLO DA n CON E_n NON TRASCURABILE.

Es. $^{235}_{92}\text{U} + n \rightarrow ^{236}_{92}\text{U}$
 $E_{leg}(^{236}\text{U}) = 6.4 \text{ MeV}$
 $E_{exp}(^{236}\text{U}) = 5.3 \rightarrow E_{exp} < E_{leg} \rightarrow$ FISSIONE
 $E_{exp}(^{238}\text{U}) = 4.15, E_{exp} = 5.15 \rightarrow$ FISSIONABILE

FISSIONE NUCLEARE

FISSIONE SPONTANEA = FISSIONE IN CUI L'EN. NECESSARIA PER FAR AVVENIRE LA REAZIONE E' NULLA.

SCISSIONE DI UN NUCLEO PIU' PESANTE IN 2 NUCLEI PIU' STABILI ALL'INCIRCA UGUALI
 VARIAZIONE DEL POTENZIALE AL VARIARE DELLA DIST. TRA I 2 LOBI CHE DARANNO VITA AI NUOVI NUCLEI



• $r = 0$ (• nucleid z) supportato in quiete → L'EN DEL NUC $^A_z X = EN$ A RIPOSO
 • $0 < r < r_{sep}$ (B) → PER DEFORMARE IL NUCLEO PER PORTARE I LOBI AD UNA DISTANZA r BISOGNA FORNIRE ENERGIA (PER VINCERE LE FORZE DI LEGAME)
 • $r = r_{sep}$ (DIST. PER CUI I LOBI SONO SEPARATI, ESISTONO FORZATI 2 NUCLEI DI $r_1, R; r_2 \text{ e } r_1 + r_2$) → LE FORZE NUCLEARI SI CESSANO BRUSCAMENTE
 • $r > r_{sep}$ (D) → LA REPULSIONE ELETTROSTATICA TENDE A SEPARARE I 2 NUCLEI



• $Q = mm_1c^2 + mm_2c^2 = E_{el} - E_{sep}$ DOVE: • $E_{exp} = E(r = r_{sep})$
 $E_{el} =$ L'EN. CHE IL SIST. FORNISCE SE LE DUE CARICHE, AL MOMENTO DELLA SEPARAZIONE SONO LASCIATE ALLONTANARSI ALL' INFINITO. (LA REP. ELETTROST. → DIVIDE, DIVIDENDO = $(k_1 + k_2) \sim$ UNA PARTE DELL'EN ASSOCIATA ALLA MASSA E' CONVERTITA IN ν EN CINETICA DEL FRAMMENTI

Diffusione

pag 1

• Considero delle particelle

• aventi velocità $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

• che hanno una direz di volo $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$

1 → $n(\vec{r}, E, \vec{n}, t)$ = numero di particelle per unità di angolo solido intorno alla direzione di volo, (o di direz), per unità di energia, per unità di volume intorno ad \vec{r} .

2 → $n(\vec{r}, E, \vec{n}, t) \cdot d\vec{r} dE d\vec{n}$ = n° di particelle che, all'istante t , sono all'interno del volume dV intorno a \vec{r} , hanno energia compresa tra $E, E+dE$, hanno direz di volo compresa in $d\Omega$ intorno a \vec{n} .

3 → $\phi(\vec{r}, E, \vec{n}, t)$ = flusso di particelle = somma dello spazio percorso per unità di tempo, dalle particelle per unità di V , di E , di angolo solido
 $= n(\vec{r}, E, \vec{n}, t) v$

4 → Spazio percorso da tutte le particelle che all'istante t , hanno in compresa tra $E, E+dE$, hanno direz di volo $d\Omega$ intorno a \vec{n} , sono all'interno del volume dV intorno ad \vec{r} , nel tempo dt
 $= dx = (n(\vec{r}, E, \vec{n}, t) \cdot v) \cdot dt \cdot d\vec{r} dE \cdot dV = \phi(\vec{r}, E, \vec{n}, t) d\vec{r} dE d\Omega dt$

5 → Numero di collisioni avvenute nel tempo dt , a causa delle particelle con energia $E, E+dE$, che stanno nel $V dV(\vec{r})$, per nell'angolo solido $d\Omega(\vec{n})$
 $= \sum \phi(\vec{r}, E, \vec{n}, t) d\vec{r} dE d\Omega dt$

6 → • E_i = l'energia rilasciata in seguito ad ogni evento ν
 \Rightarrow l'energia rilasciata a causa di tutte le collisioni (o fenomeni) tra le particelle nel volume $dV(\vec{r})$, nell'angolo solido $d\Omega(\vec{n})$, con $E, E+dE$
 $= \sum E_i \phi(\vec{r}, E, \vec{n}, t) d\vec{r} dE d\Omega dt$

7 → l'energia rilasciata in seguito ai fenomeni tra tutte le particelle contenute nel volume V del sistema, aventi qualsiasi energia, direz di moto, nel tempo dt
 $dE_T = \left(\int \int \int d\vec{r} dE d\vec{n} \sum \phi(\vec{r}, E, t) \right) dt$

DIN

pag 3

- Il numero di particelle che nel tempo dt attraversano l'area, avente un'area $E, E+dE$, direz. di volo entro d'angolo $d\Omega$, sono quelle che al tempo t sono all'interno del cilindro di base dA e altezza vdt

$$\begin{aligned} \longrightarrow n(\vec{r}, E, \vec{r}, t) \cdot dE d\Omega dV &= n(\vec{r}, E, \vec{r}, t) \cdot dA \vec{v} dt dE d\Omega \\ &= \phi(\vec{r}, E, \vec{r}, t) \cdot dE d\Omega dt \vec{r} \cdot (\vec{v} \cdot dA) \end{aligned}$$

\longrightarrow // per unità di tempo

$$= \phi(\vec{r}, E, \vec{r}, t) dE d\Omega \vec{r} \cdot (\vec{v} \cdot dA)$$

$$\implies \vec{J}(\vec{r}, E, \vec{r}, t) \cdot \vec{v} dA = \left(\phi(\vec{r}, E, \vec{r}, t) dE d\Omega \vec{r} \right) \cdot (\vec{v} \cdot dA)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, E, \vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, E, \vec{r}, t) dE d\Omega \vec{r}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int dE \int d\Omega \phi(\vec{r}, E, \vec{r}, t) \vec{r}$$

Equazione della continuità

- Considero neutroni monoenergetici (aventi la stessa velocità \sim stessa energia)
- Campo neutronico isotropo (\sim tutti i neutroni hanno la stessa probabilità di andare in una direz., \sim la probabilità che i neutroni si muovano in una certa direz. non dipende dalla direzione)

\longrightarrow Il campo deve essere lontano dai fonti di anisotropia

$$\implies \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$

dove:

- $S(\vec{r}, t)$ = funzione di distribuzione delle sorgenti = numero di neutroni emessi nel punto \vec{r} e nel tempo t , per unità di volume e di tempo
- Σ_a = sezione d'urto di assorbimento
- $\phi(\vec{r}, t)$ = flusso neutronico
- $\vec{J}(\vec{r}, t)$ = corrente di neutroni

N.B

= eq. che ha 2 incognite, \vec{J} ($\rightarrow 4$ incognite) e $\phi(\vec{r}, t)$
 \longrightarrow (multiplicabili)

LEGGE DI FICK • particelle monoenergetiche

pag 5

1. Campo isotropo (\sim la probabilità che il neutrone si muova in una certa direz. non dipende dalla direzione.)
 $\longrightarrow \Sigma_a$ deve essere piccolo. (altrimenti c'è anisotropia)
2. Mezzo omogeneo (\sim la proprietà del mezzo non varia in funzione del punto considerato. N.B. l'area è Σ_T)
3. Collision dominated system = sistema dominato dalle collisioni, e quindi talmente scatterante che il contributo alla corrente da punti lontani è molto piccolo (sulla sup. considerata giungono particelle che giungono da punti molto vicini)
 $\longrightarrow \Sigma_a$ è molto grande

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = - \frac{\Sigma_s(\vec{r})}{3 \Sigma_T^2(\vec{r})} \nabla \phi(\vec{r}, t) = - D(\vec{r}) \nabla \phi(\vec{r}, t)$$

dove:

$$\frac{1}{3} D(\vec{r}) = \frac{\Sigma_s(\vec{r})}{3 \Sigma_T^2(\vec{r})} = \text{coef. di diffusione}$$

N.B.

$$\Sigma_a \approx 0$$

$$\longrightarrow \Sigma_T \approx \Sigma_s \implies D = \frac{1}{3 \Sigma_T} = \frac{l_M}{3} \quad [L]$$

N.B.2

- l'eq. non è valida:
- in prossimità della frontiera;
 - in presenza di sorgenti fortemente localizzate;
 - in presenza di assorbitori localizzati;

- Probabilità che le particelle emesse dal volume dV , per percorrere una distanza r senza:
 - essere assorbite
 - subire fenomeni di scattering

$$= e^{-\Sigma r} \quad \text{dove} \quad \Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$$

→ I neutroni emessi dal volume dV nell'unità di tempo, che hanno una direzione tale da finire su dA_z , che percorrono la distanza r senza essere catturati o subire fenomeni di scattering, giungendo su dA_z

$$= \Psi(\vec{r}, t) dV \frac{dA_z \cos \vartheta}{4\pi r^2} e^{-\Sigma r}$$

N.B.

- Noi vogliamo calcolare $\int \vec{J} \cdot d\vec{A}_z (= \text{neutroni che attraversano, all'istante } t, \text{ la superficie } dA_z, \text{ per unità di tempo})$ non qualche tempo dopo.
- I neutroni emessi all'istante t dal volume dV , giungeranno su dA_z al tempo $t' = t + \frac{r}{v}$

→ Noi consideriamo le particelle emesse in $t - \frac{r}{v}$

$$\Psi\left(\vec{r}; t - \frac{r}{v}\right) dV \frac{dA_z \cos \vartheta}{4\pi r^2} e^{-\Sigma r} \quad \text{che giungono su } dA_z \text{ al tempo } t' = t - \frac{r}{v} + \frac{r}{v} = t$$

⇒ $\int \vec{J} \cdot d\vec{A}_z =$ totale dei neutroni che attraversano su dA_z per unità di t , provenendo

dal semispazio superiore

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} \Psi(\vec{r}, t - \frac{r}{v}) \left(\cancel{r^2 \sin \vartheta} dr d\vartheta d\varphi \right) \frac{dA_z \cos \vartheta}{4\pi r^2} e^{-\Sigma r}$$

passando in coordinate polari: ($dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$)

N.B.

Per l'ipotesi 3, il contributo a $\vec{J}(\vec{r}, t)$ da punti lontani è piccolo

→ si può ipotizzare che $t - \frac{r}{v} \cong t$, ossia che il tempo necessario per percorrere r sia trascurabile (quest'ipotesi sarebbe valida solo per $v = \infty$)

$$\Rightarrow \int \vec{J} \cdot d\vec{A}_z = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} \Psi(\vec{r}, t) \cdot \frac{dA_z \cos \vartheta \sin \vartheta}{4\pi} e^{-\Sigma r} dr d\vartheta d\varphi$$

$$= \frac{dA_z}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} \Psi(\vec{r}, t) \cos \vartheta \sin \vartheta e^{-\Sigma r} dr d\vartheta d\varphi$$

$$\rightarrow J_{\vec{z}} dA_{\vec{z}} = dA_{\vec{z}} \left(\frac{\varphi(\vec{0}, t)}{4\Sigma} + \frac{1}{6\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{0}} \right)$$

pag 9

$$\sim J_{\vec{z}} = \frac{\varphi(\vec{0}, t)}{4\Sigma} + \frac{1}{6\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{0}}$$

- Si può dimostrare che

$$J_{\vec{z}^+} = \frac{\varphi(\vec{0}, t)}{4\Sigma} - \frac{1}{6\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{0}}$$

$$\rightarrow J_{\vec{z}} = J_{\vec{z}^+} - J_{\vec{z}^-} = - \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{0}}$$

- Si può dimostrare che

$$J_y = - \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\vec{0}} ; \quad J_x = - \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\vec{0}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{J}(\vec{0}, t) &= J_x \vec{\mu}_x + J_y \vec{\mu}_y + J_z \vec{\mu}_z = - \frac{1}{3\Sigma^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\vec{0}} \vec{\mu}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\vec{0}} \vec{\mu}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{0}} \vec{\mu}_z \right) \\ &= - \frac{1}{3\Sigma^2} \nabla \varphi(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{0}} \end{aligned}$$

N.B.

$$\varphi(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t) + \Sigma \phi(\vec{r}, t) \stackrel{\text{per ipotesi}}{\approx} \Sigma \phi(\vec{r}, t)$$

$$\rightarrow \vec{J}(\vec{0}, t) = - \frac{\Sigma}{3\Sigma^2} \nabla \phi(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{0}}$$

• La scelta dell'origine è arbitraria, quindi le formule valgono per un qualsiasi punto \vec{r}

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = - \frac{\Sigma}{3\Sigma^2} \nabla \phi(\vec{r}, t) \text{ c.v.d.}$$

Caratt. riduzione

pag 11

- = equazione:
- alle derivate parziali;
 - del primo ordine resp. a t;
 - // secondo ordine resp. allo spazio; (\rightarrow 2 cond. al contorno)
 - non omogenea
 - coef. non costanti

CASO 1: Calcolo del flusso generato:

- in un mezzo \rightarrow infinitamente esteso in ogni direzione, beamlike
- da una sorgente \rightarrow puntiforme
 - \rightarrow collocata nell'origine
 - \rightarrow che emetta S neutroni al secondo
- nel caso stazionario

δ di Dirac

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z) = \text{una funzione definita come: } \begin{cases} 0 & \cdot \vec{r} \neq \vec{0} \\ +\infty & \cdot \vec{r} = \vec{0} \end{cases}$$

= rappresenta una sorgente puntiforme (localizzata) di potenza unitaria collocata nell'origine

Proprietà generale

1. Rappresenta una potenza unitaria $\sim \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}) d\vec{r} = 1$

Proprietà su problema piano (lungo x)

- 1) $\int_a^b \delta(x) dx = 1$ se $a < 0 < b$ (l'intervallo (a,b) contiene l'origine)
- 2) $\int_a^b \delta(x) dx = 0$ se $0 < a$ o $0 > b$ (su un'intervallo che non contiene l'origine)
- 3) $\int_a^0 \delta(x) dx = \int_0^b \delta(x) dx = \frac{1}{2} \quad \forall (a,b) : a < 0 < b$ ($\delta(x)$ e sim. resp. all'origine)
- 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad \forall f(x)$ continua in $x=0$

DIM

• $\delta(x) \neq 0$ solo in $x=0 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) f(x) dx$ dove $(-\epsilon, \epsilon) =$ intorno di $x=0$ in cui $f(x) = f(0)$

$\rightarrow = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0)$

DIMOSTRAZIONE

pag 13

1. l'eq. della diffusione: $\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = s(\vec{r}, t) + \nabla \cdot (D \nabla \phi(\vec{r}, t)) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t)$

- Mezzo omogeneo $\rightarrow D = f(\vec{r})$
- Caso staz $\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}^0); s(\vec{r}, t) = s(\vec{r}^0)$

• Mezzo infinito lungo y, z $\rightarrow \phi, s, = f(x)$

$\rightarrow D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + s(x) s_0 - \Sigma_a \phi(x) = 0$

N.B

• $\forall x: x \neq 0$ si ha che $D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \Sigma_a \phi(x)$

\rightarrow l'eq. caratteristica è $D \alpha^2 = \Sigma_a \rightarrow \alpha = \pm \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}} = \pm \frac{1}{L}$

• α è una soluzione reale (se fosse immaginaria la soluz sarebbe trigonometrica)

$\rightarrow \phi(x) = A e^{x/L} + B e^{-x/L}$

$x > 0$

1. Condizione di annullamento all'infinito (il rest. è dissipativo)

\rightarrow lim $\phi(x) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow \phi(x) = B e^{-x/L}$

per sistemi simmetrici

emette da un lato e metà dall'altro

2. Condizione di sorgente localizzata (campo isotropo \rightarrow metà delle parti

\rightarrow lim $J(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -D \frac{d\phi(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0^+} +D \frac{B}{L} = \frac{s_0}{2} \rightarrow B = \frac{s_0 L}{2D}$

$\rightarrow \phi(x) = \frac{s_0 L}{2D} e^{-x/L}$ per $x > 0$

$x < 0$

1. lim $\phi(x) = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow \phi(x) = A e^{x/L}$

2. lim $J(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -D \frac{d\phi(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -D \frac{A}{L} e^{x/L} = -\frac{s_0}{2} \sim A = \frac{s_0 L}{2D}$

$\rightarrow \phi(x) = \frac{s_0 L}{2D} e^{x/L}$ $x < 0$

$\rightarrow \phi(x) = \frac{s_0 L}{2D} e^{-|x|/L} \begin{cases} |x| = x \text{ per } x > 0 \\ |x| = -x \text{ per } x < 0 \end{cases}$

N.B. Sorgente non localizzata, mezzo infinito lungo su y,z, omogeneo pag 15

$$\rightarrow \phi(x) = \int_a^b G(x' \rightarrow x) S(x') dx'$$

- (a,b) intervallo in cui è presente la sorgente
- $G(x' \rightarrow x)$ = funzione di Green del problema.

Flusso generato in condizioni stazionarie

- in un mezzo
 - infinitamente esteso in tutte le direzioni
 - omogeneo

- generato da una sorgente
 - puntiforme
 - posta nell'origine

$$\rightarrow \Delta \nabla^2 \phi(r) - \epsilon_0 \phi(r) + S_0 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} = 0$$

$$\rightarrow \phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} \cdot \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}$$

N.B.

• $\phi(r \rightarrow 0) \rightarrow +\infty$ perché nell'origine c'è una sorgente localizzata

Se la sorgente è posta in r' $-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{L}$

$$\rightarrow \phi(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) = \frac{S_0}{4\pi D} \frac{e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{L}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{Flusso generato in } \vec{r} \text{ da una sorgente puntiforme collocata in } \vec{r}'$$

$$\sim G(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{L}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Condizione di sorgente

pag 17

• Circondo l'origine con uno sfero di raggio ϵ .

→ Per $\epsilon \rightarrow 0 \implies$ numero di neutroni emessi dallo sorgente puntiforme contenuta nella sferetta

=

Flusso del vettore corrente attraverso la superficie dello sferello

Infatti, trascurando gli assorbimenti, l'equaz. di continuità e

$$\frac{1}{N} \frac{d\phi(r,t)}{dt} = S(r)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{dn}{r^2} d\vec{r} = \underbrace{S_0}_{\substack{\text{numero di particelle per} \\ \text{unita di t immessa dalla} \\ \text{sorgente}}} - \sum_a \int_V \phi(r,t) d\vec{r} - \underbrace{\sum_{n=1}^N \int_V \vec{J}(r,t) \cdot d\vec{A} \vec{e}_n}_{= J(r) 4\pi \epsilon^2}$$

→ $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(r) 4\pi \epsilon^2 = S_0$

$$J(r) = -D \frac{d\phi(r)}{dr} = +DB \left(+ \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{r} e^{-r/L} + \frac{1}{r^2} e^{-r/L} \right)$$

→ $J(\epsilon) = DB \left(\frac{1}{L\epsilon} e^{-\epsilon/L} + \frac{1}{\epsilon^2} e^{-\epsilon/L} \right)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} DB 4\pi \left(\frac{\epsilon}{L} e^{-\epsilon/L} + e^{-\epsilon/L} \right) = L DB 4\pi \left(\frac{0}{L} + 1 \right) = DB 4\pi = S_0$$

→ $B = \frac{S_0}{4\pi D}$

$$\phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} e^{-r/L}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \phi(x' \rightarrow x) &= \frac{S}{4\pi D} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho \frac{e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}} d\rho = \quad \text{pag 19} \\ &= \frac{S}{4\pi D} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{+\infty} \rho \frac{e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}} \end{aligned}$$

N.B

$$\frac{d}{d\rho} \left(e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}} \right) = \frac{d}{d\rho} (\rho^2) \cdot \frac{d}{d\rho} \left(-\frac{1}{L} \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2} \right) e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

$$= \cancel{\rho} \cdot \left(-\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\cancel{\rho} \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}} \right) e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

$$\rightarrow \int \frac{e^{-1/2 \sqrt{L}}}{\sqrt{L}} \rho d\rho = -L e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

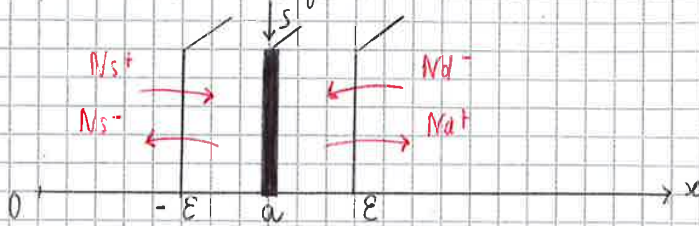
$$\rightarrow \phi(x' \rightarrow x) = \frac{S}{4\pi D} \cdot 2\pi (-L) \left| e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2 + \infty}} - e^{-1/2 \sqrt{(x-x')^2}} \right| =$$

$$= \frac{-SL}{2D} \left(\frac{e^{-\infty}}{L} - e^{-1/2 |x'-x|} \right) = \frac{SL}{2D} e^{-1/2 |x'-x|}$$

pag 21

DIMOSTRAZIONE

- Considero una sorgente localizzata in a
- Considero due piani intorno alla sorgente, molto vicini ad essa



- N_d^- = particelle poste a destra della sorgente che si muovono in direz. discorde a x
- N_d^+ = // concorde a x
- N_s^- = ..

→ Effettuo un bilancio (per $a - \epsilon \rightarrow a$ e $a + \epsilon \rightarrow a$, si ha che $\int_a \phi(x) dx = 0$ (non vengono ass. particelle)

$$N_{in} = S + N_d^+ + N_s^+$$

$$N_{out} = N_d^- + N_s^-$$

$$N_{in} = N_{out}$$

$$\rightarrow S = (N_d^+ - N_d^-) - (N_s^+ - N_s^-) = J_d(a + \epsilon) - J_d(a - \epsilon) = J_d(a^+) - J_d(a^-)$$

CONDIZ. DI INTERFACCIA CON SORGENTE

- Sorgente localizzata

→ Il flusso è continuo all'opposto il piano sorgente

$$\phi^+(a^+) = \phi(a^-)$$

CONDIZIONE DI INTERFACCIA (Mezzo eterogeneo)

- Considero l'interfaccia tra due strati omogenei (in cui non c'è la sorgente) in a

→ $\phi(a^-) = \phi(a^+)$ il flusso è continuo all'interfaccia

→ $J(a^-) = J(a^+)$ la corrente è continua all'interfaccia

N.B.

- Anche se $J(x)$ è continua (all'interfaccia) → ϕ è derivabile all'interfaccia $\Leftrightarrow D_1 = D_2$

DIM

- Una funzione è derivabile in $a \Leftrightarrow \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{a^+} = \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{a^-}$

→ ϕ è continua in $a \Leftrightarrow \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{a^+} = // \left|_{a^-}$, Essendo $\left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{a^+} = -\frac{J(a^+)}{D_+}$ e $\left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{a^-} = -\frac{J(a^-)}{D_-}$

⇒ $\phi^-(x) = \phi^+(x) \Leftrightarrow D_1 = D_2$

CONDIZIONE DI CONTORNO SENZA VUOTO

- Mezzo non a contatto col vuoto nel contorno a

→ Si possono stabilire la corrente al contorno $J(a) = J_0$

→ Si può stabilire la corrente entrante al contorno $J^+(a) = J_0$ (non quello uscente perché dipende dalle collisioni nel sistema)

$$J^-(x) = // + //$$

$$J^+(x) = \frac{1}{4} \phi(x) - \frac{D}{2} \frac{d\phi(x)}{dx}$$

Condizioni da applicare

1) Condiz. di annullamento all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_{II}(x) = 0 \rightarrow E = 0 \sim \phi_{II}(x) = M e^{-x/L}$$

2) Continuità del flusso attraverso il piano sorgente

$$\phi_{II}(a^+) = \phi_{I}(a^-) \rightarrow$$

3) Annullamento del flusso nell'interfaccia (estrapolato, e quello che ci danno)

$$\phi_I(0) = 0$$

4) Condiz. di sorgente

$$J_{II}(a^+) - J_I(a^-) = S$$

• Per condiz 3 $\rightarrow \phi(0) = A + B = 0 \rightarrow A = -B \sim \phi_I = A (e^{x/L} - e^{-x/L}) = 2A (\sinh(x/L))$
 $\sim \phi_I = C \sinh(x/L)$

• Condiz. 2 $\rightarrow C \sinh\left(\frac{a}{L}\right) = M e^{-a/L}$

• Condiz 4: $J_{II}(x) = -D \frac{d\phi_{II}(x)}{dx} = +D \frac{M}{L} e^{-x/L} \rightarrow J_{II}(a^+) = \frac{DM}{L} e^{-a/L}$

$$J_I(x) = -D \frac{d\phi_I(x)}{dx} = -D \frac{C}{L} \cosh\left(\frac{x}{L}\right) \sim J_I(a^-) = -\frac{DC}{L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right)$$

$$\rightarrow \frac{DM}{L} e^{-a/L} + \frac{DC}{L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right) = S$$

$$\left\{ \begin{aligned} C = \frac{M e^{-a/L}}{\sinh(a/L)} \rightarrow \frac{DM}{L} e^{-a/L} + \frac{D}{L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right) M \frac{e^{-a/L}}{\sinh(a/L)} = S \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow \frac{DM}{L} e^{-a/L} \left(1 + \frac{\cosh(a/L)}{\sinh(a/L)} \right) = \frac{DM}{L} e^{-a/L} \left(\frac{\sinh(a/L) + \cosh(a/L)}{\sinh(a/L)} \right) =$$

$$= \frac{DM}{L} e^{-a/L} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{e^{a/L} - e^{-a/L} + e^{a/L} + e^{-a/L}}{\sinh(a/L)} \right) = \frac{DM}{L} e^{-a/L} \frac{e^{a/L}}{\sinh(a/L)} = S$$

$$\rightarrow M = \frac{SL}{D} \sinh\left(\frac{a}{L}\right) \rightarrow \phi_{II}(x) = \frac{SL}{D} \sinh\left(\frac{a}{L}\right) e^{-x/L}$$

$$\rightarrow C = \frac{SL}{D} e^{-a/L} \rightarrow \phi_I(x) = \frac{SL}{D} e^{-a/L} \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$$

Flusso in un mezzo

• isotropico

pag 25

• circoscritto da vuoto da entrambe le estremità

• generato da una sorgente

• localizzata in a

• all'interno del mezzo



$$\begin{cases} \phi_I(x) = \frac{SL}{D} \frac{\sinh\left(\frac{H-a}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{H}{L}\right)} \sinh\left(\frac{x}{L}\right) & 0 \leq x < a \\ \phi_{II}(x) = \frac{SL}{D} \frac{\sinh\left(\frac{a}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{H}{L}\right)} \sinh\left(\frac{H-x}{L}\right) & a < x \leq H \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

Eq: $D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + S(x) - \Sigma_a \phi(x) = 0 \Rightarrow D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \delta(x-a)S - \Sigma_a \phi(x) = 0$ (= caso precedente)

• $x \neq a$

$\rightarrow D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \phi(x) \rightarrow \phi(x) = Ae^{x/L} + Be^{-x/L}$

Divido il dominio

• $0 \leq x < a$

• $a < x \leq H$

$\rightarrow \phi_I(x) = Ae^{x/L} + Be^{-x/L}$

$\rightarrow \phi_{II}(x) = Fe^{x/L} + Ge^{-x/L}$

Condizioni di interfaccia col vuoto

1) $\phi_I(0) = 0 \rightarrow A = -B \sim \phi_I = C \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$

2) $\phi_{II}(H) = 0 \rightarrow Fe^{H/L} + Ge^{-H/L} = 0 \rightarrow F = -Ge^{-2H/L}$

$\Rightarrow \phi_{II}(x) = -Ge^{-2H/L} e^{x/L} + Ge^{-x/L} = G \left(e^{-x/L} - e^{-2H/L} e^{x/L} \right) = G \left(\frac{e^{-x/L} e^{H/L} - e^{-2H/L} e^{x/L} e^{H/L}}{e^{H/L}} \right)$

$= \frac{G}{e^{H/L}} \left(e^{\frac{H-x}{L}} - e^{\frac{x-H}{L}} \right) = \frac{2G}{e^{H/L}} \sinh\left(\frac{H-x}{L}\right) = Z \sinh\left(\frac{H-x}{L}\right)$

$\rightarrow \phi_{II}(x) = Z \sinh\left(\frac{H-x}{L}\right)$

N.B.: $\phi_{II}(x) = -Z \sinh\left(\frac{x-H}{L}\right) = -Z' \sinh\left(\frac{x-H}{L}\right)$

Guardare prima la pagina successiva

pag 27

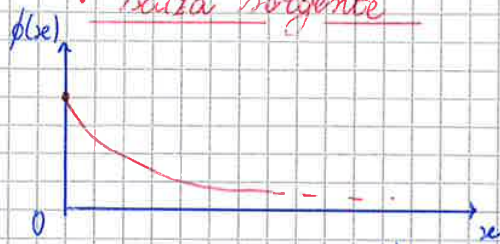
$$\rightarrow \phi_I(x) = \frac{SL}{D} \frac{\sinh\left(\frac{H-x}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{H}{L}\right)} \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\rightarrow \phi_{II}(x) = \frac{SL}{D} \frac{\sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{H}{L}\right)} \sinh\left(\frac{H-x}{L}\right)$$

Flusso generato in un mezzo • seminfinito (contorno $x=0$) pag 29

• piano

• senza sorgente



$$J^+(x) = \frac{1}{4} \phi(x) - \frac{D}{2} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx}$$

• Nota la corrente al contorno $J(x=0) = J_0$ | • Nota la corrente entrante al contorno $J^+(0) = J_0$

$$\longrightarrow \phi(x) = \frac{L J_0}{D} e^{-\frac{x}{L}}$$

$$\longrightarrow \phi(x) = \frac{4 J_0}{1 + 2D/L} e^{-x/L}$$

DIMOSTRAZIONE

Eq: $D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \sigma_a \phi(x) = 0 \longrightarrow \phi(x) = A e^{x/L} + B e^{-x/L}$

Annullamento all'infinito

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0 \longrightarrow \phi(x) = B e^{-x/L}$

• Nota $J(x=0) = J_0$

$$\longrightarrow J(x) = -D \frac{d\phi(x)}{dx} = +DB/L e^{-x/L}$$

$$\implies \frac{DB}{L} = J_0 \longrightarrow B = \frac{J_0 L}{D}$$

• Nota $J^+(x=0) = J_0$

$$j(x) = \frac{1}{4} \phi(x) - \frac{D}{2} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$j(x) = \frac{1}{4} B e^{-x/L} + \frac{D B}{2L} e^{-x/L}$$

$$\longrightarrow J_0 = \frac{1}{4} B + \frac{DB}{2L} \longrightarrow B = \frac{J_0}{\left(\frac{1}{4} + \frac{D}{2L}\right)} = \frac{4 J_0}{(1 + 2D/L)}$$

Funzione di Green

= Funzione che

- 1) Descrive il flusso in x' , se in r è presente una sorgente unitaria
- 2) permette di calcolare $\phi(r)$ senza risolvere l'eq. della diffusione

essendo:

• nel caso tridimensionale

$$\phi(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) = \int_{R^3} d\vec{r}' s(\vec{r}') G(\vec{r}' \rightarrow \vec{r})$$

• il monodimensionale

$$\phi(x' \rightarrow x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G(x' \rightarrow x) s(x')$$

$$\frac{DB_{II}}{L_2} e^{-a/L_2} = \frac{DA_{II}}{L_1} e^{a/L_1} + \frac{DB_{II}}{L_1} e^{-a/L_1};$$

4) Continuità flusso in a

$$\phi_{II}(a) = \phi_{III}(a) \rightarrow B_{II} e^{-a/L_2} = A_{II} e^{a/L_1} + B_{III} e^{-a/L_1}$$

5) Discontinuità corrente in 0

$$J_{II}(0) - J_{III}(0) = S$$

$$J_{II}(x) = -D \left(\frac{A_{II}}{L_1} e^{x/L_1} - \frac{B_{III}}{L_1} e^{-x/L_1} \right)$$

$$J_{III}(x) = -D \frac{A_{III}}{L_2} e^{x/L_2}$$

$$\rightarrow -D \left(\frac{A_{II}}{L_1} - \frac{B_{III}}{L_1} \right) + \frac{DA_{III}}{L_2} = S$$

$$\rightarrow A_{III} - A_{II} + B_{III} = \frac{SL_2}{D}$$

Chiamo: $A_{III} = x$; $A_{II} = y$; $B_{III} = z$; $B_{II} = k$

$$\begin{cases} x = y + z & (1) \\ x - y + z = \frac{SL_2}{D} & (2) \\ k \frac{e^{-a/L_2}}{L_2} = -y \frac{e^{a/L_1}}{L_1} + z \frac{e^{-a/L_1}}{L_1} & (3) \\ k e^{-a/L_2} = y e^{a/L_1} + z e^{-a/L_1} & (4) \end{cases}$$

$$(1) \quad x - y = z; \quad (2) \quad x - y = \frac{SL_2}{D} - z \rightarrow z = -z + \frac{SL_2}{D} \rightarrow z = \frac{SL_2}{2D}$$

$$\left\{ \begin{aligned} k \frac{e^{-a/L_2}}{L_2} + y \frac{e^{a/L_1}}{L_1} &= \frac{S}{2D} e^{-a/L_1} & (3) \\ k e^{-a/L_2} - y e^{a/L_1} &= \frac{SL_2}{2D} e^{-a/L_1} & (4') \end{aligned} \right.$$

$$(4') \quad k = e^{a/L_2} \left(y e^{a/L_1} + \frac{SL_2}{2D} e^{-a/L_1} \right)$$

$$\rightarrow \frac{e^{a/L_2} \cdot e^{-a/L_2}}{L_2} \left(y e^{a/L_1} + \frac{SL_2}{2D} e^{-a/L_1} \right) + y \frac{e^{a/L_1}}{L_1} = \frac{S}{2D} e^{-a/L_1}$$

$$\rightarrow y e^{a/L_1} \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} \right) = \frac{S}{2D} e^{-a/L_1} \rightarrow y = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{S}{2D} e^{-2a/L_1}$$

Teoria della diffusione in presenza della fissione

Equazione dello di ffusione

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t)$$

- Eq:
- lineare;
 - del 2° ordine nello spazio;
 - Alle derivate parziali;
 - Non omogenea;
 - 1° ordine in t;

dove:

- ν = numero di neutroni rilasciati in seguito a ciascuna fissione ($\nu \in (2; 5) \approx 2,45$)
- $\Sigma_f \phi(\vec{r}, t)$ = numero di fissioni per unità di tempo e di volume

⇒ $\nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t)$ = numero di neutroni rilasciati da tutte le fissioni nell'unità di tempo e di v.

Costante di moltiplicazione in un mezzo

- infinito;
- omogeneo;
- moltiplicante (contenente neutroni in grado di effettuare la fissione)

$$= k_{\infty} = \frac{\text{neutroni generati per unità di volume e di tempo in un mezzo } \infty \text{ per fissione}}{\text{neutroni assorbiti per unità di volume e di tempo in un mezzo infinito}} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}$$

Costante di moltiplicazione in un mezzo

- infinito
- omogeneo
- moltiplicante

- in condizioni stazionarie;
- in assenza di sorgenti indipendenti (in un certo istante vengono immesse nel mezzo delle una popolazione neutronica che possono: • diffondere; • moltiplicarsi; • essere assorbiti)

$$\rightarrow k_{\infty} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = 1$$

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (staz) $\nabla \cdot D \nabla \phi = 0$ (mezzo ∞) non ci sono sorgenti

→ $\Sigma_a \phi = \nu \Sigma_f \phi$ (scrivo ϕ e non $\phi(\vec{r}, t)$ perché non dipende né da r , che da t)

$$\rightarrow \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = 1 \quad \phi (\Sigma_a - \nu \Sigma_f) = 0$$

$\phi = 0$ (soluz. che non voglio perché non produce energia);
 $\Sigma_a = \nu \Sigma_f$ (non sempre esiste una soluzione $\neq 0$)

N.B

- Questo sistema è quello che volevo fermi perché:

- funzionano da soli, senza che si debbono immettere neutroni;
- funzionano in maniera stazionaria
- produce energia gratuitamente.

DIMOSTRAZIONE

• Mezzo piano ($\phi = \phi(x) \sim \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \nabla^2\phi(x)$)

• Mezzo omogeneo $\sim \nabla(\nabla\phi) = \nabla^2\phi$

• Staz. $\sim \phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) = \phi(x)$

$\rightarrow D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a \phi(x) + V \Sigma_f \phi(x) \cdot \frac{1}{k} = 0 \sim D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \phi(x) \Sigma_a \left(\frac{V \Sigma_f}{\Sigma_a} \frac{1}{k} - 1 \right) = 0$

$\rightarrow \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{1}{L^2} \left(\frac{k\infty}{k} - 1 \right) \phi(x) = 0 \sim \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + B^2 \phi(x) = 0$

Si può dire che

$\frac{k\infty/k - 1}{L^2} = B^2$ ipotizzando che $k\infty \geq k$, vero perché nel mezzo

finito, dato che una parte dei neutroni scappano dal mezzo, la capacità moltiplicante è minore

- L'eq coroll. ha soluz. nel campo immaginario

$\rightarrow \phi(x) = A \cos(Bx) + C \sin(Bx)$

Condizioni

• Mezzo a contatto col vuoto • Mezzo sim. rispetto all'origine

$\rightarrow \phi(H/2) = 0 \rightarrow \phi(x) = \text{pari} \sim \phi(x) = A \cos(Bx)$

• Mezzo a contatto col vuoto in $x = H/2$

$\rightarrow \phi(H/2) = 0 \sim A \cos(BH/2) = 0 \sim \begin{cases} A = 0 \rightarrow \phi(x) = 0 \text{ (soluz. non voluta)} \vee \text{considero l'altro} \\ BH/2 = \pi/2 \rightarrow B = \pi/H \end{cases}$

$\rightarrow \frac{k\infty/k - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 \rightarrow \frac{k\infty}{k} = \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 L^2 + 1 \rightarrow k = \frac{k\infty}{1 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 L^2}$

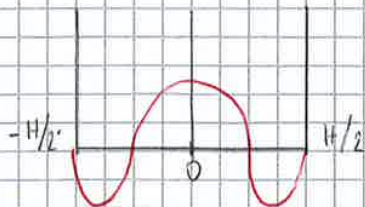
$\rightarrow \phi(x) = A \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) \rightarrow$ Andamento pagina precedente.

N.B

! Potevamo scegliere $\frac{BH}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, Tuttavia le soluz. con k dispari es. $\frac{3}{2}\pi$ portano a delle

soluzioni di ϕ non significative dal punto di vista fisico, in quanto in alcuni intervalli negativa (non sens.)

Es $\frac{BH}{2} = \frac{3}{2}\pi \rightarrow B = \frac{3\pi}{H} \sim \phi(x) = A \cos\left(\frac{3\pi x}{H}\right)$



DIMOSTRAZIONE

pag 39

Eq: $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -B^2 \varphi(\vec{r})$

Caso piano monodimensionale $\rightarrow \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -B^2 \varphi(x)$

$n \in \mathbb{I}$

$\rightarrow \varphi(x) = A \cos(Bx) + C \sin(Bx)$

Condizione di annullamento al contorno con il vuoto

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{H}{2}\right) = 0 \rightarrow A \cos\left(\frac{HB}{2}\right) + C \sin\left(\frac{BH}{2}\right) = 0 \\ \varphi\left(-\frac{H}{2}\right) = 0 \rightarrow A \cos\left(-\frac{HB}{2}\right) + C \sin\left(-\frac{BH}{2}\right) = A \cos\left(\frac{BH}{2}\right) - C \sin\left(\frac{BH}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- Perché A, C non siano contemporaneamente nulle (che porterebbe $\varphi(x) = 0$, INUTILE!)

si deve avere:

$$\det \begin{vmatrix} \cos(HB/2) & \sin(HB/2) \\ \cos(HB/2) & -\sin(HB/2) \end{vmatrix} = 0 \sim -\cos(HB/2)\sin(HB/2) - \cos(HB/2)\sin(HB/2) = 0$$

$$\sim \cos(HB/2)\sin(HB/2) = 0$$

Trova la prima autofunzione ($\varphi_n(x)$) ipotizzando $\cos(BH/2) = 0$

1 $\rightarrow \cos\left(\frac{BH}{2}\right) = 0 \sim \frac{BH}{2} = \frac{2n-1}{2} \pi \rightarrow B_n = \frac{(2n-1)\pi}{H}$

2 $\rightarrow A \cos\left(\frac{BH}{2}\right) + C \cdot \sin\left(\frac{BH}{2}\right) = 0$. Essendo $\sin\left(\frac{BH}{2}\right) \neq 0 \rightarrow C = 0$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = A \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{H} x\right)$

Trova la 2a autofunz ipotizz. $\sin(BH/2) = 0$

1 $\rightarrow \sin\left(\frac{BH}{2}\right) = 0 \sim \frac{BH}{2} = m\pi \rightarrow B_m = \frac{2m\pi}{H}$

2 $\rightarrow A \cos\left(\frac{BH}{2}\right) = 0$, Dato che $\cos\frac{BH}{2} \neq 0 \sim A = 0$

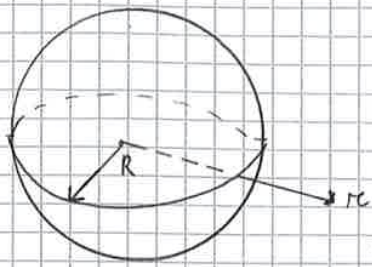
$\rightarrow \varphi_m(x) = C \sin(B_m x) = C \sin\left(\frac{2m\pi}{H} x\right)$ C.V.D.

Ortogonalità fra $\varphi_m(x)$ e $\varphi_n(x)$

$\int \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 1$ se $n = m \sim \int_{-H/2}^{H/2} \varphi_n^2(x) dx = 1$

Autofunzioni di Helmholtz su geometria sferica

pag 41



• Considero uno sfero di volume estropolato V

$$\xrightarrow{1} \varphi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \cdot \frac{1}{r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$

$$\xrightarrow{2} B_n = \frac{n\pi}{R}$$

DIMOSTRAZIONE

Eq: $\nabla_{sferica}^2 \varphi(r) = -B^2 \varphi(r) \sim \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi(r) \cdot r}{dr^2} = -B^2 \varphi(r)$

$$\rightarrow \frac{d^2 \mu(r)}{dr^2} = -B^2 \mu(r) \sim \mu(r) = \varphi(r) = A \cos(Br) + C \sin(Br)$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = A \frac{\cos(Br)}{r} + C \frac{\sin(Br)}{r}$$

Condizione di finitezza per $r \rightarrow 0$ (φ deve essere sempre finito)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) \neq +\infty \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \left(A \frac{\cos(Br)}{r} + C \frac{\sin(Br)}{r} \right) \Rightarrow A = 0$$

$\rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$ $\rightarrow B$

$$\sim \varphi(r) = C \frac{\sin(Br)}{r}$$

Condizione di annullamento sul contorno

$$\varphi(R) = 0 \rightarrow \varphi(R) = C \frac{\sin(BR)}{R} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vee C = 0 \text{ (inutile } \rightarrow \varphi = 0) \\ \vee \sin(BR) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow BR = n\pi \rightarrow B_n = \frac{n\pi}{R}$$

Condizione di ortogonalità (per trovare c)

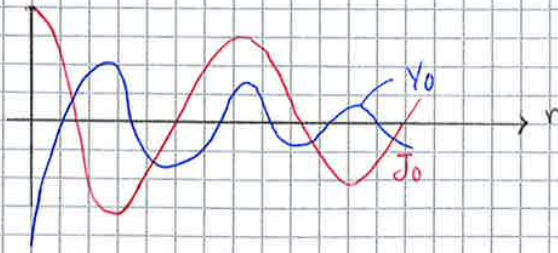
$$\int \varphi_n^2(r) d\vec{r} = 1 \sim \int \varphi_n^2(r) \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Jacobiano}} dr = 1 \sim c^2 4\pi \int \frac{\sin^2(Br)}{r^2} r^2 dr = 1 \sim 4\pi c^2 \int_0^R \sin^2(Br) dr = 1$$

• $\sin^2(Br) = 1 - \cos^2(Br)$; • $\cos(2Br) = \cos^2(Br) - \sin^2(Br) = 2\cos^2(Br) - 1$
 $\rightarrow \cos^2(Br) = \frac{\cos(2Br) + 1}{2}$

$$\Rightarrow 4\pi c^2 \int_0^R \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\cos(2Br)}{2} \right) dr = \cancel{4\pi}^2 c^2 \cdot \frac{1}{2} R - \frac{\cancel{4\pi}^2 c^2}{2} \int_0^R \cos(2Br) dr = 1$$

$$\rightarrow 2\pi c^2 R - 2\pi c^2 \int_0^R \cos(2Br) dr = 1$$

Essendo J_0 e Y_0 del tipo



ed essendo che $\lim_{r \rightarrow 0} Y_0(r) = -\infty$, $\implies C = 0$

$$\implies \psi(r) = A J_0(Br)$$

Condiz. di annullamento sul contorno

$$\psi(R) = 0$$

$$\implies A J_0(BR) = 0$$

- J_0, Y_0 hanno infiniti sull'asse r , \implies Posso numerarli

$$B_n R = j_{0,m} \implies B_n = j_{0,n} / R$$

Condizione di ortogonalità

$$\int_V \psi_n^2(r) d\vec{r} = \int_V \psi_n^2(r) 2\pi r dr = 1$$

Dal formalismo si trova che $A_n = \frac{1}{R\sqrt{\pi} |J_1(j_{0,n})|}$

Condizione di annullamento di contorno

pag 4.5

$$\psi(a/2; y; z) = \psi(-a/2; y; z) = 0$$

$$\longrightarrow f(a/2)g(y)h(z) = f(-a/2)g(y)h(z) = 0 \sim f(a/2) = f(-a/2) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} Ax \cos(Bx \cdot a/2) + Cx \sin(Bx \cdot a/2) = 0 \\ Ax \cos(Bx \cdot a/2) - Cx \sin(Bx \cdot a/2) = 0 \end{cases}$$

- Perché Ax, Cx non siano contemporan. nulle

$$\det \begin{vmatrix} \cos(Bx \cdot a/2) & \sin(Bx \cdot a/2) \\ \cos(Bx \cdot a/2) & -\sin(Bx \cdot a/2) \end{vmatrix} = 0; \sim -2 \cos(Bx \cdot a/2) \sin(Bx \cdot a/2) = 0;$$

Trovare la prima soluzione con $\cos(Bx \cdot a/2) = 0$

$$\bullet \cos(Bx \cdot a/2) = 0;$$

$$\xrightarrow{1} Bx \cdot a/2 = \frac{2n-1}{2} \pi \longrightarrow Bx = \frac{(2n-1)\pi}{a}$$

$$\xrightarrow{2} Cx \sin(Bx \cdot a/2) = 0 \sim Cx = 0;$$

$$\implies f(x) = Ax \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{a} x\right) = Ax \cos(Bx \cdot x)$$

Dalle altre equazioni

$$f(x) = Ax \cos(Bx \cdot x)$$

$$g(y) = Ay \cos(By \cdot y) \longrightarrow \psi(x, y, z) = Ax \cdot Ay \cdot Az \cos(Bx \cdot x) \cos(By \cdot y) \cos(Bz \cdot z)$$

$$h(z) = Az \cos(Bz \cdot z) = A \cos(Bx \cdot x) \cos(By \cdot y) \cos(Bz \cdot z)$$

Condizione di ortogonalità

$$\int \psi^2(x, y, z) dx dy dz = 1 \longrightarrow A^2 \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(Bx \cdot x) dx \int_{-b/2}^{b/2} \cos^2(By \cdot y) dy \int_{-c/2}^{c/2} \cos^2(Bz \cdot z) dz = 1$$

$$\int \cos^2(Bx \cdot x) dx = \int \frac{\cos(2Bx \cdot x) + 1}{2} dx = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \int \cos(2Bx \cdot x) dx = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{1}{Bx \cdot x} \left[\sin(2Bx \cdot x) \right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{1}{2Bx \cdot x} \sin((2n-1)\pi) = \frac{1}{2} a$$

= 0

Con procedimenti analoghi

$$\int \cos^2(By \cdot y) dy = \frac{1}{2} b; \quad \int \cos^2(Bz \cdot z) dz = \frac{1}{2} c$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2} c \cdot A^2 = 1 \implies A = \left(\frac{8}{abc}\right)^{1/2}$$

$$\longrightarrow \psi(x, y, z) = \left(\frac{8}{abc}\right)^{1/2} \cos(Bx \cdot x) \cos(By \cdot y) \cos(Bz \cdot z)$$

Proprietà di k_n :

pag 47

$$k_n = k_\infty \left(\frac{1}{1 + L^2 B n^2} \right) = \text{successione decrescente}$$

una volta introdotte le particelle, lasciate libere in assenza di sorgente continua

→ Inizialmente si ha un transitorio in cui convivono tutte le armoniche (autofunzioni).

In seguito man mano che ci si avvicina ad una condizione di stazionarietà, le armoniche diverse da quelle fondamentali si annullano e rimane solo più l'autofunzione fondamentale.

DIMOSTRAZIONE

• Inserisco le particelle e le lascio libere, in assenza di sorgente continua.

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \psi_n(\vec{r})$$

dove:

$$A_n(t) = A_n(0) e^{-\omega(\nu \Sigma_f - \Sigma_a - D B n^2)t} + \omega \int_0^t dt' S_n(t') e^{-\omega(\nu \Sigma_f - \Sigma_a - D B n^2)(t-t')}$$

= 0 (non c'è una sorgente)

→ $A_n(t) = A_n(0) e^{-\omega(\nu \Sigma_f - \Sigma_a - D B n^2)t}$

Condizione di ~~annullamento~~ ^{convergenza} per $t \rightarrow +\infty$ di $A_n(t)$

→ $\omega(\nu \Sigma_f - \Sigma_a - D B n^2) < 0$ decrescente

N.B.

$$\omega \Sigma_a \left(\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_0} - 1 - D B n^2 \right) = \omega \Sigma_a (1 + B n^2 D) \left(\frac{k_\infty}{1 + B n^2 D} - 1 \right) = \frac{k_n - 1}{k_n}$$

N.B. Dimostrazione che k_n è decrescente

$$k_n = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B n^2} \quad B n^2 \text{ è crescente} \implies k_n \text{ è decrescente}$$

Corollario • Inserisco le particelle e lascio il sist. libero;

• $k_1 < 1$ (sist. sotto-critico)

→ $\lim_{t \rightarrow +\infty} A_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(A_1(0) e^{-\omega(\nu \Sigma_f - \Sigma_a - D B n^2)t} + \omega \int_0^t dt' S_n(t') e^{-\omega(\nu \Sigma_f - \Sigma_a - D B n^2)(t-t')} \right) = 0$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} A_1(0) e^{\frac{k_1 - 1}{k_1} t} = 0$$

→ $k_2 < k_1 \implies A_2(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ più velocemente rispetto a $A_1(t)$

• $k_1 > 1$ (sist. sopra-critico)

→ $\lim_{t \rightarrow +\infty} A_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} A_1(0) e^{\frac{k_1 - 1}{k_1} t} = +\infty$

→ $k_2 < k_1$

• $k_2 < 1$ (sempre, praticamente) → $A_2(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$

• $k_2 > 1$ → $A_2(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ meno rapidamente rispetto a $A_1(t)$

DIM 1

• $\phi(\vec{r}, 0) = 0$

$\rightarrow A_n(0) = \int_{\vec{V}} \phi(\vec{r}, 0) \cdot \psi_m d\vec{r} = 0$

DIM 2

$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r})$

$A_m(t) = \frac{1}{N} \int S_m(t) e^{\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m} (t-t')} dt' = N S_m e^{\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m} t} \int e^{-\frac{(\kappa_{m-1})}{\kappa_m} t'} dt'$

• $\frac{d e^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x} \sim \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \int e^{\alpha x} dx$

$\rightarrow A_m(t) = N S_m e^{\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m} t} \cdot \left(-\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}} \right) \left[e^{-\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m} t} - 1 \right] = N S_m \frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}} \left[e^{\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m} t} - 1 \right]$

$\Rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} N S_m \frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}} \left[e^{\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m} t} - 1 \right] \psi_m(\vec{r})$

DIM 4

• $\kappa_1 < 1 \rightarrow \kappa_n < 1 \forall n$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} N S_m (\kappa_m) \frac{1}{\kappa_{m-1}} \left[e^{\frac{(\kappa_{m-1})}{\kappa_m} t} - 1 \right] \psi_m(\vec{r}) = \dots \left[\frac{-\infty}{0} - 1 \right] =$
 $= - \sum_{m=1}^{\infty} N S_m \kappa_m \frac{1}{\kappa_{m-1}} \psi_m(\vec{r})$

2) Sorgente impulsata

• Sorgente uguale all'armonica fondamentale: $s(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}) \cdot S_0 \cdot \delta(t)$

$\rightarrow \phi(\vec{r}, t) = N \cdot S_0 \cdot e^{\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} t} \cdot \psi_1(\vec{r}) \quad S_n(t) = S_0 \delta(t) \delta_{1n}$

N.B.

• $\kappa_1 < 1$ (sist. sottoscritico)

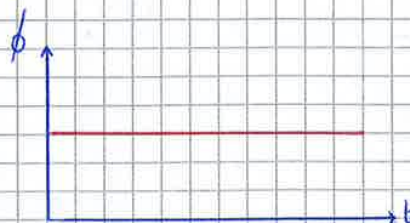


• $\kappa_1 > 1$



• $\kappa_1 = 1$

\rightarrow Dopo aver prodotto un segnale si stabilizza



DIMOSTRAZIONE 1

- pag 51

• $s(\vec{r}, t) = s_0 \varphi_1(\vec{r}) (1 - \cos \omega t)$

→ $S_n(t) = \int s(\vec{r}, t) \varphi_n(\vec{r}) d\vec{r} = s_0 (1 - \cos \omega t) \int \varphi_1(\vec{r}) \varphi_n(\vec{r}) d\vec{r} = s_0 (1 - \cos \omega t) \delta_{1,n}$

⇒ $\phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\vec{r}) \cdot v \int_0^t dt' \cdot s_0 (1 - \cos \omega t') \delta_{1,n} e^{\alpha_1(t-t')}$

dove $\alpha_n = (k_n - 1) / \ell_m$

$$\phi(\vec{r}, t) = \varphi_1(\vec{r}) v s_0 e^{\alpha_1 t} \int_0^t dt' (1 - \cos \omega t') e^{-\alpha_1 t'}$$

$$= \varphi_1(\vec{r}) v s_0 e^{\alpha_1 t} \left[\int_0^t e^{-\alpha_1 t'} dt' - \int_0^t \cos \omega t' e^{-\alpha_1 t'} dt' \right]$$

Integrando il II integrale per parti si trova ~~quello~~ quello della pagina precedente.

N.B. DIM 2

• $k_1 < 1$

→ $\alpha_1 < 0 \sim \alpha_1 t < 0 \rightarrow e^{\alpha_1 t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 0$

→ si ha la soluz

DIM 4

• Voglio scrivere $\phi(\vec{r}, t) = C + A \cos(\omega t + \Psi)$

• $\phi(\vec{r}, t) = v s_0 \varphi_1(\vec{r}) \left[-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1/\alpha_1 \cos \omega t - W/\alpha_1^2 \sin \omega t}{1 + W^2/\alpha_1^2} \right] =$

$= v s_0 \varphi_1(\vec{r}) \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 \cos(\omega t) - W \sin(\omega t)}{\alpha_1^2 + W^2} \right) = v s_0 \varphi_1(\vec{r}) \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 \cos(\omega t)}{\sqrt{\alpha_1^2 + W^2}} - \frac{W \sin(\omega t)}{\sqrt{\alpha_1^2 + W^2}} \right)$

N.B.

• Considero $\cos \Psi = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + W^2}}$ e $\sin \Psi = \frac{W}{\sqrt{\alpha_1^2 + W^2}} \Rightarrow \cos^2 \Psi + \sin^2 \Psi = 1$

→ $\phi(\vec{r}, t) = v s_0 \varphi_1(\vec{r}) \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \cos \Psi \cos \omega t - \sin \Psi \sin \omega t \right) = v s_0 \varphi_1(\vec{r}) \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \cos(\omega t + \Psi) \right)$

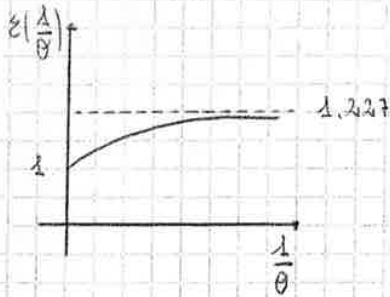
$= -\frac{v s_0 \varphi_1(\vec{r})}{\alpha_1} + v s_0 \varphi_1(\vec{r}) \cos(\omega t + \Psi)$

⇒ $C = -\frac{v s_0 \varphi_1(\vec{r})}{\alpha_1}$; $A = v s_0 \varphi_1(\vec{r})$; $\Psi = \arctg\left(\frac{W}{\alpha_1}\right)$

1

$$E = \frac{1 + 0,68 \frac{Nu^{230}}{N_H}}{1 + 0,563 \frac{Nu^{230}}{N_H}} = \frac{1 + 0,68(1-e) \frac{1}{\theta}}{1 + 0,563(1-e) \frac{1}{\theta}} = \text{FATTORE DI MOLTIPLICAZIONE} \geq 1$$

VELOCE



$$\lim_{\frac{1}{\theta} \rightarrow 0} E = E\left(\frac{1}{\theta} = 0\right) = 1$$

$$\lim_{\frac{1}{\theta} \rightarrow +\infty} E = \frac{0,68}{0,563} = 1,227$$

(compatibile fortemente non omogeneo)

n.B. Prestori commerciali: ben moderati

DIM

$$N \cdot Nu^{230} = N_F(1-e) \Rightarrow \frac{Nu^{230}}{N_H} = \frac{N_F(1-e)}{N_H}$$

$$N \theta = \frac{N_H}{N_F} \Rightarrow \frac{Nu^{230}}{N_H} = \frac{(1-e)}{\theta} \Rightarrow E = \frac{1 + 0,68(1-e) \frac{1}{\theta}}{1 + 0,563(1-e) \frac{1}{\theta}}$$

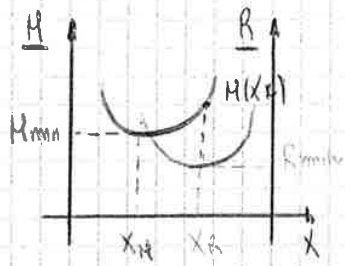
$$\text{Se } x = \frac{1}{\theta} \Rightarrow E = \frac{1 + 0,68(1-e)x}{1 + 0,563(1-e)x}$$

$$E(x=0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} + 0,68(1-e) \right)}{x \left(\frac{1}{x} + 0,563(1-e) \right)} = \frac{0,68}{0,563} = 1,227$$

OSSERVAZIONE → 3 $M(x); R(x)$ [unità di misura differenti]

$$H = \frac{4\pi^3 R^3 N_F}{3N_A P_H}$$



$$\exists x_H / M(x_H) = H_{\min} \quad \wedge \quad \exists x_R / R(x_R) = R_{\min}$$

N.B. Se sceglie $x = x_R \Rightarrow R(x_R) = R_{\min}$
 $M(x_R) > H_{\min}$ } \Rightarrow Combustibile più compatto.

DIM

$$H = N_F \cdot \frac{1}{N_A} \cdot \frac{1}{P_H} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi R^3 N_F}{3N_A P_H} \quad \text{C.V.D.}$$

$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad \left[\frac{\text{mol}}{\text{kg}} \right] \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{mol}} \right] \quad \left[\text{m}^3 \right]$

SORGENTI

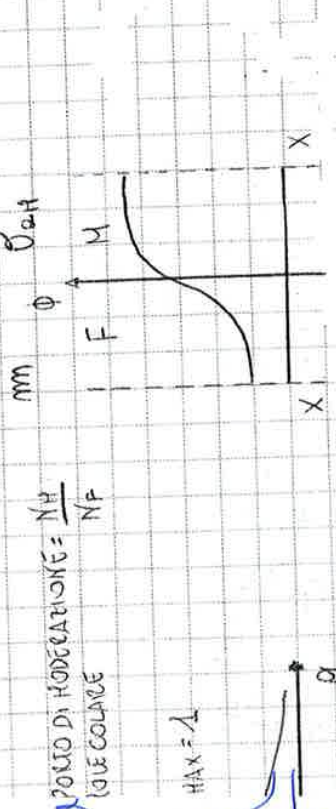
1) Sistema alimentato dai 11 emessi nel processo di fusione nucleare dell U^{235} (decadim. radioattivo) / Costante di decadimento = $2,237 \cdot 10^{10}$ anni

$\Rightarrow S = 2N\lambda$

cond. partec. in ...
 → 1. combustione
 a. invece)

$$\frac{J_{\text{eff}}}{Z_{\text{eff}}}$$

$$\frac{\frac{\partial \phi_F}{\partial x_H}}{\frac{\partial \phi_H}{\partial x_H}} = \frac{\frac{\partial \phi_F}{\partial x_H} + \phi}{\frac{\partial \phi_H}{\partial x_H}} \quad L=1$$



cond. di moderazione = $\frac{NH}{NF}$
 (QUEGLIO)

$$H_{\text{MAX}} = 1$$

lim $\phi = 0$
 $\theta \rightarrow 100$
 $(NH \rightarrow 0)$
 $(NF \rightarrow 0)$

dominano $\Rightarrow \phi_F = \phi_H$

$$= \frac{\frac{J_{\text{eff}}}{Z_{\text{eff}}}}{\frac{J_{\text{eff}}}{Z_{\text{eff}}} + 1}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{z}{z+1}$$

$$\frac{\frac{\partial \phi_F}{\partial x_H} \frac{NH}{NF}}{\frac{\partial \phi_H}{\partial x_H} \frac{NH}{NH}} = \frac{\frac{\partial \phi_F}{\partial x_H}}{\frac{\partial \phi_H}{\partial x_H}} \cdot \frac{1}{\theta}$$

F - Produzione di Neve
 $\Rightarrow \phi_{SF} = 0 \Rightarrow$ Probabilmente improbabile nel comb.
 $\Rightarrow \phi_{SH} = 0 \Rightarrow$ Probabilmente improbabile nel comb.
 $\Rightarrow \phi_{SH} = 0 \Rightarrow$ Probabilmente improbabile nel comb.
 $\Rightarrow \phi_{SH} = 0 \Rightarrow$ Probabilmente improbabile nel comb.

Flusso di Neve: improprio nel modello. Viene ridotto quando entra nel combustibile (EFFETTO AUTO-SUPERIO DEI COMBUSTIBILI)

AREA DI DIFFUSIONE = $\frac{1}{4} (1-\rho)$
 COMBUST-MODERAZIONE

$$D_{\text{eff}} = \frac{D_H}{Z_{\text{eff}}} = \frac{D_H}{Z_{\text{eff}} + Z_{\text{eff}}} = \frac{D_H}{2Z_{\text{eff}}}$$

$$\rho = \frac{\phi}{z+1} \Rightarrow z+1 = \frac{\phi}{\rho} \Rightarrow z = \frac{\phi}{\rho} - 1$$

$$\Rightarrow L = \frac{L_H}{1-\rho} = \frac{L_H (1-\rho)}{1-\rho} \quad \text{C.V.D}$$

$$\rho = \exp\left[-\frac{NA I}{\xi Z_S}\right] = \exp\left[-\frac{NA I}{\xi Z_S} \frac{10 (Z_{SF} + \xi_H \phi)}{(1-\rho)}\right]$$

NA = $N_F (1-\rho)$ [mm]
 CONCENTRAZIONE ATOMICA ASSORBITORE DI RISONANZA (U²³⁵ nel nostro caso)

$$I = 0.1 \frac{10 Z_S}{NA} \quad \text{data } \xi = 0.486 \quad [\text{atomi}]$$

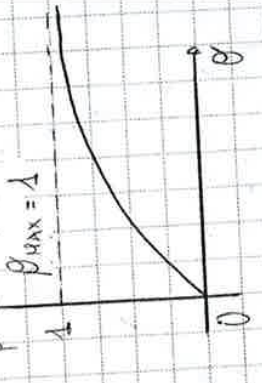
$Z_S = Z_{SF} + Z_{SH} = \xi_{SF} N_F + \xi_{SH} N_H$ [atomi]
 SEZIONE D'URTO HA CROSCOPICA DI SCATTERING NELLE ZONE DI RISONANZA

N.B. F - COHERING RESOLVED
 M - COHERING RESOLVED

$$\xi = \frac{\xi_F Z_{SF} + \xi_H Z_{SH}}{Z_{SF} + Z_{SH}}$$

N.B. ξ_F e ξ_H e Resonamento improprio nel moderatore.

- $N_H = 0$
 $N_F = 100$
 $N_F \rightarrow 0 \Rightarrow N_F \rightarrow \infty \Rightarrow \rho \rightarrow 0$
- $N_H = 100$
 $N_F = 0 \Rightarrow N_H \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow 1$
 $N_F = 0$



NEW PLOTS: da varianti di invece invece plotati

B

1) NOZIONI ECONOMIA

$$G(t) = P - C$$

dove

- $G(t) =$ funzione guadagno $= P_{\mu g} \cdot m \left[\frac{\text{€}}{\mu g} \cdot \mu g \text{ di prodotti venduti} \right]$
- $C(t) =$ funzione costo $= C_k \cdot t \left[\frac{\text{€}}{k_{\text{per. usog}}} \cdot k_{\text{usog}} \right]$

- $m(t) = PM \cdot \frac{N(t)}{\Delta t}$ \rightarrow nucleide vendute

DIFFUSIONE

Eq. continuità

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$

Legge di Fick

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = - \frac{\Sigma_s(\vec{r})}{3 \Sigma_t(\vec{r})} \nabla \phi(\vec{r}, t) = - D(\vec{r}) \nabla \phi(\vec{r}, t)$$

Equazione di diffusione

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = S(\vec{r}, t) + \nabla \cdot (D \nabla \phi(\vec{r}, t)) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \cdot \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \dots$$

δ DI SIRAC

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \cdot \vec{r} \neq \vec{0}; \\ 1 & \cdot \vec{r} = \vec{0}; \end{cases}$$

rappresenta una sorgente-puntiiforme (\sim localizzata)

- di potenza unitaria $\rightarrow \int_{\vec{r}} \delta(\vec{r}) d\vec{r} = 1$
- posto nell'origine

Proprietà

- $a < 0 < b \rightarrow \int_a^b \delta(x) dx = 1$
- $a > 0; \cdot b < 0 \rightarrow \int_a^b \delta(x) dx = 0$
- $\rightarrow \int_a^0 \delta(x) dx = \int_0^b \delta(x) dx = \frac{1}{2}$

• $f(x) = f$ continuo in 0 • $a < 0 < b$

$$\rightarrow \int_a^b \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Sorgente localizzato in geom. piano

- localizzato in $x=0 \rightarrow s(x) = S_0 \delta(x)$
- localizzato in $x=a \rightarrow s(x) = S_0 \delta(x-a)$

δ in coordinate polari sferiche

$$\delta(\vec{r}) = \delta(r) / 4\pi r^2$$

così che $\int \delta(\vec{r}) d\vec{r} = \int \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = 1$

CASI PARTICOLARI

D

• Riflettore perfetto (corrente entrante = corrente uscente \sim corrente netta = 0) in $x=a$

$$\rightarrow J(a) = -D \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_a = 0$$

$$\rightarrow \phi(x) = Z \cosh\left(\frac{x-a}{L}\right) \quad (\text{a causa dello schermo non andria come sinh})$$

DIM

$$\phi(x) = A e^{x/L} + B e^{-x/L}$$

$$\rightarrow J(x) = -D/L [A e^{x/L} - B e^{-x/L}]$$

$$J(a) = -\frac{D}{L} [A e^{a/L} - B e^{-a/L}] \Rightarrow \dots$$

• Sorgente localizzata tra 2 strati omogenei diversi (in $x=a$)

$$\phi(a^+) = \phi(a^-)$$

$$J(a^+) - J(a^-) = S$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{vetro} \\ 0 \\ \text{H} \end{array} \right] \begin{array}{c} \text{vetro} \\ H \end{array}$$

$$\rightarrow P_{out} = J^+(H) - J^-(0)$$

• Sorgente \sim nemmessi in modo spazialmente uniforme, nel processo di fissione spontanea dell' U^{238} , assimilabile ad un decadimento radioattivo con cost. di decadimento λ

$$\rightarrow s(x) = S = \lambda (N(t) \cdot V) \left[\frac{\text{nemessi}}{\text{fissione}} \cdot \frac{\text{fissioni}}{V \cdot t} \right] \quad V = 2,5$$

SISTEMA MoltiplicANTE

Eq. di diffusione

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = s(\vec{r}, t) + D \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) + \left(\frac{1}{k} \nu \Sigma_f - \Sigma_a \right) \phi(\vec{r}, t)$$

Costante di moltiplicazione del mezzo infinito

$$k_{\infty} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = f(\text{del materiale})$$

Costante di Moltiplicazione

$$k_n = \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_n^2} \quad \text{dove} \quad P_{NF} = 1 - P_F = \frac{1}{1 + L^2 B_n^2} = \text{prob. di non fuga}$$

Bucaly

$$B^2 = - \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \text{raggio di curvatura di } \phi(x)$$

Eq. di diffusione in una slab omogenea

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = s(x, t) + D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) \phi(x, t) \sim \frac{1}{D} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \frac{s(x, t)}{D} + \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{(k_{\infty} - 1)}{L^2} \phi(x)$$

\rightarrow Lo soluz. nel caso stazionario, = ai casi precedenti, (condiz.), non stazionario

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi_h(x) + \phi_p(x) \quad \text{dove } \phi_p(x) \sim \text{dalla sorgente}$$

Parallelepipedo ω -mente esteso lungo z • Spigoli (a, b)

$$\rightarrow B_{n,m}^2 = \left(\frac{(2n-1)\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{b} \right)^2$$

$$\rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{4}{a \cdot b}} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{a} x \right) \cdot \cos \left(\frac{(2m-1)\pi}{b} y \right)$$

$$\rightarrow \int_0^a dx \int_0^b \psi_{n,m}^2(x,y) dy = 1$$

PARALLELEPIPEDO• Spigoli a, b, c

$$\rightarrow B^2 = \left(\frac{(2n-1)\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2l-1)\pi}{c} \right)^2$$

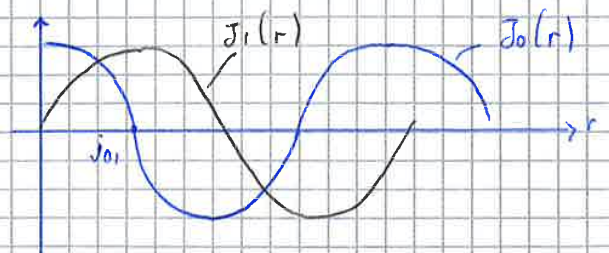
$$\rightarrow \psi_{n,m,l}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{a \cdot b \cdot c}} \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \cdot \sin \left(\frac{l\pi}{c} z \right)$$

$$\rightarrow \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c \psi_{n,m,l}^2(x,y,z) dz = 1$$

Cilindro di altezza infinita

$$\rightarrow B_n^2 = \left(\frac{j_{0,n}}{R} \right)^2 \text{ dove } j_{0,n} = \text{zeri della funzione elementare di Bessel di ordine } 0, j_0 = 2.4048$$

$$\rightarrow \psi_n(r) = \frac{1}{R \sqrt{\pi} |J_1(j_{0,n})|} \cdot J_0 \left(\frac{j_{0,n}}{R} r \right)$$



$$\rightarrow \int_0^R \psi_n^2(r) 2\pi r dr = 1$$

• Sorgente dovuta alla fissione spontanea (cosa slab omogenea)

$$\longrightarrow s(\vec{r}, t) = S_0 \delta(\vec{r}) = \text{cost}(t)$$

4) • $s(\vec{r}, t) = S_0 (1 - \cos \omega t) \psi_1(\vec{r})$

• $A_n(0) = 0;$

$$\longrightarrow \phi(\vec{r}, t) = \nu S_0 \psi_1(\vec{r}) \left(1 - e^{-\alpha_1 t} \right) \left[-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 - \omega}{\alpha_1^2 + \omega^2} + \frac{\omega \cos \omega t - \alpha_1 \cos \omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right]$$

$$\longrightarrow \phi_{as}(\vec{r}, t) = \nu S_0 \psi_1(\vec{r}) \left[-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 - \omega}{\alpha_1^2 + \omega^2} + \frac{\omega \cos \omega t - \alpha_1 \cos \omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right]$$

$$\longrightarrow \text{Valore attorno al quale oscilla la risposta asintotica} = \langle \phi_{as}(\vec{r}) \rangle = \nu S_0 \psi_1(\vec{r}) \left[-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 - \omega}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right]$$

$\implies \phi_{as}(\vec{r}, t) = A + I \cos(\omega t + \psi)$ • $I = \text{ampiezza};$ • $\psi = \text{fase della risposta}$ (dopo un certo t la risposta oscillerà come la sorgente)

N.B.

$$\omega \cos(\omega t) - \alpha_1 \cos(\omega t) = Q \cos(\omega t + \psi) = Q \cos(\omega t) \cos \psi - Q \sin(\omega t) \sin \psi$$

$$\longrightarrow \omega = Q \cos \psi; \quad \alpha_1 = Q \sin \psi \implies \text{tg } \psi = \alpha_1 / \omega;$$

$$Q = \sqrt{\alpha_1^2 + \omega^2}$$

5) 25 • $K_1 = 1$

• P_{MAX} fornita: $\frac{dP_{MAX}}{dt} = 0 \implies \frac{d\phi_{MAX}}{dt} = 0 \implies \phi_{MAX} = \phi_{AS}$

$$\implies \text{Essendo } K_1 = 1 \longrightarrow \phi(\vec{r}, t) = A_1(t) \psi_1(\vec{r}) + \sum_2^{+\infty} A_n(t) \psi_n(\vec{r})$$

$$\implies \phi_{AS}(\vec{r}, t) = A \psi_1(\vec{r})$$

$$\longrightarrow P_{MAX} = \int \rho E_f \int A \psi_1(\vec{r}) d\vec{r} \longrightarrow \text{trova } A \text{ e poi } \phi_{AS} = \phi_{MAX}$$

6) 26 numero di neutroni rilasciati da una faccia di una slab in un tempo t

$$J^+(x = H/2; t) = \int_0^t J^+(H/2; t') dt'$$