NUMERO: 1605A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia

MATERIA: Analisi Matematica I Eserc. Prof.Quelali

Teorema di Ruffini: dato un polinomio $P(x)$ di grado $(P) = n$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R} / P(\lambda) = 0$, possiamo scrivere $P(x)$ come $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$. Il grado di $Q(x)$ è $n-1$

P (dividendo) D (divisore)

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5 + 9x^3 - x^2 - 3 & x^2 + 3 \\
\underline{3x^5 + 9x^3} & \overline{3x^3 - 1} \quad Q \text{ (quoziente) quoto senza resto} \\
// \quad -x^2 - 3 & \\
\quad \underline{-x^2 - 3} & \\
\quad // \quad // \quad R \text{ (resto)} &
\end{array}
$$

$P = DQ + R$
$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$
se $R(x) = 0$
$P(x) = D(x) Q(x)$

In questo caso non si può usare Ruffini perché $D(x) \neq x \pm \lambda$

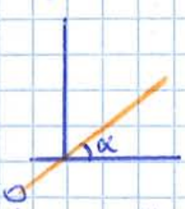
$P(x) = x^5 + 9x^4 + 18x^3 - 4x - 12$ $\qquad D(x) = x + 3$

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 9 & 18 & -4 & 12 \\
-3 & & -3 & -18 & 0 & 12 \\
\hline
 & 1 & 6 & 0 & -4 & //
\end{array}
$$

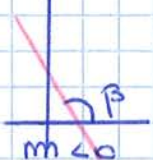
$Q(x) = x^4 + 6x^3 - 4$

Rette

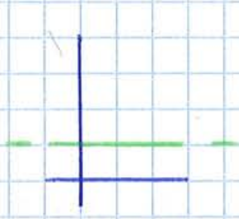
Noi usiamo $y = mx + q$, la forma giusta è però quella implicita $ax + by + c = 0$



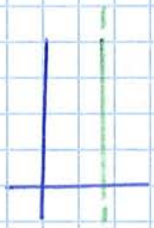
$m > 0$
α acuto → positivo (persona)



$m < 0$
β ottuso → negativo



$y = k$



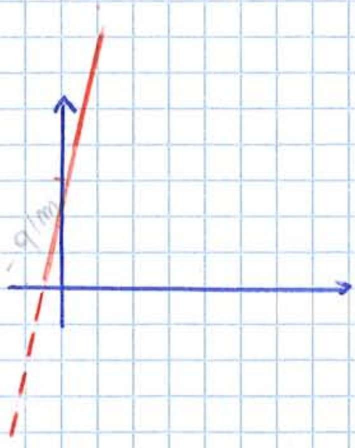
$x = h$

• $y = 5x + 3$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = 5x + 3 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{3}{5}$

$x > -\frac{3}{5}$ $\quad y > 0$ la retta è positiva

$x < -\frac{3}{5}$ $\quad y < 0$

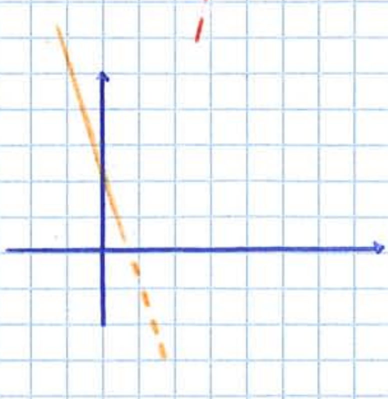


• $y = -3x + 2$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

$x > \frac{2}{3}$ $\quad y < 0$

$x < \frac{2}{3}$ $\quad y > 0$



$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$

$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$
$m_r = -\frac{1}{m_s}$

Grafici intuitivi di funzioni

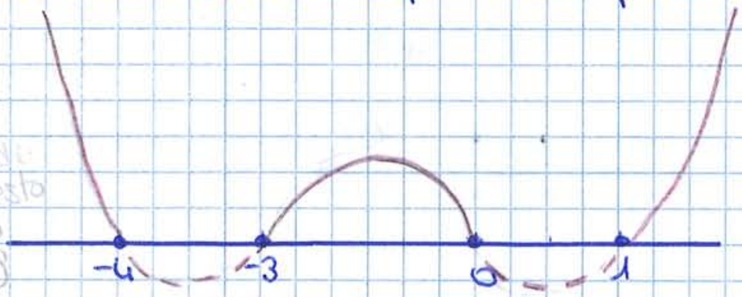
Polinomio di grado superiore al secondo, equazioni e disequazioni

- $y = x(x-1)(x+3)(x+4)$

$y \geq 0$?

① Sempre $\boxed{\text{scomporre}}$ il polinomio
② I numeri che annullano il polinomio sono le intersezioni con l'asse delle x
③ • se il grado del polinomio è pari e $\boxed{a_m > 0}$ per $x < x_1$ la curva partirà dall'alto e passerà per tutti i punti di intersezione
• se il grado del polinomio è dispari e se $\boxed{a_m > 0}$ per $x < x_1$ la curva partirà dal basso e passerà per tutti i punti di intersezione
• se il grado del polinomio è pari e $a_m < 0$ per $x < x_1$ la curva partirà dal basso e passerà per tutti i punti di intersez.
• se il grado del polinomio è dispari e $a_m < 0$ per $x < x_1$ la curva partirà dall'alto e passerà per tutti i punti di intersezione

(non è il grafico di f(x), questo esercizio chiede solo il segno)



curva di quarto grado comanda x^4 parto da sinistra in alto

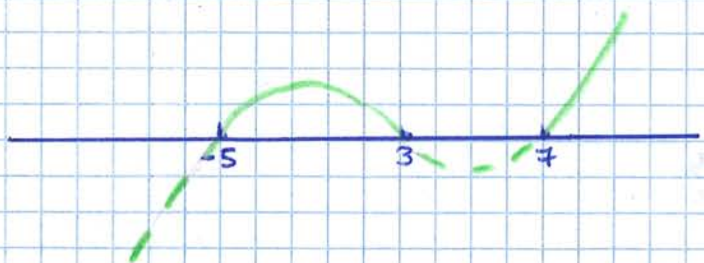
$y \geq 0 \rightarrow x \leq -4$ ∨
$-3 \leq x \leq 0$ ∨
$x \geq 1$

- $y = (x+5)(x-3)(x-7)$
$y \leq 0$?

x^3

$y \leq 0$
$x \leq -5$ ∨ $3 \leq x \leq 7$

(se fosse $-x^3$ parto dall'alto a sinistra)



Rapporto di polinomi di grado superiore al secondo, equazioni e disequazioni

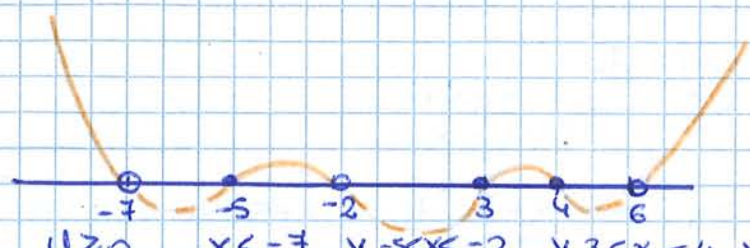
Il segno del rapporto $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è uguale al segno del prodotto $P(x)Q(x)$

Quindi posso risolvere come prodotto ma facendo attenzione a dove si annulla

$y = \frac{(x-3)(x+5)(x-4)}{(x+2)(x-6)(x+7)}$ $y \geq 0$

x^6

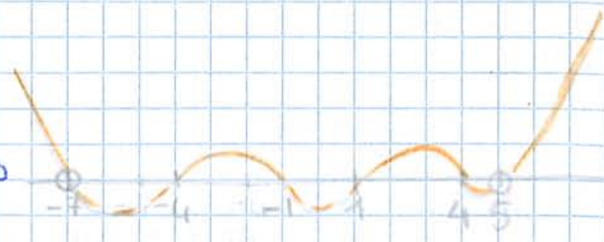
(se fosse con − parto dal basso a sinistra)



$y \geq 0$ $x < -7$ ∨ $-5 \leq x < -2$ ∨ $3 \leq x \leq 4$ ∨ $x > 6$

$$\begin{cases}|x|-k>0 \\ k>0\end{cases} \longleftrightarrow x^2-k^2>0$$

- $\dfrac{(|x|-4)(|x|-1)}{(x+7)(x-5)} \geq 0 \longleftrightarrow \dfrac{(x^2-16)(x^2-1)}{(x+7)(x-5)} \geq 0$



- $|x+1|-|x-1|<x$

$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x \leq -1 \end{cases}$

il meno va prima, fa cambiare il segno anche a 1

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) & x \leq 1 \end{cases}$

	-1		1	
$-(x+1)$		$x+1$		$x+1$
$-(x-1)$		$-(x-1)$		$x-1$

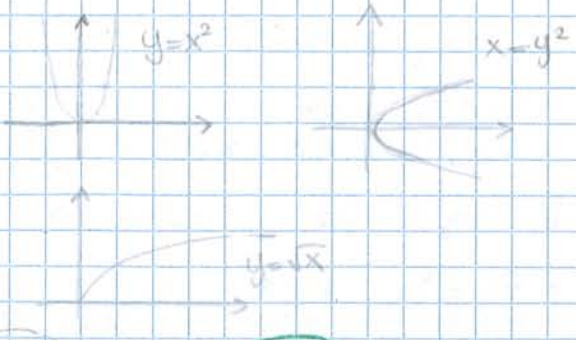
- $x<-1$
  $-(x+1)+(x-1)<x \rightarrow x>-2$
  $S_1 = -2<x<-1$
- $x \geq 1$
  $(x+1)-(x-1)<x \rightarrow x>2$
  $S_2 = x>2$
- $-1 \leq x < 1$
  $x+1+(x-1)<x \rightarrow x<0$
  $S_3 = -1 \leq x < 0$

$S_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2<x<0 \ \vee\ x>2\}$

Disequazioni irrazionali

- $\sqrt{x^2-4|x|}+\sqrt{x^2+4|x|} \geq -x^4$

  $S = \mathbb{R}$



- $\sqrt{x^2+4|x|} > x+1$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+4|x| \geq 0 \\ x^2+4|x| > (x+1)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1<0 \\ x^2+4|x| \geq 0 \\ \text{→ sempre} \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+4|x| \geq 0 \text{ sempre} \\ \cancel{x^2}+4|x| > \cancel{x^2}+2x+1 \\ 4|x|-2x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ 4|x|-2x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-1 \end{cases}$

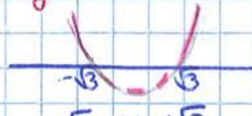
$-1 \leq x < 0$
$-4x-2x>1$
$-6x>1$
$x<-\frac{1}{6}$
$-1 \leq x < -\frac{1}{6}$

$x \geq 0$
$+4x-2x>1$
$x>\frac{1}{2}$

$S_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x<-\frac{1}{6} \ \vee\ x>\frac{1}{2}\}$

Massimo, minimo, sup, inf

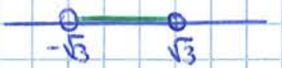
- $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 3 \leq 0\}$



$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Ma $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ non appartengono a $\mathbb{Q}$ quindi:

$B = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$



L'insieme dei minoranti di B è $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\sqrt{3}\}$

" maggioranti di B è $\{x \in \mathbb{R} / x \geq \sqrt{3}\}$.

$\inf B = -\sqrt{3}$
$\sup B = \sqrt{3}$
$\min B = \nexists$
$\max B = \nexists$

- $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \leq 0\}$

$\sup C = \max C = \sqrt{3}$
$\inf C = \min C = -\sqrt{3}$

- $D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi^e\}$

L'insieme dei maggioranti di D è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \pi^e\}$

" minoranti di D è $\emptyset$

$\inf D = -\infty$
$\sup D = \max D = \pi^e$

- $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+3} < |x| + x\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 3^{\frac{x}{x+2}} \geq 9^{\frac{x-2}{x+2}}\}$

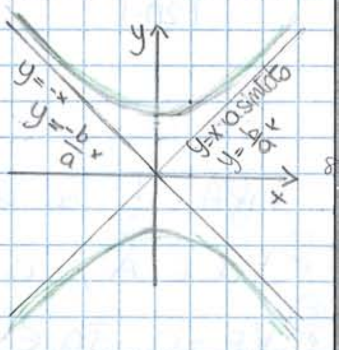
Si nota che $\sqrt{x^2+3}$ sempre > 0 perchè $x^2 \geq -3$ sempre, quindi $|x| + x > 0$ (non può essere ≥ 0)

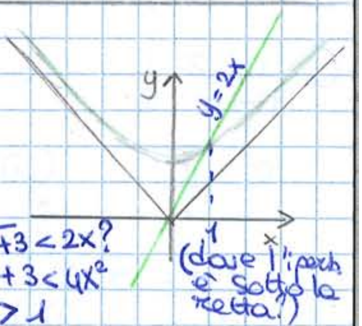
$$\begin{cases} |x| + x > 0 \longrightarrow x > 0 \\ x^2 + 3 \geq 0 \longrightarrow \forall x \\ x^2 + 3 < (|x| + x)^2 \end{cases}$$

$x^2 + 3 < (2x)^2$
$x^2 + 3 < 4x^2$
$3x^2 - 3 > 0$
$x^2 - 1 > 0$
$x < -1$ e $x > 1$

$\longrightarrow S_1 = (1, +\infty)$

Graficamente





dove $\sqrt{x^2+3} < 2x$?
$x^2 + 3 < 4x^2$
$x > 1$
(dove l'iperb. è sotto la retta)

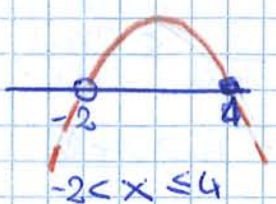
$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 3^{\frac{x}{x+2}} \geq 9^{\frac{x-2}{x+2}}\}$

$3^{\frac{x}{x+2}} \geq 3^{2\frac{x-2}{x+2}}$ (se $a < 1$ cambia verso ma 3 è > 1)

$\frac{x}{x+2} \geq \frac{2x-4}{x+2}$

$\frac{x - 2x + 4}{x+2} \geq 0$

$\frac{-x+4}{x+2} \geq 0$



$-2 < x \leq 4$

$S_2 = (-2, 4]$

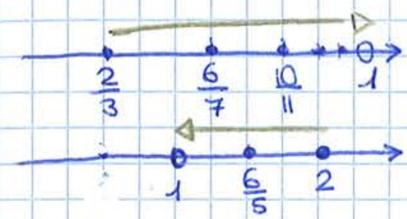
- $A = \left\{ \frac{n+2(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbb{Z} - \{-3\} \right\}$

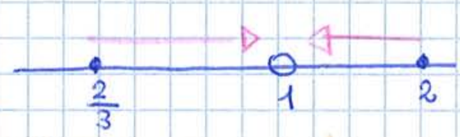
$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$A_p = \left\{ \frac{2m+2}{2m+3} : m \in \mathbb{Z} \right\}$ $(2m+3 \neq 0 \quad m \neq -\frac{3}{2} \rightarrow \notin a \mathbb{Z})$

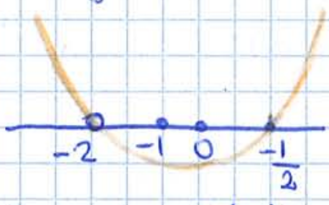
$A_d = \left\{ \frac{2h+1-2}{2h+1+3} : h \in \mathbb{Z} - \underbrace{(2h+1+3 \neq 0)}_{\{-2\}} \right\}$

- A_p $\frac{2m+2}{2m+3} \geq 0$ sempre ≥ 0 in $\mathbb{Z}$ perchè tra $-\frac{3}{2}$ e -1 non c'è numero intero
Quindi non c'è minimo/inf

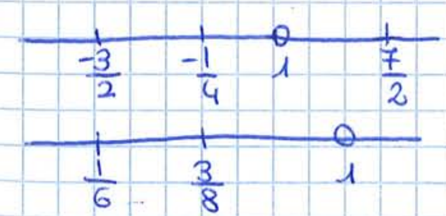


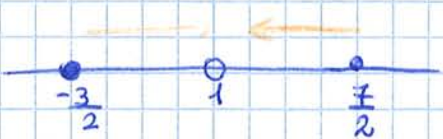


- A_d $\frac{2h-1}{2h+4}$



Il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{-2\}$
provo a studiare il segno, è una parabola quindi a -1 o a 0 corrisponde un valore che sarà il minimo / inf (uno dei due avrà ordinata + bassa)





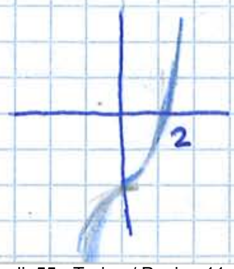
Metto insieme A_p e A_d e trovo che $\inf A = \min A = -\frac{3}{2}$
$\max A = \sup A = \frac{7}{2}$

- $(\pi + e \operatorname{sen} x)^{\frac{x|x|-4}{|x|+1}} < 1$

$e \operatorname{sen} x > -\pi$
$\operatorname{sen} x > -1 > -\frac{\pi}{e}$ (base maggiore di zero) non cambio verso

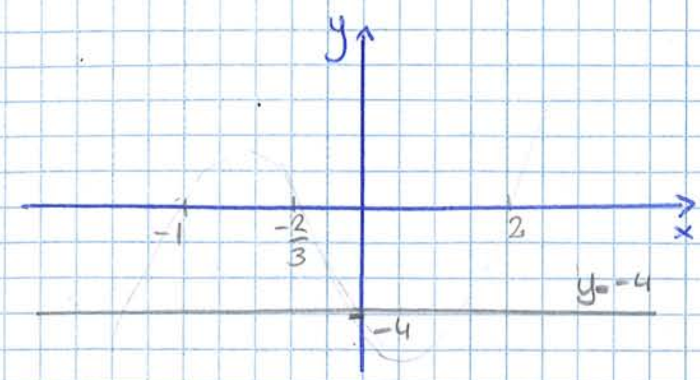
$(\pi + e \operatorname{sen} x)^{\frac{x|x|-4}{|x|+1}} < (\pi + e \operatorname{sen} x)^0$

$\frac{x|x|-4}{|x|+1} < 0$? $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 & x \geq 0 \rightarrow 0 \leq x < 2 \\ -x^2 - 4 < 0 & x < 0 \rightarrow \text{sempre verificata} \end{cases}$



$S_f: (-\infty, 2)$

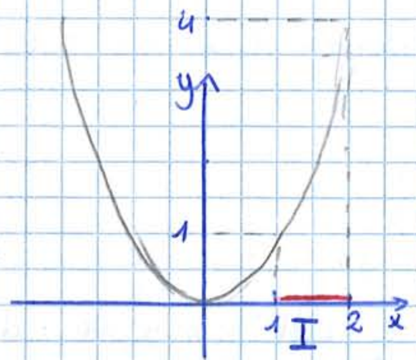
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 136



- $f(x) = x^2$

insieme

$I = [1,2] \subset dom(f)$



$1 \leq x \leq 2$

$f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

$1 \leq f(x) \leq 4$

$f(I) = [1,4]$ ad ogni punto di I associo un numero

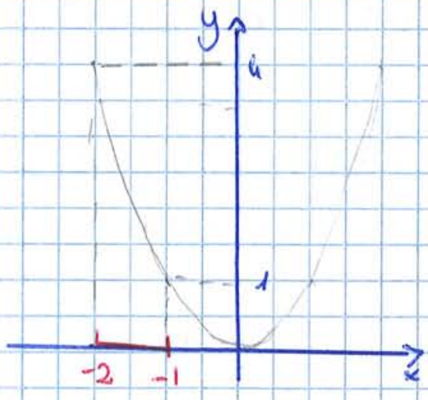
$A = [-2,-1]$

$-2 \leq x \leq -1$

$f(-2) \leq f(x) \leq f(-1)$

$1 \leq f(x) \leq 4$

$f(A) = [1,4]$



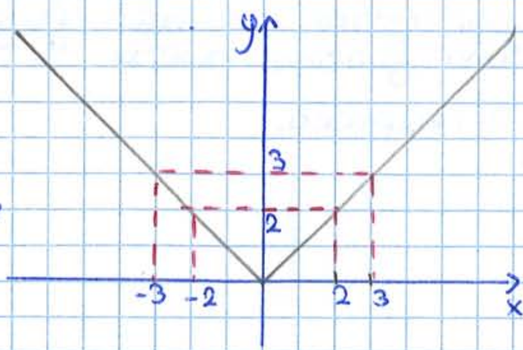
- $f(x) = |x|$

$J = [2,3] \subset im(f)$ ⟶ l'intervallo deve appartenere all'immagine

$f^{-1}(-1) = \emptyset$

$f^{-1}([-1,-2]) = \emptyset$

Parto da $[2,3]$ sull'asse y, torno indietro verso l'asse x e trovo due intervalli sull'asse x



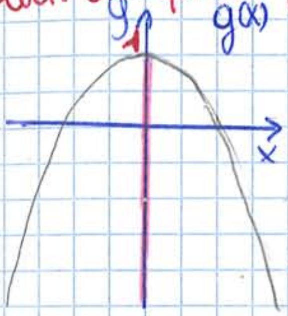
$f^{-1}(J) = [-3,-2] \cup [2,3]$

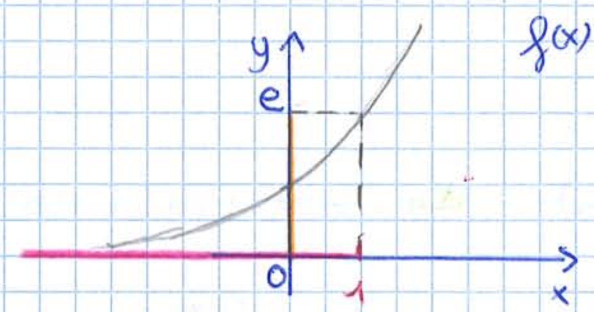
- $f(x) = |x|$
  $g(x) = x^2 - 4x$
  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |x|^2 - 4|x| = x^2 - 4x$
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |x^2 - 4x|$

Calcolare l'immagine di funzioni composte

- $f(x) = e^x$
  $g(x) = 1 - x^2$
  $h(x) = f \circ g \longrightarrow$ la f va a lavorare sull'immagine della g

parti da quella più interna





e^{1-x^2}

① l'immagine di $g(x)$ è $(-\infty, 1]$
② riporto l'immagine di $g(x)$ sul dominio di $f(x)$
③ calcolo l'immagine in questo intervallo

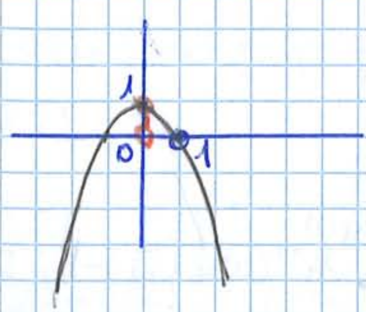
$g((-\infty, +\infty)) = (-\infty, 1]$
$f((-\infty, 1]) = (0, e]$
$im(f \circ g) = (0, e]$

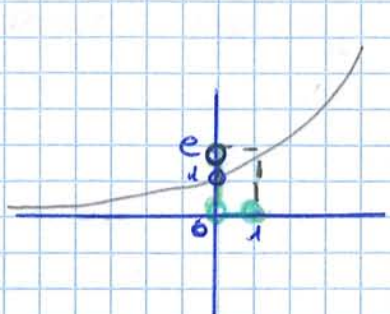
- $f(x) = e^x$
  $g(x) = 1 - x^2$

$\rightarrow$ calcolare l'immagine $I(0,1)$ attraverso la composizione h

$h((0,1)) = (1, e)$

e^{1-x^2}

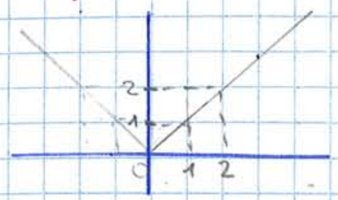


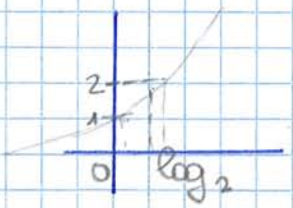


estremo sup $= e$
estremo inf $= 1$
non c'è né max né minimo

• $f(x) = |x|$ → per la controimmagine parto da quella più esterna

$g(x) = e^x$





$h(x) = (f \circ g)(x)$

im h $(0, +\infty)$

$h^{-1}([1,2]) = [0, \log 2]$

$|e^x| = 1$

$e^x = \pm 1 \rightarrow 0$

$|e^x| = 2$

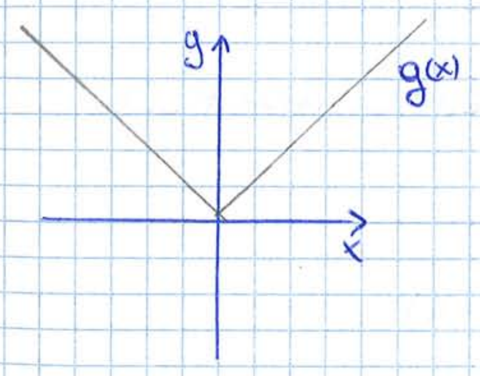
$e^x = \pm 2 \rightarrow \ln e^x = \ln 2$

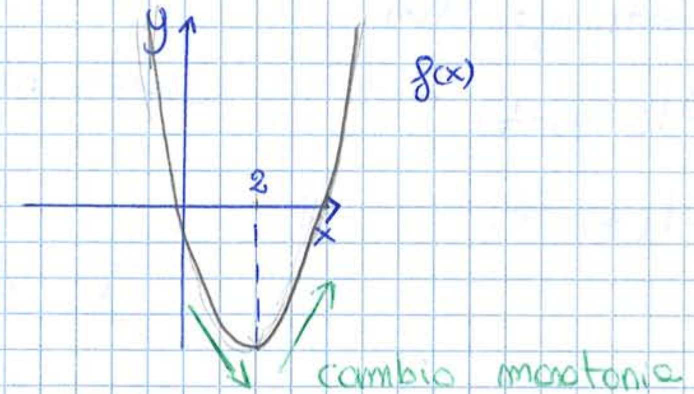
Monotonia della funzione composta

$\left.\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ \searrow & \searrow \end{matrix}\right\} f \circ g \nearrow$ $\left.\begin{matrix} \nearrow & \searrow \\ \searrow & \nearrow \end{matrix}\right\} f \circ g \searrow$ → $\boxed{\text{parto da quella + interna}}$

• $f(x) = x^2 - 4x$

$g(x) = |x|$ $f(g(x)) \rightarrow |x|^2 - 2|x|$





$\left.\begin{array}{l} g \searrow (-\infty, -2) \\ g((-\infty, -2)) = (2, +\infty) \\ f \nearrow (2, +\infty) \end{array}\right\} f \circ g \searrow (-\infty, -2)$

$\left.\begin{array}{l} g \searrow (-2, 0) \\ g((-2, 0)) = (0, 2) \\ f \searrow (0, 2) \end{array}\right\} f \circ g \nearrow (-2, 0)$

$\left.\begin{array}{l} g \nearrow (2, +\infty) \\ g((2, +\infty)) = (2, +\infty) \\ f \nearrow (2, +\infty) \end{array}\right\} f \circ g \nearrow (2, +\infty)$

$\left.\begin{array}{l} g \nearrow (0, 2) \\ g((0, 2)) = (0, 2) \\ f \searrow (0, 2) \end{array}\right\} f \circ g \searrow (0, 2)$

• $f(x) = e^{\frac{1}{x^4-8x^2+16}}$

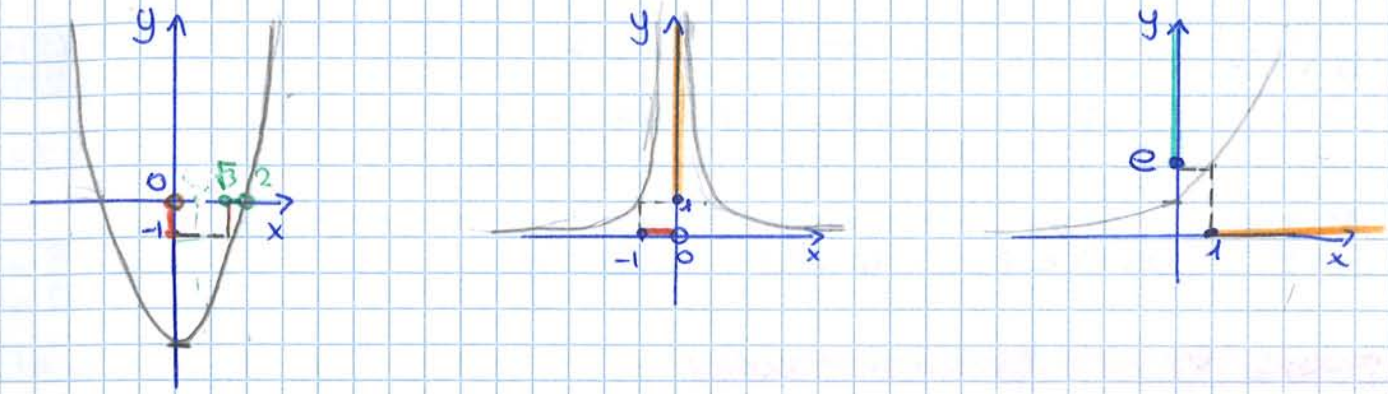
$f(x) = e^{\frac{1}{(x^2-4)^2}}$

$a(x) = x^2-4$

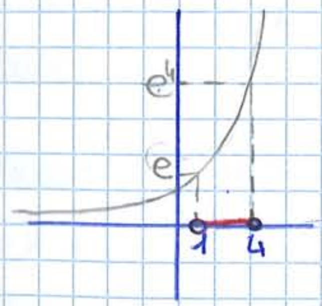
$b(x) = \frac{1}{x^2} \longrightarrow f(x) = c(b(a(x))) = e^{(b(a(x)))} = e^{\frac{1}{(a(x))^2}} = e^{\frac{1}{(x^2-4)^2}}$

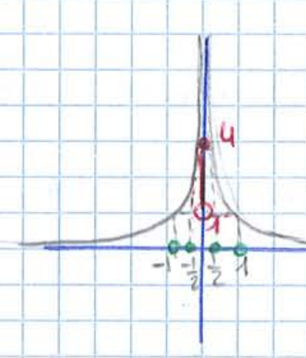
$c(x) = e^x$

$f([\sqrt{3},2)) \longrightarrow [e,+\infty)$



$f^{-1}((e,e^4])$





$\frac{1}{x^2} = 4$

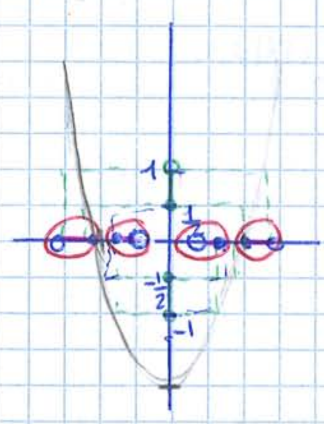
$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \pm\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^2} = 1$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$



FUNZIONI COMPOSTE

- Se devo trovare l'immagine parto dalla funzione + interna (prima C.E)
- Se devo trovare la controimmagine parto da quella + esterna (prima C.E.) (controimmagine)
- se devo trovare l'immagine di un intervallo
  1. controllo che l'intervallo appartiene al dominio
  2. posso sostituire

$f(x) = \ln x$ $(x>0)$ $f(g(x))$ $\ln(x^2-1)$ C.E. $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$g(x) = x^2-1$

$g(f(x)) = (\ln x)^2 - 1 \longrightarrow$ C.E. $(0,+\infty)$

- immagine di $[e^2,e^3]$? $\rightarrow$ $(\ln e^2)^2-1 = 3$, $(\ln e^3)^2-1 = 8$ $[3,8]$
- controimmagine di $[3,8]$? $\longrightarrow$ $(\ln x)^2-1 = 3$ $2\ln x = 4$ e^2; $(\ln x)^2-1 = 8$ $2\ln x = 9$ e^3 $[e^2,e^3]$

- $f(x) = \sin x$

  $g(x) = H(x)$

  $f(g(x))$ è periodico di 2π? $\rightarrow \sin(H(x+2\pi)) \neq \sin(H(x))$

  $g(f(x))$ è periodico di 2π? $\rightarrow H(\sin(x+2\pi)) = H(\sin(x))$

Numeri complessi

$z = x + iy$

$\left.\begin{array}{l} Re(z) = x \\ Im(z) = y \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$

$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$

- $z = 3+2i$

  $w = 5-4i$

  $z+w = (5+3)+(2-4)i = 8-2i$

  $z-w = (3-5)+(2+4)i = -2+6i$

  $z \cdot w = (3+2i)(5-4i) = 15-12i+10i\overbrace{-8(i^2)}^{+8} = 23-2i$

Parte reale, parte immaginaria, elemento immaginario

$\bar{z} = x - iy$

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

parte reale ; parte immaginaria

TIPICO ERRORE $\cancel{|z| = \sqrt{x^2+(iy)^2} = \sqrt{x^2-y^2}}$ No!

- $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{1}{\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} = \frac{\sqrt{3}+2}{-1} = -(\sqrt{3}+2)$
- $\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$
- $\frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \boxed{\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i} \longrightarrow$ sempre scritti divisi
- $\frac{7+4i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{(35+21i+20i-12)}{25+9} = \frac{23+41i}{34} = \frac{23}{34} + \frac{41}{34}i$

- $z = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad \left(z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ $\quad z \cdot w?$

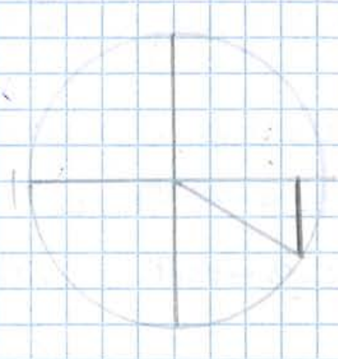
  $w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\quad \left(w = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$ $\quad z : w?$

  $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$

  $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

  $zw = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} \longrightarrow 2e^{i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

  $\frac{z}{w} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \longrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$



$\longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

- $z = (\sqrt{3} - i)$ $\quad z^4?$ $\quad \sqrt[4]{z}?$

  $|z| = \sqrt{3+1} = 2$

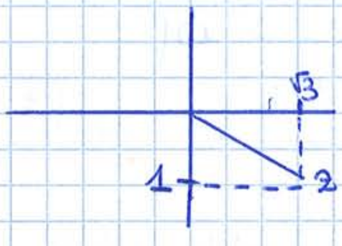
  $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \longrightarrow 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \longrightarrow z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

  $z^4 = 2^4 e^{-\frac{4}{6}\pi i} = 2^4 e^{-\frac{2}{3}\pi i}$

  $= 2^4\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

  $= -2^4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

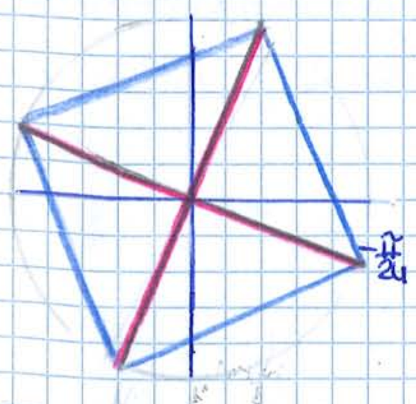
  $= -2^3 - 2^3\sqrt{3}\, i$



$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right)$ $\quad k \overset{da}{=} 0$ a $n-1$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)\right)$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

$-\frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{4} \longrightarrow -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$
- $k=0 \rightarrow -\frac{\pi}{24}$
- $k=1 \rightarrow -\frac{\pi}{24} + 90°$
- $k=2 \rightarrow -\frac{\pi}{24} + 180°$
- $k=3 \rightarrow -\frac{\pi}{24} + 270°$



Trovo i vertici di un quadrato

Non ci sono soluzioni reali / puramente immaginarie; ci sono solo soluzioni complesse

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xyi=4i \rightarrow 2xy=4 \rightarrow y=\frac{2}{x} \quad x\neq 0 \end{cases}$$

$$x^2-\frac{4}{x^2}=3$$

$$\frac{x^4-4-3x^2}{x^2}=0$$

$$x^4-3x^2-4=0$$

$$t^2-3t-4=0$$

$$\Delta=9+16=25$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} 4=x^2 \qquad x=2 \quad y=1,\ \ x=-2 \quad y=-1 \\ -1=x^2 \rightarrow x\notin\mathbb{R} \end{array}\right.$$

e x deve appartenere a $\mathbb{R}$

$\sqrt{3+4i}$

$$\sqrt{w}=\pm(2\pm i)$$

- $x^2-3x+5=0$

$$\Delta=-11$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}=\frac{3\pm i\sqrt{11}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$$

- $x^2-\sqrt{3}x-i=0$

$$\Delta=3+4i$$

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4i}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm(2\pm i)}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}+2}{2}+\frac{1}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}-2}{2}-\frac{1}{2}i \end{array}\right.$$

modulo $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=$

$$\sqrt{\frac{3+4+4\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}}=$$

$$\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

- $x^2-4x+4-8i=0$

$$\Delta=16-4(4-8i)=16-16+32i$$

$\sqrt{i}$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{32i}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16\cdot 2i}}{2}=\frac{4\pm 4\sqrt{2}\sqrt{i}}{2}=2\pm 2\sqrt{2}\sqrt{i}=2\pm 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\pm(2+2i)$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} 4+2i \\ -2i \end{array}\right.$$

- $P(z) = z^4 - iz^3 + iz + \alpha$
  $\alpha \in \mathbb{C}$?

$P(i) = 0$

$P(i) = i^4 - i(i)^3 + i(i) + \alpha = 1 - 1 + i^2 + \alpha = -1 + \alpha$

$P(i) = 0 \iff \alpha = 1$

$P(z) = z^4 - iz^3 + iz + 1$

	1	$-i$	0	i	1
i		i	0	0	-1
	1	0	0	i	//

$P(z) = (z-i)(z^3+i)$

$z = i$

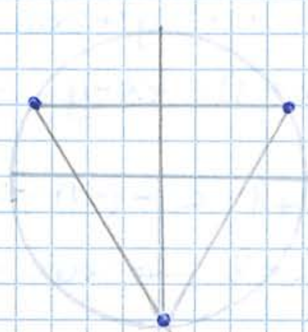
$z^3 = i$

$z = \sqrt[3]{-i}$ (visto che l'indice è dispari) $\to z = -\sqrt[3]{i}$

$i = 1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$

- $k=0$ $\quad \sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k=1$ $\quad \sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\,sen\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$



Soluzioni: $z_1 = i \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

- $w = 2 + 2\sqrt{3}i$
  $z \in \mathbb{C}$?

$$\begin{cases} z \cdot w < 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

$|w| = \sqrt{4+4(3)} = \sqrt{16} = 4$

$w = 4\left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\sqrt{3}i\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ |z| = 1 \end{array}\right\} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \longrightarrow x^2+y^2 = 1$ (le z devono appartenere alla circonferenza)

$Re(v) < 0$

$v = (\cos\theta + i\,sen\theta)|v|$

$\theta = \pi \;\to$ se è così è negativo

$z = e^{i\alpha}$

$wz = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\alpha} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$

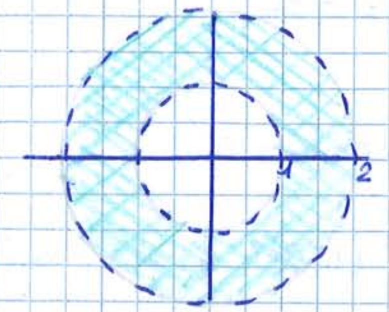
$\frac{\pi}{3} + \alpha = \pi \to \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$z = e^{i\frac{2}{3}\pi} \to z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

• $B = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2 \}$

$$1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2$$

$$1 < x^2+y^2 < 4$$



• $C = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z+3| < |z-i| \}$

$$z = x+iy$$

$$|x+iy+3| < |x+iy-i|$$

$$|(x+3)+iy| < |x+i(y-1)|$$

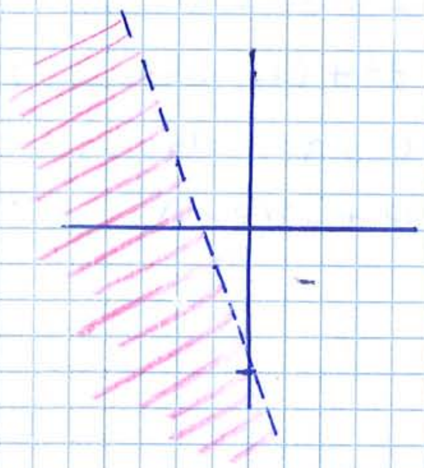
$$\sqrt{(x+3)^2+y^2} < \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$(x+3)^2+y^2 < x^2+(y-1)^2$$

$$6x+9 < -2y+1$$

$$2y < -6x-8$$

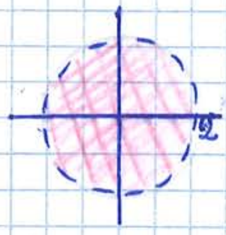
$$y < -3x-4$$



• $D = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 2 \} \cap \{ z \in \mathbb{C} / \ \Im m(z) \cdot Re(z) < 1 \}$

$$x^2+y^2 < 4$$

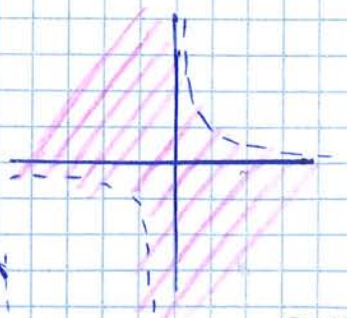
$$x^2+y^2 = 4$$



$$y \cdot x < 1$$

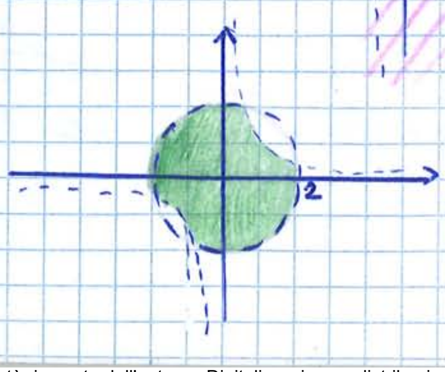
$$y < \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$



$x > 0 \qquad y < \frac{1}{x}$

$x < 0 \qquad y > \frac{1}{x}$



$0 < x < 2 \rightarrow y < \frac{1}{x}$

$-2 < x < 0 \rightarrow y > \frac{1}{x}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 136

Limiti

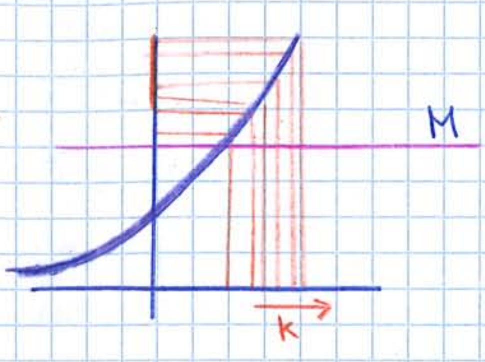
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \longleftrightarrow \forall I(l)\ \exists I(x_0),\ x \neq x_0$ tale che $\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \rightarrow f(x) \in I(l)$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: Per ogni intorno di $+\infty$ (asse y) torno indietro e trovo un intorno di $+\infty$ (sull'asse x)



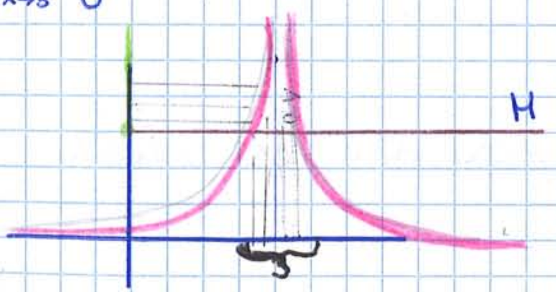
$\forall I_1(+\infty)\ \exists I_2(+\infty) / \forall x \in I_2(+\infty) \rightarrow f(x) \in I_1(+\infty)$

$I_1(+\infty) = (M, +\infty)$

$I_2(+\infty) = (k, +\infty)$

$\forall M > 0\ \exists k > 0 / \forall x > k \rightarrow f(x) > M$

- $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$



Prendo un intorno di $+\infty$ sull'asse y, trovo un intorno di 3 sull'asse x le x dell' intorno di 3 hanno immagini in $+\infty$

$\forall I(+\infty)\ \exists I(3)\setminus\{3\} / \forall x \in I(3)\setminus\{3\} \rightarrow f(x) \in I(+\infty)$

$x \in I(3) \rightarrow |x-3| < r$

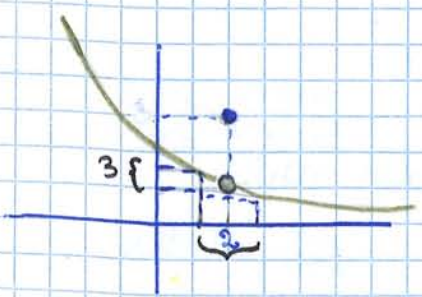
$x \in I(3)\setminus\{3\} \rightarrow |x-3| < r \quad x \neq 3 \rightarrow 0 < |x-3| < r$

$I(+\infty) = (H, +\infty)$

$I(3)\setminus\{3\} = (3-r, 3) \cup (3, 3+r)$

$\forall H > 0\ \exists r > 0 / \forall x\ 0 < |x-3| < r \rightarrow f(x) > H$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$



$\forall I(3)\ \exists I(2)\setminus\{2\}$ tale che $\forall x \in I(2)\setminus\{2\} \rightarrow f(x) \in I(3)$

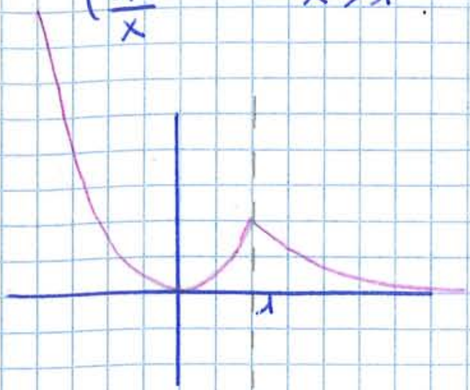
$I(3) = (3-s, 3+s)$

$I(2) = (2-m, 2+m)$

$\forall s > 0\ \exists m > 0 / \forall x \in (2-m, 2) \cup (2, 2+m) \rightarrow |f(x) - 3| < s$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 136

- $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$



α deve essere > 0

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 + \alpha = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

$1 + \alpha = 1 = 1$
$\alpha = 0$

Un punto di discontinuità di f è sempre un punto che appartiene al dominio

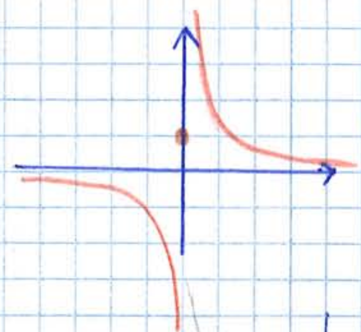
f è definito in $\mathbb{R} - \{0\}$ a valori in $\mathbb{R} - \{0\}$

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$

$0 \notin \text{dom } f$

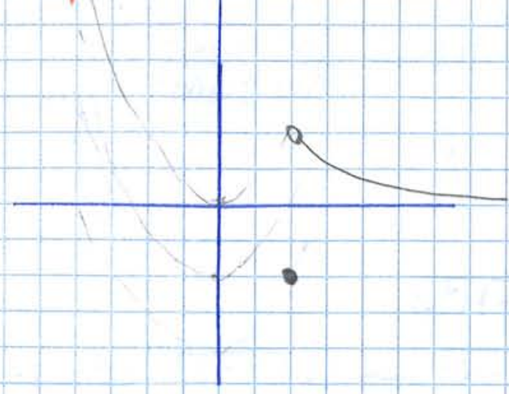
x deve appartenere all'intorno per essere un punto di discontinuità

- $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



In questo caso si può parlare di discontinuità di II specie

- $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \alpha & x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$

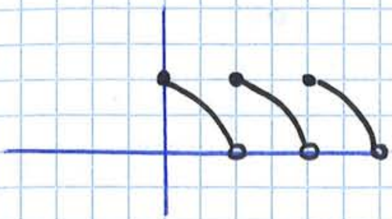


$|\alpha| > 1$ si apre
$|\alpha| < 1$ si chiude

$\lim_{x \to 1^-} \alpha x^2 + \alpha = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = f(1)$

$2\alpha = 1 = -1 \rightarrow$ discontinuità di tipo salto nell' intervallo $[0,1)$ $\quad x \xmapsto[H(x)]{\text{associa}} x$

$[1,2)$ $\quad x \xmapsto{H(x)} x-1 \qquad g(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$

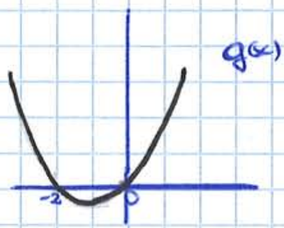


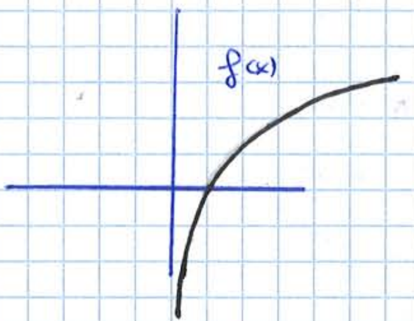
Grafici intuitivi di funzioni

- $f(x) = \log(x^2+2x)$

$x^2+2x>0$

$D(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$





$g(x) = x^2+2x$
$h(x) = \log x$

$\boxed{\begin{array}{l} f = h \circ g \\ f = h(g(x)) \end{array}}$

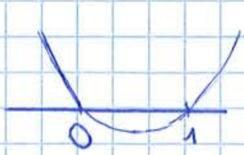
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (faccio il limite per $x\to-\infty$ di $g(x) = +\infty$ e poi il $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$)

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ $\qquad x^2-x>0$

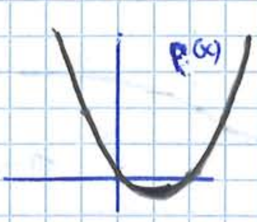


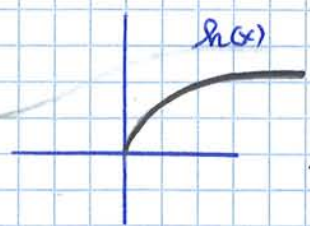
$D(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

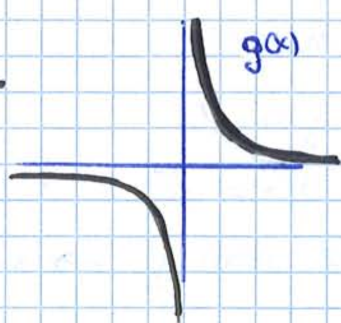
$g(x) = \dfrac{1}{x}$

$h(x) = \sqrt{x}$

$p(x) = x^2-x$







$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = g \circ h \circ p \\ f(x) = g(h(p(x))) \end{array}}$

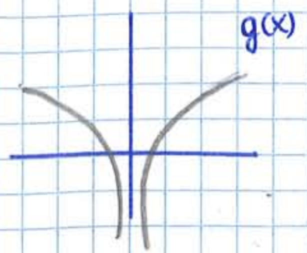
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$

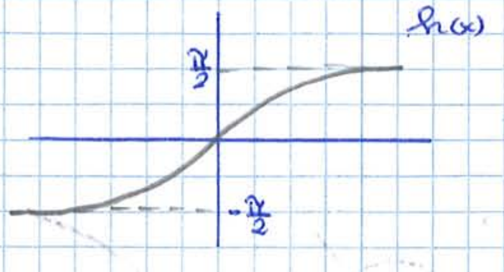
$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

- $f(x) = \text{arctg}(\log|x|)$





$g(x) = \log|x|$

$h(x) = \text{arctg}\, x$

$f = h \circ g$ $\quad D\ (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f = h(g(x))$

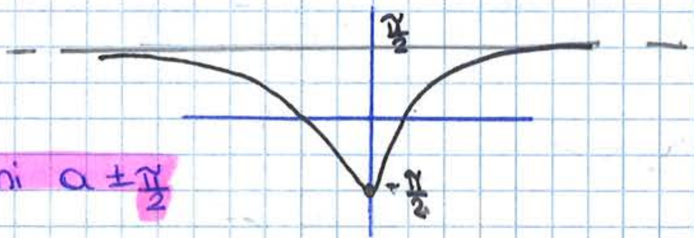
$f(-x) = \text{arctg}(\log(|-x|)) = \text{arctg}(\log|x|) = f(x)$ funzione pari

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

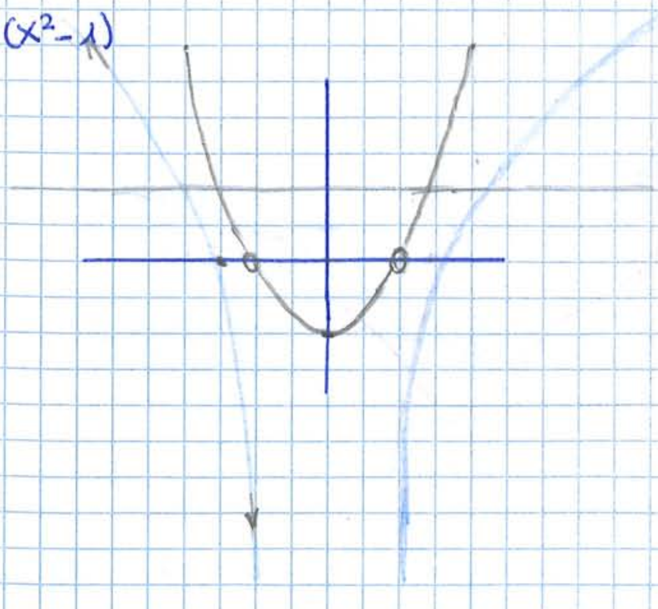
0 non appartiene dom f → 0 è punto di discontinuità eliminabile

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

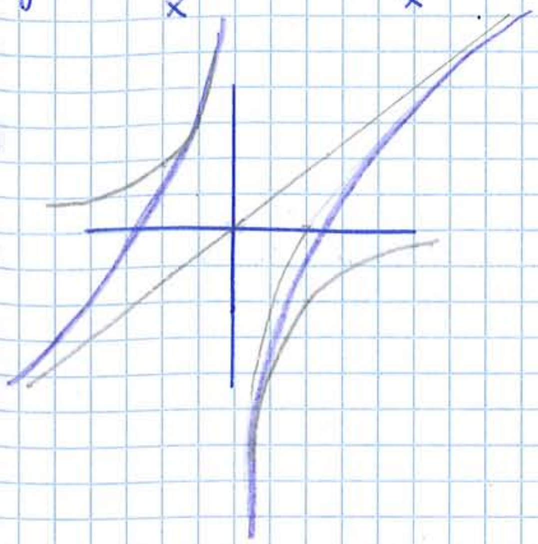


l'arctg(x) blocca tutte le funzioni a $\pm\frac{\pi}{2}$

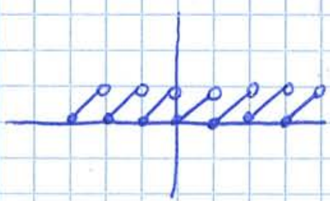
- $\log(x^2 - 1)$



• $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$



• $\lim_{x\to 1} M\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$



$\lim_{x\to 1^-} M\left(\frac{\overset{0^-}{x^2-1}}{x}\right) = 1^-$

$\lim_{x\to 1^+} M\left(\frac{\overset{0^+}{x^2-1}}{x}\right) = 0^+$

$h(x) = M\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \longrightarrow h(1) = M\left(\frac{1^2-1}{1}\right) = M(0) = 0$

Caso di h continua: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$

caso di h non continue: $\underbrace{\lim_{x\to 1}}_{1^- \quad 0^+} h(x) \neq h(\lim_{x\to 1} x)$

• $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-x-2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ $D(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$

$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{32}{3}$

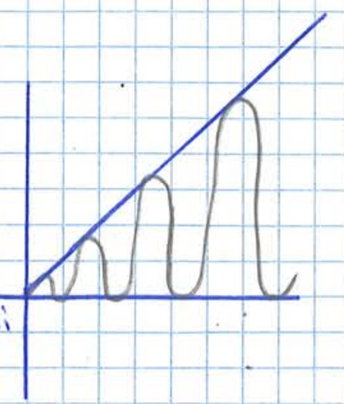
• $\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-x^2-5x-2}{2x^2-5x+2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & -5 & -2 \\ 2 & & 4 & 6 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -1 & // \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 2 & -5 & 2 \\ 2 & & 4 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & // \end{array}$$

$\lim_{x\to 2} \frac{(2x^2+3x+1)\cancel{(x-2)}}{(2x-1)\cancel{(x-2)}} = 5$

- $x(1+\sin x)$

↳ tocca l'asse delle x non puoi fare il $\lim_{x\to+\infty}$ hai due successioni



basta un pelo in più per non farlo arrivare sull'asse delle x

$$\lim_{x\to+\infty} x(1{,}0001+\sin x)$$

$$-1\le \sin x\le 1$$

$$-1+1{,}0001 \le 1{,}0001+\sin x \le 1+1{,}0001$$

$$0{,}0001 \le 1{,}0001+\sin x \le 2{,}0001$$

$$\frac{x}{10000} \le (1{,}0001+\sin x)x \le (2{,}0001)x$$

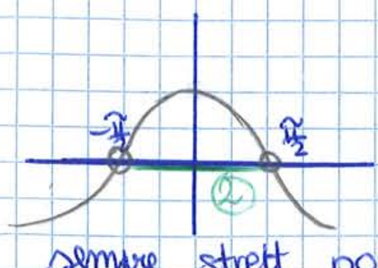
$\frac{x}{10000} \to +\infty$; $(1{,}0001+\sin x)x \to +\infty$ (T. carab.) ; $(2{,}0001)x \to +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} x(a+\sin x)$ $\quad |a|<1 \ \nexists$, $|a|>1 \ \exists$

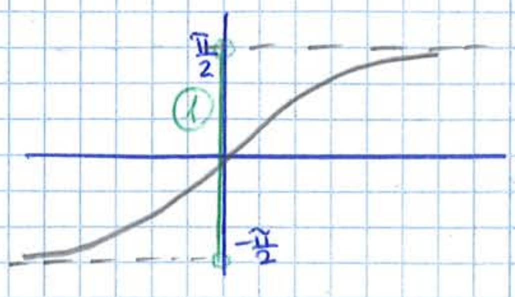
$\lim_{x\to+\infty} \log x(e+\cos x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{e}{\pi}+\cos(\operatorname{arctg} x)\right)$

↳ è <1, esiste? Sì perché il coseno lavora sull'immagine dell'arctg

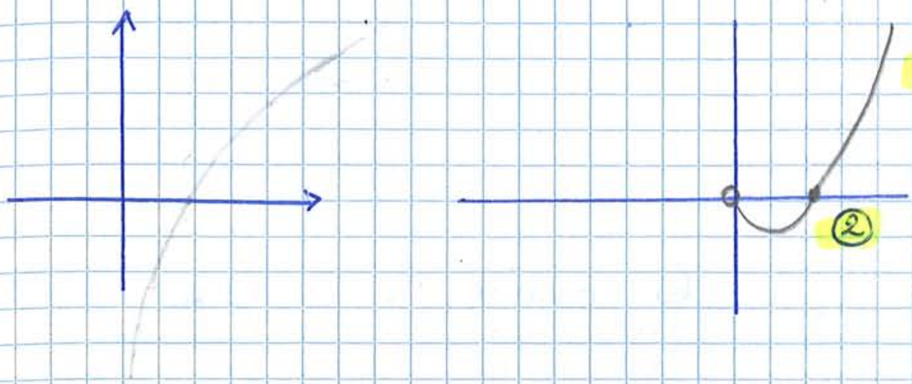


sempre strett. positivo



cos(arctg x) è sempre strett. positivo e a questo sommo un numero >0 e <1. ⟶ esiste il limite

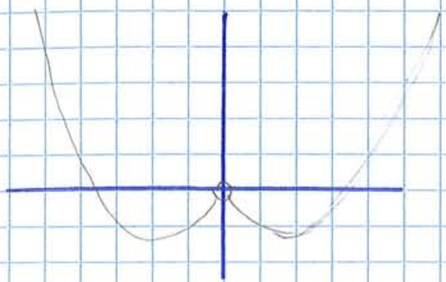
- $f(x) = x^2 \log x$



① come x^2

② si annulla quando uno dei due è zero (il prodotto è zero)

- $f(x) = x^2 \log|x|$

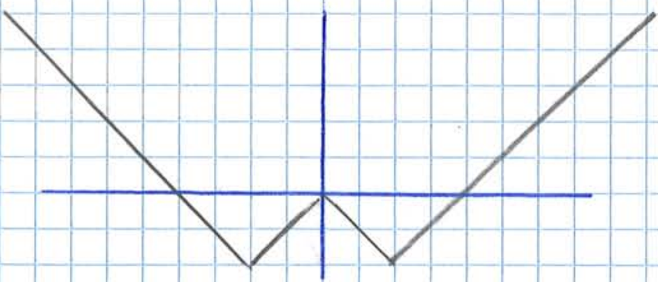


la funzione è prolungabile per continuità nell'origine

f tilde

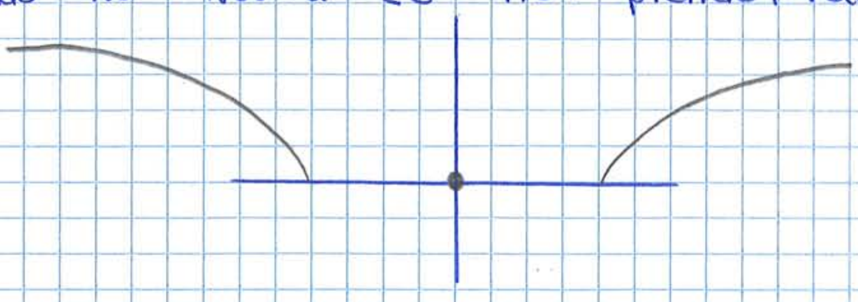
$$\tilde{f} = \begin{cases} x^2 \log|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- $f(x) = ||x|-1|-1$



$\lim_{x \to 0} \sqrt{f(x)}$ $\nexists$ perché è un punto isolato, non esiste intorno. Il limite non esiste ma la funzione è continua in $x=0$

$\sqrt{\ }$ rispetta la monotonia della funzione interna
applico $\sqrt{\ }$ definito sempre per valori ≥ 0
quando ho valori < 0 non prendo i valori



Successioni

un numero algebrico è un numero che nasce da una equazione
e (numero di Nepero) è trascendente perché non nasce da una equazione

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right)}\right)^{\frac{n}{a}a} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right)}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = e^a$$

- $$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n = e^{-\sqrt{2}}$$

- $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{n+3}{n}\right)^n}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$ ⟶ molto + veloce a salire di n! quindi è come $\frac{x}{x^2}$ $\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

Formula di Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{per } n\to+\infty$$

- $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n-2}+(n-2)^n}{4(n^n)-3(n!)} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n\cdot n^{-2}+(n-2)^n}{4(n^n)-3n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^n}\left(n^{-2}+\frac{(n-2)^n}{n^n}\right)}{\cancel{n^n}\left(4-\frac{3n!}{n^n}\right)} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n}{4}$$

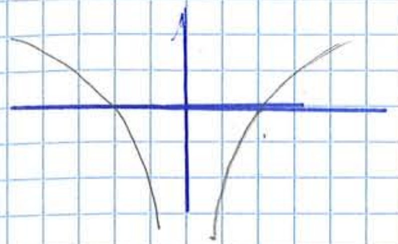
$\boxed{n\to+\infty \text{ tendono a zero}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \frac{e^{-2}}{4}$$

Tracciare il grafico intuitivo

• $f(x) = |x|^x$
$x \neq 0$

$f(x) = e^{\log|x|^x} = e^{x\log|x|}$



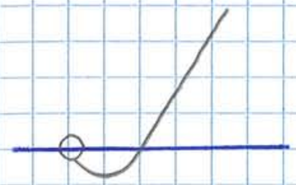
$y = \log|x|$

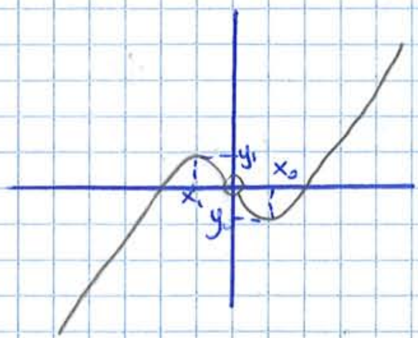
$g(x) = x\log|x|$

$g(-x) = -x\log|-x| = -x\log|x| = -g(x)$

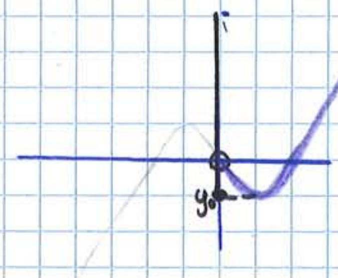
funzione $\boxed{\text{dispari}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$

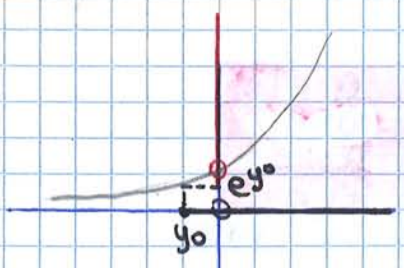


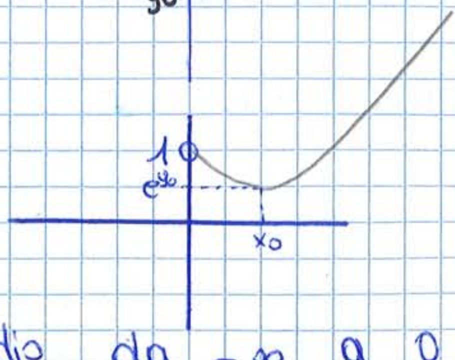


$\boxed{\text{funzione dispari}}$ *la studio da 0 a $+\infty$

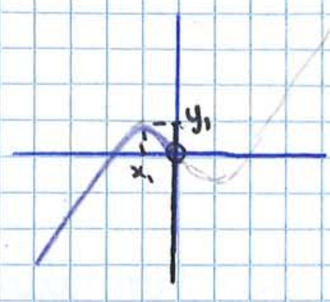


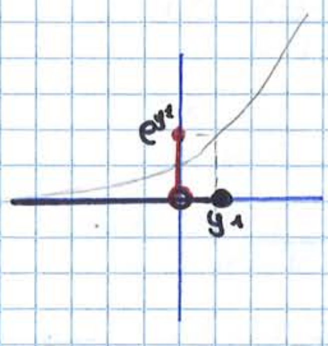
esponenziale $\rightarrow$ da e^{y_0} a $+\infty$
$\downarrow$
<1





* la studio da $-\infty$ a 0





• $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3}{n^2-1}\right)^n$

intuitivamente va a infinito perché $\frac{n^3}{n^2-1} > 1$

$\frac{n^3}{n^2-1} > 1$? $\quad \frac{n^3}{n^2-1} - 1 > 0 \longrightarrow \frac{n^3-n^2+1}{n^2-1} > 0 \qquad$ C.E. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

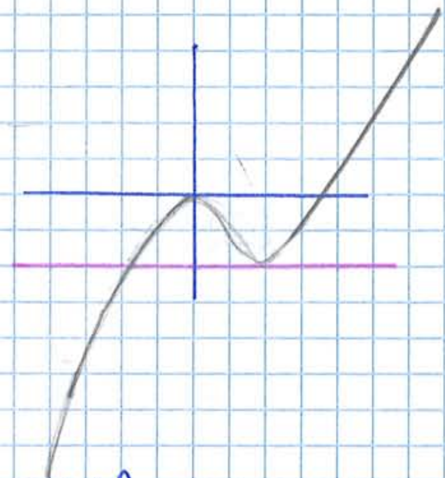
non ci interessa perché $n\to+\infty$

$D>0$ per $n>1$

$N>0$ $\quad n^3-n^2+1>0$

$n^3-n^2>-1$?

$x^3-x^2 \overset{\text{raccolgo}}{=} x^2(x-1)$



• $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{(n^2-1)\cdot\frac{n}{n^2-1}} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right)^{\frac{n}{n^2-1}} = e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$

• $\lim_{n\to+\infty} e^{\log\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{n\log\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)}$

1+qualcosa che tende a zero

$\left[\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1 \longrightarrow \log(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t\right]$

$\hookrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot\frac{1}{n^2-1}} \longrightarrow e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2-1}} = e^0 = 1$

esercizi con Diego e Maurizio

• $\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{e^{2x-5}-1}{\sin(2x-5)} \longrightarrow \lim_{x\to\frac{5}{2}}\underbrace{\frac{e^{2x-5}-1}{2x-5}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{2x-5}{\sin(2x-5)}}_{\to 1} = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{bx}\right)^x = \sqrt[b]{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \longrightarrow 2$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(tg x)}{\sin x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(tg x)}{tg x}}_{\to 1} \cdot \frac{tg x}{\sin x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} 1 \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\underbrace{\cos x}_{\cos(0)=1}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 - \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \longrightarrow 5-3=2$

- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = 1$ $\frac{\pi}{2}$ fa annullare il coseno

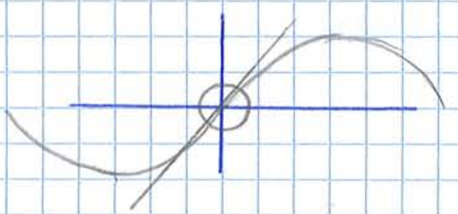
Teorema di sostituzione

$\lim_{x\to c} \frac{sen(f(x))}{f(x)}$ è uguale al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ se $f(x)$ tende a zero (è infinitesima) per quel valore c

---

- $\lim_{x\to 0} \frac{3x+5\sin x}{2x+7\sin x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(3+5\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+7\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{8}{9}$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$



$\sin t \sim t \quad t\to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{3x+5\sin x}{2x+7\sin x} \longrightarrow \frac{3x+5x}{2x+7x} = \frac{8\cancel{x}}{9\cancel{x}} = \frac{8}{9}$

- $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{t\to 0} \frac{2(1-\cos t)}{t^2} = 1$ localmente $2(1-\cos t)$ e t^2 sono vicini

$2-2\cos t \sim t^2 \quad t\to 0$
$2-t^2 \sim 2\cos t \quad t\to 0$
$\cos t \sim \frac{2-t^2}{2} \quad t\to 0$
$\cos t \sim 1-\frac{1}{2}t^2 \quad t\to 0$

- $\lim_{t\to 0} \frac{\log(\cos t)}{t} \longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)}{t} \longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}} = 0$

- $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

$e^t-1 \sim t \quad t\to 0$
$e^t \sim 1+t \quad t\to 0$

$\log_a n \quad n^\alpha \quad a^n \quad n! \quad n^n$

divergono + rapidamente

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n + n^n + n!}{(n+1)! + (n+3)^5} \longrightarrow \frac{n^n}{(n+1)!}$ è n^n diverge di + il risultato è $+\infty$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{6^n + \sin(n!) + \operatorname{arctg}(n^n)}{\log(n) + e^{\sqrt{n}}} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ diverge di +

  tutti gli altri sono bloccati

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4}} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} \longrightarrow \frac{2x}{|x|} \longrightarrow \frac{2\cancel{x}}{+\cancel{x}} = 2$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2-4}} \longrightarrow \frac{2x}{|x|} = \frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}} = -2$

Landau, o-piccolo

$\sin x = x + o(x) \quad x \to 0$

$\varphi(x) =$ funzione campione

ordine di infinitesimo

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)} = \ell \longleftrightarrow f(x) = \ell\,\varphi^\alpha(x) + o(\varphi^\alpha(x)) \quad \ell \neq 0$

P.P.

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \longleftrightarrow f(x)$ è un $o(g(x))$ per $x \to x_0$

- $(\sin(2x))^2 = (2x + o(x))^2 \quad x\to 0$

  $\ell(\varphi(x))^2$

  $4x^2 + 4x\,o(x) + (o(x))^2 = 4x^2 + o(x^2) + o(x^2) = \underbrace{4x^2}_{P.P.} + o(x^2) \quad x \to 0$

  α

$$\boxed{\begin{array}{l} x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}) \quad x\to 0 \\ (o(x^n))^k = o(x^{nk}) \quad x \to 0 \\ \lambda\, o(x^n) = o(x^n) \\ o(x^n) + o(x^m) = o(x^p) \quad p = \min(n,m) \\ x \to 0 \quad \varphi(x) = x \quad \text{per } x \to 0 \\ \text{l'infinitesimo campione è la } x \end{array}}$$

$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t \quad , t\to 0$

- $\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x\to 0$

- $f(x)=\sqrt[3]{8+x^3}$ → non tende a zero, raccolgo

$= \sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{8}x^3\right)} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}x^3} = 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}x^3+o(x^3)\right) \quad x\to 0$

$= 2+\frac{1}{12}x^3+o(x^3)$

- $f(x)=\log^2(\cos(x)) \quad x\to 0$

$\log^2\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) \quad x\to 0 \to \left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^2 \quad x\to 0 \to \frac{1}{4}x^4+o(x^4)$

- $f(x)=\log(x^2+x+1)$

$=\log(1+x+o(x))$

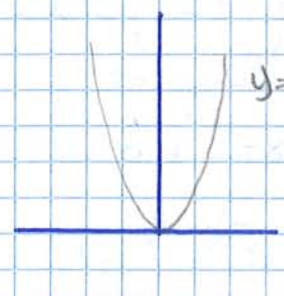
$=x+o(x) \quad x\to 0$

- $f(x)=e^{3x}-\sqrt[6]{1-4x^2}$

$1+3x+o(x)-\left(1-\frac{4}{6}x^2+o(x^2)\right) = \overbrace{3x}^{P.P.}+o(x) \quad x\to 0 \qquad \alpha=1$

$f(x)=e^{3x^2}-\sqrt[6]{1-4x^2}$

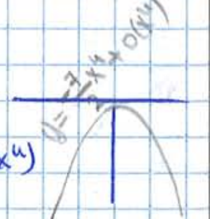
$=\cancel{1}+3x^2+o(x^2)-\cancel{1}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2) \to \frac{11}{3}x^2+o(x^2)$



Se un esercizio chiede: come si comporta f(x) in un intorno? è positiva, negativa?
→ significa calcola P.P.

- $f(x)=\cos(x^2)-e^{3x^4} \quad x\to 0$ è infinitesimo

$1-\frac{1}{2}(x^2)^2+o((x^2)^2)-(1+3x^4+o(x^4)) \to -\frac{1}{2}x^4-3x^4+o(x^4)=-\frac{7}{2}x^4+o(x^4)$

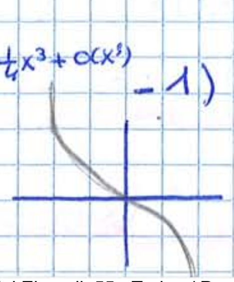


- $f(x)=e^{\sqrt{4-x^3}}-e^2$

$\sqrt{4-x^3}=\sqrt{4\left(1-\frac{x^3}{4}\right)}=2\sqrt{1-\frac{x^3}{4}}=2\left(1-\frac{1}{8}x^3+o(x^3)\right)$

$f(x)=e^{2(1-\frac{1}{8}x^3+o(x^3))}-e^2 \to e^2e^{-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)}-e^2 \to e^2\left(e^{-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)}-1\right) \quad x\to 0$

$=e^2\left(\cancel{1}-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)-\cancel{1}\right) \to f(x)=-\frac{e^2}{4}x^3+o(x^3)$



- $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) \quad x \to +\infty$

$= \log\left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{2}{x+1}\right)$

$= \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right)$

per $x \to +\infty$ tende a zero quindi ho $1+$ qualcosa che tende a zero

$= \frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)$
$x \to +\infty$

- $f(x) = \sqrt{x^2+3x+1} \quad x \to \pm\infty$

posso scrivere $\sim$ al posto degli o piccolo

$\sim \sqrt{x^2\left(1+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)} \sim |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$1+$ qualcosa che tende a zero

$\sim |x|\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right) \sim |x| + \frac{3}{2}\frac{|x|}{x} + \frac{1}{2}\frac{|x|}{x^2}$

$f(x) = |x| + o(|x|)$

$x \to +\infty \quad \varphi(x) = x \quad$ P.P. $x \quad \alpha = 1$

$x \to -\infty \quad$ P.P. $-x \quad \alpha = 1$

$x \to -\infty \quad f(x) \sim -x - \frac{3}{2} \quad y = -x - \frac{3}{2}$ asintoto obliquo

$x \to +\infty \quad f(x) \sim x + \frac{3}{2} \quad y = x + \frac{3}{2}$ asintoto obliquo

---

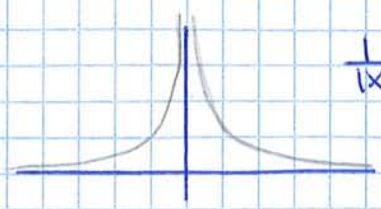
$f(x) = |x|^{x-1} \quad x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} x\log|x| = 0$

$f(x) = |x|^x \cdot |x|^{-1} = \frac{e^{x\log|x|}}{|x|} \longrightarrow \frac{1 + x\log|x| + o(x\log|x|)}{|x|} \quad x \to 0$

per $x \to 0$ sostituisco $\frac{1+0}{|x|}$

$\sim \frac{1}{|x|} \quad x \to 0$

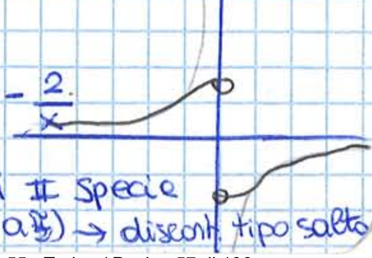


$\frac{1}{|x|}$

discontinuità di II specie

$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\cos x + 1}{1-e^x}$

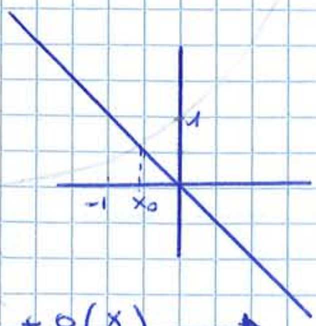
$g(x) = \frac{\cos x+1}{1-e^x} \longrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+1}{-x+o(x)} \longrightarrow \frac{2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-x+o(x)} \sim -\frac{2}{x}$



ho una discontinuità di II specie
applico l'arctg x (si blocca a $\frac{\pi}{2}$) $\to$ discont. tipo salto

• $\log(e^x + x)$

c.e. $e^x > -x$



$x_0 \in (-1, 0)$

$\log\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)$

$\log e^x + \log\left(1+\frac{x}{e^x}\right) \to x + \frac{x}{e^x} + o\left(\frac{x}{e^x}\right) \longrightarrow$ $f(x) \sim x \quad x \to +\infty$ $y = x$ è l'asintoto obliquo

e^x cresce + velocemente

Bisogna sviluppare per vedere se ci sono altri numeri

• $f(x) = \frac{x^2-(x+1)|x-2|}{2x+3}$ asintoti?

$x \to -\infty \quad f(x) = \frac{x^2-(x+1)(-x+2)}{2x+3} = \frac{x^2+(x+1)(x-2)}{2x+3} \sim \frac{2x^2}{2x} = x$ può essere asintoto obliquo

$f(x) = \frac{x^2+x^2-x-2}{2x+3} = \frac{2x^2-x-2}{2x+3} = \frac{2x^2+3x-3x-x-2}{2x+3} = \frac{2x^2+3x}{2x+3} - \frac{4x+2}{2x+3}$

$= x - \frac{4x+2}{2x+3}$

$x \to -\infty \quad f(x) \sim x-2 \qquad y = x-2$ è asintoto obliquo

$x \to +\infty \quad f(x) = \frac{x^2-(x+1)(x-2)}{2x+3} = \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+x+2}{2x+3} \to f(x) \sim \frac{1}{2} \quad x \to +\infty$

$y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale

• $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to 0} \frac{(5x+o(x))^2}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{25x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{25+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} = 50$

• $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3\sin(2x)}{x-2\sin(3x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3(2x)+o(x)}{x-2(3x)+o(x)} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x+o(x)}{-5x+o(x)} = \frac{\cancel{x}(6+o(1))}{\cancel{x}(-5+o(1))} = -\frac{6}{5}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x(\cos x - e^{x^2})} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+o(x^3)}{x\left(1-\frac{1}{2}x^2-1-x^2+o(x^2)\right)} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-\frac{3}{2}x^3} = -\frac{2}{3}$

$\frac{x^3+o(x^3)}{x\left(-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)}$

$\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} \quad \frac{1+o(1)}{-\frac{3}{2}+o(1)}$

- $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

$\log\sqrt{1+x}$

$\log\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)$

$\frac{1}{2}x+o(x)$

$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\log\sqrt{1+x}}$

$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{x+o(x)}{x+o(x)}} = \sqrt{e}$

- $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

$x-1\to 0$
$t=x-1$
$x=t+1$
$t\to 0$

$\lim_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{-t}}$

$\lim_{t\to 0} e^{-\frac{1}{t}\log(t+1)} = e^{-\frac{1}{t}t} = e^{-1}$

- $\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)}{x-3e^{x-3}}$

$x-3\to 0$
$t=x-3$
$x=t+3$
$t\to 0$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(-t)}{t+3-3e^{t}} \longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{-t+o(t)}{t+3-3(1+t+o(t))}$

$\lim_{t\to 0}\frac{-t+o(t)}{-2t+o(t)} = \frac{1}{2}$

Limiti con i radicali

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2+5} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[15]{7x^{15}+3x^4-7x+1} - \sqrt[20]{7x^{20}+7x^{15}-3}$ Non riesci a razionalizzare

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[15]{7x^{15}\left(1+\frac{3x^4}{7x^{15}}-\frac{7x}{7x^{15}}+\frac{1}{7x^{15}}\right)} - \sqrt[20]{7x^{20}\left(1+\frac{7x^{15}}{7x^{20}}-\frac{3}{7x^{20}}\right)}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[15]{7}\, x \sqrt[15]{1+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} - \sqrt[20]{7}\, x \sqrt[20]{1+\frac{1}{x^{15}}+o\left(\frac{1}{x^{15}}\right)}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[15]{7}\,x\left(1+\frac{1}{15}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \sqrt[20]{7}\,x\left(1+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{x^{15}}+o\left(\frac{1}{x^{15}}\right)\right)$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[15]{7}\,x + \boxed{\frac{\sqrt[15]{7}}{35}} + o(1) - \sqrt[20]{7}\,x - \frac{\sqrt[20]{7}}{20}\cdot\frac{1}{x^{14}} + o\left(\frac{1}{x^{14}}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt[15]{7}-\sqrt[20]{7}\right)}\,x$ $\quad \sqrt[15]{7} > \sqrt[20]{7}$ quindi tende a $+\infty$

se positivo tende a $+\infty$
se negativo tende a $-\infty$

$y=\left(\sqrt[15]{7}-\sqrt[20]{7}\right)x+\frac{\sqrt[15]{7}}{35}$ è l'asintoto obliquo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 136

- $f(x) = \frac{3}{2}x \log\left(e - \frac{1}{3x}\right)$

$\boxed{C.E.}$ $e - \frac{1}{3x} > 0$

$\frac{3xe - 1}{3x} > 0$

C.E. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3e}, +\infty\right)$

$x \to \pm\infty$

$f(x) = \frac{3}{2}x \log\left(e\left(1 - \frac{1}{3xe}\right)\right)$

$f(x) = \frac{3}{2}x \left(\log e + \log\left(1 - \frac{1}{3ex}\right)\right)$

$f(x) = \frac{3}{2}x \left(1 - \frac{1}{3ex} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \longrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{1}{2e} + o(1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2e}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

C'è asintoto obliquo? $f(x) \to \pm\infty$
- se P.P. $= mx$ c'è
- se P.P $= mx^2$ $m\sqrt{x}$ non c'è
- non è detto che se due funzioni hanno la stessa P.P. abbiamo lo stesso asintoto obliquo es $y_1 = 3x + 2$ $y_2 = 3x - 2$

- $f(x) = \operatorname{arctg}(e^{\frac{1}{x}}) + x$ C.E. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x \to \pm\infty$

tende a zero $x \to \pm\infty$

$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x \longrightarrow \operatorname{arctg}(1) + x \longrightarrow y = x + \frac{\pi}{4}$ asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

- $f(x) = (x+1)e^{\frac{|x|}{1-x}}$ C.E. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\frac{|x|}{1-x}$: $x \to -\infty$ 1; $x \to +\infty$ -1

$x \to \pm\infty$

$x \to -\infty$ $f(x) = (x+1)e$ $y = xe + e$ asintoto obliquo

$x \to +\infty$ $f(x) = (x+1)e^{-1}$ $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$ asintoto obliquo

- $f(x) = \frac{x-1}{2} \log\left(e - \frac{1}{x-1}\right)$ C.E. $x \neq 1$, $e - \frac{1}{x-1} > 0$; $\frac{ex - e - 1}{x-1} > 0$

$x > 1$, $x > \frac{e+1}{e} = 1 + \frac{1}{e}$

$f(x) = \frac{x-1}{2} \log\left(e\left(1 - \frac{1}{(x-1)e}\right)\right)$

$\frac{x-1}{2}\left(\log e + \log\left(1 - \frac{1}{(x-1)e}\right)\right) \to \frac{x-1}{2}\left(1 - \frac{1}{e(x-1)} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$

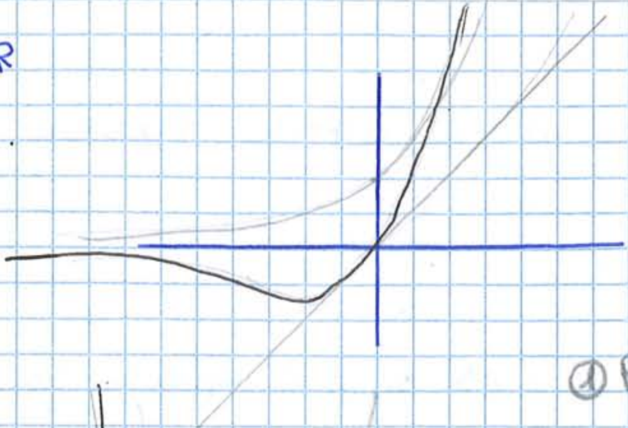
$f(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{1}{2e}$

$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \to y = \frac{x}{2} - \frac{e+1}{2e}$ asintoto obliquo

- $f(x) = xe^x \rightarrow$ C.E. $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$



Parto da quella + debole

① Riconoscere le funzioni elementari

② disegno leggero

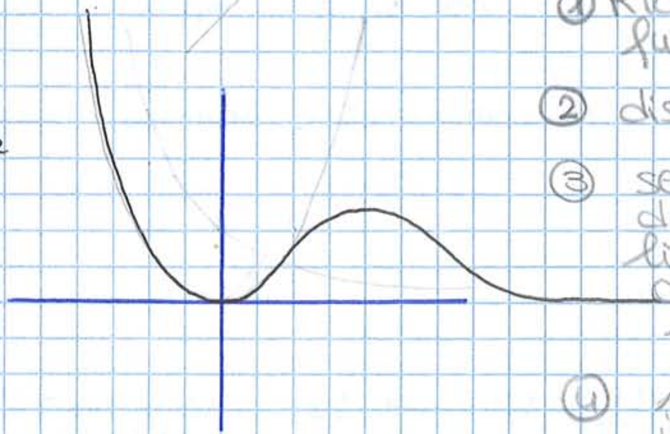
③ se una delle due si annulla, lì si annulla anche la funzione

④ se c'è esponenz. il segno dipende dall'altra funzione

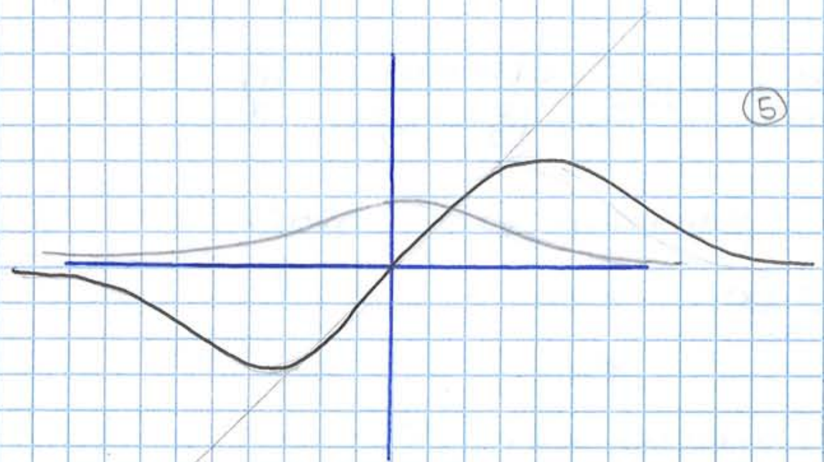
⑤ calcolo i limiti

$f(x) = x^2 e^{-x}$

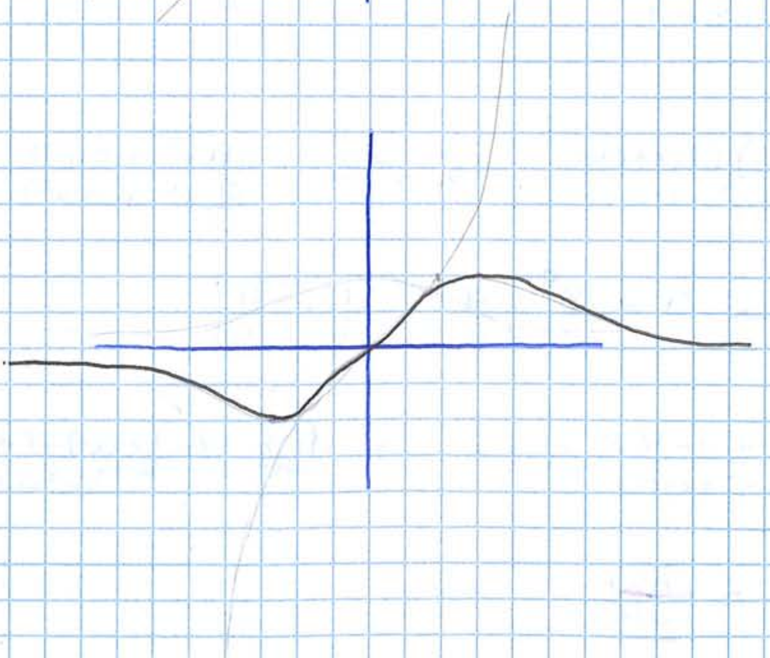
il segno non dipende dall'esponenziale perché è sempre positivo



- $f(x) = xe^{-x^2}$



$f(x) = x^3 e^{-x^2}$



- $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-2x) + \log(1+2x)}{1-\cos(3x)} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Trovare a in modo che $f(x)$ sia continua nell'origine

C.E. $\begin{cases} 1+2x > 0 \\ 1-\cos(3x) \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ bisogna applicare gli sviluppi di Taylor

$\cancel{\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}}$ No!

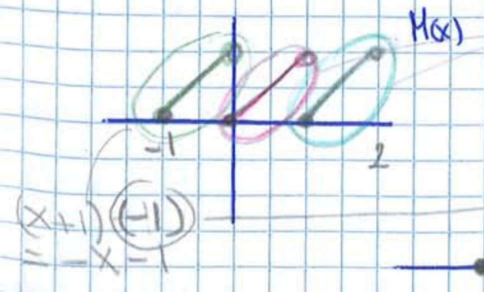
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2} \longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x^2 + o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2} \longrightarrow -\frac{2}{9}$$

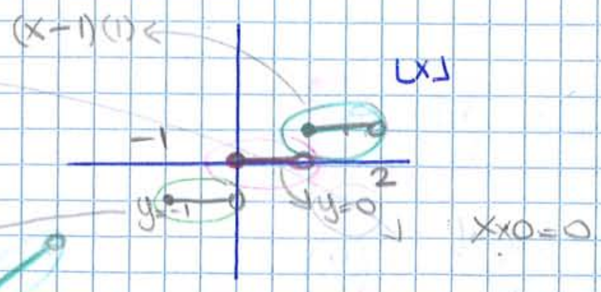
$\boxed{a = -\frac{2}{9}}$

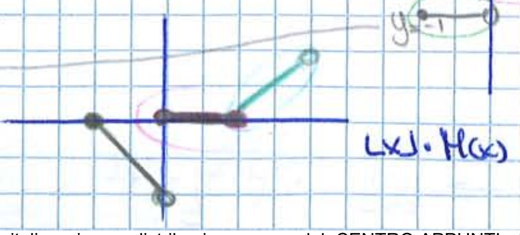
- studiare continuità $\longrightarrow$ definire a affinché sia continua
- si può applicare W in $(-1, 2)$?
- è continua negli estremi?

$$f(x) = \begin{cases} |M(\lfloor x \rfloor \cdot M(x))| & x \in (-1, 2) \\ a & x = -1 \\ & x = 2 \end{cases}$$

$f\ [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$







Per ora agli estremi non è continuo

$\rightarrow \sqrt[3]{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{2}}-1}{t} \longrightarrow \sqrt[3]{2} \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1}+\frac{1}{6}t+o(t)-\cancel{1}}{t} \rightarrow \sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{6} = f'(2)$

$x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \longrightarrow \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{6}$

- $f(x) = \log(x^2) \qquad x = -1$

$\lim_{x\to -1} \frac{\log(x^2)-0}{x+1}$

$x+1 \to 0$
$t = x+1$
$x = t-1$
$t \to 0$

$\lim_{t\to 0} \frac{\log(t-1)^2}{t} \longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\log(t^2-2t+1)}{t} \rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{-2t+o(t)}{t} = -2$

- $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x = 3$

$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} \longrightarrow \lim_{x\to 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} \longrightarrow \lim_{x\to 3} -\frac{1}{3x} = -\frac{1}{9}$

- $f(x) = 2x^2 - 5\sqrt[4]{x} + 3$

$f'(x) = 4x - \frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 3\log x + \pi$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 3\cdot\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x}$

$f(x) = x^3 \cdot \sin x$

$f'(x) = 3x^2\cdot\sin x + x^3\cdot\cos x$

- $f(x) = \frac{\log(x)+1}{\log(x)-1} \longrightarrow \frac{\log(x)+1-1+1}{\log(x)-1} \longrightarrow 1+\frac{2}{\log(x)-1}$

$f'(x) = -2\cdot\frac{1}{x} : (\log(x)-1)^2 \longrightarrow -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{(\log x - 1)^2}$

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(x) = x\log\left(\frac{x+1}{x^2}\right) \rightarrow f(x) = x(\log(x+1) - \log(x^2)) \rightarrow f(x) = x(\log(x+1) - 2\log x)$
$f(x) = x\log(x+1) - 2x\log x$

$f'(x) = \log(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1} - 2\log x - 2$

Calcolare la retta tangente con derivate $\quad y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x - 3e^x \qquad x_0 = -1$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 3e^x$

$f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) - 3e^{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{3}{e}$

$f'(-1) = \frac{1}{1+(-1)^2} - 3e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{e}$

$y = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{e}\right)(x-(-1)) - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{e} \longrightarrow y = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{e}\right)x + \frac{1}{2} - \frac{3}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{e}$

Calcolare la retta tangente con la parte principale

si può solo se riesco a tornare nell'origine e usare i limiti notevoli

- $f(x) = 2x^3 \log x \qquad x_0 = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$

$x \to 1$
$x - 1 \to 0$
$t = x - 1$
$x = t + 1$
$t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{2(t+1)^3 \log(t+1) - 0}{t}$

$\lim_{t \to 0} \frac{2(1+3t+o(t))(t+o(t))}{t}$

$\lim_{t \to 0} \frac{2(t+o(t))}{t} = 2 = f'(1)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{g(t)}{f(t)} = l$

$\longrightarrow g(t) = 2t$

$f(x) = 2(x-1) = 2x - 2$

$y = 2x - 2$ è la retta tangente

$f(x) = e^x + \sqrt{1+\sin x} \qquad x = 0$

$f(x) = 1 + x + 1 + \frac{1}{2}x + o(x) = 2 + \frac{3}{2}x + o(x) \quad x \to 0$

$y = \frac{3}{2}x + 2$ è la retta tangente

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x}$

$= \sin x \cdot \frac{1}{1+x}$

$= \sin x\,(1+x)^{-1} \longrightarrow$ posso applicare $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$

$= (x + o(x))(1 - x + o(x)) = x + o(x)$

$y = x$ è la retta tangente

- $f(x) = \frac{\cos x}{4+x} \qquad x = 0$

$f(x) = \cos x \cdot \frac{1}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{4} + o(x)\right) \longrightarrow \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{4} + o(x)\right) = \frac{1}{4} - \frac{x}{16} + o(x)$

$y = -\frac{x}{16} + \frac{1}{4}$ è la retta tangente

Funzioni iperboliche

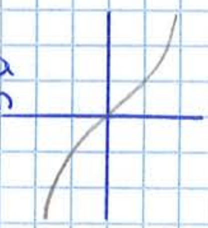
Seno iperbolico $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno iperbolico $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

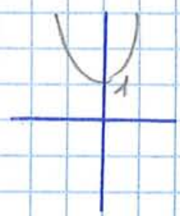
Osserviamo che entrambe sono continue su $\mathbb{R}$. C.E $= \mathbb{R}$

- $\sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$ (come il seno)
- $\cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$ (come il coseno)
- $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \longrightarrow$ come il seno è dispari
- $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x) \longrightarrow$ come il coseno è pari
- $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{senh}(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \cosh(x) = + \infty$

$\boxed{\sinh x}$ sembra una tgx ma non lo è



$\boxed{\cosh x}$



- $D(\sinh x) = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
- $D(\cosh x) = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$f(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

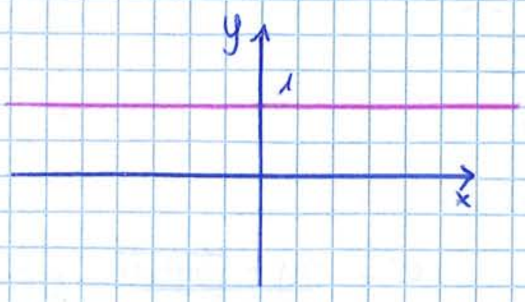
$Df(x) = 2\cosh x \sinh x - 2\sinh x \cosh x$

$f(0) = 1$

Funzione costante nel dominio grazie a Lagrange. Costante per ogni punto

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow$ iperbole



$y+\sqrt{y^2+1}>0$?

$y-\sqrt{y^2+1}>0$?

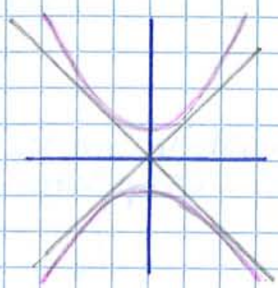
$y+\sqrt{y^2+1}>0$

$\sqrt{y^2+1}>-y$

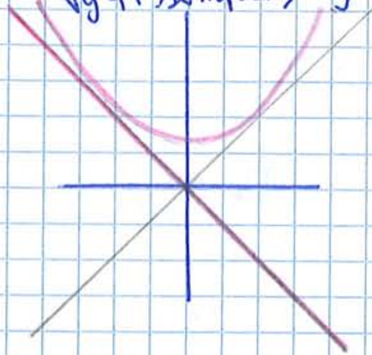
$y=\sqrt{x^2+1}$

$y^2=x^2+1$

$y^2-x^2=1$



$\sqrt{y^2+1}$ sempre $>-y$



settore del seno iperbolico $\quad \sinh x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

settore del coseno iperbolico $\quad \cosh x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$

settore della tangente iperbolica $\quad \operatorname{tgh} x=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

simmetria rispetto alla bisetrice del I e III q.

Derivate funzioni inverse

$y=\sinh x$

$x=f^{-1}(y)$

$$(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

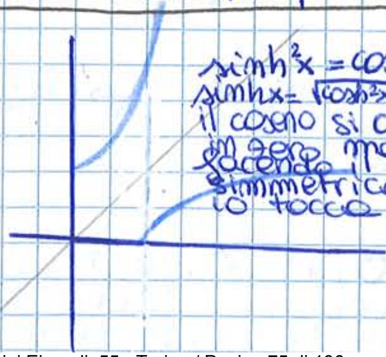
$f'(x)\neq 0$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$\cosh^2 x=1+\sinh^2 x$

$\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}$ $\longrightarrow$ usiamo sempre il + perchè le funzioni inverse sono sempre >0

$$D(\text{settore } \sinh x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



$\sinh^2 x=\cosh^2 x-1$

$\sinh x=\sqrt{\cosh^2 x-1}$

il coseno si annulla in zero ma facendo il simmetrico non lo tocca

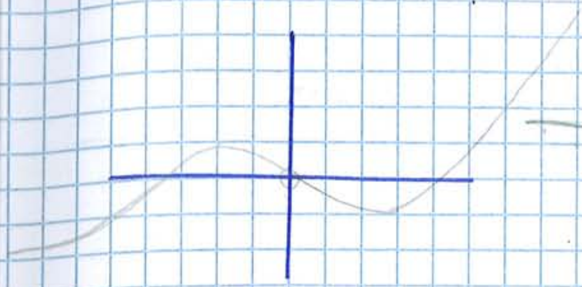
$y=\cosh x$

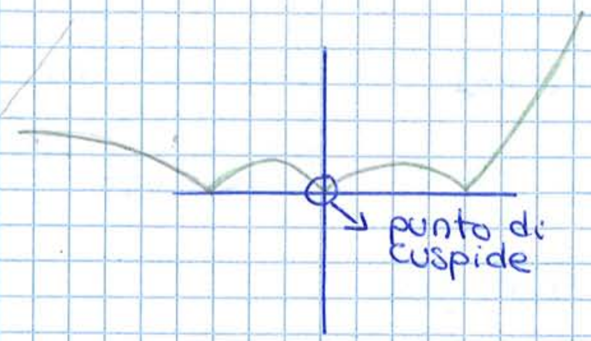
$x=f^{-1}(y)$

$$D(f^{-1}(y))=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\sinh x}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$D(\text{settore } \cosh x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad D(\text{settore } \operatorname{tgh} x)=\frac{1}{1-x^2}$$

• $f(x) = \left| |x|^x - 1 \right|$





$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{|x^x-1|}{x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{|1+x\log|x|-1|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} |\log x|$$

$$\lim_{x\to 0^+} 1|\log x| \qquad \lim_{x\to 0^-} -|\log x|$$

• $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\log(5x^2+3x-1) - \log(5x^2-4x+1)\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\log\left(5x^2\left(1+\frac{3x}{5x^2}-\frac{1}{5x^2}\right)\right) - \log\left(5x^2\left(1-\frac{4x}{5x^2}+\frac{1}{5x^2}\right)\right)\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\cancel{\log 5x^2} + \log\left(1+\frac{3}{5x}-\frac{1}{5x^2}\right) - \cancel{\log 5x^2} - \log\left(1-\frac{4}{5x}+\frac{1}{5x^2}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{3}{5x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{5x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

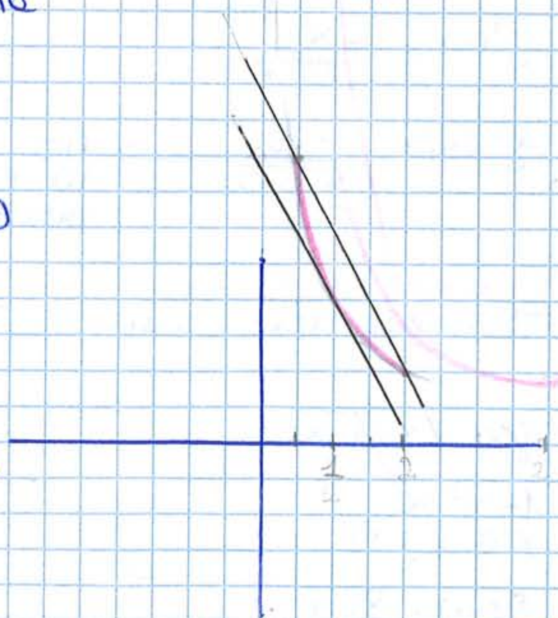
Teorema di Lagrange

Teorema di esistenza non di unicità

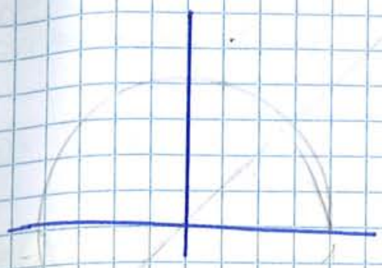
• $f(x) = \frac{2}{x} \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

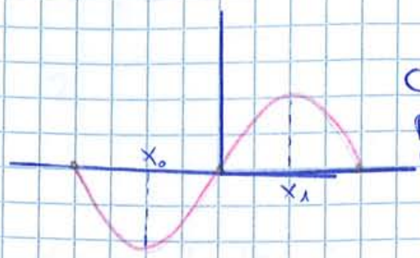
$$m = \frac{f(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{2-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = -2 = f'(x_0)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$



$$\longrightarrow \underbrace{\boxed{-\frac{2}{x_0^2}}}_{\text{derivata}} = f'(x_0) = \underbrace{\boxed{-2}}_{\text{Lagrange}} \longrightarrow x_0 = 1$$





Ci sono due punti dove la derivata prima si annulla

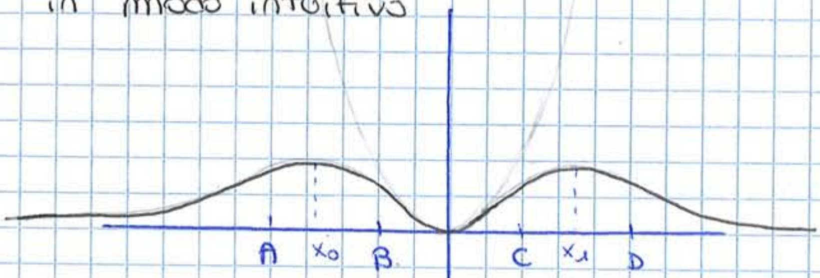
- Applicare Rolle a un intervallo aperto

$f(x) = x^2 e^{-x^2}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

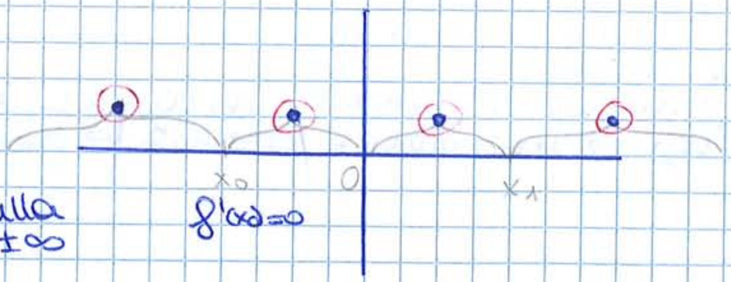
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ⟶ la funzione è continua su $\mathbb{R}$ agli estremi ha gli stessi valori quindi esiste almeno un punto dove si annulla

disegno in modo intuitivo



se faccio f' ancora continua e ancora derivabile ho come ipotesi $f'(x_0) = f'(0) = f'(x_1)$

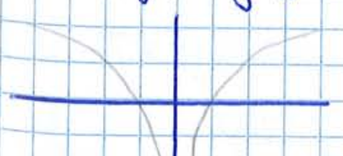
la derivata seconda quante volte si annulla?
⟶ ALMENO in 4 punti

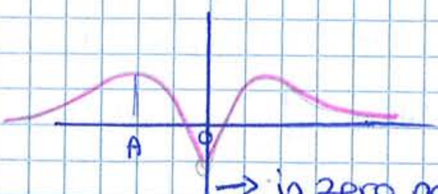


f' si annulla anche a $\pm\infty$

$f'(x_0) = 0$

$f(x) = \operatorname{arctg}(\log|x|) e^{-x^2}$





⟶ in zero non è derivabile prendo da $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Dove si annulla $f'(x)$?
Grazie al T. di esistenza degli zeri
da A a 0 c'è un punto, da $-\infty$ a A un altro
Almeno 2 volte da $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

• Calcolare la retta tangente al grafico della f. inversa nel punto $y_0 = f(1)$

$f(x) = \sqrt{4+(x+1)\log x}$ $\qquad y_0 = f(1) = 2$

derivata della funzione inversa in y_0

$x = (f^{-1})'(y_0)(x - y_0) + f^{-1}(y_0)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+(x+1)\log x}} \cdot \left(\log x + \frac{x+1}{x}\right)$$

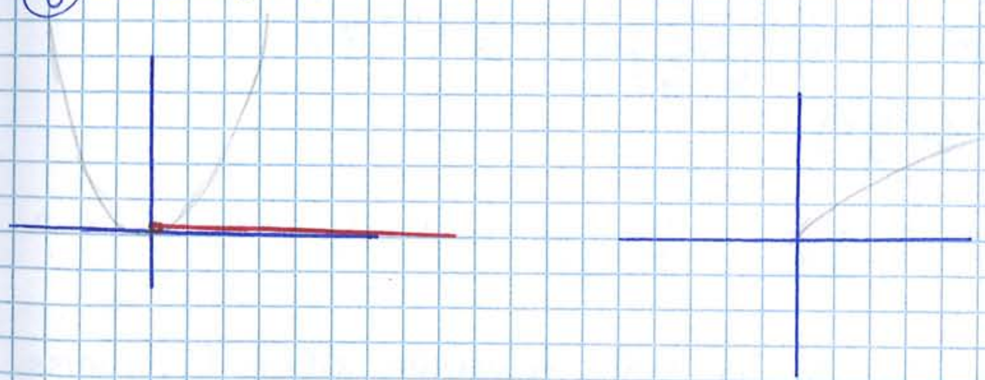
$f'(1) = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2}}(y-2) + 1 \longrightarrow f^{-1}(2)$$

$x = 2(y-2)+1$

$x = 2y - 3$

$f \xrightarrow{\text{lavora con le } x} x$



$\sqrt{x} \to$ non è $\sqrt{y}$
si fa un cambio

$x = 2y - 3 \longrightarrow y = 2x - 3$

• Determinare la retta tangente al grafico della funzione inversa "nel suo" punto di ascissa $x_0 \to$ sarebbe y_0
LD è riferito alla f. inversa

x_0 della f inversa $\longrightarrow$ y_0 di f iniziale

$f(x) = \sqrt{4+(x+1)\log x}$

$x \to 1$
$x - 1 \to 0$
$t \to 0$
$t = x - 1$
$x = t + 1$

$g(t) = \sqrt{4+(t+2)\log(t+1)} \quad t \to 0$

$\sim \sqrt{4+(t+2)(t)} \sim \sqrt{4+t^2+2t} \sim \sqrt{4+2t} \sim \sqrt{4\left(1+\frac{1}{2}t\right)} \sim 2\left(1+\frac{1}{4}t\right)$

$\sim 2 + \frac{1}{2}t \quad t \to 0$

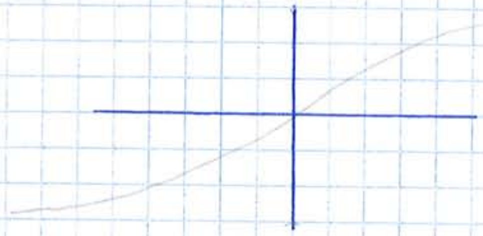
Se ho il prodotto di due funzioni una con punto angoloso in x_0 e l'altra continua e derivabile in x_0 che si annulla in x_0 NON HO PUNTO ANGOLOSO

- $f(x) = x^2|x|$ è derivabile nell'origine

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2|x|-0}{x-0}$$

- $f(x) = \sin x\,|x-\pi|$ è continua in π
- $f(x) = \sin x\, e^{|x|}$ è continua in 0
- $f(x) = |\operatorname{arctg} x - \pi|$

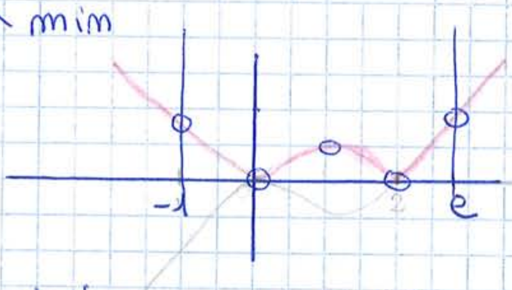


- $f(x) = x^2|x-2|$ sull'intervallo $[-1, e]$ voglio studiare max/min per Weierstrass c'è

$f'(x) = 0$ punti stazionari $\begin{cases} \text{max} \\ \text{min} \end{cases}$

$x > 2 \longrightarrow f(x) = x^2(x-2)$

$x < 2 \longrightarrow f(x) = x^2(-x+2)$



$f'(2) \nexists$ fai il limite da destra e da sinistra

$f(x) = x + x^3$ iniettiva: somma di funzioni strett. crescenti

$f'(x) = 1 + 3x^2$ non è + iniettiva

$f(x) = e^x$ iniettiva

$f'(x) = e^x$ iniettiva

$f(x) = x + e^x$ va da $+\infty$ a $-\infty$ è suriettiva

$f'(x) = 1 + e^x$ non è + suriettiva

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 136

- $\lim_{x\to 1^+} (x-1)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} \longrightarrow \lim_{x\to 1^+} -\frac{\pi}{2}\frac{(x-1)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Allora $\rightarrow$ $\lim_{x\to 1^+} (x-1)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{2}{\pi}$

Studio di funzione

1. C.E.
2. limiti
3. derivata $f'(x)>0$

- $f(x) = |x|^x$

C.E. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} e^{x\log|x|} = 0^+$

$\lim_{x\to 0} |x|^x = 1$

$\lim_{x\to+\infty} e^{x\log|x|} = +\infty$

$f(x) = e^{x\log|x|}$ distinguo caso $x>0$ e $x<0$

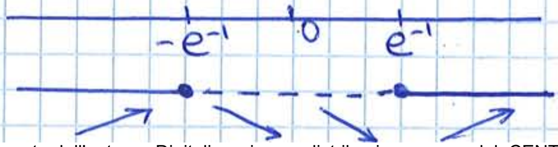
- $f(x) = e^{x\log x}$ $\quad f'(x) = e^{x\log x}\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = e^{x\log x}(\log x+1)$
- $f(x) = e^{x\log(-x)}$ $\quad f'(x) = e^{x\log(-x)}\left(\log(-x)+\frac{x}{-x}(-1)\right) = e^{x\log(-x)}(\log(-x)+1)$

$$f'(x) = \begin{cases} f(x)(\log x+1) & x>0 \\ f(x)(\log(-x)+1) & x<0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ sempre >0

$f'(x)>0 \quad \log(x)+1>0 \quad \log x>-1 \quad x>e^{-1}$

$\log(-x)+1>0 \quad \log(-x)>-1 \quad -x>e^{-1} \quad x<-e^{-1}$



$f(x) = 2\operatorname{arctg} x - \frac{x-1}{x+1}$ $\quad f(x) = 2\operatorname{arctg} x - 1 + \frac{2}{x+1}$

C.E. $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi - 1$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

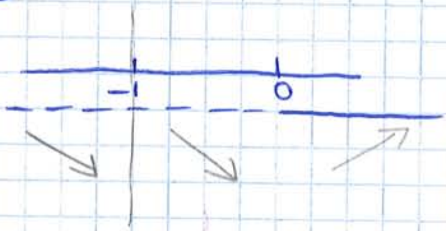
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi - 1$

$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{(x+1)^2} \longrightarrow 2\,\frac{(x+1)^2 - (1+x^2)}{(1+x^2)(x+1)^2} = 2\,\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}$

Punto stazionario è $x=0$

$f'(x) > 0 \longleftrightarrow x > 0$



- calcolo P.P. al variare di α

$f(x) = \sin(x^\alpha) + \cos x - 1$

$x \to 0 \qquad \alpha > 0 \qquad$ non sono capace di trovare $\alpha < 0$

$f(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) + \cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \cancel{-1} \qquad x \to 0$

$f(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

- se $\boxed{\alpha = 2}$ $\quad$ P.P. $= \frac{1}{2}x^2$
- $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x\to 0} x^{2-\alpha} = 0 \longrightarrow \boxed{0 < \alpha < 2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^\alpha} = 0 \longleftrightarrow x^2 = o(x^\alpha) \qquad f(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) \qquad$ P.P. x^α

- $\lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha}{x^2} = 0 \quad x^\alpha = o(x^2) \longrightarrow \boxed{\alpha > 2} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$f''(0) = \frac{x^2}{2!} = x^2$

$\frac{f''(0)}{2!} = 1 \longrightarrow f''(0) = 2$

$f'''(0)\ \frac{x^3}{3!} = x^3 \longrightarrow \frac{f'''(0)}{3!} = 1 \longrightarrow f'''(0) = 6$

$\frac{f^{IV}(0)}{4!} = \frac{7}{12}$

$f^{IV}(0) = \frac{7}{12} \cdot 4! = \frac{7}{\cancel{12}} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 = 14$

$\frac{f^{V}(0)}{5!} = \frac{6}{4!} \longrightarrow f^{V}(0) = \frac{6}{4!} \cdot 5! = 30$

Posso calcolare la derivata anche n-esima
calcolo lo sviluppo di Taylor
vedo coeff. di x^n e pongo $\frac{f^n(0)}{n!}$ = numero

• $f(x) = \sin^2 x \qquad x=0 \qquad n=6$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + o(x^7)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$

$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + 2(x)\left(-\frac{x^3}{3!}\right) + 2(x)\left(\frac{x^5}{5!}\right) + o(x^6)$

$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{5!}\right)x^6 + o(x^6)$

$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$

$f^6(0)$?

$f^6(0) = 6! \cdot \frac{2}{45} \rightarrow 2^5$

• $f(x) = \log(1-\sin^2 x) \qquad x=0 \qquad n=4$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6}$

$\sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$

$\log(1-\sin^2 x) = \left(-x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{\left(-x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2}{2} + \cancel{\frac{\left(-x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right)^3}{3}} + o(x^4)$

$= -x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{x^4 + o(x^4)}{2} = -x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4) =$

$= -x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \qquad f^{IV}(0)? = 4!\left(-\frac{1}{6}\right) = -4$

- Calcolare lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0=1$ (fino all'ordine) fino a $n=3$ di

$f(x) = -2(x-1)^2 + 4\sin(x-1) - \log x^4$

$g(x) = 4\sin(x-1) - 4\log x$

$x \to 1$
$x-1 \to 0$
$t = x-1$
$x = t+1$
$t \to 0$

$h(t) = 4\sin t - 4\log(t+1)$

$4\left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right) - 4\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right)$

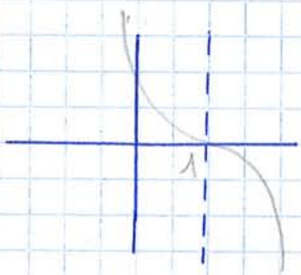
$\cancel{4t} - \frac{4}{6}t^3 + o(t^3) - \cancel{4t} + 2t^2 - \frac{4}{3}t^3 + o(t^3)$

$-2t^3 + 2t^2 + o(t^3)$

$2t^2 - 2t^3 + o(t^3)$

$f(x) = -2\cancel{(x-1)^2} + 2\cancel{(x-1)^2} - 2(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

$f(x) = -2(x-1)^3 + o((x-1)^3)$



localmente questa funzione si comporta così
basta che sia derivabile due volte, qui è di C^∞

- $f(x) = \sqrt{2x+1}$ $\quad x_0 = 4 \quad n=2$

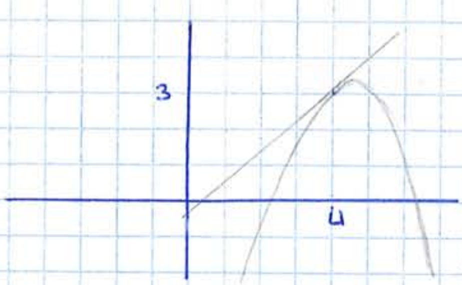
$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$

$x \to 4$
$x-4 \to 0$
$t = x-4$
$x = t+4$
$t \to 0$

$g(t) = \sqrt{2(t+4)+1} = \sqrt{2t+9} = \sqrt{9\left(1+\frac{2}{9}t\right)} = 3\sqrt{1+\frac{2t}{9}} =$

$3\left(1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}t}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{9}t\right)^2 + o(t^2)\right) = 3 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{54}t^2 + o(t^2)$

$f(x) = 3 + \frac{1}{3}(x-4) - \frac{1}{54}(x-4)^2 + o((x-4)^2)$



localmente sta crescendo
a 4 corrisponde 3 poi faccio la retta tangente.
Parabola triste. A 4 non corrisponde il max quindi posso dire che localmente è concava

$\longrightarrow \; f(x) = \frac{2^8}{6} x^4 - \alpha x^5 + \alpha x^4 + o(x^5)$

se $\alpha = -\frac{2^8}{6} \longrightarrow$ P.P. $= \frac{2^8}{6} x^5$

se $\alpha \neq -\frac{2^8}{6} \longrightarrow$ P.P. $= \left(\frac{2^8}{6} + \alpha\right) x^4$

limiti

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^3)}{x^3} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} \cancel{x^3} + o(x^3)}{\cancel{x^3}} \longrightarrow \frac{1}{3}$

determinare α in modo che il limite sia finito

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^\alpha}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3)}{x^\alpha} \longrightarrow \frac{x^2 + o(x^2)}{x^\alpha}$

se $\alpha = 2 \; \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^\alpha} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - x}{e^{x^2} - \cosh x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x}{\cancel{1} + x^2 - \cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 - \cancel{x}}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$

$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} = -1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x(\arctan x^2)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3 + o(x^3)} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$

$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \sqrt{x^2+1} - 2}{x \operatorname{arctg} x - \log(1+x^2)}$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) - 2}{x\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) + o(x^4)} \longrightarrow \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} \longrightarrow$

$\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{2}$

- $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) - 1 \qquad x = 4 \qquad n = 2$

Non posso applicare MacLaurin perché $\frac{2\pi}{x}$ non tende a zero.
Calcolo la derivata prima e seconda

$$f'(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)\left(-\frac{2\pi}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)\left(-\frac{2\pi}{x^2}\right)\left(-\frac{2\pi}{x^2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)\left(\frac{4\pi}{x^3}\right)$$

$f(4) = 0$

$f'(4) = 0$

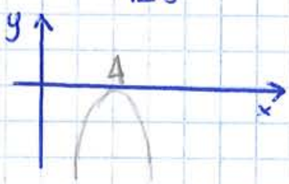
$f''(4) = \frac{-\pi^2}{64}$

$$f(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + f''(4)\frac{(x-4)^2}{2!} + o((x-4)^2) \longrightarrow \text{Sviluppo}$$

$$f(x) = \frac{-\pi^2}{128}(x-4)^2 + o((x-4)^2)$$

$\alpha = 2$

$P.P. = \frac{-\pi^2}{128}(x-4)^2$



In un intorno di 4 ho una parabola triste. Localmente è negativo. 4 è un punto critico? Sì perché $f'(4) = 0$

- $g(x) = \frac{f(x)}{(x-4)^{7/2}}$ Calcolare l'ordine di infinito di $g(x)$ per $x \to 4$ rispetto alla funzione campione $\varphi(x) = \frac{1}{x-4} \quad x \to 4$

$$g(x) = \frac{\frac{-\pi^2}{128}(x-4)^2 + o((x-4)^2)}{(x-4)^{7/2}} \longrightarrow -\frac{\pi^2}{128} \cdot \frac{1}{(x-4)^{3/2}}$$

l'ordine di infinito è $\boxed{\frac{3}{2}}$ sempre >0 non è $-\frac{3}{2}$!

$\hookrightarrow g(x) = \frac{-\pi^2}{128}\left(\frac{1}{x-4}\right)^{\boxed{\frac{3}{2}}}$

- $f(-x) = \arcsin\left(\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}\right) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = f(x)$ funzione pari

- $\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty}$ ($f(x)$ è pari)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \to \arcsin \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \to \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale completo

- $f'(x)$?

$g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{1+x^2}$

$g'(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{4x}{(1+x^2)^2} \to \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{1+x^2}-\left(\frac{4}{(1+x^2)^2}\right)}}\cdot\frac{4x}{(1+x^2)^2} \to \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{\cancel{4}^{\,2}x}{(1+x^2)^2}$$

$$\to \frac{2x}{\frac{|x|}{\cancel{1+x^2}}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\cancel{2}}} \to f'(x) = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}$$

$$f'(x) = \begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & x>0\\ -\frac{2}{1+x^2} & x<0\end{cases}$$

la funzione non è derivabile nell'origine. Nell'origine abbiamo un punto angoloso
$\lim\limits_{x\to0^+} \neq \lim\limits_{x\to0^-} f'(x)$

$f'(x) > 0$? $\xrightarrow{\text{Quando}}$ $x>0$
$f'(x) < 0$? $\xrightarrow{\text{Quando}}$ $x<0$

− 0 +
↘ ↗

In zero (che non è un punto stazionario) ho un punto di minimo

- $$f''(x) = \begin{cases}\frac{-2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x & x>0\\ \frac{2(2x)}{(1+x^2)^2} & x<0\end{cases}$$

Si annulla in zero ma non c'è flesso perché non esiste derivata prima

$x>0 \longrightarrow f''(x)<0$
$x<0 \longrightarrow f''(x)<0$

∩ 0 ∩

$\boxed{f''(x)>0?\ \text{mai} \quad ∩\ 0\ ∩}$