



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1601A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Greco

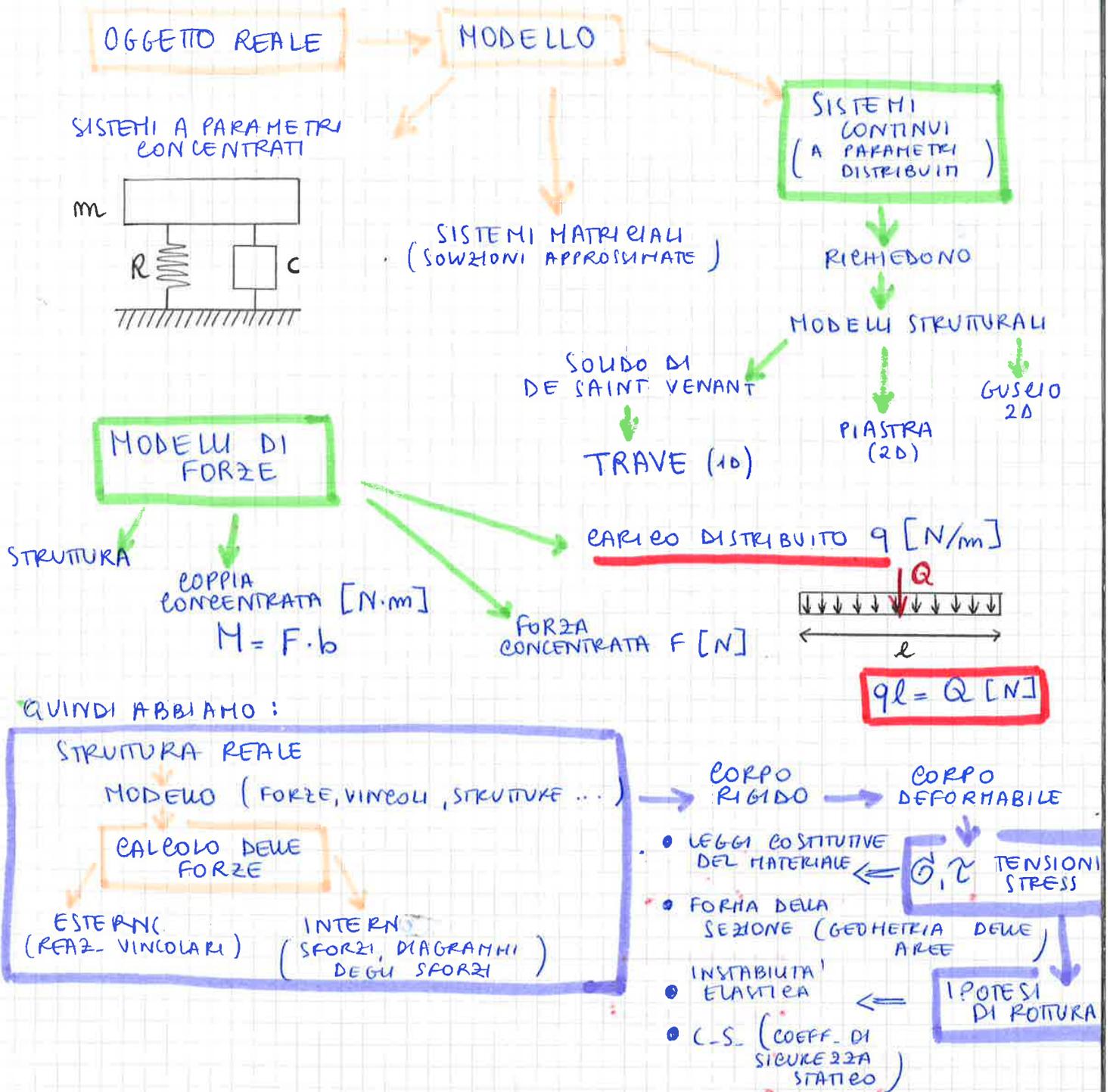
MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale. Prof. Curà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

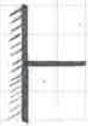
# FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE



# MODELLO DI VINEOLO 2D

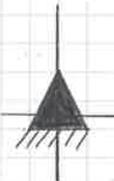
$n = 3$  COORDINATE

① INCASTRO



② CERNIERA

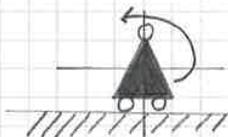
ESTERNA



INTERNA



③ CARRELLI  
(O APPOGGIO SEMPLICE)



## ESEMPI DI CALCOLO DI DOF'S

①  $n = 3$   $m = 3$   $n = m + l$ ,  $l = 0$  (ISOSTATICO)

②  $n = 3$   $m = 2$   $l = 1$

③  $n = 3$   $m = 2 + 1$   $l = 0$

④  $n = 3$   $m = 5$   $l = -2$  (IPERSTATICO)

⑤  $n = 3$   $m = 2 + 2$   $l = -1$  (IPERSTATICO)

⑥  $n = 3 + 3$   $m = 2 + 2$   $l = 2$  (LABILE)  
①+②                      ①+②

⑦  $n = 3$   $m = 1 + 1$   $l = 1$

⑧  $n = 3$   $m = 3$   $l = 0$

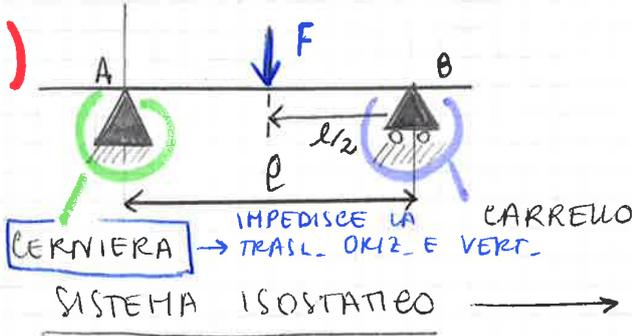
STATICAMENTE  $\Rightarrow l = 0$  (ISOSTATICO)  
 CINEMATICALMENTE  $\Rightarrow l = 1$  (LABILE)  
 EQUILIBRIO  $\Rightarrow l < 0$  (IPERSTATICO)

# ESERCIZI

POSSIAMO SOLTAMENTE AVERE 2 MODELLI DI TRAVE:

- ① TRAVE SU DUE APPOGGI
- ② TRAVE INCASTRATA

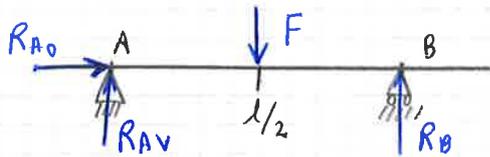
(1)



$n = 3$   
 $m = 2$  COORDINATE VINCOLE (A) + 1 COORDINATE VINCOLE (B)

IL CARICO CHE ANDRO' AD INSERIRE SARÀ UN CARICO NELLA MEZZERIA (F)

VI SONO 2 REAZ. VINCOLARI IN A E 1 IN B



$R_V$ : REAZ. VINCOLE VERT  
 $R_O$ : REAZ. VINCOLE ORIZZ.

LA FORZA F CON TUTTA LA SUA RETTA D'AZIONE È DISTANTE  $l/2$  SIA DA A CHE DA B

ESSENDO  $n = m \rightarrow 3$  EQ. PER LE 3 INCOGNITE:  $R_{AO}$ ,  $R_{AV}$ ,  $R_B$

→ EQUAZIONE TRASL. ORIZZ.

$R_{AO} = 0$

↑ EQ. TRASL. VERTICALE

$R_{AV} - F + R_B = 0$

⊙ EQ. DI MOMENTO

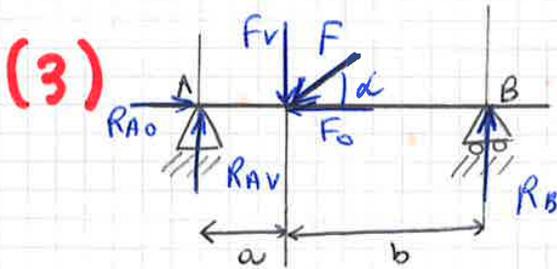
SCRIVEREMO SEMPRE QUESTA RISPETTO UN PUNTO DOVE VI SONO LE INCOGNITE

$\rightarrow F \cdot b$

**BRACCIO:**  
 DISTANZA DALLA RETTA D'APPUIAZ. DELLA FORZA AL PUNTO CONSIDERATO

$-F \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F}{2} \Rightarrow R_{AV} - F + \frac{F}{2} = 0$

$R_{AV} = \frac{F}{2}$



QUANDO HO UNA FORZA ABBUCCATA  
 SU DI UNA SUP. CON UNA CERTA  
 'ANGOLAZIONE' DEVO PROIETTARE  
 OBBLICATORIAMENTE LA FORZA  
 OBLIQUA SE LA FORZA NON HA  
 LA STESSA ANGOLAZIONE DEI VINCOLI

$$F_v = F \sin \alpha$$

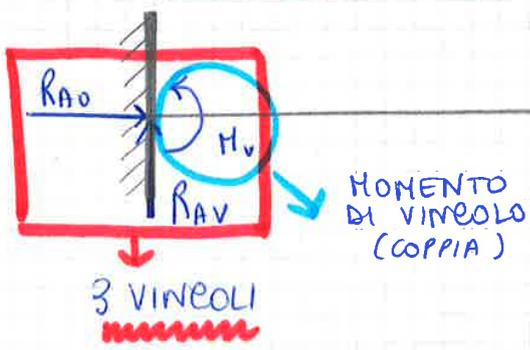
$$F_o = F \cos \alpha$$

$$\rightarrow R_{A0} - F_o = 0 \Rightarrow R_{A0} = F_o$$

$$\uparrow R_{AV} - F_v + R_B = 0$$

$$\curvearrowleft - F_v \cdot a + R_B \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F_v \cdot a}{l} \Rightarrow R_{AV} = \frac{F_v \cdot b}{l}$$

# (5) CANTILEVER : TRAVE A SBALZO INCASTRO



INCIGNITE :  $R_{A0}, R_{AV}, M_v$

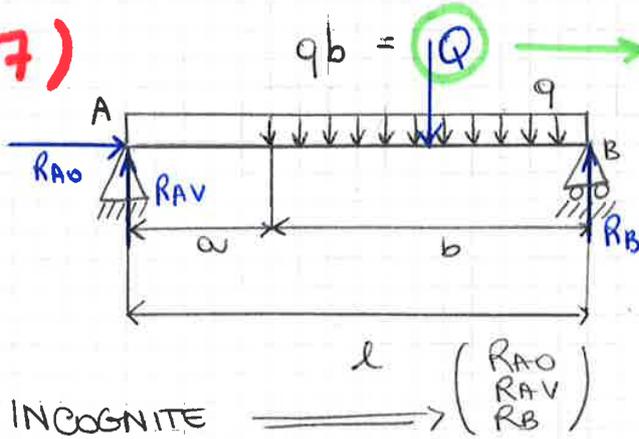
$$\rightarrow R_{A0} - F_0 = 0 \quad \boxed{R_{A0} = F_0}$$

$$\uparrow R_{AV} - F_v = 0 \quad \boxed{R_{AV} = F_v}$$

$$\textcircled{A} \curvearrowright \boxed{M_v = F_v \cdot l}$$

GIOV 02-10-14

(7)



RISULTANTE  
 APPLICABILE NEL CASO  
 DI UN EQUILIBRIO  
 GLOBALE DI FORZE  
 ESTERNE - MOLTO SBAGLIATO  
 NEL CASO DEGLI EQUILIBRI  
 LOCALI DI FORZE INTERNE  
 PER I DIFFERENTI  
 DI SFORZO

INCOGNITE  $\longrightarrow$   $\begin{pmatrix} R_{A0} \\ R_{AV} \\ R_B \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$   $R_{A0} = 0$

$\uparrow$   $R_{AV} + R_B - qb = 0 \Rightarrow R_{AV} = qb - R_B$

$\curvearrowright$   $- qb \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + R_B \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{qb}{l} \left(a + \frac{b}{2}\right)$

EQ. DI MOM. IN PUNTI DOVE ABBIAMO + INCOGNITE

$R_{AV} = qb - \frac{qb}{l} \left(a + \frac{b}{2}\right) \Rightarrow$

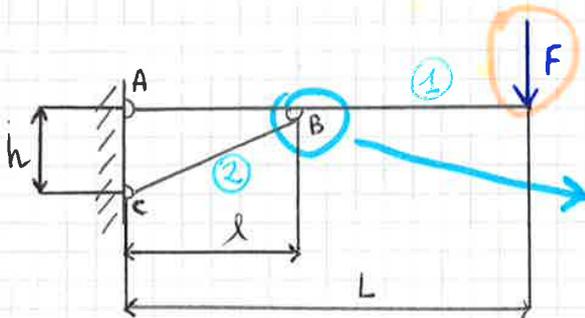
$\Rightarrow R_{AV} = \frac{qb^2}{2l}$

# SISTEMA ARTICOLATO

IL SISTEMA ARTICOLATO E' COME UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ("METRO DI SEVRES") IN QUANTO SISTEMA ISOSTATICO. E' UN SISTEMA MOLTO SEMPLICE HA HA AL SUO INTERNO TUTTI I "TRUCCHI" PER RIEAVARNE UNO ARTICOLATO

HO UN MURO E DUE ELEMENTI TRAVE

- ① ELEM. SUPERIORE
- ② INCLINATO



CARICO F AD UN ESTREMO DELLA TRAVE

LA MEZZA CERNIERA IN B E' COME UN MEZZO PERNO CHE NON INTERRUPE LA LUNGHEZZA DELLA TRAVE. LA TRAVE E' RIGIDA SOTTO E' SALDATA IL MEZZO OCCHIELLO CHE PERMETTE IL POSIZIONAMENTO DI UN PERNO IN B E QUINDI IL COLLEGAMENTO DELLA TRAVE CB SIA AL MURO CHE ALLA TRAVE ①

$$n = 3 + 3 = 6$$

①      ②

$$m = 2 + 2 + 2 = 6$$

A      B      C

COORDINATE VINCOLATE

**SISTEMA ISOSTATICO** ( $l=0$ )

6 INCOGNITE (6 REAZ. VINCOLARI), 6 EQ. DI EQUILIBRIO

**1<sup>a</sup> CONSIDERAZIONE**

CERNIERE

A e C  $\Rightarrow$  CERNIERE ESTERNE

VINCOLANO LA STRUTTURA AL MONDO ESTERNO

B  $\Rightarrow$  CERNIERA INTERNA

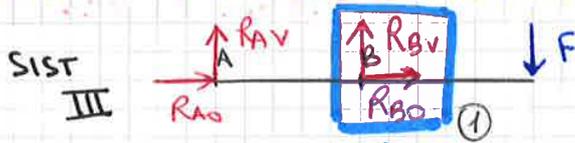
QUANDO UNA TRAVE E' CARICATA ALLE REAZ. VINCOLARI (CERNIERE) ALLA LORO ESTREMITA', OSSIA NON HO CARICO LUNGO LA TRAVE, NE' CONCENTRATO NE' DISTRIBUITO ESSA E' DI FATTO UN SOTTOINSIEME DELLA TRAVE DI DE SAINT VENANT: ASTA

1  $\Rightarrow$  TRAVE : NON HA CERNIERE AI SUOI ESTREMI ED HA UN CARICO TRASVERSALE

2  $\Rightarrow$  ASTA  $\searrow$  PER ESEMPIO : TIRANTI DELLE PORTE

L'ASTA IN GENERALE E' CARICATA SOLO DALLE SUE REAZ. VINCOLARI IN QUANTO DEVE ESSERE MANTENUTO L'EQ. DELLA SUA STRUT.

ABBIAMO PERÒ UN 3° SISTEMA DATO DALLA TRAVE 1



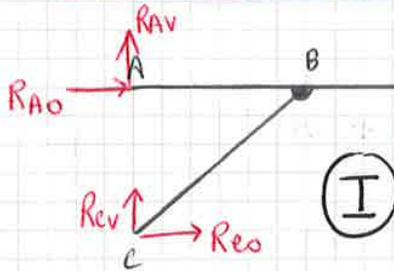
DEVONO ESSERE CONTRARIE AL SIST II IN MODO TALE DA RIATTACCARE E QUINDI ANNULLARE

$I + II \Rightarrow 6 \text{ EQ. } 6 \text{ INCOGNITE}$

$I + III \Rightarrow 6 \text{ EQ. } 6 \text{ INCOGNITE}$

$II + III \Rightarrow 6 \text{ EQ. } 6 \text{ INCOGNITE}$

SE VI È UNA ASTA SERVIAMO LE EQ. DELL'ASTA PERCHÈ + SEMPRE!

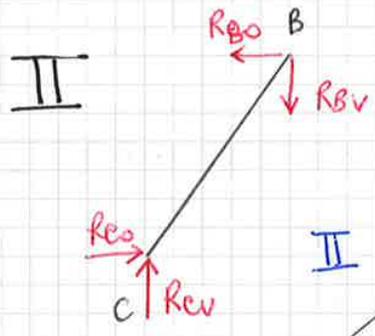


$\Rightarrow R_{AO} + R_{eo} = 0$

$\Rightarrow R_{AV} + R_{ev} - F = 0$

$\Rightarrow R_{eo} \cdot h - F \cdot L = 0 \Rightarrow R_{eo} = \frac{FL}{h}$

$R_{AO} = -R_{eo} \Rightarrow R_{AO} = -\frac{FL}{h}$  → POSSIAMO PORTARLO AVANTI ANCHE SE IL VERGO È SBAGLIATO



$\Rightarrow R_{eo} - R_{BO} \Rightarrow R_{eo} = R_{BO}$   
 $\Rightarrow R_{BO} = \frac{FL}{h}$

$\Rightarrow R_{ev} - R_{BV} = 0$

$\Rightarrow -R_{BV} \cdot l + R_{BO} \cdot h = 0$   
 $R_{ev} = \frac{R_{BO} \cdot h}{l} = \frac{FL \cdot h}{h \cdot l}$

$R_{BV} = R_{ev}$   
 $\Rightarrow R_{ev} = \frac{FL}{l}$

$R_{BV} = \frac{FL}{l}$

$\Rightarrow R_{AV} = F - R_{ev} \Rightarrow R_{AV} = F - \frac{FL}{l}$

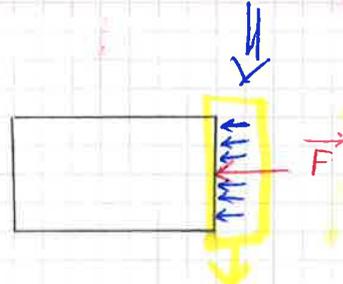
$R_{AV} = -\frac{F(L-l)}{l}$

ORA, DUNQUE, POSSO SCRIVERE  $g(n)$  EQ. DI EQUILIBRIO MA 8 MI SERVONO PER IL CALCOLO DELLE REAZ. VINCOLARI MENTRE 1 SARA' L'EQUAZIONE DEL MOTO

HO UN SISTEMA FERMO IN UN ISTANTE TEMPO QUALSIASI DOVE SONO IN EQ. TUTTE LE FORZE ESTERNE

ABBIAMO UN SISTEMA IN MOVIMENTO FINITE' IO NON LO FOTOGRAFO IN UN ISTANTE CONSIDERATO

L'EQ. CHE LEGA IL MOM  $M$  E LA PRESSIONE DEL GAS, LA CUI RISULTANTE E'  $F$



$$p \cdot A = F$$

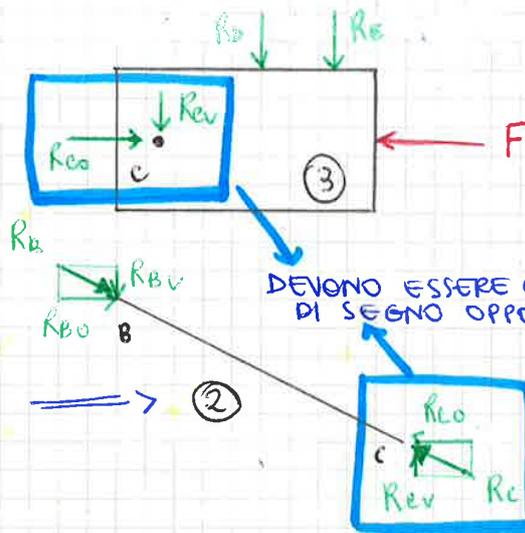
(AREA)

DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE

ORA SCRIVIAMO TUTTE LE EQ. DI EQUILIBRIO FACENDO ESPLODERE TUTTO IL SISTEMA:

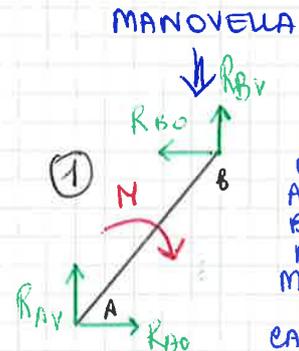
INCOGNITE:

- $R_{Ao}, R_{Av}$
- $R_{Bo}, R_{Bv}$
- $R_{Co}, R_{Cv}$
- $R_d, R_e$



DEVONO ESSERE  $\ominus$  E DI SEGNO OPPOSTO

LA BIELLA E' SEMPRE SOTTOPOSTA A COMPRESIONE



SERVO IN B LE EQ. UGUALI E CONTRARIE A QUELLE IN A, DELLA BIELLA MENTRE LE METTO CASUALMENTE IN A

$$\begin{cases} \Rightarrow R_{Co} - F = 0 \\ \uparrow -R_{Cv} - R_d - R_e = 0 \\ \curvearrowright -R_{Cd} - R_{Cf} = 0 \end{cases}$$

$$R_{Co} = F$$

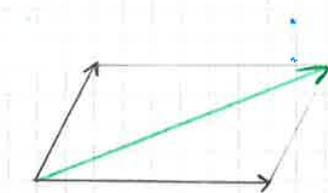
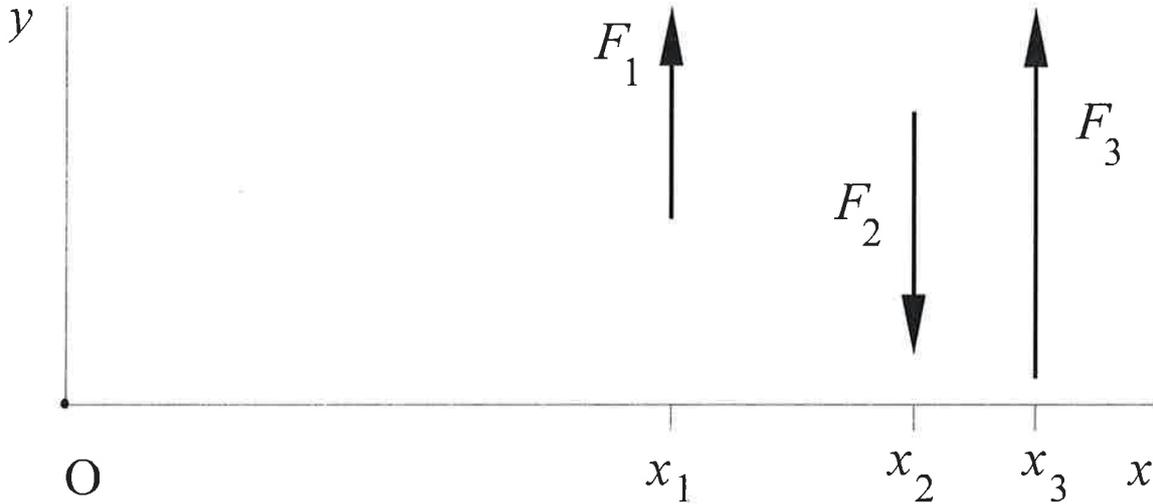
$$R_{Bo} = F$$

$$\begin{cases} \textcircled{2} -R_{Co} + R_{Bo} = 0 \\ -R_{Bv} + R_{Cv} = 0 \\ R_{Cv} \cdot b - R_{Co} \cdot h = 0 \end{cases}$$

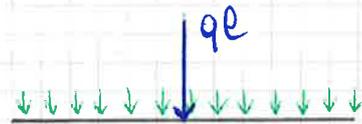
$$R_{Bv} = R_{Cv} \Rightarrow R_{Bv} = \frac{F \cdot h}{b}$$

$$\Rightarrow R_{Cv} = \frac{F \cdot h}{b}$$

Si chiede di sostituire il sistema di forze schematizzato in figura con la sola risultante opportunamente applicata (risultante di forze parallele)



RISULTANTE DI DUE FORZE CONCENTRATE



LA RISULTANTE DI UN CARICO DISTRIBUITO È COLLOCATA NELLA MEZZERIA ED È PARI A qe



NEL CASO DI FORZE // A DISTANZE VARIABILI ED ENTITA' VARIABILE

PER TROVARE UNA RISULTANTE IN QUESTO CASO SPECIFICO BISOGNA VEDERE QUANTO VALE E DOVE È APPURATA

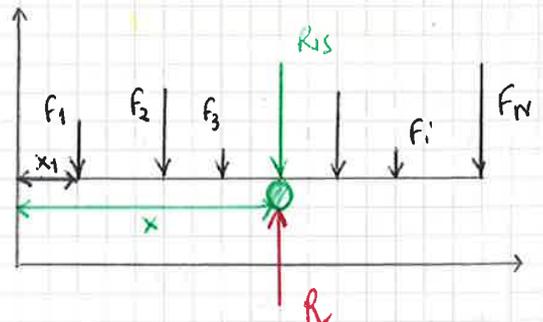
SISTEMA PIANO EQUILIBRATO ALLA TRASLAZIONE VERTICALE E AL MOMENTO OSSIA DEVE ESSERE GARANTITO L'EQUILIBRIO SE CANCELO TUTTE LE FORZE E LE È RIMO CON LA RISULTANTE

$$|R_{\text{rs}}| = \sum_{i=1}^N \pm F_i$$

A SECONDA DEL VERSO

LA DISTANZA A CUI DEVE ESSERE APPURATA

POTREBBE VALERE LA MEDIA PESATA MA NON È FATTA CON L'EQUILIBRIO



$$R = \sum_{i=1}^N F_i$$

RISULTANTE DI FORZE // MA NON EQUIDISTANTI

EQ DI MOM ATTORNO L'ORIGINE

$$\Rightarrow R_x = \sum_{i=1}^N F_i x_i$$

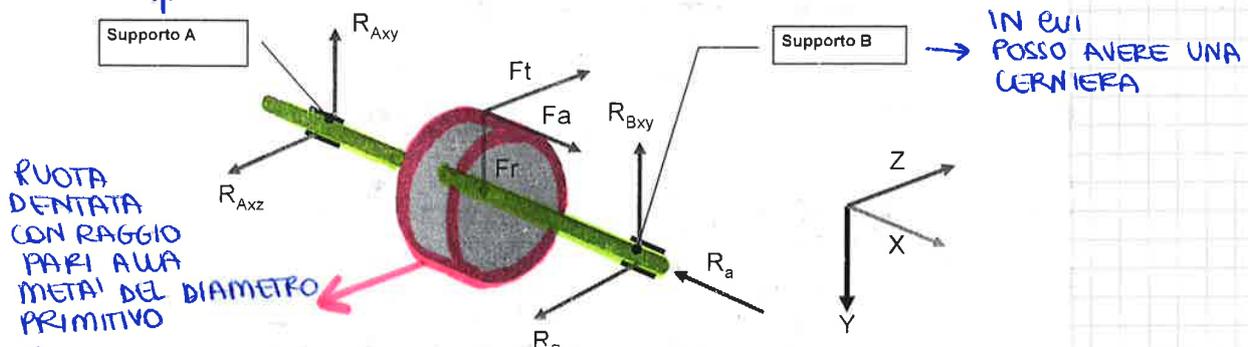
$$\Rightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^N F_i x_i}{\sum_{i=1}^N F_i}$$

**Reazioni vincolari di un sistema spaziale: albero con ruota dentata**

IN CUI ABBIAMO UN CARRELLINO SPAZIALE

SISTEMA RIGIDO NELLO SPAZIO (ALBERO + RUOTA)

$n = 6$  (COORDINATE VINCOLEATE)



RUOTA DENTATA CON RAGGIO PARI ALLA META' DEL DIAMETRO PRIMITIVO

$R$ : RAGGIO PRIMITIVO

IN CORRISPONDENZA DEL QUALE IMMAGINO SIANO ECOLORATI I PARIETI

PER AVERE UNO SCHEMA SPAZIALE INIZIAMO A GUARDARE QUALI SONO LE FORZE AVENDONE 3 DEDUCO CHE E' UNA RUOTA A DENTI ELISOIDALI - ABBIAMO

COSI' MEDESIMO LA CONDIZIONE DI CARICO + COMPLETATA POSSIBILE

NEL CASO DI RUOTE A DENTI DIRITTI NON SI HANNO FORZE ASSIALI ( $F_a$ )

ABBIAMO DETTO CHE QUINDI, UNA RUOTA DENTATA ESERCITA SU DI UNA SECONDA, 3 FORZE, NEL CASO + GENERALE

IN (A) IMPEDISCO DUE SPOSTAMENTI  $\Leftrightarrow$  HO DUE REAZ. VINCOLARI

IN (B) HO VINCOLATI TRE GDL  $\Rightarrow$  VINCOLANDO CON UN CARRELLINO IN UN PIANO E UNA CERNIERA IN UN ALTRO

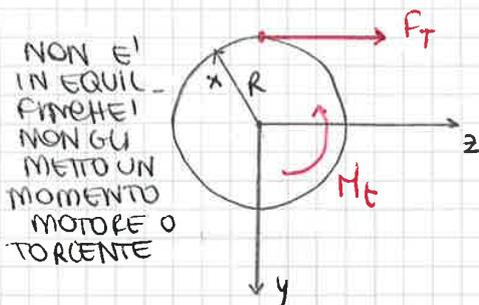
$m = 2 + 3 = 5$

$\Rightarrow$  VINCOLO 3 SPOSTAMENTI

$l = 1$

HO VINCOLATI  $\begin{matrix} x \\ y \\ \theta_z \end{matrix}$  2 MENTRE LIBERO  $\theta_x$

ATTORNO ALL'ASSE X POSSO GIA' SCRIVERE L'EQ. DEL MOTO DEL SIST.



NON E' IN EQUIL. FINCHE' NON GU METTO UN MOMENTO MOTORE O TORCENTE

A SECONDA DI COME E' APPLICATO IL MOM. TORCENTE SARA' ORIENTATA DI CONSEGUENZA LA FORZA  $F_t$  IN MODO DA POTER SCRIVERE LA MIA EQ. DEL MOTO AL CENTRO DELLA RUOTA:

$\hookrightarrow M_t - F_t R = 0 \Rightarrow M_t = F_t R$

ESSENDO UN SISTEMA SPAZIALE DOVRO' SCRIVERE 5 EQUAZIONI: 3 ALLA TRASLAZ. E DUE ALLA ROTAZIONE.

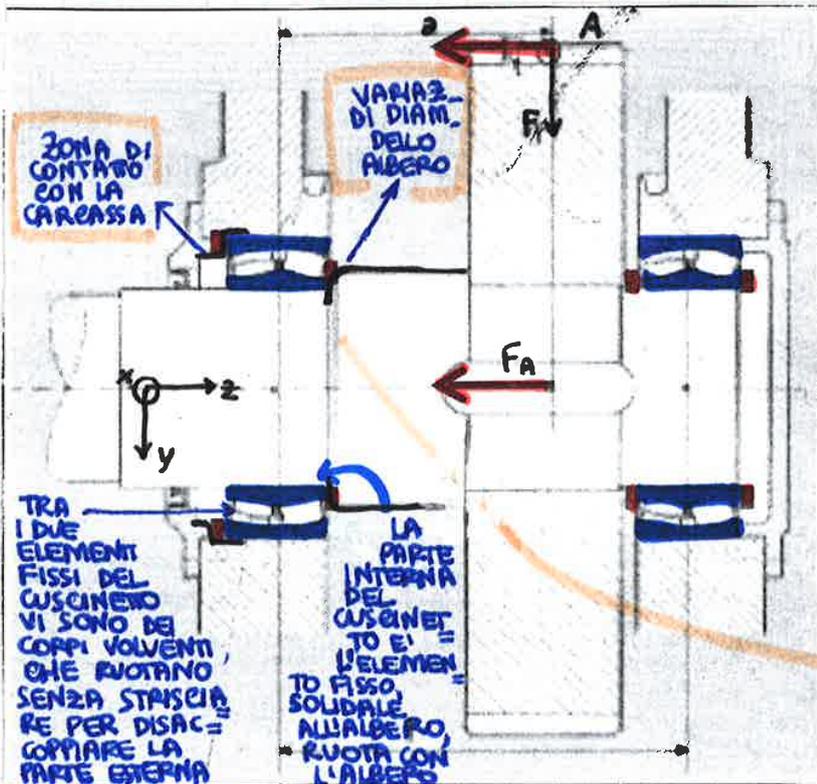
FACENDO  
LE EQ.  
DI  
EQUIL.  
OTTER-  
REMO

$$\begin{cases} R_{Axz} = \frac{F_t b}{e} \\ R_{Bxz} = \frac{F_t a}{e} \end{cases}$$

POSSIAMO SCRIVERE, INOLTRE, LE  
REAZIONI VINCOLARI GLOBALI :

$$\begin{cases} R_A = \sqrt{R_{Axy}^2 + R_{Axz}^2} \\ R_B = \sqrt{R_{Bxy}^2 + R_{Bxz}^2} \end{cases}$$

CONSIDERAZIONI INGEGNERISTICHE ...



DOBBIAMO VEDERE COSA  
ACCADDE A QUESTO ELEMENTO  
SE LA FORZA ASSIALE SPINGE  
VERSO SINISTRA.  
OVIAMENTE L'ELEMENTO  
NON DEVE RUOTARE, INFATTI  
CI SONO I SUPPORTI.  
QUINDI, DOVE SONO GLI SPALLAMEN-  
TI CHE AGISCONO?

GLI SPALLAMENTI SONO GLI  
ELEMENTI DEL SUPPORTO  
CHE SOPPORTANO LA SPINTA

IL MIO SCHEMA MI  
SUGGERISCE CHE IL  
MIO MONTAGGIO E'  
SPECULARE, OSSIA CHE  
LA SPINTA DALLA RUOTA  
ARRIVA ATTRAVERSO LA  
VARIAZ. DI DIAMETRO  
NELL'ALBERO E SI  
SCARICA ATTRAVERSO LA  
ZONA DI CONTATTO CON  
LA CARCASSA.

TUTTI QUESTI SONO I  
PUNTI DI CONTATTO  
CHE VI SONO,  
INFATTI, SPECULARMENTE  
ANCHE DALLA  
ALTRA PARTE.



DAL PUNTO DI VISTA IN BASSO  
A SINISTRA.

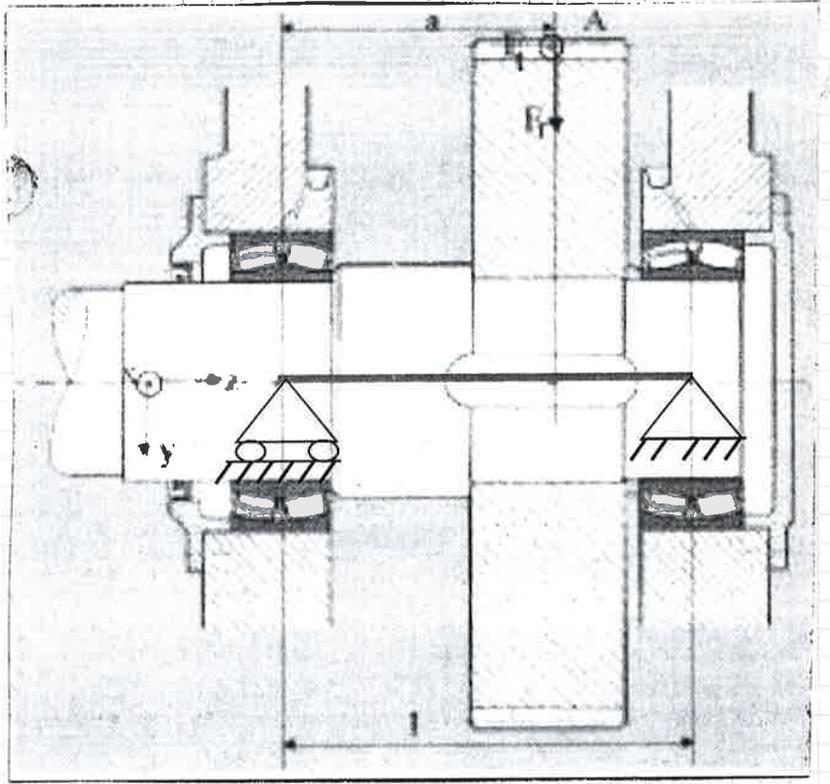
SE VA VERSO SINISTRA COME NEL NOSTRO  
CASO, LA SPINTA ASSIALE PASSA VERSO GLI  
ELEMENTI CORRISPONDENTI AI PUNTI DI  
CONTATTO, ENTRA NEI CORPI VOLVENTI E  
SI SCARICA SULLA ZONA FISSA ESTERNA

IL FATTO CHE VI SIA, QUINDI,  
TALE SPECULARITA', IMPUGNA  
CHE VI POSSA ESSERE UNA  
SPINTA ASSIALE SIA IN  
UN VERSO CHE NELL'ALTRO  
QUINDI LA RUOTA DENTATA  
PUO' GIRARE IN UN  
VERSO, O NELL'ALTRO, A  
SECONDA DELLA SPINTA.



ECCO, QUINDI, CHE  
ESSENDO QUI (NEL CUSCINETTO IN BASSO  
A SINISTRA COME IN QUELLO IN ALTO A SX)  
CHE SI SCARICA LA SPINTA ASSIALE POSSO  
METTERE UNA CERNIERA.

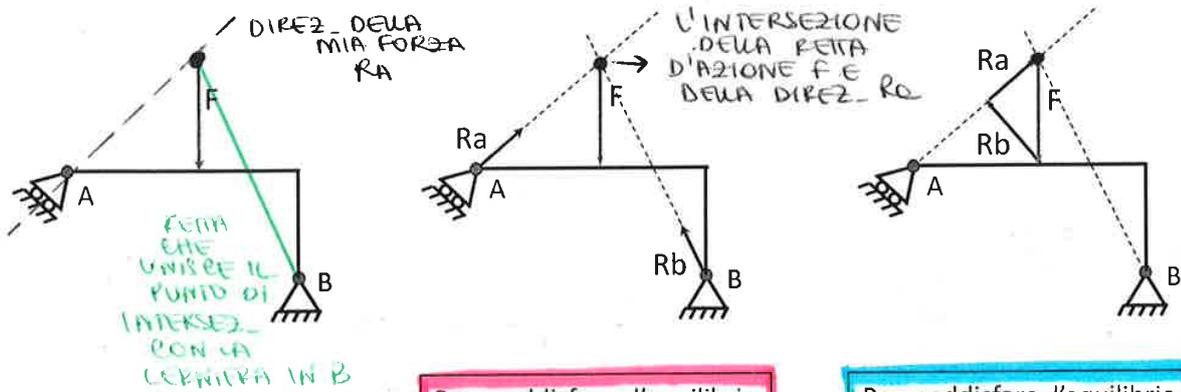
ED ECCO INFATTI LO  
SCHEMA, PERFETTAMENTE  
INVERTITO, NEL CASO DELLA  
FORZA ASSIALE VERSO DX.



Determinazione delle reazioni vincolari con metodo grafico

ESEMPIO: Struttura piana caricata con una forza

QUI ABBIAMO UNA TRAVE A SQUADRA CON UN CARICO IN A ED UNA CERNIERA IN B



FORZA CHE UNISCE IL PUNTO DI INTERSEZ. CON LA CERNIERA IN B

Per soddisfare l'equilibrio alla rotazione, affinché il momento delle tre forze sia nullo rispetto ad un qualsiasi punto del piano, le forze devono convergere tutte nello stesso punto.

Per soddisfare l'equilibrio alla traslazione, affinché la risultante delle tre forze sia nulla, esse devono chiudere un triangolo se riportate una di seguito all'altra.

IO POSSO RISOLVERE LE REAZ. GRAFICAMENTE A PATTO CHE SIA NOTA UNA FORZA, IN MODULO, DIREZ. E VERSO, E CHE UN'ALTRA FORZA SIA NOTA

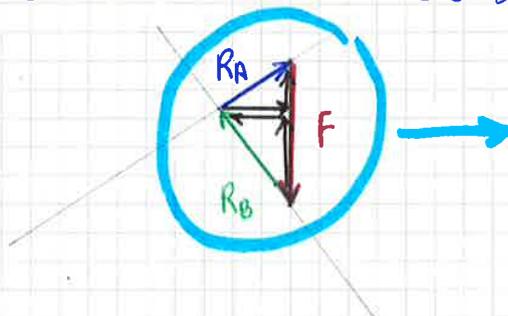
IN QUESTO CASO CONOSCIAMO IL CARICO F, IN MODULO, DIREZ. E VERSO E LA DIREZ. DELLA REAZ. VINCOLARE IN A.

OVVIAMENTE DOVRA' ESSERE RISPETTATA LA TRASLAZ. SIA VERT. CHE ORIZZ. E, INOLTRE, L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE

L'EQUIL. ALLA ROTAZ. E' ZERO IN UN PUNTO PER IL QUALE TUTTE LE FORZE HANNO BRACCIO NULLO. QUESTO PUNTO POSSIAMO RICERCARLO NELL'INTERSEZ. TRA F ED RA. L'EQ. DELLA ROTAZ. E' ZERO PERCHE' NULLI TUTTI I BRACCI

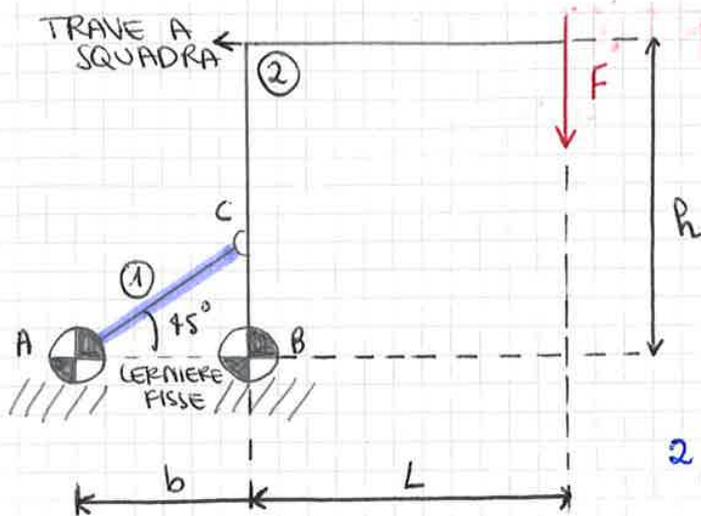
ED E' QUINDI CHE LA RETTA CHE UNISCE L'INTERSEZ. CON B NON E' ALTRA CHE LA DIREZ. DELLA RISULTANTE DELLE R.V. IN B

ORA POSSO CHIUDERE IL TRIANGOLO DELLE MIE FORZE:



CON TALE TRIANGOLO SODDISFO ANCHE L'EQUILIBRIO DELLA TRASLAZ. IN QUANTO LA SOMMA VETTORIALE FUNZIONA

# SCHEMA DI UNA GRU A BANDIERA



LA CERNIERA IN C NON INTERROMPE LA TRAVE

↓  
SISTEMA ISO STATICO

$$n = 3 + 3$$

①    ②

$$m = 2 + 2 + 2$$

(A)    (B)    (C)

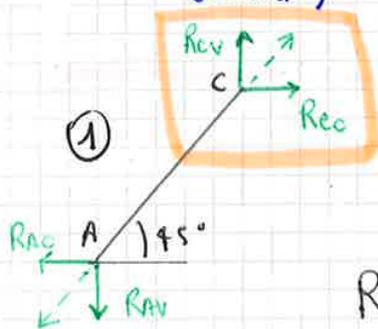
$$e = n - m = 0$$

2 SISTEMI RIGIDI  $\Rightarrow$  6 EQ.  $\Rightarrow$  6 INCOGNITE

L'ELEMENTO C E' UN ASTA (ESSENDO A 45°, SIN E COS SARANNO UGUALI  $\Rightarrow$  LE REAZ. VINCOLARI SARANNO UGUALI)

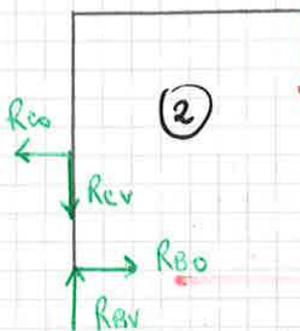
E' UN TIRANTE

$\left\{ \begin{array}{l} R_{A0} \quad R_{AV} \\ R_{B0} \quad R_{BV} \\ R_{C0} \quad R_{CV} \end{array} \right.$



$$\left\{ \begin{array}{l} R_{C0} - R_{A0} = 0 \Rightarrow R_{C0} = R_{A0} \\ R_{CV} - R_{AV} = 0 \Rightarrow R_{CV} = R_{AV} \\ R_{CV} \cdot b - R_{C0} \cdot b = 0 \Rightarrow R_{CV} = R_{C0} \end{array} \right.$$

$$R_{C0} = R_{A0} = R_{CV} = R_{AV}$$



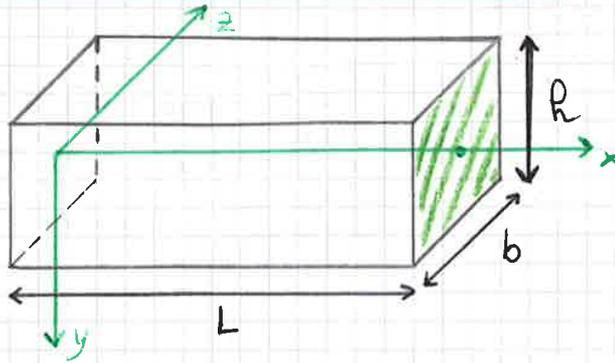
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{B0} - R_{C0} = 0 \Rightarrow R_{B0} = R_{C0} \\ R_{BV} - R_{CV} - F = 0 \Rightarrow R_{BV} = R_{CV} + F \\ R_{C0} \cdot b - F \cdot L = 0 \Rightarrow R_{C0} = \frac{F \cdot L}{b} \end{array} \right.$$

$$R_{C0} = R_{A0} = R_{CV} = R_{AV} = \frac{F \cdot L}{b}$$

$$R_{BV} = \frac{F(L+b)}{b}$$

SOUODO DI DE SAINT VENANT (TRAVE)

⇒ UN ELEMENTO STRUTTURALE CHE HA SEZIONE RETTANGOLARE E DEVE RISPETTARE:



$$L \gg \max(b, h)$$

$$L \cong 10R$$

ANCHE SE SI RICONDUCONO AD ELEMENTO TRAVE, ESSENDO MOLTO SEMPLICE ANCHE STRUTTURE COMPLESSE COME I DENTI DI INGRANAGGIO CHE NON RISPETTANO AFFATTO TAU LIMITAZIONI

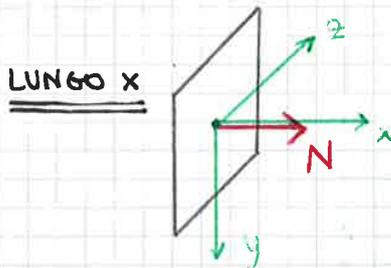
LE FORZE INTERE SONO IN NUMERO QUANTE LE COORDINATE

3D  $n=6$  ⇒ 6 EQ. DI EQUILIBRIO

$$\{x, y, z\}, \theta_x, \theta_y, \theta_z$$

$$n \text{ EQ. DI EQUILIBRIO} \Rightarrow n \text{ FORZE INTERNE}$$

FACIO UNO ZOOM SULLA SEZIONE IN CUI AVRO', QUINDI, UN SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE



**N E' LO SFORZO NORMALE**

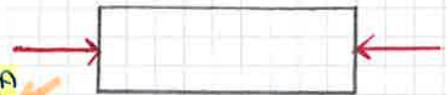
AGISCE SUL BARICENTRO DELLA SEZIONE ED E' UNA FORZA CHE ENTRA O ESCE DALLA TRAVE: QUINDI IO POSSO AVERE

LO SFORZO NORMALE VERSO L'ESTERNO (POSITIVO) CHE TIRA LA MIA TRAVE, L'ALLUNGA

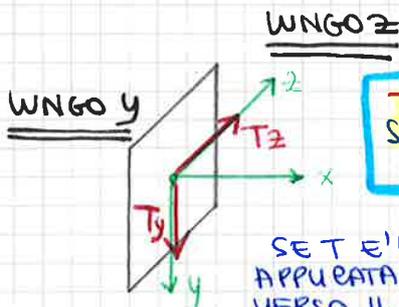
LO SFORZO NORMALE VERSO L'INTERNO (NEGATIVO) CHE SPINGE LA MIA TRAVE, L'ACCORCIA



QUINDI, LO SFORZO NORMALE TENDE AD ACCORCIARE O AD ALLUNGARE LA TRAVE E AGISCE SUL BARICENTRO



TRASLAZIONE



**T E' LO SFORZO DI TAGLIO**

SE T E' ( $T_y$ ) APPURATA LUNGO y, VERSO IL BASSO, ESSA HA L'AZIONE DI FAR SCORRERE I PIANI UNO RISPETTO L'ALTRO. E' UNA FORZA PASSANTE PER IL BARICENTRO MA CHE GIACE SUL PIANO DELLA SEZIONE, IN QUESTO CASO DIRETTA VERSO IL BASSO

LA T PUO' ANCHE ESSERE APPURATA NEL VERSO DI z, COME SE I PIANI SEI VOLASSERO TRA LORO IN DIREZ.  $\perp$  A QUELLA VERTICALE. ANCHE QUI LA FORZA T SARAI BARICENTRICA MA APPOGGIATA ORIZZONTALMENTE SULLA MIA SEZIONE

$$T_y : \text{SFORZO DI TAGLIO LUNGO } y$$

$$T_z : \text{SFORZO DI TAGLIO LUNGO } z$$

FACENDO UNA VERIFICA PER LA SECONDA PORZIONE DELL'ASTA :

$$\begin{cases} N + F_0 = 0 \Rightarrow N = -F_0 \\ T - F_v = 0 \Rightarrow T = F_v \\ M_f = ? \end{cases}$$

PRENDIAMO UNA NUOVA COORDINATA ( $x'$ ) // AD  $x$  ED HA L'ORIGINE NELL'ALTRO ESTREMO DELLA TRAVE  $\Rightarrow x' = L - x$

$$M_f + F_v x' = 0$$

$$M_f = -F_v x' \begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases}$$

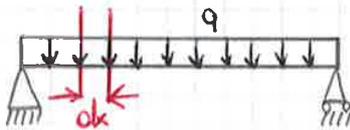
$$M_f(x'=0) = 0$$

$$M_f(x'=L) = -F_v L$$

ABBIAMO COSÌ DIMOSTRATO CHE LE EQ. SONO IDENTICHE NELLE DUE SEZIONI

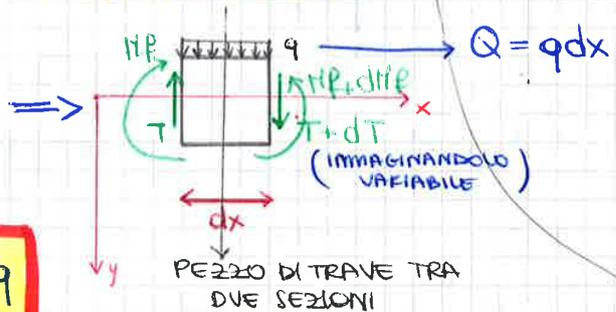
DIMOSTRAZIONE :  $-\frac{dM_f}{dx} = T$

PARTIAMO DA UNA SEMPLICE TRAVE CARICATA CON UN CARICO DISTRIBUITO.



PER COMODITÀ, PRENDIAMO UN ELEMENTO INFINITESIMO DELLA TRAVE ( $dx$ ) NELLA ZONA IN CUI STA CRESCENDO IL MOMENTO FLETTENTE

PRENDIAMO L'ELEMENTO  $dx$  E NE FACIAMO UNO ZOOM E NE DISEGNAMO LE CONVENZIONI POSITIVE DEGLI SFORZI



$$T - q dx - T - \frac{dT}{dx} dx = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -q$$

$$-M_f + M_f + dM_f - T dx + q dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \Rightarrow \frac{dM_f}{dx} = T$$

TRASCURABILE

1<sup>o</sup> CONSIDERAZIONE  $\Rightarrow M_f \begin{cases} \text{LINEARE} \Rightarrow \text{IL TAGLIO È COSTANTE} \\ \text{CURVA DEL SECONDO ORDINE} \Rightarrow \text{IL TAGLIO È LINEARE} \end{cases} \Rightarrow \text{DERIV. DEL } M_f \text{ È } \ominus \text{ AL TAGLIO}$

2<sup>o</sup> CONSIDERAZIONE  $\Rightarrow$  DISCORSO VAUDO ANCHE PER  $x'$  MA NON È RISPETTATO IL SEGNO.

LA FUNZIONE E' UNA CURVA:  
PRENDIAMO LA FUNZIONE E DERIVIAMOLA

$$\frac{dM_f}{dx} = qL - qx = q(L-x) = T$$

COME POSSO DERIVARE LA CURVA VITA' =

SE STUDIO LA FUNZIONE

⇒ VEDO LA CONCAVITA' CON LA DERIVATA SECONDA

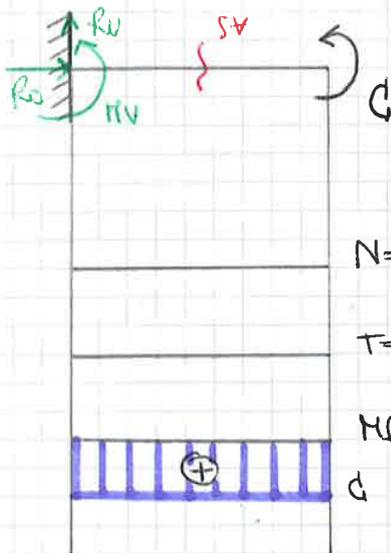
ALTRIMENTI IMMAGINO UN ANDAMENTO LINEARE

⇒ VADO A SOSTITUIRE  $x = L/2$  NELL'EQUAZIONE

⇒ OTTENGO UN VALORE + PICCOLO DELLA META' DEL VALORE MAX

**3° CASO**

TRAVE A MENSOLO CON UNA COPPIA APPUCATA ALL'ESTREMO



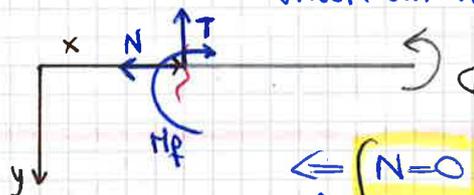
⇒ ESSENDO UNA STRUTTURA RIGIDA CHE LA COPPIA SIA APPUCATA ALL'ESTREMO O IN UN ALTRO PUNTO QUALSIASI MI DA' SEMPRE UNA COPPIA RIGIDA

$$M_v = -C \quad R_0 = 0 \quad R_v = 0$$

$N=0 \Rightarrow N=0 \Rightarrow$  PER LO STESSO DISCORSO NEL CASO PRECEDENTE

$T=0 \Rightarrow T=0 \Rightarrow$  NON C'E' UNA FORZA VERTICALE INTERNA CHE BILANCI LA REAZ. VERTICALE CHE E' NULLA

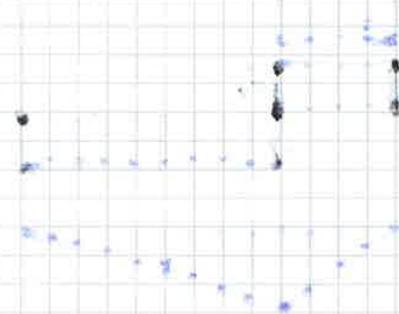
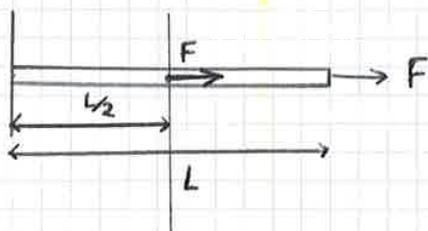
QUESTA VOLTA LE EQ. LE SERVO DAL PUNTO DI VISTA DELLA SEZIONE DX DELLA TRAVE PER VERIFICARE I VALORI GIA' TROVATI TEORICAMENTE



$$\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow N=0 \\ \uparrow T=0 \\ + \curvearrowright M_f - C = 0 \end{array} \right.$$

$$M_f = C \quad \text{POSITIVO E COSTANTE}$$

ESERCIZIO



MERC. 15/10/14

# GEOMETRIA DELLE AREE

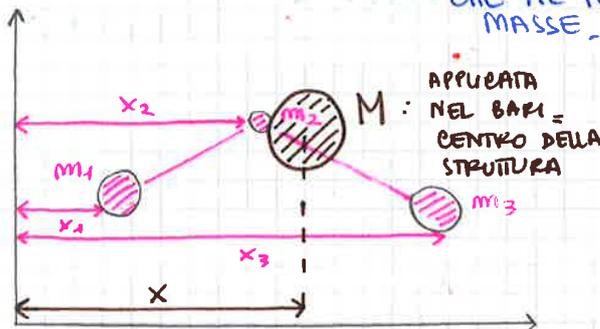
LA GEOMETRIA DELLE AREE SI ARTICOLA PRINCIPALMENTE IN TRE ARGOMENTI:

- BARICENTRI, MOMENTI STATICI
- MOMENTI D'INERZIA
- ASSI CENTRALI D'INERZIA

NEL CASO DEL:

## BARICENTRO

POTREI UTILIZZARE LO STESSO DISCORSO FATTO NELLA RICERCA DELLA RISULTANTE DELLE FORZE, SOLO CHE AL POSTO DI QUEST'ULTIMO AVRO' DELLE MASSE.

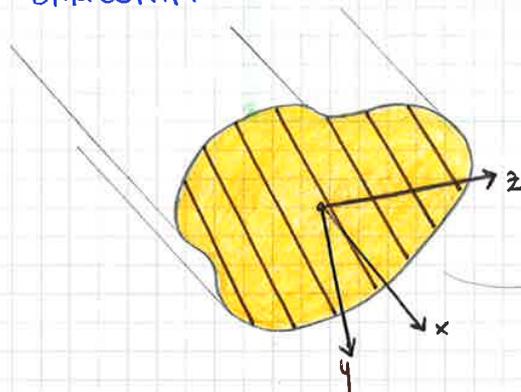


ANDRO' QUINDI, A TROVARE LA MASSA CHE DA SOLA ESERCITERA' LA FUNZIONE DI TUTTE LE MASSE:

M: MASSA EQUIVALENTE

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

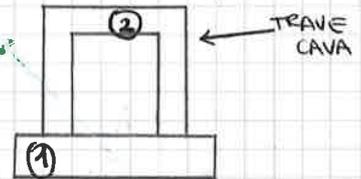
IL MIO BARICENTRO SARA' QUINDI LA SOMMA DI TUTTI I SINGOLI BARICENTRI:



ANDANDO A CALCOLARE IL BARICENTRO DI TALE SEZIONE, POTRO' AVERE VARI CASI:

- ① BARICENTRO DI UNA SEZIONE FORMATA DA + SEZIONI DI FORMA DIVERSA:

TRAVE A SEZ. RETT. SALDATA AD UNA PIASTRA NELLA PARTE INFERIORE



AVRO' DUE CORPI E MI DOVRO' CALCOLARE TUTTE LE CARATTERISTICHE DI GEOMETRIA DELLE AREE

CASO IN CUI, COMUNQUE VI E' LO STESSO MATERIALE: DENSITA' COSTANTE

- ② BARICENTRO DI DUE SEZIONI UGUALI MAI FATTE DA MATERIALE DIVERSO: DENSITA' NON COSTANTE



ABBIAMO GIÀ DETTO CHE :

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \implies xM = \sum m_i x_i$$

QUINDI SCRIVENDO ELO' NEI MOM. STATICI :

$$\bullet S_x = \int_A y dA = y_G \int_A dA \implies$$

$$\implies \cancel{\rho} \int_A y dA = y_G A \cdot \cancel{\rho}$$

QUINDI, CONCLUDO RISPONDO LE MIE DEFINIZIONI :

$$\left\{ \begin{aligned} S_x &= \int_A y dA = y_G A \\ S_y &= \int_A x dA = x_G A \\ S_r &= \int_A d dA = d_G \cdot A \end{aligned} \right. \quad \text{DOVE :}$$

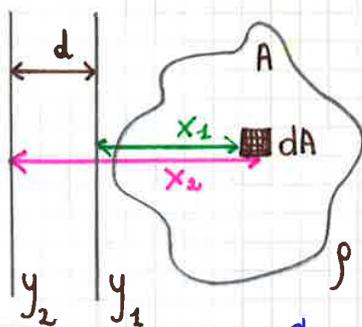
$$y_G = \frac{\int_A y dA}{A}$$

$$x_G = \frac{\int_A x dA}{A}$$

$$d_G = \frac{\int_A d dA}{A}$$

COMODO DA  
USARE  
QUANDO  
UNO  
DEI DUE  
ASSI È  
BARICENTRICO =

### TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DI UN MOM. STATICO



VOGLIO CALCOLARE IL MOM. STATICO RISPETTO IL PRIMO ASSE :

$$S_{y_1} = \int_A x_1 dA$$

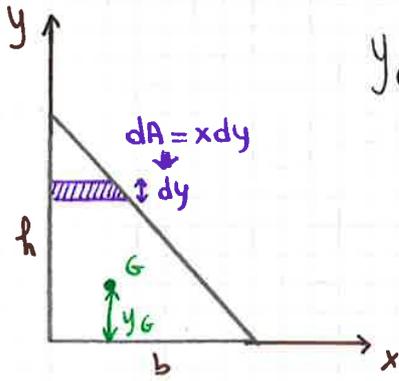
E POI DEL SECONDO  $\implies S_{y_2} = \int_A x_2 dA$

MA  $S_{y_2} = \int_A (x_1 + d) dA = S_{y_1} + d \int_A dA \implies$

$$\implies S_{y_2} = S_{y_1} + d \cdot A$$

SE L'ASSE È BARICENTRICO  
LA  $y_G$  È NULLA QUINDI È  
ANCHE TALE IL  
MOM. STATICO

2° CASO: SEZIONE TRIANGOLARE



$$y_G = ? \quad S_x = \int_A y \, dA = \int_A y \cdot x \, dy$$

$$x = b \left( 1 - \frac{y}{h} \right)$$

$$\Downarrow \quad S_x = \int_0^h y \cdot b \left( 1 - \frac{y}{h} \right) dy =$$

$$\Downarrow \quad = b \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h} \right]_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

$$S_x = \frac{bh^2}{6}$$

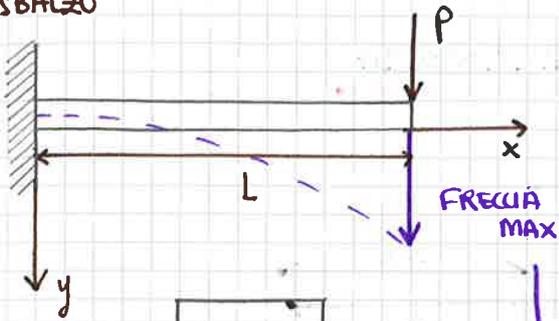
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2 \cdot x}{6 \cdot bh} = \frac{h}{3} \quad \Longrightarrow \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$S_{PIENO\ x} = A_{PIENO} \cdot y_{GP} = \\ = BH \cdot \frac{H}{2} = \frac{BH^2}{2}$$

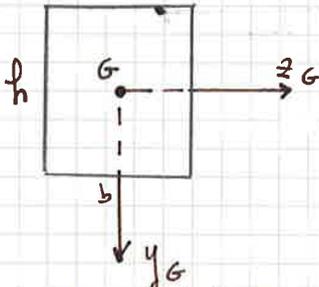
$$S_{VUOTO\ x} = A_{VUOTO} \cdot y_{G_{VUOTO}} = \\ = h(B-b) \frac{h}{2}$$

$$y_G = \frac{S_{x\ TOT}}{A_{TOT}} = \frac{S_{PX} - S_V}{A_{TOT}}$$

TRAVE A SBALZO



$$\begin{cases} I_{yG} = \frac{hb^3}{12} \\ I_{zG} = \frac{bh^3}{12} \end{cases}$$



LA FRECCIA MAX E' LA DISTANZA TRA LA SITUAZIONE INDEFORMATA E QUELLA DEFORMATA, MISURATA WNGO y

SERVO L'EQ. DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA, LA INTEGRERÒ OTTENENDO

$$f_{MAX} = \frac{PL^3}{3EI_{zG}}$$

- P = CARICO
- L = LUNGHEZZA
- 3 DAVE INTEGRAZIONI
- E = LA CARATTERISTICA MATERIALE
- $I_{zG}$  = MOM. D'INERZIA DELLA SEZIONE

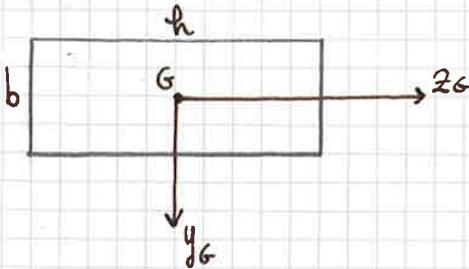
RIGIDEZZA DELLA TRAVE

PW' E' GRANDE  $I_{zG}$  + LA MIA TRAVE HA UNA FRECCIA PICCOLA E + E' RIGIDA

MOMENTO D'INERZIA DELLA SEZIONE RISPETTO AD UN ASSE CHE GIACE SUL PIANO DELLA SEZIONE CHE E'  $\perp$  ALLA DIREZIONE DEL CARICO

IMPORTANTE PER DEF. QUANTO E' FLESSIBILE O RIGIDA LA TRAVE: QUANTO SI INFLETTE, PIU' O MENO, LA TRAVE.

METTO LA STESSA TRAVE DISTESA



$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

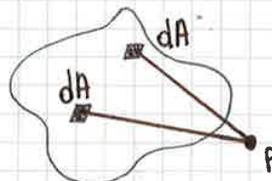
IL TERMINE AL CUBO VERRA' QUINDI RAPPRESENTATO DAL LATO + PICCOLO, DELLA SEZIONE

③ MOMENTO CENTRIFUGO

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

④ MOMENTO D'INERZIA POLARE : MOM. D'INERZIA RISPETTO UN ASSE CHE E'  $\perp$  AL PIANO DEL FOGGIO

$$I_p = \int_A r^2 \, dA$$



$$\Rightarrow I_x = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

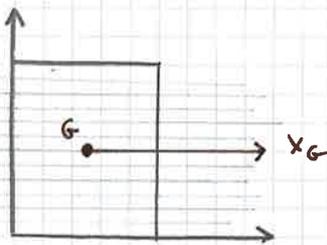
$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \frac{h^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

QUINDI:

$$I_x = \frac{bh^3}{3}; I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{3}; I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_x = I_{x_G} + Ad^2 = \text{UTILIZZO IL TEO. DI TRASPOSIZIONE SEGUENDO UNO DEI DUE ASSI BARICENTRICO}$$

$$= \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3} \Rightarrow \text{ATTRAVERSO IL TEO. DI TRASPOSIZIONE:}$$



POSSIAMO DIMOSTRARE CHE, SE VADO A DISEGNARE INFINITI ASSI, TUTTI // AL MIO ASSE X, IL MOM. D'INERZIA + BASSO ( $I_{min}$ ) RISPETTO A TUTTI GLI INFINITI ASSI // AD X CHE GIACONO SUL PIANO DELLA SEZIONE, E' AD UN ASSE CHE PASSA PER IL BARICENTRO DELLA SEZIONE

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{x_{min}} = I_G$$

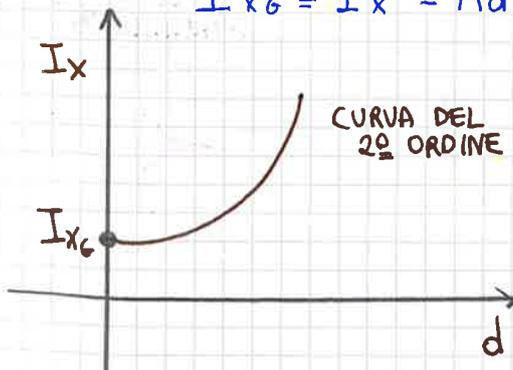
IMMAGINIAMO DI NON SAPERE QUANTO VALGA IL MOM. D'INERZIA BARICENTRICO:

$$I_{x_G} = I_x - Ad^2$$

IN QUANTO

$$I_x = I_{x_G} + \underline{\underline{Ad^2}}$$

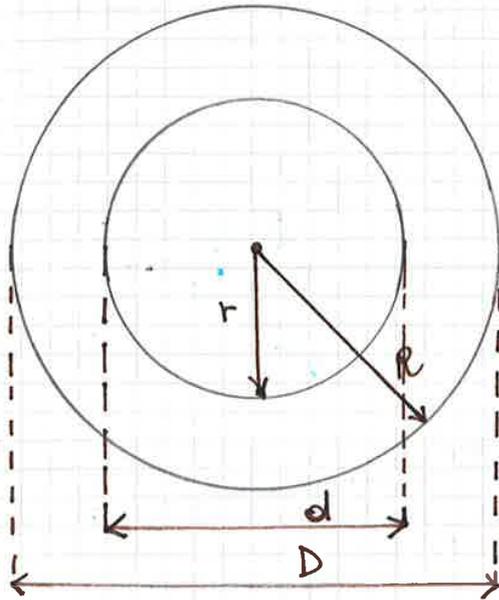
DISTANZA TRA I DUE ASSI



TUTTO CIO' IMPUCCA CHE: LA STRUTTURA DELLA MIA TRAVE TENDERA' SEMPRE A DISPORSI, SE INFLESSA, DOVE TROVA MENO RESISTENZA

VA AD INFLETTERSI, NEL PIANO DOVE IL MOM. D'INERZIA E' MINIMO.

PRENDIAMO UNA SEZIONE CAVA CHE AVRA' 2 DIAMETRI: 1 ESTERNO E UNO INTERNO (COME SONO SPESO GLI ALBERI DI TRASMISSIONE)



IN QUESTI CASI SI PUO' UTILIZZARE LA SOMMA O LA SOTTRAZIONE

↓  
SICCOME, IN QUESTO CASO, IL CENTRO DEI DUE CERCHE E' COMUNE POSSIAMO ATTUARE LA SOTTRAZIONE:

$$I_p = I_{p\text{esterno}} - I_{p\text{interno}}$$

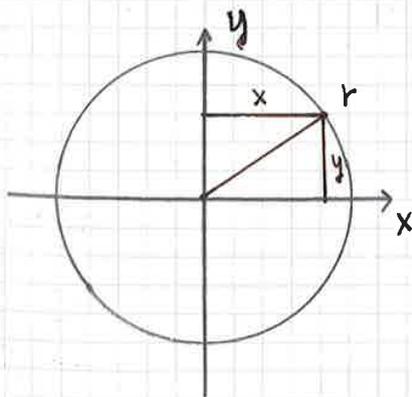
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

LA TRAVE A SEZIONE RETT.  $\implies$  RESISTE BENE ALLA FLESSIONE, SI ALLARGA, INVECE, NELLA TORSIONE!

LA TRAVE A SEZIONE CIRC.  $\implies$  E' FANTASTICO IL SUO COMPORTAMENTO NELLA TORSIONE.

$$I_x = I_y = I_d = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

OTTENGO IL RISULTATO O INTEGRANDO UNA SEZ. CIRCOLARE OPPURE:



$$\begin{aligned} I_r &= \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \\ &= \int_A 2x^2 dA = 2 I_d \end{aligned}$$

$Mf_L = 0 \Rightarrow$  SONO, QUINDI, OBBLIGATO A SCRIVERE, INIZIALMENTE, SOLO GLI ESTREMI

$$Mf_{x=L/2} = \frac{q}{2} \left( L \cdot \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right) = \frac{qL^2}{8} \Rightarrow \text{MASIMO A TG. ORIZZONTALE}$$

IN QUESTA STRUTTURA E' SEMPRE MA DI SOTTO. NON E' COSI' IL MASIMO O IL MINIMO SI TROVANO PONENDO A "0" LA DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE

$$\frac{dMf}{dx} = T \text{ QUINDI } T=0 \Rightarrow Mf = \text{MAX/MIN}$$

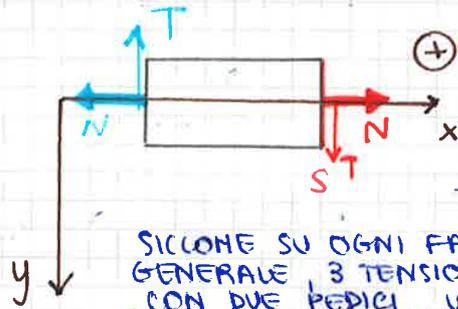
$$T = q \left( \frac{L}{2} - x \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

↓ TENSORE DELLE TENSIONI → SIMMETRICO

	X	Y	Z
X	$\sigma_{xx}$	$\tau_{yx}$	$\tau_{zx}$
Y	$\tau_{xy}$	$\sigma_{yy}$	$\tau_{zy}$
Z	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_{zz}$

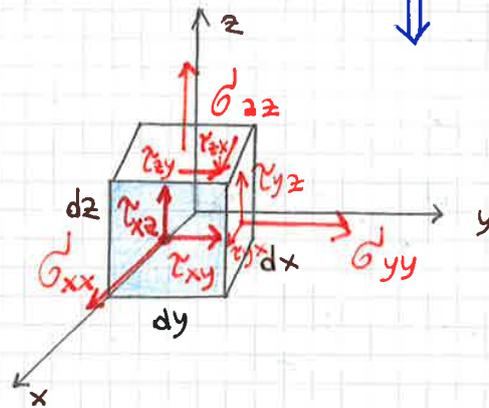
↓  
 6 INCOGNITE SOLTANTO  
 ↑  
 9 COMPONENTI DI TENSIONE (3D)  
 ↓  
 9 EQUAZIONI  
 ↓  
 3 NEL PIANO      6 NELLO SPAZIO

LE TENSIONI SEGUONO, COME DIREZIONE, LA CONVENZIONE DEGLI SFORZI



LA TENSIONE È ⊕ SE È DIRETTA COME N ⊕ DOVE L'ASSE È USCENTE

SICCOME SU OGNI FACIA POSSO AVERE, NEL CASO + GENERALE, 3 TENSIONI IO POSSO DEFINIRE UNA  $\sigma$  CON DUE PEDICI, USCENTE DALLA FACIA.

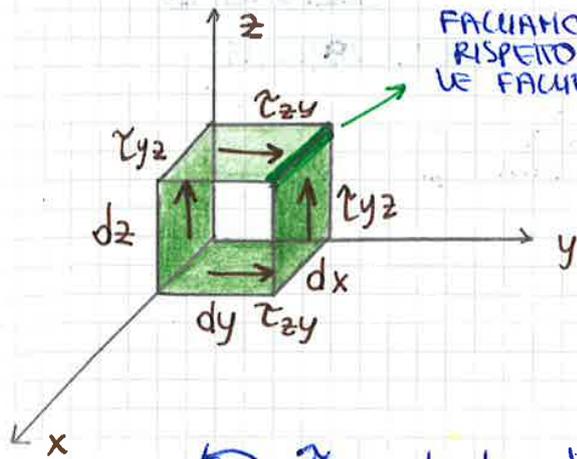


PER CALCOLARE, OKA, LE 9 EQUAZIONI DIPENDERANNO DAL TEOREMA SEGUENTE:

TEOREMA DELLA RECIPROCA' DELLE TENSIONI TANGENZIALI



$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$



FACCIAMO LE EQ. ALLA ROTAZIONE MA RISPETTO QUESTO SPIGOLO - QUINDI, STUDIAMO LE FACCE CHE POSSONO RUOTARE RISPETTO QUELLO SPIGOLO (QUELLE COLORATE)

CON  $\tau_{zy}$  IL BRACCIO SARA' NULLO, COME PER  $\tau_{yz}$ , AL CONTRARIO, DEVE LORO RECIPROCHE - QUINDI, LE  $\tau$  CHE FANNO MOMENTO, SARANNO:

$$\tau_{zy}, \tau_{yz}$$

$$\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot dy - \tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

IL TENSORE DELLE TENSIONI E' SIMMETRICO E SONO SOLO 6 EQUAZIONI

LE NORMALI NON CONTRIBUISCONO AL MOMENTO.

$$U_{AA'} - U_{OO'} = \frac{\partial U}{\partial x} dx \implies \frac{U_{AA'} - U_{OO'}}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon_x$$

LA DEFORMAZIONE ADIMENSIONALE CHE FIDELMENTE ESPRIME QUANTO SI È DEFORMATO L'ELEMENTO RISPETTO LA DIMENSIONE INIZIALE DELL'ELEMENTO.

DUNQUE NON È ALTRO CHE L'INCREMENTO DI ALLUNGAMENTO, RISPETTO LA LUNGHEZZA INIZIALE DEL MIO ELEMENTO CHE, ESSENDO L'ELEMENTO INFINITESIMO, È INFINITESIMO PER DEFINIZIONE.

POSSO QUINDI, RAPPRESENTARE LA MIA DEFORMAZIONE COME LO SPOSTAMENTO DI DUE ESTREMI RISPETTO LA LUNGHEZZA INFINITESIMA DELL'ELEMENTO.

CHIARO CHE AVRÒ LA STESSA SITUAZIONE LUNGO  $y$  :

$$V_{BB'} - V_{OO'} = \frac{\partial v}{\partial y} dy \implies \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y$$

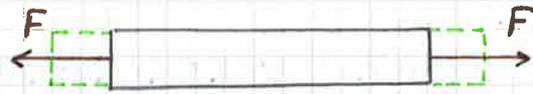
PER TROVARE LA DEFORMAZIONE ANGOLARE RILEVIAMO LE TANGENTI DI  $\alpha$  E  $\beta$ , CON LA TRIGONOMETRIA:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_{AA'} - U_{OO'}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

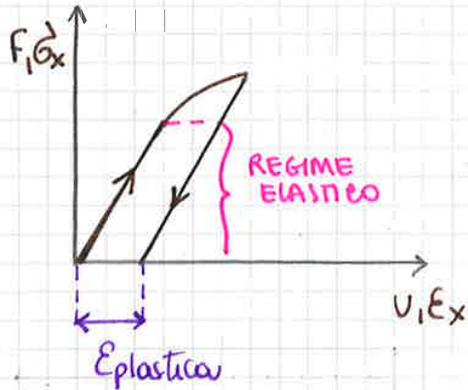
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_{BB'} - V_{OO'}}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right.$$

## ② LEGAME PLASTICO



LA TRAVE SI ALLUNGA COME PRIMA MA AVENDO SUPERATO IL LIMITE ELASTICO

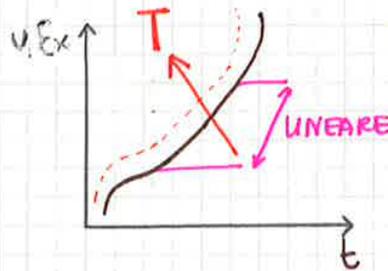
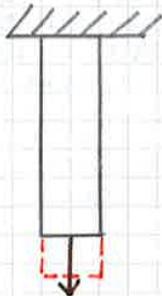


QUINDI IN QUESTO REGIME :

- VARIABILE  $t$  NON IMPORTANTE
- NON HO TOT. RECUPERO ALO SCARICO
- SONO VARIATI I LEGAMI ATOMICI

## ③ CREEP

SE HO UN ELEMENTO A SCORRIMENTO VISCOZO, AVRO' UNA DEFORMAZIONE PERMANENTE



$$F, \sigma_x = \text{cost}$$

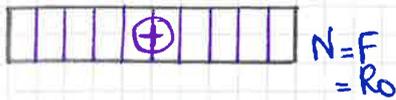
$$T = \text{cost}$$

TUTTI I MATERIALI CHE LAVORANO AD ALTE TEMPERATURE SONO SOTTOPOSTI AL FENOMENO DI CREEP.

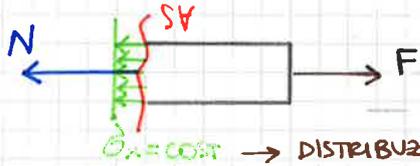
- VARIABILE TEMPO IMPORTANTISSIMA
- NON TOTALE RECUPERO ALO SCARICO
- ROTTURA DEI LEGAMI ATOMICI

PIU' ALTA E' LA TEMP. PIU' IL FENOMENO E' IMPORTANTE

1<sup>oa</sup> RIGA  $\Rightarrow$  TENSIONI DOVUTE ALLO SFORZO NORMALE



LA RISULTANTE DELLE TENSIONI IN QUELLA SEZIONE E' PARI ALLO SFORZO CORRISPONDENTE



$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SE IO TIRO LA TRAVE, SOTTOPOSTA A SFORZO NORMALE COSTANTE, E VEDO CHE LA FRATTURA INIZIA IN UN PUNTO PIUTOSTO CHE UN ALTRO SI CAPISCE CHE VIERA UN DIFETTO INIZIALE, UNA SOFFERENZA PRE-ESISTENTE CHE L'INGEGNERE NON POTEVA IMMAGINARE (E' UNA CASUALTA')

OGNI ELEMENTINO INFINITESIMO HA LA STESSA  $\sigma = \text{cost}$

LEZIONE 18

MERC 29/10/14

COS'E' L'EFFETTO DI BORDO (4<sup>oa</sup> IPOTESI)

TUTTO CIÒ CHE FACCIAMO FA SEMPRE RIFERIMENTO AD UN MODELLO, MA NON ESISTE UN CARICO APPLICATO IN UN PUNTO. QUINDI F E' UNA FORZA DISTRIBUITA IN UN'AREA MOLTO PICCOLA TALE CHE LA SUA RISULTANTE SIA F. ADORA, PER DE SAINT VENANT L'EFFETTO DI BORDO SIGNIFICA CHE BASTA CHE IO MI ALLONTANI DALLA SEZIONE IN CUI E' APPLICATO IL CARICO O DA QUELLA IN CUI IO HO APPLICATO IL VINCOLO DI UNA QUANTITA' PARI ALLA PIU' GRANDE DIMENSIONE DELLA SEZIONE DELLA MIA TRAVE CHE IL FLUSSO DELLE TENSIONI SIA IMPERTURBATO

QUAUNQUE ELEMENTINO INFINITESIMO, DEL MIO SISTEMA TRAVE AVRA' LO STESSO STATO DI TENSIONE

IL TENSORE DELLE TENSIONI SARA', QUINDI, FATTO DA UN SOLO ELEMENTO  $\sigma_x$

$N = \text{cost} \Rightarrow \sigma_x = \text{cost}$

N E' LA RISULTANTE DI DISTRIBUZIONE  $\sigma_x$  ED E' COSTANTE LUNGO UNA TRAVE

$\sigma_x$	0	0
0	0	0
0	0	0

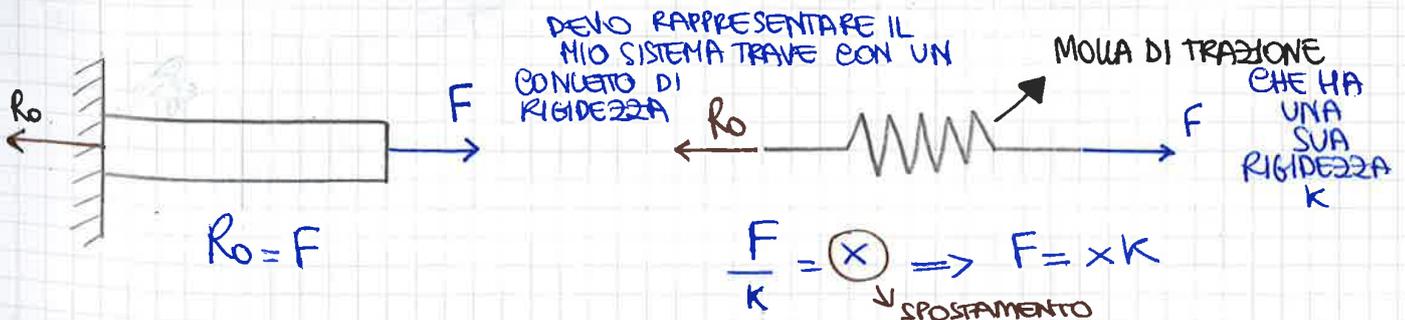
## UNITA' DI MISURA

SFORZO (FORZA INTERNA)	→ [N]
TENSIONE (FORZA/AREA)	→ [N/mm <sup>2</sup> ]
DEFORMAZIONE	→ [ADIMENSIONALE]
MODULO ELASTICO (DI YOUNG)	→ [N/mm <sup>2</sup> ] = 210.000 $\frac{N}{mm^2}$ (PER L'ACCIAIO)

POSSIAMO QUINDI INIZIARE A RIEMPIRE LA TABELLA:

LA TRATTAZIONE DELLA FORZA DI TAGLIO NON E' RIGOROSA

	N	MP	ME	T
TENSIONE	$\sigma_x = \frac{N}{A}$ (SEZIONE)	$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z}$ (MAX DISTANZA DAL PIANO NEUTRO)	$\gamma = \frac{M \cdot r}{I_p}$ (Distanza dall'asse)	$\tau = \frac{T \cdot S^*}{I_z \cdot corda}$
DEFORMAZIONE	HOOKE $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$ ( $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu(\sigma_y + \sigma_z)$ )	HOOKE $\epsilon_x = \frac{M \cdot y}{EI_z} = \frac{y}{R}$	HOOKE $\gamma = \frac{\tau}{G}$	HOOKE $\delta_{xy} = \alpha_r = \frac{\tau \cdot l}{AG} = \frac{GI}{AG} \cdot \frac{l}{5AG}$
ALLUNGAMENTO	$\Delta L = \frac{NL}{EA}$	NON E' UNA RELAZ. GENERALE $f = y = \frac{M \cdot l}{GI_p}$ DIPENDE DA TUTTO DOWTA ALL'INFESSIONE DELLA TRAVE	$f_{max} = \Delta \theta \cdot b$ $\Delta \theta = \frac{M \cdot l}{GI_p}$	TRASCURABILE $f \sim \chi \frac{I}{A} \cdot \frac{l}{G}$



POSSO QUINDI UTILIZZARE UN MODELLO A PARAMETRI DISTRIBUITI (TRAVE) O A PARAMETRI CONCENTRATI (MOULA) A SECONDA DI CIO' CHE MI E' PIU' UTILE

## EFFETTO DELLA TEMPERATURA

SE VI E' UNA TRAVE IN PRESENZA DI UN GRADIENTE TERMICO, LA TEMPERATURA FA DILATARE I METALLI.

MI CALCOLO, COSI', UNA DEFORMAZIONE  $\epsilon_x$  DOVUTA ALLA TEMPERATURA:

$$\epsilon_{xT} = \alpha \Delta T$$

$$\Delta L_T = \alpha \Delta T L$$

$\Delta T$  MISURATO IN °C

$\alpha$ : COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA

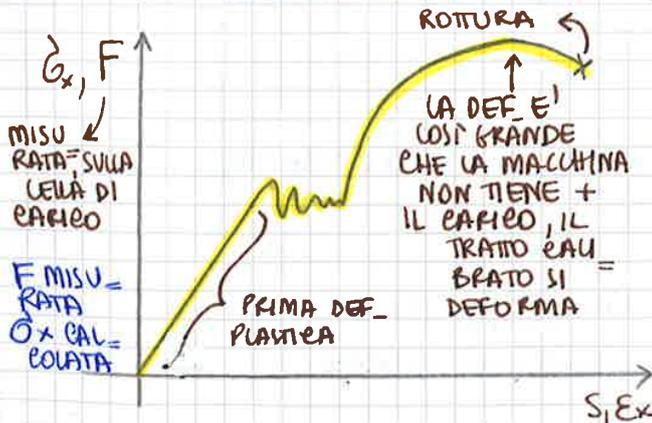
$$\left( \begin{array}{l} \alpha_{ACQUA} = 0.00012 \\ \alpha_{ACQUA} = 0.00015 \end{array} \right)$$

INOX

$$\epsilon_{xTOT} = \epsilon_x + \epsilon_{xT}$$

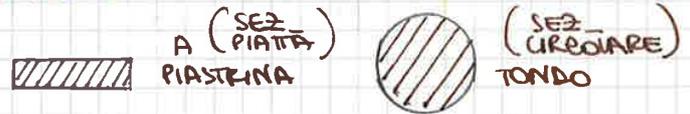
## PROVA DI TRAZIONE

CHE SERVE A CARATTERIZZARE I MATERIALI METALLICI, STABILIMENTE



SI PRENDONO, INNANZI DEI PROVINI E POI SI VEDE, IN BASE AD ESSO, COME SI SVOLGE LA PROVA, TIPO DI CARICO, FORMA DEL PROVINO E TUTTE LE INDICAZIONI DETTATE DALLA NORMATIVA.

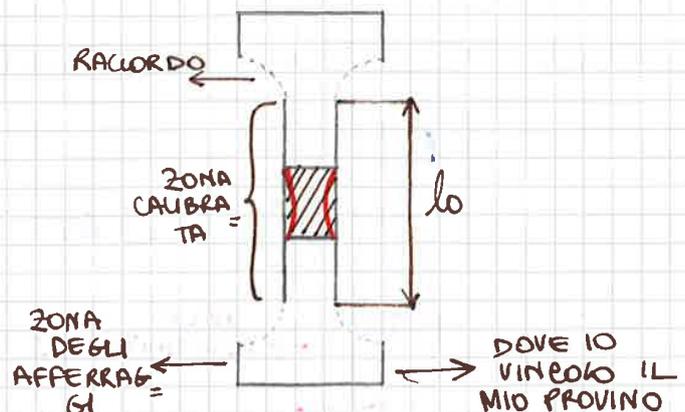
INNANZITUTTO GUARDIAMO LA FORMA DEL PROVINO:



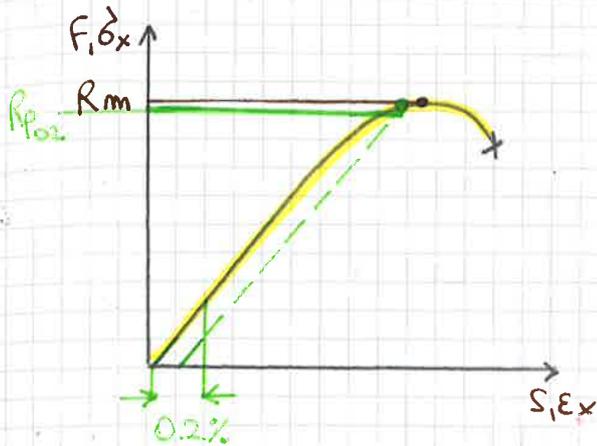
IMPORTANTE, INVECE E' CHE IL PROVINO HA UNA ZONA CALIBRATA (SEZIONE), UN AMPIO RACCORDO DI SOTTO CIRCOLARE ED UNA ZONA PIU' GRANDE CHE E' DI SOTTO QUELLA DEGLI AFFERRAGGI. SI VA AD IDENTIFICARE UNA VINGHERAZZA UTILE, DELLA ZONA CALIBRATA, PER LA NOSTRA PROVA.

NON CAMBIA NULLA E' SOLO UNITATO ALLA MACCHINA CHE SI HA, AL TIPO DI FERRAGGI E MATERIALI PRODOTTI.

EIO' CHE CI DICE SE LA PROVA E' ANDATA BENE, O MENO, E' SE LA ROTTURA AVVIENE NEL TERZO INTERMEDIO DELLA PROVA CALIBRATA (PER L'EFFETTO DI BORDO)



IN ALCUNI ACCIAI, SEMPRE DUTTI, NON VI E' UN EVIDENTE SNERVAMENTO:



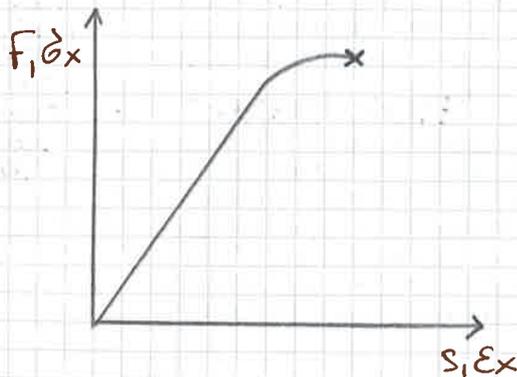
NON AVENDO UN MODO PER SAPERE DOVE VI E' LO SNERVAMENTO DALLA PROPORZIONALITA' VI E' UN METODO PER CALCOLARLO:

$$R_{p0.2} \approx R_{eh} \dots$$

QUANDO NON E' EVIDENTE LO SNERVAMENTO.

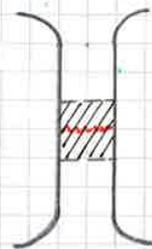
SI CALCOLA SEMPRE DAI DATI MISURATI, PRENDENDO, SULL'ASSE DELLE ASCISSE, UNO SPOSTAMENTO DELLO 0.2% DA CUI VADO A TRACCIARE UNA RETTA // ALLA ZONA LINEARE, DOVE INTERSECA LA CURVA AVRO' IL MIO  $R_{p0.2}$

L'ULTIMO CASO E' QUELLO DEI MATERIALI FRAGILI, AD ESEMPIO GHISA



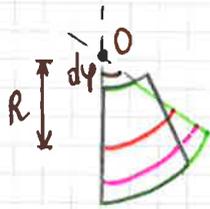
AVRO' SEMPRE UNA ZONA LINEARE MA IL PROVINO SI FOMPE SUBITO PERCHE' NON POSSO AVERE OSTRIZIONE, NON AVENDO DEFORMAZIONE PLASTICA, NON POSSO AVERE ZONE DI IMMAGAZINAMENTO DELL'ENERGIA PLASTICA

PER CUI, IN UN MATERIALE FRAGILE MI INTERESSA SOLO IL CARICO DI ROTTURA E SE VADO AD IDENTIFICARMI LA PROPAGAZIONE DELLA FRATTURA, DELLA CRACK, AVRO' PER LO PIU' UNA FRATTURA  $\perp$  ALL'ASSE DEL PROVINO



$$de^* = (R^* + y) \cdot d\varphi^*$$

APPURE POI UN MOMENTO FLETTENTE ALL'ASTA PRECURVATA OSSERVANDO CHE LE SEZIONI SI MANTENGONO PIANE, L'ASSE NEUTRO NON SI MUOVE.



NOTIAMO CHE  $de$  SI È ALLUNGATA:

$$de = (R + y) \cdot d\varphi$$

CALCOLO LA FIBRA NEUTRA (CHE NON SI DEFORMA  $y=0$ )

$$de_n = R^* d\varphi^* = R d\varphi$$

DEFORMAZIONE INFINITESIMALE  $\Rightarrow$  ADIMENSIONALE

$$\epsilon_x = \frac{de - de^*}{de^*} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{(R+y)d\varphi - (R^*+y)d\varphi^*}{(R^*+y)d\varphi^*}$$

UGUALI E CONTRARI ALLA LUNGHEZZA DELLA TRAVE

$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{R d\varphi + y d\varphi - R^* d\varphi^* - y d\varphi^*}{(R^* + y) d\varphi^*} =$$

$$= \frac{y}{R^* + y} \cdot \frac{d\varphi - d\varphi^*}{d\varphi^*}$$

$$= \frac{y}{R^* + y} \left( \frac{d\varphi}{d\varphi^*} - 1 \right) = \frac{y}{R^* + y} \left( \frac{R^*}{R} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{y R^*}{R^* + y} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right)$$

TALE ESPRESSIONE, NOTA COME

DEFORMAZIONE INFINITESIMALE

EI DICE CHE INNANZI LA

DEFORMAZIONE È FUNZIONE DELLE CURVATURE, CHE L'INGEGNERE NON CONOSCE A PRIORI E POI CHE HO UN ANDAMENTO CHE NON È LINEARE (AVENDO  $y$  SOPRA E  $y+R^*$  SOTTO), COSA CHE NON AVREMO NELLA TRAVE INIZIALMENTE RETTILINEA

ADESSO, UNIAMO LE RELAZIONI:

$$Mf = \frac{E}{R} I z$$

$$\sigma_x = \frac{E}{R} y$$

LEGGE DI VARIAZIONE

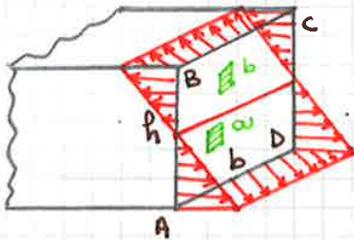
$$\sigma_x = \frac{Mf}{I z} y$$

POSSO DISEGNARE PER

$$y = h/2$$

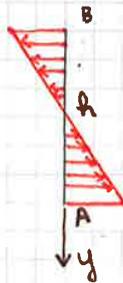
$$y = 0$$

$$y = -h/2$$



QUINDI PER DEFINIRE LE FIBRE TESI E QUELLE COMPRESSE HO BISOGNO DEL SEGNO DEL Mf, DEL SEGNO DEL DIAGRAMMA DI SFORZO, E DELLA VARIAZIONE DI y

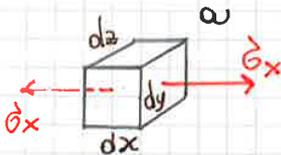
UN ALTRO MODO PER VEDERE L'ANDAMENTO



$\sigma_x$  POSITIVA DALLA PARTE DELLE y POSITIVA NEL VERSO CONCORDE A z, TRAZIONE -

$\sigma_x$  NEGATIVA, DALLA PARTE CONTRARIA, COMPRESIONE

SERVIAMO, ORA, IL TENSORE DELLE TENSIONI DEI DUE ELEMENTINI a e b, INFINITESI, IN CUI, PERO'  $Mf = \text{cost}$



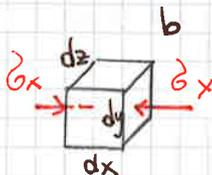
IL MIO ELEMENTINO IN EQUILIBRIO TRA LE DUE FORZE PRESENDE DA OGNI COSA, QUINDI, ANCHE IL SUO TENSORE DELLE TENSIONI

COME SE IO AVESSI UNA TRAVE IN TRAZIONE

$\sigma_x$	0	0
0	0	0
0	0	0

(a)

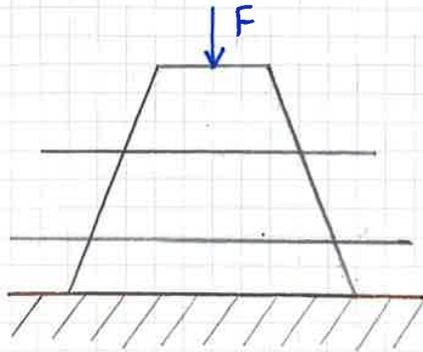
LO STESSO POTREMO DIRE NEL PUNTO b TRAMME CHE QUI LE FIBRE SONO IN COMPRESIONE:



$-\sigma_x$	0	0
0	0	0
0	0	0

## CONCETTO DI UNIFORME RESISTENZA

CONCETTO MOLTO UTILIZZATO PER I MATERIALI NON PERFORANTI.  
SE IO HO AD ESEMPIO UN PILASTRO CON UN CARICO SOPRA



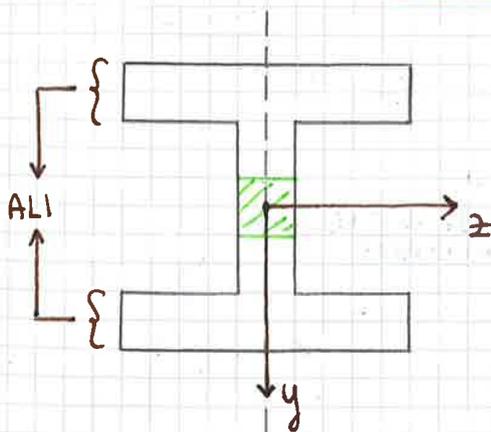
$$\sigma_x \approx \text{cost}$$

PIU' VADO VICINO ALLA BASE PIU' IL PESO CHE LA SEZIONE DEVE SOPPORTARE E' GRANDE.

LA FORMA DELLA SEZIONE RETTANGOLARE NON E' INOLINE ALLA FLESSIONE IN QUANTO LA ZONA CENTRALE, DOVE IL PIANO E' NEUTRO, NON SFRUTA MINIMAMENTE IL MATERIALE NON ESSENDO LA TENSIONE. HAN HANO CHE IO MI ALLONTANO LA TENSIONE E' LA STESSA DI QUELLA MASSIMA.

LE TENSIONI INVECE, MOLTO UTILIZZATE, SONO QUELLE DELLA CARPENTERIA METALLICA:

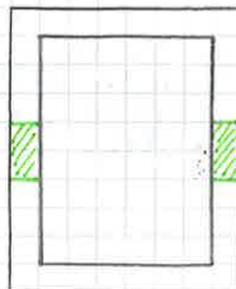
## ② SEZIONE AD "H" O AD "I"



CI METTIAMO NELLA CONDIZIONE DI  $M_f \oplus$

LA SEZIONE QUI E' LEGGERA, PENA, CON UN ELEVATO MOM. D'INERZIA, QUINDI SFRUTA MOLTO BENE IL MATERIALE

IN ANALOGIA ABBIAMO: SEZIONE RETTANGOLARE, CAVA

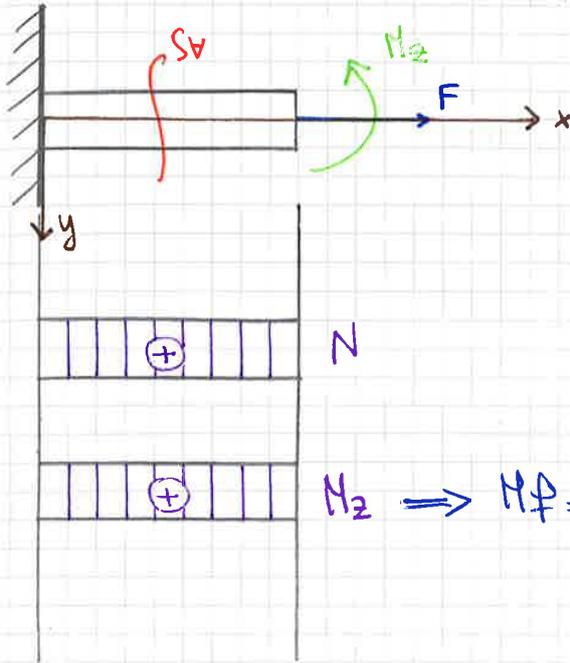


QUINDI, MENO MATERIALE  
UNA SEZIONE HA UNGO IL  
PIANO NEUTRO PIU' QUESTA  
SI AVVICINA ALLA CONDIZIONE DI  
UNIFORME RESISTENZA

LEZIONE 20  
MART 04/11/14

ESEMPIO PRATICO

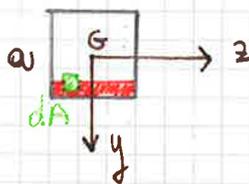
PARTIAMO DA UNA TRAVE A SBALZO CHE SOTTOPIANIAMO AD UNA FORZA BARICENTRICA  $F$  ED UN MOMENTO FLETTENTE  $M_2$



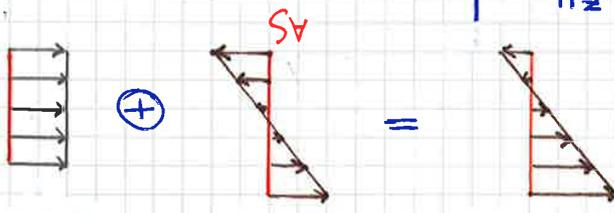
$M_2 \Rightarrow M_f = \text{cost} \Rightarrow \text{NON HO TAGLIO}$

INFATTI ESSENDO IL TAGLIO LA DERIVATA DEL MOM. FLETTENTE SE QUEST'ULTIMO E' COSTANTE IL TAGLIO E' NULLO.

IMMAGINO DI AVERE UNA SEZIONE QUADRATA



$$\Delta S_v : \begin{cases} \sigma_{xN} = \frac{F}{a^2} \\ \sigma_{xM_2} = \frac{M_2}{F^2} y = \frac{M_2 y}{a^2} \end{cases}$$



$$\sigma_{xMAX} = \sigma_{xN} + \sigma_{xMf} = \frac{F}{a^2} + \frac{M_2 y}{a^3}$$

TENSORE DELLE TENSIONI

$\sigma_{xMAX}$	0	0
0	0	0
0	0	0

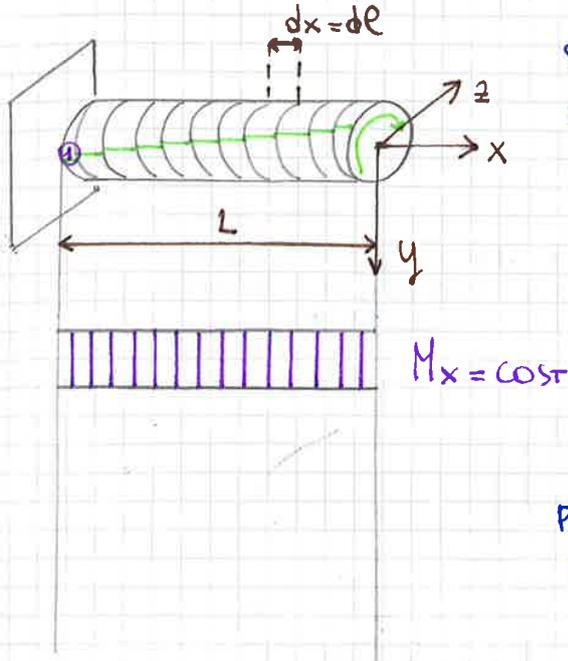
ANDIAMO AD IDENTIFICARE UN ELEMENTINO, SULLA BASE DELLA SEZIONE, INFINITESIMO, PIU' SOLLECITATO :

# TORSIONE

LEZIONE 22

MERC 05/11/14

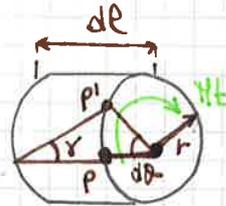
IMMAGINIAMO DI AVERE UNA TRAVE A SEZIONE CIRCOLARE, INCASTRATA



SE IO IMMAGINO TANTE SEZIONI INFINITESIME, DISTANTI  $dx$ , APPLICO UN MOMENTO TORRENTE, UN MOMENTO ATTORNO L'ASSE DELLA TRAVE E VADO AD IDENTIFICARE UNA LINEA  $dx$  SULLA PRIMA "FETTA" DI SEZIONE APPLICANDO IL MOM. TORRENTE VEDO INFINITI SPOSTAMENTI FINO A GENERARE UN'ELICA SULLA TRAVE

IPOTESI: LE SEZIONI SI MANTENGONO PIANE ( $\perp$  AD X)

PRENDO COME RIFERIMENTO IL MIO PRIMO ELEMENTINO ① IN QUANTO VINCOLATO AL MURO E NE FACIO UNO ZOOM:



APPLICANDO TORSIONE IL PUNTO P SI SPOSTA. L'ANGOLO CHE P'1' FA IL PUNTO P DI PARTENZA E' QUELLO P'1' DOPO LO SPOSTAMENTO E':

$\gamma$ : DEFORMAZIONE ANGOLARE (ADIMENSIONALE)

VALE LA LEGGE DI HOOKE PER LE TENSIONI TANGENZIALI

MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE DEL MATERIALE

$$\tau = G \gamma$$

SOLITAMENTE NON SI FANNO PROVE PER RICEVERE G MA LO SI RICEVA DAL MODULO ELASTICO:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \text{PER GLI ACCIAI} \rightarrow 83.000 \text{ MPa}$$

COEFF. DI POISSON

LA DIM. DELLA TORSIONE PASSA DAL CALCOLO DELL'AREA  $\widehat{PP'}$  CHE UNA VOLTA VIENE CALCOLATO COME APPARTENENTE ALLA SUP. LATERALE DEL CILINDRO E L'ALTRA COME A QUELLA ALL'ASSE

$$\widehat{PP'} = \gamma de = r d\theta$$

$$M_x = M_t = \frac{d\theta}{de} G I_p$$

COMBINO LE 2 EQUAZIONI :

$$\left. \begin{aligned} M_x = M_t = \frac{d\theta}{de} G I_p \\ \tau = \frac{d\theta}{de} G r \end{aligned} \right\}$$

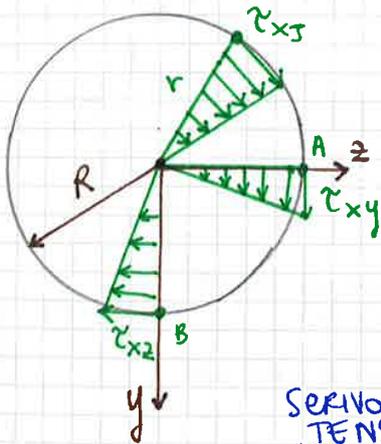
$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r$$

DISTANZA DALL'ASSE  
PRIMA FORMULA DELLA TORSIONE

SE IO IMMAGINO DI AVER INTEGRATO  $d\theta$  SU TUTTA LA LUNGHEZZA DELLA TRAVE



$$\Delta\theta = \frac{M_t L}{G I_p}$$



$$2R = D$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

MOMENTO D'INERZIA POLARE DELLA SEZIONE PIENA

LE  $\tau$  VARIANO LINEARMENTE CON IL RAGGIO  $r$ . CIO' SIGNIFICA CHE  $\tau$  SARÀ MASSIMA CON  $r$  MAX E NULLA QUANDO  $r=0$

SERVO I DUE TENSORI DELLE TENSIONI

0	$\tau_{yx}$	0
$\tau_{xy}$	0	0
0	0	0

(A)

0	0	$\tau_{xz}$
0	0	0
$\tau_{xz}$	0	0

(B)

$\tau_{MAX}$  SARÀ SU TUTTI I PUNTI DEL BORDO ESTERNO :

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t \cdot r_{MAX}}{I_p} = \frac{M_t \left(\frac{D}{2}\right)}{\frac{\pi D^4}{32}} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$$

$$\frac{\pi D^3}{16} = W_t$$

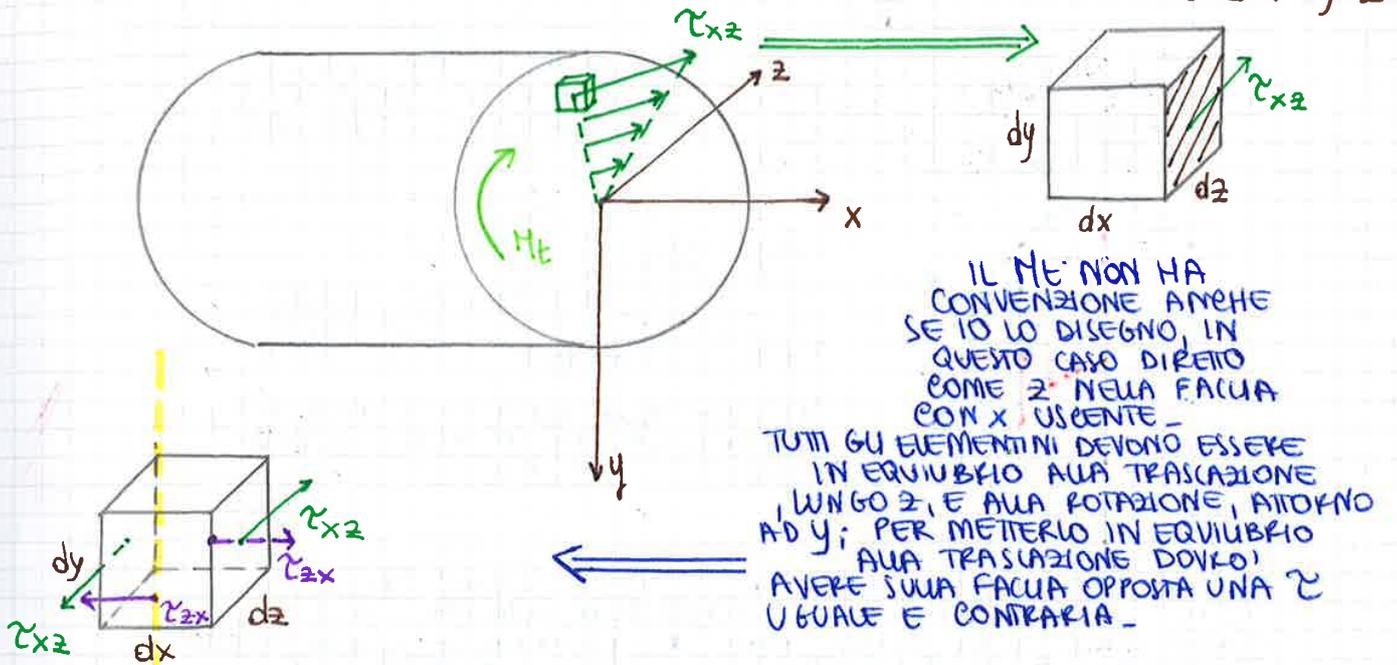
MODULO DI RESISTENZA A TORSIONE DELLA SEZ. PIENA

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t}{W_t}$$

## RECIPROCA' DELLE TENSIONI TANGENZIALI

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

ELEMENTO DELL'ALBERO SOTTOPOSTO A MOMENTO TORRENTE, IN CUI ANDIAMO A PRENDERE UN ELEMENTO INFINITESIMO:



I DUE VETTORI  $\tau_{xz}$  SONO UGUALI, CONTRARI ED OVIAMENTE, DISTANTI  $dx$ . ESSI GENERANO UNA COPPIA ATTORNO AD UNO DEGLI SPIGOLI E QUINDI ATTORNO AD UNA DIREZIONE // AD Y. PER METTERLO IN EQUILIBRIO, DUNQUE, DEVE NASCERE UNA COPPIA UGUALE E CONTRARIA,  $\tau_{zx}$  E LA SUA CONTRARIA SEMPRE DISTANTI  $dx$ , PER AVERE L'EQUILIBRIO ANCHE ALLA ROTAZIONE

SERVO UN'EQ. DI MOMENTO RISPETTO, AD ESEMPIO, ALLO SPIGOLO DOVE RUOTA LA COPPIA:

$$\tau_{xz} \cdot dz dy \cdot dx - \tau_{zx} \cdot dx dy \cdot dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau_{xz} = \tau_{zx}}} \quad \text{C.V.D.}$$

I COEFFICIENTI  $\alpha$  E  $\beta$  DIPENDONO DAL RAPPORTO FRA I LATI

$$n = \frac{a}{b}$$

E:  $\alpha$  SERVE PER IL MODULO DI RESISTENZA A TORSIONE ( $W_t$ )

MENTRE  $\beta$  PER LA DEFORMAZIONE.

ECCO UNA TABELLA CON I VALORI DI  $\alpha$  E  $\beta$  AL VARIARE DI  $n$  (DA 1 A  $\infty$ )

$n = a/b$	1.0	1.1	1.2	1.25	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	2.0	2.25
$\alpha$	4.804	4.67	4.57	4.52	4.48	4.40	4.33	4.27	4.21	4.18	4.16	4.07	3.97
$\beta$	7.114	6.49	6.02	5.82	5.65	5.35	5.11	4.91	4.74	4.67	4.60	4.37	4.16

↑  
QUADRATO

PER  $n \rightarrow \infty$   $\alpha = 3$ ,  $\beta = 3$



**Sezioni sottili aperte** CHE SI IMMAGINANO COME SEZ. RETTANGOLARI INFINITAMENTE LUNGHE

La Teoria dell'elasticità e, soprattutto, le numerose esperienze eseguite dimostrano che le tensioni e l'angolo di torsione in una barra di sezione rettangolare molto allungata (corrispondente cioè al caso teorico  $n = a/b = \infty$  per il quale ambedue i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  assumono un valore pari a 3) non mutano sensibilmente se, a parità di momento torcente  $M_t$ , la sezione viene ripiegata in modo da diventare una sezione di profilato classico (a tubo tagliato, ad L, a C, a T, ...).

Quindi, anche per queste sezioni, i valori della tensione  $\tau_{max}$  e dell'angolo unitario di torsione  $\vartheta$  possono essere calcolati tramite relazioni analoghe a quelle sopra riportate, espresse ora nel modo seguente:

$$\tau_{max} = 3 \frac{M_t}{a_m s^2}$$

$$\vartheta = 3 \frac{M_t}{G a_m s^3}$$

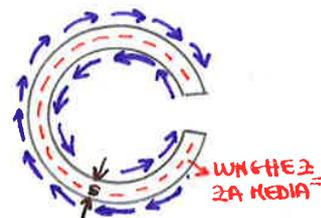
dove  $a_m$  è la lunghezza media sviluppata della sezione ed  $s$  è il corrispondente spessore.

Ad esempio, se la sezione è una corona circolare tagliata (tubo tagliato) di raggio medio  $r_m$  e di spessore (piccolo)  $s$ , si ha:

$$\tau_{max} = 3 \frac{M_t}{2\pi r_m s^2}$$

↓ SPESORE

$$\vartheta = 3 \frac{M_t}{G 2\pi r_m s^3}$$

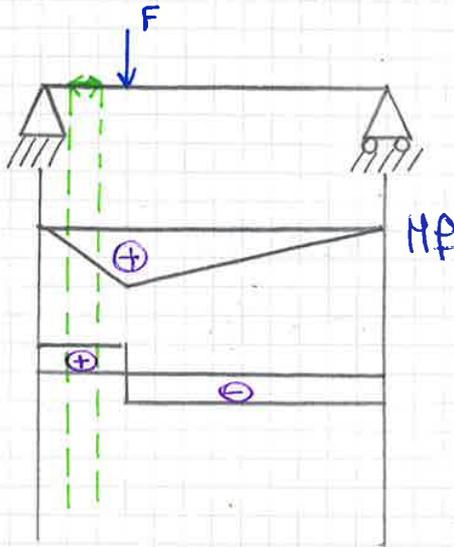


LEZIONE 23

GIOV 06/11/14

TENSIONI DOVUTE ALLO SFORZO DI TAGLIO

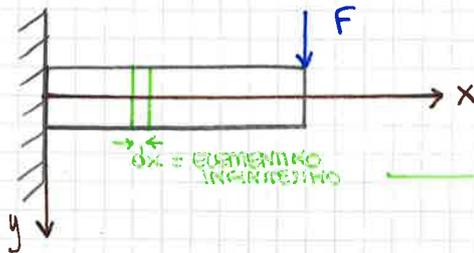
cio' e' ovvio in quanto il taglio, innanzi tutto, esiste se varia il MOM. FLETTENTE E POI LE TENSIONI DOVUTE ALLO SFORZO DI TAGLIO, NASCONO PER EQUILIBRIO L'INCREMENTO DI TENSIONI DOVUTE AL MOM. FLETTENTE



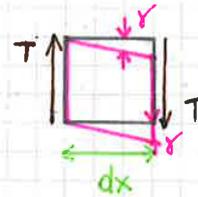
NELLA 1<sup>sa</sup> CAMPATA CRESCE IL MOM. FLETTENTE ED INSIEME LA  $\sigma_{max}$ , MENTRE NELLA 2<sup>da</sup> DECRESCHE

TUTTO CIO' SI ESPONE CON UNA EQUAZ. DI EQUILIBRIO LUNGO X

ESEMPIO TRAVE INCASTRATA CON UNA FORZA F

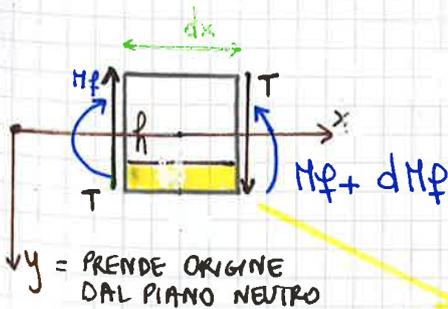


LE SEZIONI SCORRONO DIVERSAMENTE UNA RISPETTO L'ALTRA



ABBIAMO UNA DISTORSIONE DELL'ELEMENTO

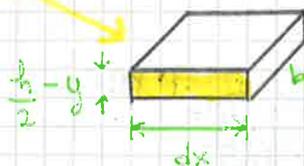
PRENDO L'ELEMENTINO (scatolo) :



MI METTO NELLA CONDIZIONE DOVE  $dM_f$  POSITIVO E TAGLIO COSTANTE

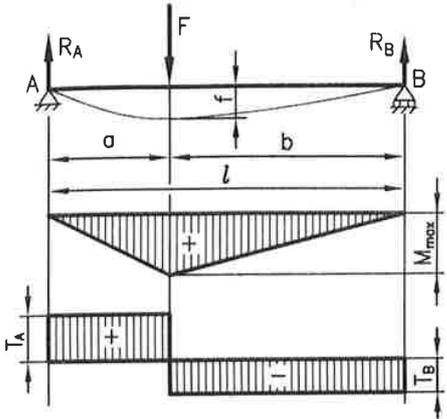
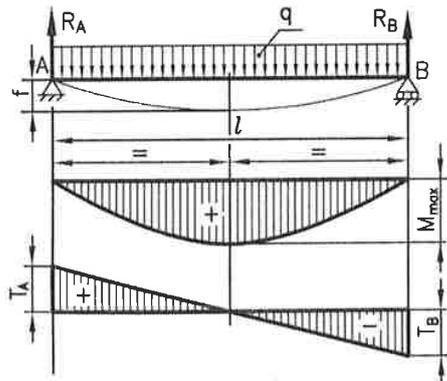
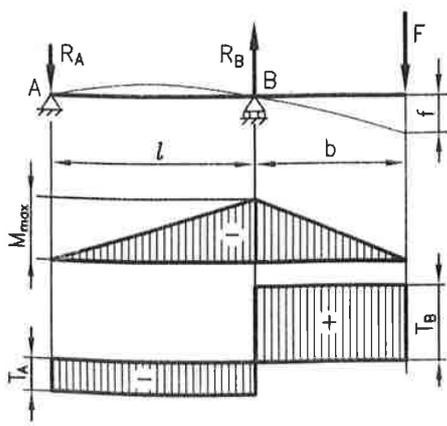
PRENDO POI UN ELEMENTINO DI LARGHEZZA INFINITESIMA E NE FACIO UN EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE

y = PRENDE ORIGINE DAL PIANO NEUTRO



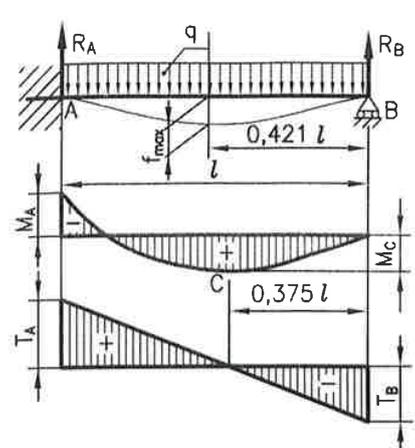
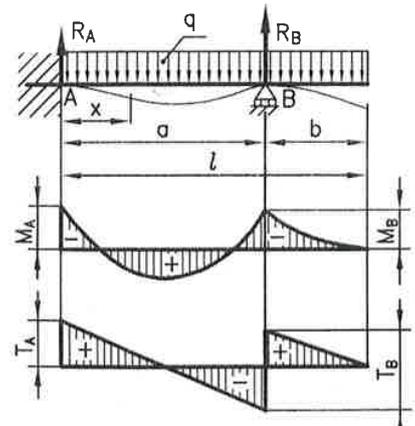
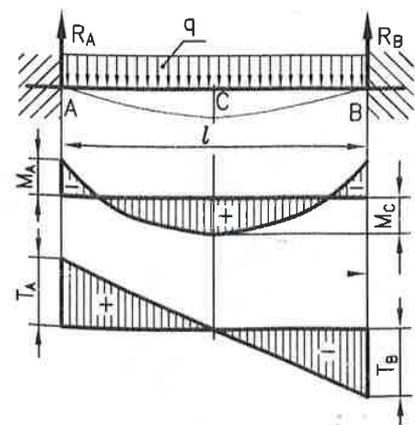


**Tabella H.1** Travi variamente vincolate e sottoposte ai tipi di carichi più comuni

Schema	Relazioni
<p>- Trave appoggiata agli estremi con carico concentrato</p> 	$R_A = \frac{b}{l} \cdot F; \quad R_B = \frac{a}{l} \cdot F$ $T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$ $M_A = M_B = 0$ $M_{max} = R_A \cdot a = R_B \cdot b = \frac{a \cdot b}{l} \cdot F$ $f = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{E \cdot I \cdot l}$
<p>- Trave appoggiata agli estremi con carico uniformemente distribuito</p> 	$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$ $T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$ $M_A = M_B = 0$ $M_{max} = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$ $f = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$
<p>- Trave con un appoggio intermedio e con carico concentrato all'estremo del tratto a sbalzo</p> 	$R_A = \frac{b}{l} \cdot F; \quad R_B = \frac{l+a}{l} \cdot F$ $T_A = -\frac{b}{l} \cdot F; \quad T_B = F$ $M_A = 0$ $M_{max} = -F \cdot b$ $f = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{(l+b) \cdot b^2}{3}$

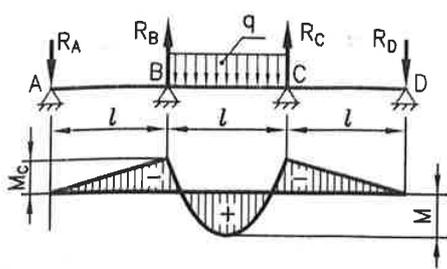
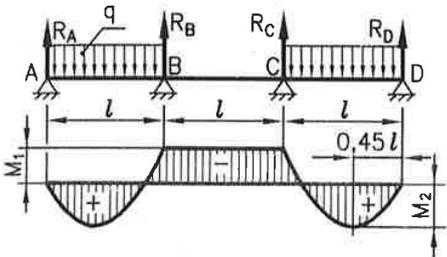
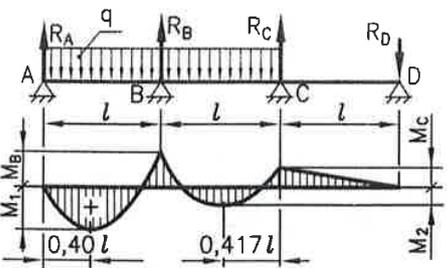
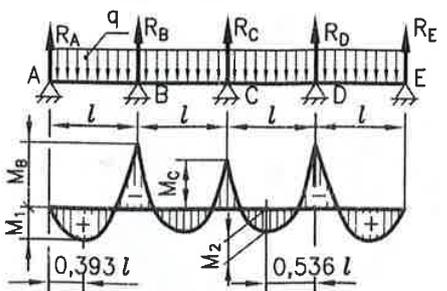
Continua

**Tabella H.1** Travi variamente vincolate e sottoposte ai tipi di carichi più comuni

Schema	Relazioni
<p>- Trave incastrata a un estremo, appoggiata all'altro e con carico uniformemente distribuito</p> 	$R_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l; \quad R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$ $T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$ $M_A = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$ $M_B = \frac{9}{158} \cdot q \cdot l^2$ $f = \frac{1}{185} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$
<p>- Trave incastrata a un estremo, con un appoggio intermedio e con carico uniformemente distribuito</p> 	$R_A = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \left( 3 - \frac{3l}{2a} - \frac{a}{4l} \right)$ $R_B = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \left( \frac{3l}{2a} + \frac{a}{4l} - 1 \right)$ $T_A = R_A; \quad T_B =  R_B $ $M_A = q \cdot l \cdot \frac{2b^2 - a^2}{8l}$ $M_B = -\frac{q \cdot b^2}{2}$ $M_A = M_{max} \quad \text{se } a > \sqrt{6} \cdot b$ $M_B = M_{max} \quad \text{se } a < \sqrt{6} \cdot b$
<p>- Trave incastrata ai due estremi e con carico uniformemente distribuito</p> 	$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$ $T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$ $M_A = M_B = -\frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$ $M_C = \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^2$ $f = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$

Continua

**Tabella H.1** Travi variamente vincolate e sottoposte ai tipi di carichi più comuni

Schema	Relazioni
<p>- Trave su quattro appoggi simmetrici e con carico uniformemente distribuito sulla campata centrale</p> 	$R_A = R_D = 0,005 \cdot q \cdot l$ $R_B = R_C = 0,550 \cdot q \cdot l$ $M = \frac{5}{67} \cdot q \cdot l^2$ $M_A = M_B = M_C = -\frac{1}{20} \cdot q \cdot l^2$
<p>- Trave su quattro appoggi simmetrici e con carico uniformemente distribuito sulle campate laterali</p> 	$R_A = R_D = 0,450 \cdot q \cdot l$ $R_B = R_C = 0,550 \cdot q \cdot l$ $M_1 = -\frac{1}{20} \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = \frac{10}{99} \cdot q \cdot l^2$
<p>- Trave su quattro appoggi simmetrici e con carico uniformemente distribuito sulle campate laterali</p> 	$R_A = 0,383 \cdot q \cdot l; R_B = 1,2 \cdot q \cdot l$ $R_C = 0,450 \cdot q \cdot l; R_D = 0,033 \cdot q \cdot l$ $M_1 = \frac{1}{12,7} \cdot q \cdot l^2; M_B = -\frac{1}{8,55} \cdot p \cdot l^2$ $M_C = -\frac{1}{30,3} \cdot q \cdot l^2; M_2 = \frac{1}{18,3} \cdot q \cdot l^2$
<p>- Trave su cinque appoggi simmetrici e con carico uniformemente distribuito</p> 	$R_A = 0,393 \cdot q \cdot l; R_B = 1,143 \cdot q \cdot l$ $R_C = 0,929 \cdot q \cdot l; R_D = 1,143 \cdot q \cdot l$ $R_E = 0,393 \cdot q \cdot l$ $M_1 = \frac{1}{13} \cdot q \cdot l^2; M_B = -\frac{1}{8,55} \cdot p \cdot l^2$ $M_C = -\frac{1}{14,1} \cdot q \cdot l^2; M_2 = \frac{1}{27,75} \cdot q \cdot l^2$

Continua