



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1600A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Aimar

MATERIA: Topografia. Prof. Manzino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



# TOPOGRAFIA

1 **Topografia**: è una scienza applicata finalizzata a DETERMINARE e RAPPRESENTARE la superficie terrestre e ciò che sta sopra (SUPERFICIE FISICA)

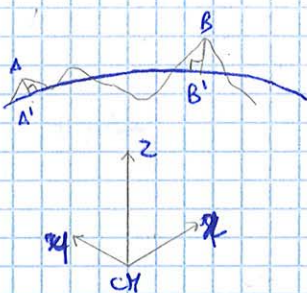
↓  
nasce dalla GEODESIA, scienza fatta a determinare la SUPERFICIE FISICA e MATEMATICA (la "Figura" della Terra) e il campo gravitazionale nel tempo

2 **SUPERFICIE FISICA** → separazione tra solidi e acqua con la **atmosfera** e rappresentazione (proiezione) su superficie convenzionale

**SUPERFICIE MATEMATICA** → dà una superficie equipotenziale gravitazionale (di il geoido)

↓  
questi due elementi sono connessi perché a rappresentare la fisica serve una superficie di riferimento e a la matematica serve avere la forma

## 3 Rappresentazione della Terra



Il problema della superficie matematica può risolversi con il METODO VARIAZIONALE

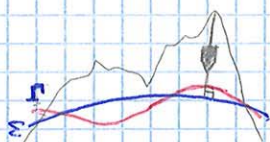
↓  
visto che la Terra non è regolare, si può approssimare la Terra con un solido comodo (es sfera) e i suoi punti vengono proiettati su di essa. Così a ogni punto si danno 3 coordinate

→ 2 coordinate sul solido

→ di stanza a punto-proiezione

Infatti la Terra ha un centro di massa e 3 assi di inerzia normali tra loro e su questo si può impostare un sistema cartesiano ma questo è scomodo perché non fornisce la posizione (se più a nord...) né quota. Per questo si usano le COORDINATE DI SUPERFICIE  $\varphi$  e  $\lambda$  + la quota rispetto alla superficie di riferimento, con cui ottenere informazioni utili

Il problema ora sta nell'individuare la superficie di riferimento fisicamente (senza metodi satellitari) perché in genere è una superficie fittizia e arbitraria (è una superficie IDEALE). Dunque serve sapere, analogamente, con che direzione proiettare i punti; in questo senso si può individuare fisicamente ed è la DIREZIONE DEL FILO A PIOMBO (direzione della forza)



Vantaggi → dà la direzione di proiezione

→ dà anche la distanza punto-proiezione. nel caso si scelga come riferimento la SUPERFICIE MEDIA DEL MARI IN QUIETE, e a essa si impara quota zero

↓  
a avere la quota si usa uno strumento con cui si misurano i tanti piccoli dislivelli in un percorso e sommandoli si ha la quota (distanza A-A')

+  
la superficie scelta è una SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE (di potenziale convenzionale)

+  
la direzione di proiezione (coincidente con quella del filo a piombo) è detta **Nadir** (l'opposto è lo zenit)

si proietta verso il nadir



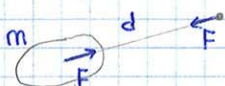
## Geodesia fisica

1 Si è visto che si cerca una superficie di riferimento e una direzione

a essa si dà la direzione del filo di piombo, sempre disponibile e misurabile con livellazioni (x la quota)

x capire il campo gravitazionale servirebbe la distribuzione della massa ma in realtà basta la FORZA

2 **Forza gravitazionale:** è dovuta all'attrazione gravitazionale ed è data da



$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

→ è detta "forza debole" (decade rapidamente con la distanza)

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ mkg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

COSTANTE GRAVITAZIONALE

Per un corpo non puntiforme (suddiviso in tante masse  $\Delta m_i$ ) e uno puntiforme di massa unitaria essa vale

$$F = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} G \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i}{d_i^2}$$

Ora si differenzia

$$dF = G \frac{dm}{d^2}$$

Si fissa dunque un sistema di riferimento CO con origine coincidente in un punto di questo e  $CM \equiv (a; b; c)$

$$dF = \frac{G dm}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = G \frac{\rho(x; y; z) dV}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$F = G \iiint_V \frac{\rho(x; y; z)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} dV$$

FORZA GRAVITAZIONALE  
(si è passato dalla somma all'integrale triplo)

In questa relazione però contiene cose non note  
 → densità (nota solo sulla superficie ma quella media è più alta)  
 → volume (ominio di integrazione)

Per questo non si si basa sulla forza ma sul POTENZIALE, dato da

$$dF = -\frac{\partial}{\partial x} dV = G \frac{dm}{d^2}$$

Integrando tale relazione si ha che

$$dV = G \frac{dm}{d}$$

→ espressione simile a quella della forza

$$V = G \iiint_V \frac{\rho(x; y; z)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} dV$$

POTENZIALE GRAVITAZIONALE



↳ **Geoide**: è una SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE a cui si dà una forza potenziale  $w_0$ , a cui

$$w_0 - G \iiint_V \frac{\rho}{d} dz - w^2 \frac{r^2}{2} = 0 \quad \text{Equazione integrale del geoide}$$

Questa è un'equazione scomoda x via della densità e superficie non note però si può osservare che nella pratica interessa sapere il potenziale nella SUPERFICIE ESTERNA ma il potenziale gravitazionale segue l'equazione

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Equazione di Laplace}$$

Questo è utile perché ~~essi~~ le equazioni differenziali possono essere risolte conoscendo le Funzioni di contorno, ~~cosa~~ misurabile direttamente con il potenziale o con i FUNZIONALI (derivate, integrali, etc. - non vere e proprie funzioni ma estensioni di tale concetto), di cui i tipici sono

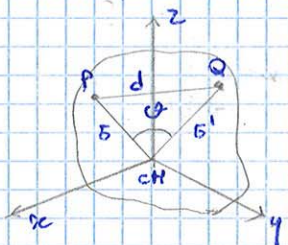
→ anomalie gravitazionali e FORZA DI GRAVITÀ (più diffuso), con la relazione

$$g = F + f = -\nabla W$$

- deviazioni verticali
- derivate gravitazionali (gradiometria)
- ondulazioni del geoide

↓  
in ogni caso la risoluzione diventa numerica attraverso i valori di contorno

### APPROSSIMAZIONE DEL GEOIDE



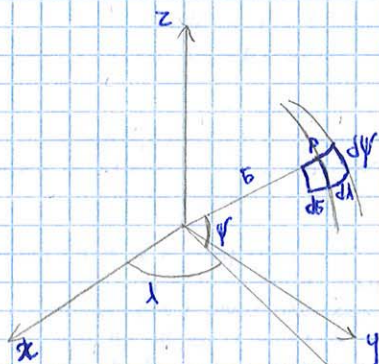
Dato la superficie terrestre  $z$ , si prende il centro di massa e 3 assi principali di inerzia, posti come  $x, y$  e  $z$ . Presso un punto  $P$  con massa unitaria e un punto  $Q$  con massa  $dm$ , dalla trigonometria si sa che

$$d^2 = b^2 + b'^2 - 2bb' \cos \alpha$$

Ora si fissa un altro sistema di coordinate di superficie, osservando che facendo passare un piano  $\pi$  contenente il punto  $P$  e l'asse  $z$ , si hanno

- $\lambda$  = LONGITUDINE, angolo tra il piano  $xz$  e  $\pi$
- $\psi$  = LATITUDINE GEOCENTRICA, angolo tra  $b$  e il piano  $xz$

Così il punto  $P$  può essere espresso secondo  $\psi, \lambda$  e  $b$ , dette coordinate geografiche geocentriche, legate a quelle cartesiane.



$$\begin{cases} x = b \cos \psi \cos \lambda \\ y = b \cos \psi \sin \lambda \\ z = b \sin \psi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si ricavano proiettando P sul} \\ \text{piano orizzontale} \end{array}$$

Ⓘ la massa  $dm$  può essere espressa in funzione di  $db, dl$  e  $d\psi$

Ⓙ dalla relazione della distanza si ha che



Proseguendo nei calcoli, si può scrivere il potenziale gravitazionale come

$$V = V' + T$$

$V'$  = POTENZIALE NORMALE

$$V' = \frac{GM}{b} + \dots + \frac{A_{20}R_{20}}{b^3} + \dots + \frac{A_{22}R_{22}}{b^3}$$

È lo sviluppo che si può calcolare facilmente e tramite misure geometriche e inoltre è la PARTE PREPONDERANTE nel potenziale gravitazionale

$T$  = POTENZIALE ANOMALO (è il resto)

Di conseguenza, il potenziale di gravità può essere espresso come

$$\begin{aligned} W &= V + v = \\ &= V + \frac{b^2 \omega^2 \cos^2 \psi}{2} = \\ &= V' + \frac{b^2 \omega^2 \cos^2 \psi}{2} + T = \\ &= U + T \end{aligned}$$

$$W = U + T$$

$$U = V' + \frac{b^2 \omega^2 \cos^2 \psi}{2}$$

Potenziale normale (parte nota data dal potenziale gravitazionale di ordine 2 e dal potenziale centrifugo)

$T$  = potenziale anomalo (parte non nota)

Questa espressione è comoda perché basta il potenziale normale  $\times$  avere la superficie che approssima la Terra: infatti è una buona approssimazione e così basta dire che

$$U = \text{cost}$$

si può proiettare rispetto a  $U$  perché la direzione del filo a piombo è la stessa che rispetto a  $W$

$$U = \text{cost}$$

L'equazione effettivamente corrisponde a quella di una superficie in forma parametrica con le normali prossime alla direzione del filo a piombo. Infatti si ha che

$$U = \frac{GM}{b} \left[ 1 + \frac{1}{2B^2M} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\sin^2 \psi) + \frac{3}{4B^2} \frac{B-A}{M} \cos^2 \psi \cos 2\lambda \right] + \frac{b^2 \omega^2 \cos^2 \psi}{2}$$

Si trovano la componente gravitazionale e centrifuga e inoltre i momenti principali rispetto agli assi sono fisicamente uguali, a cui una parte si annulla e si osserva così che scompare la parte dipendente da  $\lambda$ . Di conseguenza la superficie non dipende da  $\lambda$  ed è di ROTAZIONE

Ricordandosi inoltre che

$$\vec{F} = -\nabla V \quad \vec{g} = -\nabla W$$

In maniera analoga si può partire da  $U$  ottenendo un valore prossimo alla forza di gravità

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Gravità normale

Esso si può ricavare considerando che la parte dominante è rispetto a  $b$  e dunque può essere approssimata con questa derivata <sup>la direzione</sup> direzionale

$$U \approx \frac{GM}{b} \left[ 1 + \frac{1}{2B^2} \frac{C-A}{M} (1 - 3\sin^2 \psi) \right] + \frac{b^2 \omega^2 \cos^2 \psi}{2}$$



Analogamente si può vedere come varia la gravità normale intorno all'equatore

$$\left. \begin{aligned} \gamma_e &= \gamma(\psi=0^\circ) = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3k}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{GM} \right) \\ \gamma_p &= \gamma(\psi=90^\circ) = \frac{GM}{c^2} \left( 1 - \frac{3k}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\gamma_p}{\gamma_e} = \frac{a^2}{c^2} \left( 1 - \frac{3k}{c^2} \right) \left( 1 + \frac{3k}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{GM} \right)^{-1}$$

Si può così definire lo **schacciamento gravimetrico**,  $\alpha$  cui vale

$$\beta = \frac{\gamma_p}{\gamma_e} - 1 = -\frac{3k}{2a^2} + \frac{2\omega^2 a^3}{GM} \quad \rightarrow \text{simile allo schiacciamento geometrico}$$

Si osserva che vale

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} \quad \text{poiché } \gamma_e \sim \frac{GM}{a^2} \text{ (x Newton)}$$

6 Ora si cerca di capire la forma della Terra a LIVELLO GEOMETRICO e non di potenziale, imponendo  $U = \text{cost}$  e in particolare

$$U = U_0 \quad U_0 = U(\psi=0^\circ) \rightarrow \text{all'Equatore}$$

$$U = \frac{GM}{b} \left[ 1 + \frac{k}{2b^2} (1 - 3\sin^2\psi) + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right] = \frac{GM}{a} \left[ 1 + \frac{k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right] = U_0$$

Se prima si è valutato il rapporto  $c/a$ , adesso si studia il generico rapporto  $b/a$

$$\frac{b}{a} = \left[ 1 + \frac{k}{2b^2} (1 - 3\sin^2\psi) + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right]^{-1} \left[ 1 + \frac{k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right]$$

Si può sviluppare il denominatore

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= a \left[ 1 + \frac{k}{2b^2} (1 - 3\sin^2\psi) + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right]^{-1} \left[ 1 - \frac{k}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right] = \\ &= a \left[ 1 - \left( \frac{3k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right) \sin^2\psi \right] = \\ &= a [1 - \alpha \sin^2\psi] \end{aligned}$$

$$b = a(1 - \alpha \sin^2\psi)$$

**Equazione dello sferoide**  
(superficie di rotazione coincidente con la SUPERFICIE DI RIFERIMENTO)

↓  
così con il metodo variazionale si cerca una superficie di riferimento che coincida con una superficie equipotenziale ma questa è di difficile calcolo perché richiede la densità. Allora si sfrutta la proprietà di armonicità del potenziale gravitazionale (quello centrifugo è noto) e si sono adottate coordinate geografiche geocentriche, ottenendo una risoluzione non chiusa ma in doppio sviluppo (detta SERIE ARMONICA) che presenta alcune costanti dipendenti dalla densità. Risolvendo gli integrali e queste costanti, arrestandosi all'ordine 1, si osserva che sono richiesti valori noti, a cui possiamo arrestare lo sviluppo introducendo un potenziale anomalo (calcolato dai geodeti) e un potenziale normale (noto). Imponendo che il potenziale normale sia costante, si ottiene una buona approssimazione perché le normali coincidono ma dal punto di vista altimetrico esse non sono simili. Si può dire in questo senso che dal punto di vista planimetrico il problema è risolto, mentre dal punto di vista altimetrico esso si risolve considerando le differenze

È analogamente possibile ricavare la gravità normale

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2\psi)$$

VARIAZIONE DELLA GRAVITÀ NORMALE



Si come è più comoda l'ellissoide e la differenza angolare massima è piccola, essa sarà la SUPERFICIE DI RIFERIMENTO PLANOMETRICA

x l'altezza si usa il geoide ma non è un problema fisico perché si usa la distanza è nota tramite operazioni di livellazione



COORDINATE SUPERFICIALI → coordinate superficiali rispetto all'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE (LATITUDINE E LONGITUDINE)



III. COORDINATA → non la distanza dall'ellissoide (anche perché non si sa dove stia fisicamente) ma la QUOTA, ossia si riferisce non al campo normale ma a quello reale di gravità

### Geodesia ellissoidica

Si è visto che l'ellissoide è la superficie di riferimento planimetrica e dunque su questo si fonda la GEODESIA ELLISSOIDICA

2 **Ellissoide**: si è visto che nel potenziale vale

$$W = U + T$$

U = potenziale normale

T = potenziale anomalo calcolabile con vari funzionali del potenziale

Stabilendo  $U = U_0$ , si possono individuare 4 parametri che definiscono il sistema di riferimento (sferoide)

$$GM \quad \frac{C-A}{M} \quad \omega \quad U = U_0 \text{ (da stabilire)}$$

Essendo arbitrario  $U_0$ , si impone in modo che la MEDIA DEL POTENZIALE ANOMALO SIA NULLA

$$M_5(T) = 0$$

~  $M(x)$  = media di  $x$  (operatore lineare, a cui è possibile applicare la proprietà di linearità)

Si pone che

$$M_5(W) = M_5(U) + M_5(T) = W_0 \quad \rightarrow \text{linearità dell'operatore}$$

Benché x ipotesi  $M_5(T) = 0$  (è stato scelto  $W_0$  tale che  $M_5(T) = 0$ )

$$W_0 = M_5(U) = U_0$$

$$W_0 = U_0$$

~ si sceglie un potenziale normale che è media del potenziale di gravità (potenziale reale) su tutta la superficie terrestre

Fatta questa imposizione, sono noti questi 4 parametri e dunque sono note le dimensioni della superficie terrestre

forma

↓  
imponendo  $U_0 = \text{cost}$  si definisce lo sferoide e  $W_0 = \text{cost}$  si definisce il geoide, visto che  $U_0$  è scelto in modo che  $U_0 = W_0$  dunque lo sferoide è una superficie che inoltre sia un po' sopra e un po' sotto al geoide

↓  
la media del geoide è lo sferoide (quindi si è anche determinato geometricamente che lo sferoide è similitudine ellissoide rispetto al geoide)



## SISTEMI DI COORDINATE

1. Si sono già viste le coordinate cartesiane che però sono scomode in x la superficie (sono utili le coordinate di superficie)

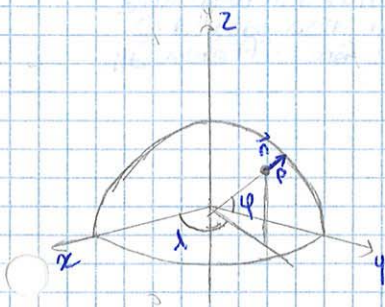
si sono viste le COORDINATE GEOGRAFICHE GEOCENTRICHE (o polari) dove  $r$  = distanza punto-geocentro (origine),  $\varphi$  = latitudine geocentrica e  $\lambda$  = longitudine

2. Coordinate geografiche: si fondano su

→ latitudine  $\varphi$

→ longitudine  $\lambda$

→ altezza ellissoidica  $h$

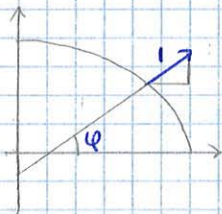


Considerando una sezione dell'ellissoide e fissato un sistema di riferimento  $CO$ , si considera su un punto  $P$  dell'ellissoide la normale  $\vec{n}$  (che con buona approssimazione corrisponde alla direzione dello zenit - non è detto che tale normale vada a finire in  $O$ )

facendo passare un fascio di piani  $xz$ , questi tagliano l'ellissoide in curve dette MERIDIANI e analogamente con piani paralleli al piano  $xy$  si hanno curve dette PARALLELI.

LATITUDINE = angolo  $\varphi$  che la normale forma con il piano equatoriale o un piano parallelo qualunque

LONGITUDINE = angolo diedro tra il meridiano convenzionale di riferimento (MERIDIANO DI GREENWICH) e il piano meridiano  $xP$



Per ipotesi il vettore  $\vec{n}$  è unitario: se fosse proiettato sul piano  $xy$  si otterrebbe che la sua proiezione vale  $\cos \varphi$  e a questo punto  $Q$  si proietta sull'asse  $x$  e  $y$  ottenendo  $\cos \varphi \cos \lambda$  e  $\cos \varphi \sin \lambda$ .  
Proiettando  $\vec{n}$  sull'asse  $z$  si ha  $\sin \varphi$ , a cui le componenti di  $\vec{n}$  sono

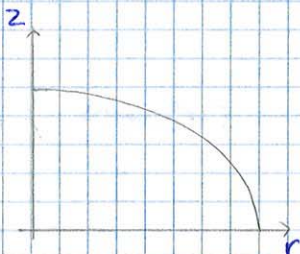
$$\vec{n} = (\cos \varphi \cos \lambda; \cos \varphi \sin \lambda; \sin \varphi)$$

osservate

Ora si introduce la III coordinata, cioè l'ALTEZZA ELLISSOIDICA, che è la distanza tra il punto  $P$  (proiezione di  $Q$ ) e il punto  $Q$

### 3. RELAZIONE COORDINATE CARTESIANE - COORDINATE GEOGRAFICHE.

#### I. Passaggio coordinate geografiche - coordinate cartesiane



Questa operazione è necessaria perché tramite misure satellitare spesso si trovano valori in coordinate cartesiane geocentriche perché essi ruotano intorno al centro di massa ma questo è scomodo perché non si sa dove collocare un punto (se è più a Nord, etc...)

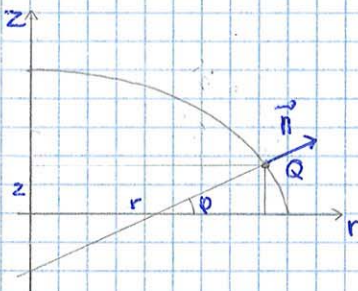
Poiché l'ellissoide è di rotazione, le sue proprietà sono comprensibile tramite una sezione meridiana qualunque, cioè l'ELIPSE, di equazione parametrica

$$\begin{cases} r = a \cos \beta \\ z = c \sin \beta \end{cases} \rightarrow r \text{ perché si considera il piano } xy$$



$$\begin{cases} r = R_N \cos \varphi \\ z = R_N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases}$$

OSSERVAZIONE



Si è ricavato che x un punto Q

$$z = R_N(1 - e^2) \sin \varphi \quad r = R_N \cos \varphi$$

Si osserva che il valore r ricavato è il RAGGIO DEL PARALLELO. Inoltre si potrebbe calcolare quanto vale la distanza tra Q e il punto d'intersezione con la stessa l'asse z

$$ip = \frac{r}{\cos \varphi} = R_N$$

Così  $R_N$  corrisponde non serve solo a semplificare l'espressione ma ha anche un significato geometrico (è l'ipotenusa di quel triangolo) ed è detta **gran normale**.

Di conseguenza l'ellissoide assume equazione

$$\begin{cases} x = R_N \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R_N \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R_N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \lambda \\ y = r \sin \lambda \end{cases}$$

passaggio coordinate geografiche - cartesiane

Questa espressione non è del tutto corretta perché non tiene conto della III coordinata  $h$ . Quest'ultima è parallela al vettore  $\vec{n}'$ , di espressione

$$\vec{n}' = (\cos \varphi \cos \lambda; \cos \varphi \sin \lambda; \sin \varphi)$$

Per Dunque si esegue un prodotto scalare tra  $h$  e  $\vec{n}'$ , moltiplicando di fatto  $h$  x le componenti di  $\vec{n}'$  e poi si somma

$$\begin{cases} x = (R_N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y = (R_N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R_N(1 - e^2) \sin \varphi + h \sin \varphi \end{cases}$$

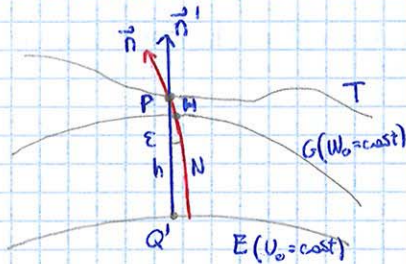
$$\begin{cases} x = (R_N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y = (R_N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R_N(1 - e^2) \sin \varphi + h \sin \varphi \end{cases}$$

Trasformazione  $(\varphi; \lambda; h) \mapsto (x; y; z)$

Dalla



## h Coordinate astronomiche



Or si vuole capire la distanza tra geoid e ellissoide (sua approssimazione) perché interessa capire le proprietà di entrambe le superfici

in un punto P, di direzione normale  $\vec{n}'$  all'ellissoide che us su Q' e di direzione zenitale  $\vec{n}$  (misurata con teodolite), si sa che

$$\vec{n} \approx \vec{n}'$$

Lo scarto angolare  $\epsilon$  è detto **deviazione della verticale**. Inoltre si osserva che la direzione del filo a piombo, cioè la direzione zenitale non è una retta ma una curva che termina sul geoid

A questo punto si indica con H la **quota ortometrica** (Distanza Punto-GEODE) e con h l'altitudine ellissoidica (distanza punto-ellissoide).

La distanza tra i due punti di proiezione è detta **undulazione del geoid** N (la distanza si lega allo scostamento) e si lega al campo anomalo tramite la **relazione di Bruns**

$$N \approx \frac{T}{\gamma}$$

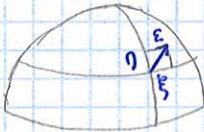
Visto che l'angolo  $\epsilon$  è piccolo, inoltre si può dire che

$$h = H + N$$

H → misura satellitare (da GPS)

N → dallo studio del campo anomalo (da geodeti)

il geoid ricorda la forma della Terra perché  
 → dove il geoid supera l'ellissoide ci sono le terre emerse  
 → dove il geoid sta sotto l'ellissoide ci sono le fosse  
 (questo si dice che il geoid è la forma)



$\xi, \eta$  = deviazioni della verticale (sue componenti della deviazione  $\epsilon$ )

Inoltre l'angolo  $\epsilon$  può anche essere visto e indicato come differenza tra i vettori e tale vettore è TANGENTE ALLA SUPERFICIE perché i due vettori sono praticamente normali, a cui si può individuare una componente rispetto alla latitudine  $\eta$  e rispetto alla longitudine  $\xi$  (anomalia)

Visto che  $\vec{n}'$  vettore materializzabile tramite un teodolite, è disposto lungo la direzione dello zenit, esso può essere espresso tramite valori di coordinate simili come

$$\vec{n}' = (\cos\phi \cos\lambda; \cos\phi \sin\lambda; \sin\phi)$$

Sono l'equivalente di ciò che genera  $\vec{n}'$ ; però diretto in maniera opposta al vettore di gravità ed, essendo un vettore, è dato da

$$\vec{n} = -\frac{\vec{g}}{g} = \frac{1}{|\vec{g}|} \nabla W$$

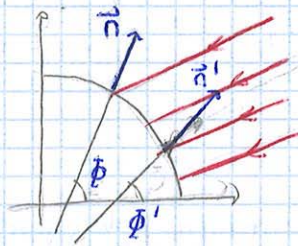
II. espressione di  $\vec{n}$

$$-\left(\frac{g_x}{g}; \frac{g_y}{g}; \frac{g_z}{g}\right)$$

Si nota così che

$$\sin\phi = -\frac{g_z}{g}$$

$$\tan\lambda = \frac{g_y}{g_x}$$



anche questo in genere è fatto rispetto alle stelle perché non è facile collimare il Sole e non è una sorgente puntiforme. Collimando le stelle, si può sapere al massimo del loro culmine (la direzione del Sole e casi del Nord locale (non valgono a tutti i punti della superficie terrestre) e la longitudine con misure di tempo. Stessa cosa x la latitudine perché si vede il culmine della stella con un certo zenit (es 60° o 60°), dipendente dalla latitudine del posto, con l'ipotesi di raggi paralleli

ossia  $\phi$  e  $\lambda$  si possono determinare perché basta la direzione della gravità tramite teodolite ( $g \parallel \vec{n}$ ) o universali geodetici, simili in struttura ai teodoliti, che determinano latitudine e longitudine rispetto all'asse con cui sono stati resi verticali, cioè  $\phi$  e  $\lambda$ .

oppure si determinano via osservazioni astronomiche perché il Sole giunge al culmine al mezzogiorno solare locale e con le EFFEMERIDI del Sole, cioè dove dovrebbe essere al suo culmine a una data longitudine, è possibile risalire con misure di tempo alla longitudine (es a Torino culmina alle 12:20 invece che alle 12, questi 20' diventano longitudine nota la velocità di rotazione della Terra - cioè è fatto anche rispetto a Greenwich)



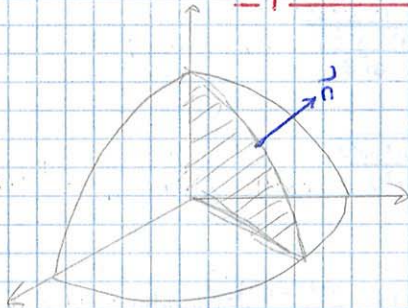
Queste coordinate sono comode perché  
 → asse  $y$  orientato verso il Nord locale  
 → asse  $x$  tangente al parallelo

visto che tale sistema è valido x un intorno di 10 km circa,  
 può essere usato x determinare la posizione

Se si volesse tornare alle coordinate geocentriche, si sfrutta la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} + R^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

### Operazioni sull'ellissoide



Si sono viste le coordinate cartesiane e geografiche che hanno permesso di definire paralleli e meridiani. Ora, dati due punti  $P$  e  $Q$  giacenti sull'ellissoide (x semplicità perché x gli spostamenti è più comodo). Da qui si può definire l'azimut. Considerando un fascio di piani aventi x passanti x il punto e aventi come costata la normale (Piani Normali), questo fascio taglia l'ellissoide in una curva detta **sezione normale**.

Così → il PARALLELO non è una sezione normale (eccetto l'Equatore)  
 → il MERIDIANO è una sezione normale (di azimut  $\varphi$ ) passante x l'asse  $z$

A questo punto si definisce **azimut** l'angolo diedro tra la sezione MERIDIANA e una sezione NORMALE qualunque.

tra le sezioni normali c'è quella con azimut  $\varphi$  (sezione meridianale) e quella con azimut  $90$  (non il parallelo, che è inclinato di  $\varphi$  rispetto alla normale, ma una sezione normale tangente a esso) è obliquo

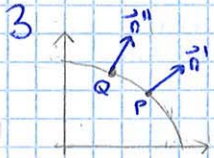
**Raggi di curvatura**: x definire un percorso dai punti  $P$  a  $Q$  si devono  
 → AZIMUT (x indicare la DIREZIONE, perché con esso si ricava una volta nota la direzione del Nord)  
 → LUNGHEZZA DEL PERCORSO:  
 essa dipende dalle proprietà della curva, cioè dalle proprietà della sezione normale. Per calcolarla occorre avere il RAGGIO DI CURVATURA (infatti la curva è piana, visto che è intersezione tra superficie-ellissoide-e piano) e moltiplicarlo x l'angolo al centro.

il raggio varia in funzione dell'azimut e si sa che l'ellissoide terrestre ha un semiasse equatoriale  $a$  e un semiasse polare  $c$  (è come una sfera schiacciata), x cui il raggio minimo è quello del meridianale e quello massimo è quello normale al piano meridianale

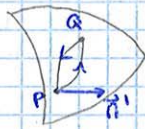
#### PROPRIETÀ DELLE SEZIONI NORMALI E DEI RAGGI DI CURVATURA

- esistono INFINITE SEZIONI NORMALI, x cui esistono anche infiniti raggi di curvatura
- poiché l'ellissoide è una superficie di rotazione, tutte le tangenti alla curva in  $P$ , ossia i RAGGI DI CURVATURA, sono DIRETTE SECONDO LA NORMALE
- la sezione dove il raggio di curvatura è minimo o massimo si dice **sezione principale**. Data la forma terrestre, una di questi è il meridianale (minimo) e l'altra è la sezione normale perpendicolare a esso
- i RAGGI DI CURVATURA VARIANO con CONTINUITÀ da un valore minimo  $\rho$  a un valore massimo  $R_N$  rispetto all'azimut



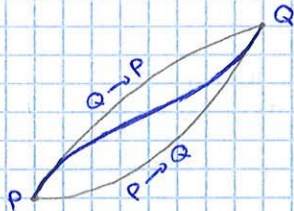


Si è detto che si vuole fare uno spostamento da P a Q e il modo più semplice a farlo è muoversi mantenendo un certo azimut, ossia muoversi lungo una sezione normale. In questo caso, però, a muoversi da Q a P si può usare la stessa sezione normale di prima?



Se da P a Q si usa una sezione normale avente x costante  $\vec{n}'$ , questa non contiene  $\vec{n}''$  perché  $\vec{n}'' \neq \vec{n}'$ . Di conseguenza se da P a Q ci si muove con azimut costante, anche da Q a P ci si muove con azimut costante ma con valore diverso (stesso valore solo quando P e Q giacciono su un meridiano)

Dunque questo non è un modo univoco a andare da un punto all'altro (oltre 1000 km si sente la differenza), e questo si comincia a cercare un modo più conveniente.



questo è associato alla distanza minima, associata alla **geodetica** = curva sulla superficie ma non giacente su un piano perché all'inizio e alla fine coincide con le sezioni normali ma nel restante si discosta

essa è UNICA e sotto i 1000 km conviene studiare ~~ancora~~ ancora le sezioni normali

### DEFINIZIONI DI GEODETICA

(I) LINEA con MINIMA LUNGHEZZA tra tutte quelle giacenti sulla superficie e che collegano i punti P e Q

(II) LINEA che ha come NORMALE A SE STESSA COINCIDENTE con LA NORMALE  $\vec{n}'$  ALL' ELLISSOIDE

da qui si ricava l'equazione differenziale della geodetica uguagliando i coseni direttori di  $\vec{n}'$  con i coseni direttori della normale alla geodetica, visto che i due vettori coincidono



Così l'espressione della geodetica può risciversi come, sostituendo, come

$$X \frac{d^2 Y}{ds^2} - Y \frac{d^2 X}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left( X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds} \right) = 0$$

Dal punto di vista dell'integrale, si può dire che

$$X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds} = 0$$

Mancano solo più le derivate rispetto a  $s$  ma si è visto che

$$X = r \cos \lambda = r(\varphi) \cos \lambda$$

$$Y = r \sin \lambda = r(\varphi) \sin \lambda$$

→  $r = r(\varphi)$  perché è il raggio del parallelo che dipende dalla latitudine

In particolare ( $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ )

$$X = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{w}$$

$$Y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{w}$$

Visto che  $r$  e  $\lambda$  dipendono da  $s$ , si può ora ricorrere alla derivazione composta

$$\frac{dX}{ds} = -r \sin \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds} = -Y \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds}$$

$$\frac{dY}{ds} = r \cos \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds} = X \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds}$$

Ora si sostituisce

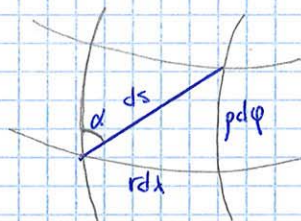
$$X^2 \frac{d\lambda}{ds} + X \sin \lambda \frac{dr}{ds} + Y^2 \frac{d\lambda}{ds} + Y \cos \lambda \frac{dr}{ds} = \cos^2 \lambda$$

$$\frac{d\lambda}{ds} (X^2 + Y^2) + \frac{dr}{ds} (X \sin \lambda - Y \cos \lambda) =$$

$$\frac{d\lambda}{ds} r^2 + \frac{dr}{ds} (r \cos \lambda \sin \lambda - r \cos \lambda \sin \lambda) =$$

$$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = \cos^2 \lambda$$

L'equazione differenziale è molto più semplificata



A questo punto considerando due meridiani e due paralleli molto vicini, si sa che il meridiano ha raggio  $p$ , a cui con un angolo  $d\alpha$  si ottiene un archetto  $p d\alpha$ . Il parallelo ha raggio  $r$ , a cui spostandosi di  $d\lambda$ , si ha un archetto  $r d\lambda$ .

Visto che meridiani e paralleli sono normali tra di loro, essi formano un triangolo rettangolo con ipotenusa pari alla lunghezza della curva  $ds$ .

Da qui allora si ha che

$$r d\lambda = ds \sin \alpha$$

Dunque sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = r \cdot \frac{r d\lambda}{ds} = r \sin \alpha = \cos^2 \lambda$$



## Geodesia operativa

1 Ora si sa come muoversi tra due punti con la geodetica che è arcuata con Clairaut ma x la forma corretta occorre riferirsi alle equazioni differenziali non risolvendole con gli sviluppi

↓  
 il problema non è teorico perché si hanno gli sviluppi ma è pratico perché gli strumenti hanno una certa precisione e sotto cui non scendiamo. Questi discorsi operativi sono associati a dei postulati

(I) le misure reali mostrano un'INCOGRUENZA tra la TEORIA fondata sull'ellissoide e la REALTÀ eseguita sul geode (eccetto GPS)

(II) le lunghezze d'arco su sezioni normali e gli angoli tra sezioni normali non coincidono con quelle fatte rispetto alla geodetica ma fino a qualche limite

2 Inti cando con  $A_2$  l'angolo che la sezione normale forma passante x A e B con costata in A, si definisce  $S'$  la distanza (lunghezza) su una sezione normale  $A_2 =$  azimut della sezione normale

↓  
 si valuta quanto è la differenza tra  $S'$  e  $S$  ma in realtà non si deve cercare tanto la differenza ma piuttosto la differenza rispetto a  $S'$ . Ragionando operativamente, infatti, non serve la sensibilità ma la PRECISIONE, un numero puro dato dal rapporto tra errore e fondo scala di errore

Es per il distanziometro, l'errore è di 1mm su di 1 km, x cui la precisione è  $10^{-6}$

↓  
 la differenza  $S' - S$  (molto piccola, x cui ci si può fermare ai primi termini) vale

$$\frac{S' - S}{S'} \approx \frac{1}{360} \frac{S^4}{R_N^2 R_G^2} \left( \frac{e^2}{1 - e^2} \right) \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi$$

Così x  $S = 1000$  km lo scarto vale  $10^{-8}$  km = 1 cm → x la lunghezza si può "procedere" fino a 1000 km

dal punto di vista angolare, si sa che l'azimut sulla geodetica varia mentre sulla sezione normale no, x cui lo scarto vale

$$\Delta\alpha = A_2 - \alpha = \frac{S^2}{12 R_N R_G} \frac{e^2}{1 - e^2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$$

La differenza dipende dalla lunghezza della geodetica e dall'azimut della geodetica (funzione della latitudine  $\varphi$ ) e si ha massima errore x

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow \Delta\alpha = 0,01'' \div 0,13''$$

↓  
 lo scarto è di 0,1 secondi sessagesimali; simile al secondo centesimale, valore massimo a cui arriva lo strumento più preciso. Così a 2-300 km non ci si accorge che l'azimut varia e si può seguire la direzione della sezione normale

Però questa cosa a livello pratico non è fattibile, in quanto non si può vedere un punto posto a 300 km x questioni di visibilità e curvatura terrestre

↓  
 da qui si può dire che OGNI MISURA di azimut, angolo o distanza ESEGUITA CON STRUMENTI TOPOGRAFICI, cioè su SEZIONI NORMALI, può RITENERSI ESEGUITA CON RIFERIMENTO AD ARCHI DI GEODETICA sulla superficie di riferimento

### Misura su sezione normale vs Misura su geodetica

Non è il contrario ("riferimento a sezioni normali") perché quando si usa il teodolite si fanno solo misure su sezioni normali, perché l'asse primario e dove punta il cannocchiale formano la sezione normale (con azimut costante)



Dal punto di vista altimetrico, in teoria si potrebbe ignorare l'ellissoide per-  
ché fornisce un riferimento planimetrico ma esistono casi in cui è utile

$$\Delta z = \frac{s^2}{2} \left( \frac{1}{R_e} - \frac{1}{\sqrt{R_e^2 + s^2}} \right)$$

↳ la differenza va con il quadrato della distanza ed è più alta

l'ambiente di validità è di 20 km ( $\Delta z = 5,4$  cm)       $\approx 100$  km,  
 $\Delta z = 1,3$  m

### CAMPO TOPOGRAFICO

Se si ~~sostit~~ facesse tendere  $R$  a  $\infty$ , ossia tendere la sfera a un piano cioè il piano euleriano  $xy$ , si direbbe che

$$x_s = s \sin \alpha$$

$$y_s = s \cos \alpha$$

$$z_s = 0$$

A questo punto si fa la differenza rispetto alla sfera (è inutile farla rispetto all'ellissoide) e l'errore vale

- x 10 km è  $4 \cdot 10^{-7}$
  - x 20 km è  $1 \cdot 10^{-6}$
  - x 50 km è  $1 \cdot 10^{-5}$
- ↳ anche qui l'errore va come il quadrato

↓  
fino a 10 km (se si usa una misura distanziometrica con precisione  $10^{-7}$ ) o 15-20 km (se con precisione  $10^{-6}$ ), è possibile planimetricamente sostituire la sfera con un piano euleriano

↓  
da qui si definisce **campo topografico** l'INTERNO di 10-20 km (dipende dalla precisione) in cui è POSSIBILE SOSTITUIRE ALL'ELLISSOIDE E ALLA SFERA LOCALE, a SCOPI PLANIMETRICI, IL PIANO EULERIANO (il piano tangente in P)

↳  
l'altezza no perchè va con il quadrato della distanza  $s$  (a 1 km si ha già  $\Delta = 8$  cm; a 10 km si ha  $\Delta = 7,8$  mm), e cui usando livelli di alta precisione a 60 m ci si discorge che la Terra non è piatta

Questi teoremi sono operativi, e cui non sono validi in assoluto

↳ questi permettono di considerare le misure fatte dal teodolite come fatte sulla geodetica (entro i 1000 km)

+  
si può considerare in un ambito planimetrico ristretto una sfera osculatrice o il piano locale



Si osserva inoltre che con questo sistema si sono costruite delle COORDINATE POLARI detti **geodetiche polari**

→ AZIMUT  $\alpha$

→ LUNGHEZZA  $s$  **no "geodetiche"** perché  $s$  si confonde con la geodetica

D'altra parte le coordinate  $X$  e  $Y$  costituiscono le **geodetiche rettangolari** ("geodetiche" perché  $X$  si confonde con la geodetica)



Per individuare il legame, si sfrutta il teorema di Legendre e applicare la trigonometria piana (teorema dei seni)

$$\frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{s}{\cos \epsilon}$$

Poiché  $\epsilon \rightarrow 0$ , si può sviluppare il coseno

$$\cos \epsilon \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \approx 1 \quad (\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon^2 \rightarrow 0)$$

Dunque si ottiene con le due uguaglianze

$$\begin{cases} X = s \sin(\alpha - \epsilon) \\ Y = s \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases}$$

Per valutare il valore  $\epsilon$ , si può sfruttare il corollario del teorema di Legendre applicando la formula trigonometrica

$$3\epsilon = \frac{S}{R^2} = \frac{S^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2R^2}$$

PASSAGGIO  
POLARI -  
RETTANGOLARI

$$\begin{cases} X = s \sin(\alpha - \epsilon) \\ Y = s \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases}$$

$$3\epsilon = \frac{S^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2R^2}$$

una volta note le coordinate polari  $s$  e  $\alpha$ , si possono ricavare le coordinate rettangolari  $X$  e  $Y$ . Queste



queste possono essere ricavate a un intorno di 100 km, e tutti i punti di  $s$  e  $\alpha$  noti è possibile diagrammarli, ossia passare dalla sfera (ellissoide) a una rappresentazione piana di questi punti



questo piano non è quello topografico ma vale il campo geodetico (si rappresenta su un piano ciò che c'è in un raggio di 100 km) ⇒ si ha una RAPPRESENTAZIONE CARTOGRAFICA

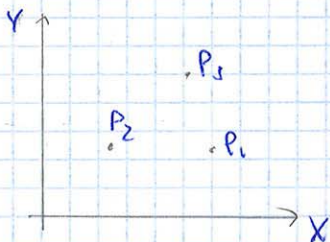
In realtà però di ogni punto non si hanno  $\alpha$  e  $s$  ma i valori  $\varphi$  e  $\lambda$  (anche perché non si possono valutare azimuth e distanze a 100 km), però questi si possono ricavare da una volta noti  $\varphi_0$  e  $\lambda_0$

il ricavo costituisce il **PROBLEMA GEODETICO DIRETTO**

Alla fine note  $\varphi$  e  $\lambda$ , si ricavano delle coordinate piane ossia una RAPPRESENTAZIONE DELL'ELLISSOIDE



questo sistema (detto sistema Cassini) è usato nel catasto





## TRATTAMENTO DELLE MISURE

### Misura di una grandezza

Esistono diversi tipi di misure da trattare.

→ **misura diretta**: è il caso più semplice e consiste in un conteggio del numero di unità contenute in una data quantità

Es Lunghezza: in questa grandezza la quantità elementare è un millimetro (si conta il numero di millimetri)

→ **misura indiretta**

Es Angolo: è letto dalla differenza di due direzioni

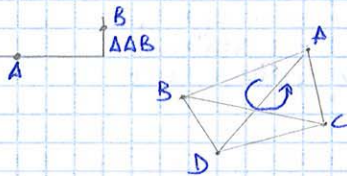
Superficie: è data dal prodotto delle lunghezze e dell'angolo

Super

→ **misure dirette condizionate**: sono misure legate da una condizione (la più semplice è di tipo poligonale)

→ **misure indirette e condizionate**: un esempio è dato dai dislivelli dove, dati due punti A e B, è dato da

$$\Delta AB = Q_B - Q_A$$



Se ora si costruisce una rete aggiungendo i punti P e C, si osserva che nei dislivelli sono misure indirette (date da differenza di quota) ma anche condizionate (la circuitazione dev'essere nulla)

2. Si osserva che

- misurando un corpo rigido di lunghezza  $\rho > 3$  m con un metro campione (diviso in mm) tramite il metodo delle alzate, a cui si misurano le porzioni più la parte frazionaria
- punto di caduta di un elettrone in moto con velocità  $v$

In entrambi i casi è IMPOSSIBILE PREDIRE A PRIORI CON ESATTEZZA IL RISULTATO perché portando lo strumento alla sua sensibilità più piccola, si possono avere valori diversi che a grossa scala stanno in una certa zona mentre non si può dire il valore preciso



↓  
ciò si ha solo portando la misura al LIMITE DELLA SENSIBILITÀ ma questo è richiesto perché si vuole precisione

Tutto ciò avviene perché questi risultati possono essere predetti con una certa probabilità e ciò avviene se

- lo STRUMENTO è RETIFICATO (II)
- l'OSSERVATORE NON FA ERRORI GROSSOLANI (I)

(I) **Errori grossolani**: sono quelli più banali, come errori nel conteggio delle alzate o, nel caso delle reti, si attribuisce un valore alla quantità errata

(II) **Errori sistematici**: sono errori che conservano valore e segno nelle varie misure.

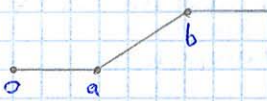
Es Il metro è lungo 5 mm in più, a cui in ogni alzata si aggiunge un valore

Questi errori si possono trovare ed eliminare con sistemi di misura che fanno cambiare il segno (es regola di Bessel) o ancora con taratura

Il vero motivo per cui le misure non possono essere predette con precisione (ma con probabilità) è che esse sono **fluttuazioni accidentali**, un fenomeno probabilistico che si manifesta solo con misure precise



Una variabile casuale si dice **variabile casuale discreta** se la **PROBABILITÀ** è **CONCENTRATA** SU UN NUMERO DISCRETO DI PUNTI

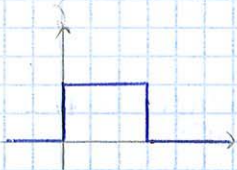


se in un esperimento di misura i valori si distribuiscono in un intervallo, a cui assume in essa un valore identico, si può dire che la probabilità cresce in maniera costante e uniforme

in questo caso non c'è nessun motivo x cui la misura cada in un punto preciso, x cui la probabilità dipende dalla lunghezza dell'intervallo

In questo caso

$$F(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Se ora si valutasse la derivata, si osserva che questa rappresenta quanto la probabilità è concentrata e la funzione a essa associata si dice **densità di probabilità**  $f$  ( $F$  invece indica la probabilità)

$$f(x) = F'(x)$$

Inoltre visto che la derivata è associata a un limite dove interviene  $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)$ , ossia allora la densità indica la probabilità che un valore cada tra  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$

PROPRIETÀ  $\rightarrow F(x_0) \geq 0$  (x le proprietà di  $F$ )

$\rightarrow$  dalla definizione, si può interpretare  $F$  come

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

e visto che  $F(x)$  ha limite 1, allora deve valere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Si è detto che la variabile casuale è un **eventoprionistico** (si aspetta che assuma certi valori) ma non è detto che nella realtà i valori assumano quelli previsti

es. con una moneta si ha  $n_1$  testa e  $n_2$  croce

Se si volesse rappresentare il risultato in una tabella (ponendo sull'asse dei reali), in tal caso la variabile non è più casuale (non è **eventoprionistica**) ma si parla di **variabile statistica** costituita da due sequenze di numeri e specifica come un dato si distribuisce fra la popolazione  $N$

i valori  $F_i$  stabiliti sono interpretati come frequenze, la cui somma è pari alla popolazione  $N$  e indicano il numero di volte che appare il valore  $x_i$  su cui è stata fatta la misura

$F$  è la frequenza assoluta e si può costruire una tabella identica a partire dalle **FREQUENZE RELATIVE**  $f_i/N$  (la cui somma è 1) e in questo caso è più comodo (si capisce la percentuale da subito con cui si distribuiscono le misure)

Il legame di tale tipo di variabile con la variabile casuale è legato al fatto che tale esperimento ricorda quello associato alla variabile casuale concentrata su  $x_i$  dove c'è probabilità  $p_i$



$$m = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad \rightarrow \text{in caso di variabile non ordinata l'espressione è ancora più semplice}$$

## PROPRIETÀ

→ **linearità**: x la linearità degli operatori integrale e sommatorio

$$m[x+y] = m[x] + m[y]$$

$$m[kx] = k \cdot m[x]$$

7 **Varianza**: indica quanto la misura è **CONCENTRATA** attorno alla media (meglio la sua radice perché la varianza è dimensionalmente il quadrato dell'unità di misura presente  $x$ ; x questo si parla di **scarto quadratico medio**)

Essa, x definizione, è l'OPERATORE MEDIA APPLICATO ALLO SCARTO AL QUADRATO

$$\sigma^2[x] = M[V^2] \quad \begin{array}{l} \text{Notazione} \rightarrow \text{variabile casuale } \sigma^2 \\ \rightarrow \text{variabile statistica } S^2 \end{array}$$

L'operatore **scarto** si definisce come differenza tra il valore e la media

$$V = x - \mu_x$$

Quindi nel caso di variabile casuale si ha

$$\sigma^2 = M[V^2] = M[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

→ ricorda il momento d'inertia che dice quanto è concentrata la massa intorno al baricentro

Invece nel caso di variabile discreta

$$\sigma^2 = M[V^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 p_i$$

Infine nel caso di variabile statistica

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n v_i^2$$

PROPRIETÀ → elevando al quadrato lo scarto e sfruttando la linearità della media si ha

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= M[V^2] = \\ &= M[x^2 - 2\mu x + \mu^2] = \\ &= M[x^2] - 2\mu M[x] + \mu^2 = \quad M[x] = \mu \\ &= M[x^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = M[x^2] - \mu^2$$

→ metodo più rapido perché non richiede di passare dalla variabile scarto

nel caso di variabile statistica

$$S^2 = M[x^2] - m^2$$

→ la varianza può essere interpretata come "momento del II ordine" di  $x$



Inoltre esso dà l'utilità di  $\sigma$  perché con esso si può dire qual è la probabilità in ogni caso. Infatti se non si sa com'è la distribuzione, ma si vuole sapere la probabilità minima in un intervallo attorno a  $\mu$ , si può avere il valore in ogni caso (se però la ve è distribuita secondo Gauss, allora il valore è  $\sigma$ ). Quindi; sia se è nota la distribuzione che non,  $\sigma$  indica qual'è la probabilità con cui le misure si trovano attorno al valore medio.

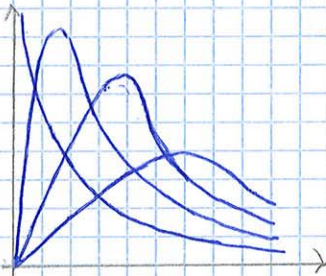
## 9 Distribuzione $\chi^2$

È una variabile derivante dalla somma di tante variabili di Gauss al quadrato. Inanzitutto, se  $Z_i$  è una variabile di Gauss standardizzata (con  $\mu=0$  e  $\sigma=1$ ), la variabile  $\chi^2$  a  $n$  dimensioni si definisce come

$$\chi^2_{(n)} = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \quad n = \text{GRADO DI LIBERTÀ}$$

Si osserva che a tale variabile si associa la dimensione  $n$ , a dimensione 1, vale

$$\chi^2_1 = Z^2$$



Essa è diversa dalla variabile causale <sup>di Gauss</sup> perché è il suo quadrato e dunque i valori negativi diventano positivi, in modo che non parta più da  $-\infty$ .

così si ottiene una curva che all'aumentare di  $n$  si avvicina alla faccia positiva della gaussiana.

La sua funzione di densità

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}$$

La funzione  $\Gamma$  è detta **funzione di Eulero** che, a numeri interi, corrisponde al fattoriale. Dunque  $\Gamma$  è la generalizzazione del fattoriale e vale

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

MEDIA

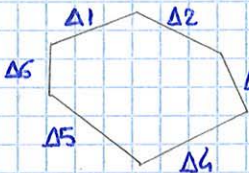
$$M(\chi^2) = n$$

→ si osserva che tutti i valori sono positive

SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$S^2(\chi^2) = 2n$$

APPLICAZIONI: è utile a le compensazioni di misure in reti dove si hanno tante misure con tanti scarti  $v_i$ . Supponendo che gli scarti siano gaussiani e seguano la normale



$$v_i \sim N[0, \sigma^2] \rightarrow \text{sono standardizzati}$$

Allora la somma degli scarti al quadrato sono variabili  $\chi^2$  (seguono la distribuzione  $\chi^2$ ). Per quanto riguarda i gradi di libertà, la dimensione è  $n-1$  (x la misura condizionata).



## Misure indirette

1 Nelle misure indirette intervengono VARIABILI CASUALI FUNZIONED A ALTRE VARIABILI CASUALI

Es Nel lancio del dado si può collegare al lancio della moneta. Si sa che nel dado la probabilità di parità o di disparità è  $0,5$

$$P(X \in P) = \frac{1}{2} \quad P(X \in D) = \frac{1}{2}$$

Ora si introduce la v.c.  $Y$  tale che si associ

$X$  pari  $\leftrightarrow$  testa  $Y$

$X$  dispari  $\leftrightarrow$  croce  $Y$

Dunque si può associare il risultato della moneta a quello del dado, ossia si può dire che l'esperimento della moneta equivale all'esperimento del dado (pur essendo diversi) se a testa si associa parità etc. Si sa che ogni numero del dado ha probabilità  $1/6$ , ogni faccia nell'esperimento  $X$  del lancio del dado a priori a ciascun numero corrisponde una probabilità di  $1/6$  e si associa ora alla  $X$  una  $Y$  che si comporta come

$$g(2) = g(4) = g(6) \rightarrow \text{testa}$$

$$g(1) = g(3) = g(5) \rightarrow \text{croce}$$

Quindi la  $Y$  ha distribuzione di proprie probabilità come

$$Y = \begin{cases} 1/2 & \text{testa} \\ 1/2 & \text{croce} \end{cases}$$

Per far diventare  $Y$  come v.c. occorre associarle dei valori reali

$$Y = \begin{cases} 1/2 & \\ 1/2 & \end{cases}$$

$\rightarrow$  ossia  $\times$  passare dalla distribuzione di probabilità a una variabile casuale basta associare valori non alfanumerici ma sull'asse reale

Si osserva che  $Y$  è funzione di  $X$

2 Ora si fa un ragionamento più fine con v.c. non concentrate ma distribuite e la funzione  $g$  si è univoca e propria funzione.

La funzione è una generica ed è definita su un insieme argomentale  $D_X$ .

In particolare, la funzione  $g(x)$  trasforma lo spazio  $S_X$  nell'immagine  $S_Y$

Si consideri ora un sottoinsieme  $A_Y \subset S_Y$ , a esso si associa un sottoinsieme  $A_X \subset S_X$  (può essere costituito da più intervalli) tale che

$$g(A_X) = A_Y$$

Dunque alla probabilità che  $Y \in A_Y$  bisogna associare una somma di intervalli

Supponendo ora che  $g$  sia continua e differenziabile, allora l'insieme  $A_X$  è formato da uno o più intervalli attorno a  $x_i$  di ampiezza  $dx_i$  e si può dimostrare che

$$f_Y(y_0) = \sum_{i=1}^n \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

la probabilità che cada in  $dx$  è  $dP_X = \sum f(x_i) dx_i$   
 $\rightarrow$  la probabilità che cada in  $dy$  è  $dP_Y = f(y) dy$   
 Poiché deve valere che  $dP_X = dP_Y$ , da quest'uguaglianza si ricava la relazione

Nel caso che la funzione sia monotona (decrecente o crescente), allora

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

$\rightarrow$  perché  $\times$  la monotonicità a ogni  $y$  corrisponde una sola  $x$



$$g(x) = x^2 \Rightarrow f_y(y) = \frac{f_x(-\sqrt{y}) + f_x(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

ora si applica questo al caso particolare della normale standard

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_y(y) = \frac{f_x(-\sqrt{y}) + f_x(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Ovviamente questo vale solo  $x, y > 0$  perché sotto non c'è corrispondenza con le  $x$  e inoltre si osserva che la  $y$  non è una variabile di Gauss (non c'è  $e^{-\frac{y^2}{2}}$ )

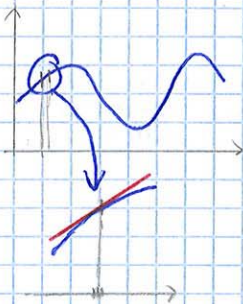
↓  
 dunque il QUADRATO DI UNA VC NORMALE STANDARD NON È UNA NORMALE (anche perché non va da  $-\infty$  a  $+\infty$  ma da  $0$  a  $+\infty$ )  
 ↓  
 è una  $\chi^2$

**Teorema della media:** spesso la funzione  $f(x)$  non è nota perché non si fanno infinite misure e al più si può arrivare a una distribuzione approssimata e, nel trattamento delle misure, interessano media e sqm. Ora ci si chiede se, una volta note media e sqm della miscela diretta, è possibile estrapolare le misure indirette, pur non avendo la funzione di distribuzione

↓  
 se due vc  $x$  e  $y$  sono legate da una funzione  $y = g(x)$ , allora la MEDIA di  $y$ , se esiste, vale

$$\mu_y = \mu_x [g(x)]$$

→ è la media calcolata sulla funzione  $g(x)$  (così è possibile fare il cambiamento di variabili nell'operatore media)



Dimostrazione

Per semplicità si suppone che la funzione  $g$  sia monotona crescente (infatti nella pratica si ha sempre a che fare con funzioni monotone anche perché con funzioni che non lo sono - es seno - nell'ingegneria bisogna fare misure precise, a cui si basta in tratti piccoli dove la funzione può essere sempre considerata monotona)

↓  
 si parte da valori approssimati e si considera un tratto piccolo (in cui addirittura la funzione può essere considerata lineare)

Si sa che

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{|g'(x)|}, \quad x = g^{-1}(y)$$

Per definizione la media vale

$$\begin{aligned} \mu_y [y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f_x(x)}{g'(x)} dy \end{aligned}$$



### Legge di propagazione della varianza:

Si è già visto come si ottiene la media  $x$  la misura indiretta, si può ragionare analogamente  $x$  la varianza sfruttando il teorema della media

Se le misure sono abbastanza precise  $x$  la  $v_x$  e la  $y$  è una  $v_c$  data da  $y = g(x)$ , allora

$$\sigma_y^2 \approx (g'(\mu_x))^2 \sigma_x^2$$

no si dà la misura ai decimali dello sqm  
(es  $\delta = 0,07 \Rightarrow 10^{-2}$ )

Dimostrazione

Per definizione, la varianza è il momento del II ordine dello scarto al quadrato

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 f_y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - \mu_y)^2 f_y(y) dy = \end{aligned}$$

Es In Gauss, se la misura è distante dal valore che rappresenta la media, questa è peso probabile

Dunque dando precisione estove cadono all'interno della distribuzione, si dà la probabilità che l'operatore ritorni la stessa misura

↳ precisione 40% =

= 40% di probabilità di ritornare lo stesso valore

Ora si linearizza

$$g(x) \approx g(\mu_x) + g'(\mu_x)(x - \mu_x)$$

Dunque si ha che

$$\begin{aligned} |g(x) - \mu_y| &\approx |g(\mu_x) + g'(\mu_x)(x - \mu_x) - \mu_y| \approx \\ &\approx |\mu_y + g'(\mu_x)(x - \mu_x) - \mu_y| = |g'(\mu_x)(x - \mu_x)| \end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g'(\mu_x))^2 (x - \mu_x)^2 f_y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g'(\mu_x))^2 (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx = \\ &= (g'(\mu_x))^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$



Di conseguenza si definisce la **probabilità** di un insieme A come

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dV(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta V_i$$

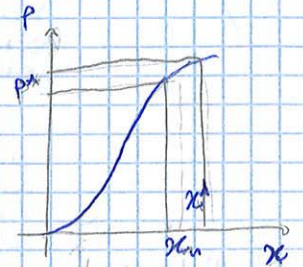
Per analogia la funzione di distribuzione è

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_0} dx_1, \dots, \int_{-\infty}^{x_n} f(x) dx_n$$

Per cui vale che è possibile da P ricavare la densità di probabilità derivando

$$f(x) = \frac{\partial^n P(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

→ questo è possibile capire le proprietà del campione



Es(→) Se si considerano dei valori  $x_n$ , allora il valore  $x^*$  ha probabilità di decadimento  $P^*$  e ciò è importante perché i valori in quella zona (sull'asse  $x$  non crescente ma  $x$  decadimento). Si vuole avere una certa probabilità e a tale probabilità sapere quale  $x$  si estrae o viceversa, se si estrae  $x$ , sapere la probabilità di una nuova estrazione

Es In un'urna sono contenute due palline bianche (b e B) e due palline nere (n e N) e si vuole descrivere la vc per farlo, si crea una tabella dove si mettono le palline e nella prima valuta ciò che è possibile in termini di estrazione

	b	B	n	N
b	bb	bB	bn	bN
B	Bb	BB	Bn	BN
n	nb	nB	nn	nN
N	Nb	NB	Nn	NN

→ x definire la probabilità, si valuta il numero possibile di estrazioni (12)

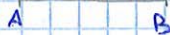
I →				
II ↓	1/12	1/12	1/12	1/12
	1/12	1/12	1/12	1/12
	1/12	1/12	1/12	0

È importante perché facilita la misura, identifica il punto e il suo sqm. Quest'ultimo non è facilmente descrivibile sul diagramma cartesiano e si definisce uno spazio intorno a P entro cui c'è sicurezza che la misura sia quella giusta

valori argomentati  
= cambia azione dei possibili valori di estrazione

non si scrive nulla perché l'estrazione non è contenuta (c'è un solo b)

A volte nella misura è importante l'ordine di estrazione ed è importante lasciare distinte le possibilità perché considerando uno strumento  $x_1$  con operatore 1 e uno strumento  $x_2$  con operatore 2, se 1 misura uno stesso fenomeno deve lasciare distinti gli eventi (anche se potrebbero portare allo stesso risultato). In quanto, considerando per pesi in un secondo momento, si potrebbero pesare in maniera diversa le misure fatte



Es Per la lettura di una distanza, perché non si riesce a fare in un'unica ripresa, possono accadere due strumenti: uno di portata > e uno di portata < (es AB = 100 m e il primo legge 90 m con precisione di 10 cm e il secondo legge 10 m con precisione di 1 cm). Ovviamente si usa prima il primo perché ci si avvicina di più a B e poi si affina la posizione di B con lo strumento più accurato. Nel caso opposto, invece, il risultato potrebbe essere lo stesso ma a scapito della precisione finale (sqm).

Ciò è un problema e le misure in ingegneria e questo è utile lasciare distinti i due possibili eventi, in modo da far vedere all'operatore esterno che questi portano allo stesso risultato ma con procedimenti diversi

Es Due estrazioni successive in cui si rimette dentro la pallina: si avrebbero 16 risultati possibili, perché rimettendo la pallina è possibile estrarre due volte la stessa pallina

	b	B	n	N
b	bb	bB	bn	bN
B	Bb	BB	Bn	BN
n	nb	nB	nn	nN
N	Nb	NB	Nn	NN

I →				
II ↓	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16

Si passa da 1/12 a 1/16, cioè il reinserire la pallina determina un AUMENTO D'INCERTEZZA. Infatti di solito è meglio fare più misure (così ci si accorge se si è fatto un errore) ma aggiungendo variabili al sistema l'incertezza aumenta e così è più difficile trovare la soluzione più corretta (x l'incertezza >)



4 **Indipendenza stocastica**: gli eventi sono indipendenti se la probabilità è la stessa anche se è condizionata (probabilità che si verifichi A condizionata da B è la stessa che si verifichi A)  
 il valore è lo stesso x ogni valore assunto da B (non c'è azione che lega A e B)  
 se c'è correlazione diretta si parla di **PROBABILITÀ COMPOSTA**

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$  →  $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$  → le funzioni sono prodotte tra componenti

5 I concetti di media e varianza possono essere estesi a motivi pratici perché nelle misure si fanno operazioni discrete x cui si hanno variabili statistiche

↓  
 x esse non è nota la distribuzione ma si possono sapere media e varianza

Per questo si pone la necessità di estendere a n dimensioni e di lavorare nel mondo reale, in cui quasi mai si ragiona a una dimensione

6 **Media**: si definisce come il integrale multipla su  $\mathbb{R}^n$  del prodotto tra vettore e funzione scalare

$$\vec{\mu}_z = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{z} \cdot f_z(\vec{x}) dx_1, \dots, dx_n$$

Nel caso di ve doppia si ha

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \int_{x_1} \int_{x_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\mu_1 = \int_{x_1} \int_{x_2} x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{x_1} x_1 \left( \int_{x_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

$$\mu_2 = \int_{x_1} \int_{x_2} x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{x_2} x_2 \left( \int_{x_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

Si osserva che i due integrali ~~esse~~ tra parentesi non dipendono da  $x_2$  (o da  $x_1$ ) ossia gli integrali tra parentesi sono i **MARGINALI**

$$f_{x_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$f_{x_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1$$

Dunque

$$\mu_1 = \int_{x_1} x_1 f_{x_1}(x_1) dx_1$$

$$\mu_2 = \int_{x_2} x_2 f_{x_2}(x_2) dx_2$$

In generale la componente i-esima vale

$$\mu_i = \int_{x_i} x_i f_{x_i}(x_i) dx_i$$

→ è la media della componente i-esima

no così si può fare la media con l'una e l'altra marginale

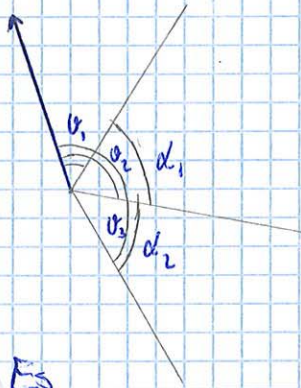


8 Per le variabili  $n$ -dimensionali è anche possibile studiare anche le misure indirette e saperne

→ MEDIA

→ MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA

Es



Se si ha lo  $\varnothing$  del cerchio diretto da una certa parte e note 3 direzioni  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$ , allora gli angoli  $\alpha_1, \alpha_2$  sono misure indirette (funzione di  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$ ) e  $n$ -dimensionali in quanto vale la relazione

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Esiste una relazione che lega una variabile a due dimensioni con una a 3 dimensioni mediante una legge lineare e, conoscendo la matrice di varianza-covarianza  $\Sigma$ , si ha  $x \sim \alpha$

Es



Si deve misurare la superficie di un triangolo piano (es misurati terreni con teodolite e distanziometro) e si deve fornire la precisione nella sua superficie

↓  
bisogna passare dalla misura diretta e la sua precisione alla misura indiretta e la sua precisione

In questo caso si passa da una  $vc$  a 3 dimensioni (2 lati + angolo) a una dimensione

Anche in questo caso è sufficiente conoscere media e matrice di varianza e covarianza della misura diretta

↓  
date due  $vc$ , una  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  (misura diretta) e una  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  (misura indiretta), sia una trasformazione

$$\vec{y} = g(\vec{x})$$

Si sa che, per definizione, la media di  $g(\vec{x})$  vale

$$\mu_y = \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{x}) f_x(\vec{x}) d\vec{x}$$

Si dimostra nel **teorema della media** che

$$\mu_y = \mu_x [g(\vec{x})]$$

→ come accade nel caso monodimensionale

CONSEGUENZA

→ se la trasformazione è LINEARE, ossia si esprime come

$$\vec{y} = g(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

allora si ha che

$$\mu_y = A\mu_x + \vec{b}$$



$$C_{dd} = \sigma_y^2 - A I A^T = \sigma_y^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_y^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

si suppone che  $\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_y$   
 cui  $Cov = \sigma_y^2 - I$

matrice quadrata, simmetrica e invertibile (non diagonale)

Es (MISURA CON ALZATE -  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ )

nel caso monodimensionale ad es misura di una lunghezza con il metodo delle alzate, la matrice diventa uno scalare e dato le  $x_i$  unità, vale che

si riporta la stessa unità di misura un numero di volte

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n \rightarrow \text{somma delle lunghezze}$$

es. anche la misura del triangolo

$$y = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y = 1x$$

A stavolta ha una riga sola perché ha 1 dimensione

In questo caso ogni alzata ha il suo  $\sigma_{qm}$  (supposte indipendenti) e, a una dimensione,  $C_{yy} = \sigma_y^2$

$$\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 \quad (+ 2a_i a_j \sigma_{ij})$$

se  $\sigma_{ij} \neq 0$  (caso generale)

Es se vale che

$$2m \pm 1 \text{ mm} \quad 2m \pm 1 \text{ mm} \quad 2m \pm 1 \text{ mm} \quad 1,783 \pm 1 \text{ mm}$$

Allora la media, x il teorema della media, vale  $7,783 \text{ m}$  e lo  $\sigma_{qm}$  vale

$$\sigma_y^2 = 1 \cdot 1 \text{ mm}^2 + 1 \cdot 1 \text{ mm}^2 + 1 \cdot 1 \text{ mm}^2 + 1 \cdot 1 \text{ mm}^2 = 4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_y = \pm 2 \text{ mm}$$

Qui le alzate si considerano a una ve n-dimensionale perché non è una ve monodimensionale ripetuta n volte (non si ripete la stessa misura dello stesso tratto - il tratto è diverso e si misurano n lunghezze diverse, non come valori ma come "oggetti")

Es.

x	y	$\frac{1}{2}$	5	4	$p_i$
1	0,1	0,2	0,1	0,4	
2	0,1	0,2	0	0,3	
3	0	0,1	0,1	0,2	
4	0	0	0,1	0,1	
q:	0,2	0,5	0,3	1	

Studiare questa vs.

È una vs a due dimensioni che ha funque due marginali, ottenuti considerando la probabilità x ogni valore ad es di y e sommando x qualunque valore di essa (basta che la x sia la stessa)

Si hanno così due marginali, che è come se fossero due distribuzioni concentrate (qui su 3 o 4 punti) di 1 dimensione

Una volta noti i marginali si può calcolare la media considerando la singola marginale

$$M_x = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2$$

$$M_y = 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,3 = 6$$

⇒

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2 dimensioni

$$M_i = \sum_{j=1}^n x_j f_j$$



$$M[\vec{y}] = M[\vec{b}] + M[A(\vec{x} - \vec{\mu}_x)] = \vec{b}$$

Dunque lo scarto è

$$\vec{y} - M[\vec{y}] = \vec{y} - \vec{b} = A(\vec{x} - \vec{\mu}_x)$$

Di conseguenza la covarianza di  $\vec{y}$  è

$$C_{yy} = A C_{xx} A^T$$

A = matrice jacobiana

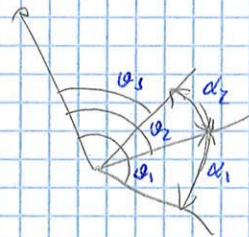
$$C_{yy} = A C_{xxx} A^T$$

→ la legge è generalizzata, solo che A è la matrice delle derivate

Ciò si poteva intuire perché nel caso degli angoli

$$\alpha_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1 = g_1$$

$$\alpha_2 = \vartheta_2 - \vartheta_3 = g_2$$



Derivando tali funzioni rispetto a  $\vartheta_i$  si ottiene lo stesso risultato che nel caso lineare

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE: la relazione ottenuta visto che presenta un prodotto tra matrice e la sua trasposta, costituisce una forma quadratica che è definita positiva

proprio perché la forma quadratica è definita positiva, a meno che  $A = 0$

se  $C_{xx} > 0$  allora anche  $C_{yy} \geq 0$  (= 0 nel caso di DISTRIBUZIONI SINGOLARI dove la dimensione passando da  $x$  a  $y$  non diminuisce di 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ determinante nullo ma si è in un caso singolare

nel caso di  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 è  $> 0$ , se  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$   
 è  $= 0$

### RADICE QUADRATA DI UNA MATRICE

In generale, ignorando distribuzioni singolari, la matrice  $C_{xx}$  può essere considerata come quadrata di un'altra matrice  $K$  (se è simmetrica e definita positiva)

$$C_{xx} = K^2 = K^T K$$

Per ricavarla, si può individuare una matrice di autovalori  $\Lambda$  che è una matrice diagonale e una di autovettori  $U$  (la si scompone in autovalori e autovettori), x cui  $C_{xx}$  è  $U \Lambda U^T$

$$C_{xx} = U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^T$$

Il vantaggio è che se la radice di una matrice diagonale basta fare la radice degli elementi



Così la matrice vale

$$C_{yy} = A C_{xx}^T A$$

A questo punto è possibile valutare l'ESATTEZZA DI APPROSSIMAZIONE tramite la matrice  $C_{yy}$  che definisce proprio una conica che rappresenta il luogo di punti di uguale probabilità

Ora si vuole capire la precisione nella misura della superficie, dove c'è una relazione da 2 a 1 dimensionale

$$A = \rho^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\delta_A^2 = \frac{\partial A}{\partial \rho} \delta_\rho^2 + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta_\alpha^2 =$$

$$= \rho \sin 2\alpha \delta_\rho^2 + \rho^2 \cos 2\alpha \delta_\alpha^2$$

→ si riduce a sommatoria in questi casi

### 9 Indice di correlazione lineare

È un indice che deriva dalla matrice di varianza-covarianza, in cui si è visto che se le componenti di una v.c. n-dimensionale sono indipendenti, allora essa è diagonale x cui

$$\delta_{xy} = M[xy] - \mu_x \mu_y = 0$$

Nel caso opposto, in cui ci sia una DIPENDENZA addirittura LINEARE del tipo

$$\vec{y} = A\vec{x} + b$$

→ x e y sono le componenti della v.c. (non due v.c. distinte)

Si è visto che

↓  
utile x v.c. a 2 dimensioni

$$y - \mu_y = A(x - \mu_x)$$

Per cui la covarianza vale

$$C_{xyxy} = M[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = M[(x - \mu_x) A (x - \mu_x)] = A C_{xx}$$

Non è la stessa legge di prima perché ci si concentra sulla covarianza

Nel caso particolare che ci sia una v.c. a 2 dimensioni in cui

$$y = ax$$

si ha

$$\delta_y^2 = a^2 \delta_x^2 \Rightarrow \delta_y = |a| \delta_x$$

$$\delta_{xy} = a \delta_x^2$$

Di conseguenza si costruisce un numero detto INDICE DI CORRELAZIONE LINEARE tra x e y definito come

$$\rho_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{\delta_x \delta_y}$$



Applicando la legge di propagazione della varianza a  $z$

$$C_{zz} = k I^{-1} k^T = k^{-2} \quad (C_{zz} = k C_{zz}^{-1} k)$$

Per il teorema della media

$$M[\bar{z}] = \bar{\mu} + k M[\bar{z}] = \bar{\mu}$$

Dunque con questa trasformazione <sup>lineare</sup> si ottiene un'altra <sup>normale</sup> v.c. di media  $\bar{\mu}$  e matrice  $k^2$  e può essere espressa la v.c. normale  $N(\bar{\mu}; C_{zz})$  generica come

$$f(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi^{z/2} |C_{zz}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\bar{z} - \bar{\mu}) C_{zz}^{-1} (\bar{z} - \bar{\mu})}$$

Per standardizzarla occorre fare la trasformazione

$$\bar{z} = C_{zz}^{-1/2} (\bar{z} - \bar{\mu})$$

↓ trasformazione da normale standardizzata a non e viceversa

Così questa è una v.c. normale non standard di cui con  $\bar{z}$  si può standardizzare (con scomposizione di  $C_{zz}$  in valori singolari e fare la radice)

**ELIPSE D'ERRORE**: è una zona di equiprobabilità in cui è possibile trovare un punto  $P$  (oltre alla matrice), permette di individuare il punto  $\theta$

Dunque  $x$  una v.c. normale standardizzata

→ la media è il vettore nullo

→ la varianza è la matrice identica

↓  
x passare a una v.c. normale non standardizzata occorre una trasformazione lineare e la varianza è la matrice  $C_{zz}$

Per tornare alla variabile standardizzata si fa la STANDARDIZZAZIONE togliendo la media e dividendo  $x$   $C_{zz}$

### PROPRIETÀ DELLE VC NORMALI

→ c'è EQUIVALENZA CONCETTUALE tra CORRELAZIONE e INDIPENDENZA STOCASTICA

→ TRASFORMAZIONI LINEARI trasformano una VC NORMALE in una VC NORMALE partendo infatti da una normale

$$\bar{z} = N[\bar{\mu}_z; C_{zz}]$$

allora

$$\bar{y} = A\bar{z} + \bar{b} = N[A\bar{\mu}_z + \bar{b}; A C_{zz} A^T]$$

x propagazione varianza

facendo la trasformazione inversa

$$\begin{aligned} \bar{z} &= C_{zz}^{-1/2} (\bar{z} - \bar{\mu}) \\ \bar{z} + \bar{\mu} &= C_{zz}^{-1/2} (\bar{z} - \bar{\mu}) + \bar{\mu} = (\bar{z} - \bar{\mu}) C_{zz}^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\bar{z} = N[\bar{0}; I]$$

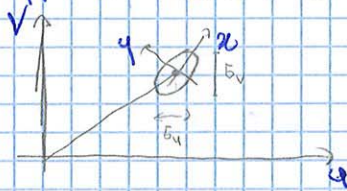
$C_{zz}$  è simmetrica

Dunque

$$\bar{z}^T \bar{z} = (\bar{z} - \bar{\mu})^T C_{zz}^{-1} (\bar{z} - \bar{\mu})$$



Un altro modo x vedere l'ellisse d'errore (in genere gli assi sono paralleli o perpendicolari all'asse base-es distanza - ma in questo caso l'ellisse è supposto orientata arbitrariamente)



del sist rif  
 siano  $u$  e  $v$  le direzioni del sistema di riferimento, mentre gli assi siano in direzione  $x$  e  $y$ .  
 perché ci sia coincidenza delle direzioni è necessario che la covarianza  $\sigma_{xy}$  sia nulla (così  $\alpha=0$ ) e dunque si può cercare una rotazione da  $u$  e  $v$  a  $x$  e  $y$  che renda  $\sigma_{xy}$  nulla (così gli assi sono orientati su  $x$  e  $y$ )  
 si parte da  $\sigma_{uv} \neq 0$  e  $\sigma_{xy} = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Si parte dunque dalla matrice  $C_{uv}$  data da

$$C_{uv} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

Bisogna scegliere  $\alpha$  in modo che  $C_{xy}$  sia diagonale

$$C_{xy} = A C_{uv} A^T \quad \rightarrow \text{x propagazione varianze}$$

Di conseguenza

$$\sigma_x^2 = (\sigma_u^2 \cos^2 \alpha - \sigma_v^2 \sin^2 \alpha)^2$$

$$\sigma_y^2 = (\sigma_u^2 \sin^2 \alpha + \sigma_v^2 \cos^2 \alpha)^2$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_u^2 - \sigma_v^2) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{uv} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

$$\text{se } \tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{uv}}{\sigma_u^2 - \sigma_v^2}$$

Ossia la rotazione è proprio associata all'inclinazione e con essa  $\sigma_{xy} = 0$  (nel sistema di riferimento  $xy$  - e non  $uv$  - si ha covarianza nulla)

Questo risultato è utile x qualunque matrice di varianze-covarianza a  $n$ -dimensioni dove la rotazione è data da una matrice  $n$ -dimensionale e si ottiene tramite rotazione una MATRICE DIAGONALE

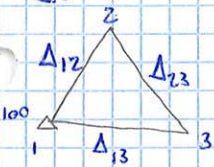
$\Rightarrow$  i semiassi sono legati agli autovettori (e il loro inverso  $-C^{-1}$ ) mentre le direzioni sono dati dai autovettori (x coseni direttori) che danno la rotazione

$\rightarrow$  il discorso si lega alla radice della matrice

Così l'ellisse si ricava da  $C_{xy}$



Es



$$\begin{aligned} y_1 &= \Delta_{12} = x_2 - x_1 \\ y_2 &= \Delta_{23} = x_3 - x_2 \\ y_3 &= \Delta_{31} = x_1 - x_3 \end{aligned}$$

Si potrebbe ragionare su  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{23}$  e  $\Delta_{31}$  ma si può anche ragionare sui parametri aggiuntivi  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (anche se  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  sono le misure dirette)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

incognite

~  $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$  con 3 equazioni in due incognite (una misura in più)

Casi si cambia nel problema più generale con misure e parametri perché casi si ha un'equazione di misura in funzione delle coordinate.  $Q(u)$  è MISURA INDIRETTA e CONDIZIONATA perché le misure coordinate derivano da misure dirette ma condizionate dalla legge  $q = Ax + b$  (casi la misura diretta è irrisolvibile x via indiretta)

4 Si è casi iniziato il trattamento delle misure dirette e indirette condizionate nel caso lineare, come nel caso degli angoli di un triangolo (misura diretta) che sommati fanno  $\pi$  o la somma dei distlivelli di una rete è nulla

questi casi lineari formano l'equazione di un piano

Nel caso di misure ideali si rimane dentro il piano mentre nelle misure reali si fa di fatto un'estrazione da una misura ideale e non è detto dunque che soddisfi la condizione e rimanga nel piano

x questo si può supporre che le misure possano essere migliorate trovando un nuovo valore in base a un criterio (sfruttando il fatto di avere delle misure in più), casi si trova una STIMA, cioè un valore sul piano scelto in base al CRITERIO DEI MINIMI QUADRATI x cui la migliore stima  $\hat{y}$  è il prede di  $y_0$

$$d^2 = \vec{v}^T \hat{v} = (y_0 - \hat{y})(y_0 - \hat{y}) = \min$$

5 È possibile però generalizzare al caso di misure con PARAMETRI AGGIUNTIVI, cioè MISURE INDIRETTE e CONDIZIONATE

le misure  $y$  sono legate a un parametro  $x$  dalla legge lineare (grazie a linearizzazione)

$$\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$$

$\vec{y}$  = misure generate  
 $\vec{x}$  = coordinate

finora si è visto  $A \in M_n$

Visto che si fanno più misure del necessario (x migliorare la precisione),  $A$  è una matrice con  $m > n$ , cioè più equazioni rispetto alle incognite, e bisogna trovare un modo x migliorare la stima (perché non è invertibile e bisogna trovare un criterio di stima)

Si suppone dunque che ci sia una relazione del tipo

$$\vec{y} = A\vec{x} + a$$

$A \in M_{m,n}$

numero di  
 $m$  = misure  
 $n$  = numero di incognite ~  $m > n$

Tale che

$$r(A) = n \Leftrightarrow {}^tAA \in GL_n \text{ (perché } r({}^tAA) = n \text{) ed è simmetrica perché è una forma quadratica}$$

Il criterio di stima è, nel caso che le misure abbiano precisioni diverse, che

$$d^2 = {}^t(y_0 - \hat{y})C_{yy}^{-1}(y_0 - \hat{y}) = \min$$



$$d\Phi = -d\hat{y} P(y_0 - \hat{y}) + d\hat{y} \lambda \quad \rightarrow \text{rispetto a } y$$

$$d\Phi = -d\hat{z}^T A \lambda$$

Come in tutti i minimi, deve valere  $d\Phi = 0$

$$d\Phi = -d\hat{y} P(y_0 - \hat{y}) + d\hat{y} \lambda - d\hat{z}^T A \lambda$$

Visto che ci sono due differenziali, i due termini devono essere nulli a ogni  $\hat{z}$  e  $\hat{y}$  e dunque i coefficienti sono nulli devono essere nulli

$$\begin{cases} +A\lambda = 0 \\ -P(y_0 - \hat{y}) + \lambda = 0 \end{cases}$$

Dalla II si ricava  $\lambda$

$$\begin{cases} \textcircled{I} \\ \lambda = P(y_0 - \hat{y}) = P(y_0 - A\hat{z} - a) \\ \begin{cases} +AP(y_0 - A) - +APA\hat{z} = 0 \\ \lambda = P(y_0 - a) - PA\hat{z} \end{cases} \end{cases}$$

Dalla prima si ricava che la soluzione è

$$+APA\hat{z} = +AP(y_0 - a)$$

Si ricava così l'unica incognita  $\hat{z}$

$$\hat{z} = (+APA)^{-1} +AP(y_0 - a)$$

Il valore  $\hat{y}$  viene di conseguenza

PARAMETRO  $\hat{z} = (+APA)^{-1} +AP(y_0 - a) \quad N = +APA \quad \text{matrice normale}$

OSSERVAZIONE:  $\times$  vedere che se  $+APA$  è invertibile, si suppone all'inizio che  $P$  sia identica, ossia che le misure abbiano uguale precisione (anche se non si conosce qual è, ma non interessa  $\times$  ricerca minimi - che è il caso più standard). In tal caso la matrice  $+AA$  è una matrice quadrata, simmetrica e definita positiva (perché è una forma quadratica),  $\times$  cui è invertibile

A non è invertibile perché rettangolare ma  $+AA$  e  $+APA$  sono invertibili

$\downarrow$   
è invertibile

$$\hat{z} = N^+ A P P \quad N = +APA \quad \text{matrice normale}$$

$$P = y_0 - a \quad \text{vettore dei termini noti}$$

Da qui si ricavano immediatamente le misure teoriche

Si può dimostrare, nel caso non si conosca la precisione  $\sigma$  delle misure  $\times$  cui non c'è la matrice dei  $p$  della varianza ma quella dei pesi, e dunque non si conosce  $\hat{\sigma}_0^2$ , allora che esso vale  $\rightarrow$  es  $P=I$ , imponendo che  $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_y^2 \times$  tutte le misure

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{+AP\hat{z}}{m-n}$$

$m-n =$  RIBONDANZA GLOBALE (numero di misure in più rispetto al minimo necessario - rappresenta la rigidità della rete)

La particolarità è che al numeratore c'è la quantità  $+AP\hat{z}$  che è stata minimizzata mentre al denominatore c'è la differenza tra misure e incognite



(di COO)  
 La sua utilità si lega al fatto che  $y_0$  è il seguito di errori acci sentali, la cui stima (o media) è nulla (se no c'è un errore sistematico). Dunque si valuta la distanza  $v$  e la sua precisione, a vedere se la precisione è compatibile con l'ipotesi che la media dev'essere nulla rispetto al valore

↓  
 si confronta lo scarto con il suo sqm perchè dev'essere a media zero, se no c'è una misura errata (dev'essere compatibile con l'ipotesi di partenza della media zero - es  $v = 1 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$  No;  $v = 1 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$  ok;  $v = 0,1 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$  molto ok;  $v = 1 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$  No perchè così  $\sqrt{1+0,1}$ )  
 Da tale matrice si può ricavare il rapporto tra lo scarto e il suo sqm detto **scarto standardizzato** con valori che devono essere compresi tra 2 e 3 (in valore assoluto)

← lo scarto dev'essere dello stesso ordine del sqm

↓ serve a capire se ci sono MISURE ERRATE

+

moltiplicando  $C_{VV}^{-1} \times P/B_0^2$  si può ricavare una matrice  $R$  particolare

$$R = I - P A N^{-1} A^T$$

Matrice di ridondanza

che è già calcolabile prima delle misure perchè le matrici sono già note. Essa è una matrice quadrata, non invertibile e simmetrica, la cui TRACCIA è pari alla RIDONDANZA GLOBALE

↳  $P$  dalle strumentazioni  
 $A$  da coordinate approssimate della rete (già abbastanza precise)

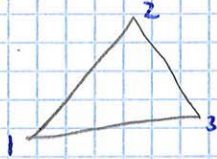
$$\text{tr}(R) = \sum_{i=1}^m R_{ii} = -(m-n) = r$$

$r_{ii}$  = ridondanza locale  
 $r$  = ridondanza globale

Visto che  $r_{ii}$  sono nel numero di misure,  $r_{ii}$  indicano quanto ciascuna misura irrigidisce la rete (da il contributo) e da qui capire quali sono le misure più importanti e quelle meno e quelle inutili ( $r_{ii} = 0$ ) hanno  $r_{ii}$  alto ( $0 \leq r_{ii} \leq 1$ )

⇒ essa è una MATRICE DI PROGETTO perchè fornisce l'importanza delle misure e permette di progettare le misure e si può calcolare prima. Così a tavolino si calcola la rete, considerando tutte le possibili misure e a tavolino si valuta la validità delle misure

### Es (MINIMI QUADRATI)



Si consideri una rete di distelli in cui le incognite sono le quote dei punti. Sono stati misurati i distelli  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{23}$  e  $\Delta_{13}$  in maniera diretta ed è possibile trattarli con il metodo dei minimi quadrati a misure dirette a misure con parametri aggiuntivi

Si suppone che ogni distivello abbia peso diverso tra loro, dove

$$P_j = \frac{B_0^2}{B_j^2}$$

$j = 1, \dots, m$   $B_0^2 = \text{costante a piacere}$

○ in forma matriciale

$$P = C_{qq} \quad P = Q^{-1} \quad Q = D(B_j^2)$$

Visto che i pesi sono diversi, ossia le distellazioni hanno precisioni diverse e, a propagazione della varianza, visto che il distivello è legato a una somma di misure dirette (caso  $B^2 = \sum B_i^2$  e  $B = \sqrt{\sum B_i^2}$  ma  $\sum B_i = \sum d_i \Rightarrow B \neq \sum d_i$ )

$$B_{\Delta_{ij}} = 1 \text{ mm} \cdot \sqrt{B}$$

(in generale  $k \sqrt{B}$  dove  $k$  si lega alla precisione - ingegneristica)

↓  $k = \text{sqm kilometrica}$



RETE PIANA

⇒ 3 gradi di libertà (come un corpo)

RETE PIANA ANGOLARE

⇒ 4

RETE TRIDIMENSIONALE

⇒ 6

(3 x l'origine - 3 traslazioni + 3 rotazioni)

Se le misure sono topografiche, gli assi z dei vari punti sono paralleli e i gradi di libertà sono 4

Fissato dunque il sistema di riferimento (DATUM), cioè la quota  $Q_1$ , il sistema è

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_1 \\ 0 \\ -Q_1 \end{pmatrix} = A\vec{Q} + a$$

in genere è nota perché coincide con un caposaldo

Il termine noto vale

$$p = q_a - a = \begin{bmatrix} \Delta_{12} + Q_1 \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{13} + Q_1 \end{bmatrix}$$

La matrice normale vale

$$N = {}^t A P A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_{23}} & -\frac{1}{D_{23}} \\ -\frac{1}{D_{23}} & \frac{1}{D_{23}} + \frac{1}{D_{13}} \end{bmatrix}$$

$$b = {}^t A P p = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_{13}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{12} + Q_1 \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{13} + Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{12}} (\Delta_{12} + Q_1) - \frac{1}{D_{23}} \Delta_{23} \\ \frac{1}{D_{23}} \Delta_{23} + \frac{1}{D_{13}} (\Delta_{13} + Q_1) \end{pmatrix}$$

Così

$$\hat{e} = N^{-1} b$$

Di conseguenza

$$\hat{q} = A(N^{-1} b) + a$$

Alla fine si ricavano gli scarti

$$\hat{v} = q_a - \hat{q}$$

Così si può ottenere la stima di quel valore  $\hat{\sigma}_0^2$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{{}^t v P v}{m - n}$$

Dopo questo, occorre ancora ricavare  $C_{\hat{Q}}$ ,  $C_{\hat{v}}$  e  $R$  (questa è già ricavabile a priori)

è importante capire la presenza di errori sistematici / grossolani nella misura mediante normalizzazione della scarto

$$\frac{\text{sgn}(v)}{v} \leq 3$$

infine

Si osserva che sia  $A$  che  $P$  sono note, e cui sono note prima della misura

→ la matrice  $N$

→ la matrice  $R$  (x progetto rete)



## CARTOGRAFIA

1) Rappresentare l'ellissoide (cioè la superficie di riferimento x scopi planimetrici) è necessario perché qualche anno fa serviva "una carta di carta" su cui progettare (50 anni fa).  
Oggi invece si progetta con il CAD 3D ma la cartografia serve in quanto le distanze nel 3D sono quelle reali solo nel campo topografico x le altezze (200m)

↓

la cartografia serve x individuare le forze orizzontali e verticali (es forze centrifughe, forza peso, ...) e con questo non si può usare un CAD 3D non riferito a un piano topografico in altimetria ma al geoido

Oggi però la cartografia non è più su carta ma numerica (sistema geografico informatizzato - GIS)

2) In ogni caso bisogna basarsi sull'ellissoide e x progettare servono una  $x$  e una  $y$  metrici (non latitudine e longitudine)

=>

occorre "sviluppare" l'ellissoide ma l'ELLISSOIDE NON è una superficie SVILUPPABILE in una figura piana.  
Quindi storicamente, x passare dall'ellissoide a una figura sviluppabile, si è pensato di PROIETTARE l'ELLISSOIDE SU UNA SUPERFICIE SVILUPPABILE

- cilindro (tagliando generatrice) - tipica x zone equatoriali
- cono
- piano (tipico x le zone polari)

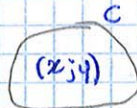
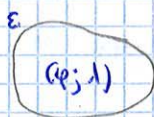
Ciò è stato fatto in modo consuetudinario dal 1600  
Di conseguenza le carte sono dette **proiezioni**

- proiezioni cilindriche → dirette: asse del cilindro // asse di rotazione  
→ trasverse: asse  
non c'è deformazione lungo i meridi
- proiezioni coniche: non c'è deformazione lungo la tangente

↓

in ogni caso c'è DEFORMAZIONE

3) Dal punto di vista matematico, una ~~rep~~ rappresentazione è una FUNZIONE BIUNIVOCHE ASSOCIA A UN PUNTO P ∈ E UN PUNTO Q ∈ C, dove C è un PIANO



$$(x; y) = P(\varphi; \lambda)$$

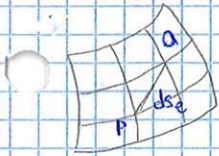
Lo scopo è trovare questa funzione e la sua inversa. Però bisogna pagare sempre una deformazione, che è una ~~DEFORMAZIONE LINEARE~~ deformazione in un'unità vari

Tipi di deformazione

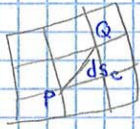
- DEFORMAZIONE LINEARE
- DEFORMAZIONE AREALE
- DEFORMAZIONE ANGOLARE



## 8 Equazioni differenziali della rappresentazione



Considerando in una porzione di ellissoide e la sua rappresentazione si considerano due punti P e Q associati a due paralleli



L'arco di geodetica  $ds_e$  si trasforma sulla carta in  $ds_c$ , ma x il teorema di Pitagora

$$ds_e^2 = r^2 dl^2 + p^2 dp^2$$

$$ds_c^2 = dx^2 + dy^2$$

S'ipotizza però che esista una funzione biunivoca  $\Phi$  qualunque che legghi  $x$  e  $y$  a  $\varphi$  e  $\lambda$

$$x = x(\varphi; \lambda) \quad y = y(\varphi; \lambda)$$

Per la dipendenza da  $\varphi$  e  $\lambda$ , si ha che

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

Quindi sostituendo e ordinando in termini di  $d\varphi$  e  $d\lambda$

$$ds_c^2 = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right]}_e d\varphi^2 + 2 \underbrace{\left[ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]}_F d\varphi d\lambda + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]}_g d\lambda^2 =$$

$\rightarrow x$  costante

$$ds_c^2 = e d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + g d\lambda^2$$

Però nel triangolo rettangolo  $\textcircled{I}$  si ha che

$$p d\varphi = ds_e \cos \alpha \Rightarrow d\varphi = \frac{ds_e}{p} \cos \alpha$$

$$r d\lambda = ds_e \sin \alpha \Rightarrow d\lambda = \frac{ds_e}{r} \sin \alpha$$

Così sostituendo

$$ds_c^2 = \frac{e}{p^2} \cos^2 \alpha ds_e^2 + \frac{2F}{pr} \sin \alpha \cos \alpha ds_e^2 + \frac{g}{r^2} \sin^2 \alpha ds_e^2$$

Si può dividere l'espressione x  $ds_e^2$  e ottenere il quadrato del modulo di deformazione lineare

$$m^2 = \frac{ds_c^2}{ds_e^2} = \frac{e}{p^2} \cos^2 \alpha + \frac{2F}{pr} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{g}{r^2}$$

Poiché che

$$e' = \frac{e}{p^2}$$

$$F' = \frac{F}{pr}$$

$$g' = \frac{g}{r^2}$$

Si ha

$$m^2 = e' \cos^2 \alpha + 2F' \sin \alpha \cos \alpha + g' \sin^2 \alpha$$



Di conseguenza si applica il teorema di Carnot

$$ds_c^2 = ed\varphi^2 + gdl^2 + 2\sqrt{eg}d\varphi dl \cos w$$

Uguagliando con la relazione individuata prima

$$ds_c^2 = ed\varphi^2 + gdl^2 + 2Fd\varphi dl = ed\varphi^2 + gdl^2 + 2\sqrt{eg} \cos w d\varphi dl$$

Per avere l'uguaglianza, deve valere che

$$F = \sqrt{eg} \cos w \Leftrightarrow \cos w = \frac{F}{\sqrt{eg}} = \frac{F'}{\sqrt{e'g'}}$$

L'interesse a il  $\cos w$  si lega al fatto che a avere una rappresentazione conforme, è necessario che l'angolo si mantenga retto sulla carta, ossia deve valere

$$w = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos w = 0 \Leftrightarrow F - F' = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = 0$$

Così si è trovata l'equazione della carta conforme

$$F - F' = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = 0$$

Inoltre si osserva che nelle carte conformi le deformazioni angolari sono nulle

II



Ora si valuta la DEFORMAZIONE AREALE e tenendo conto che si hanno rettangolo e parallelogrammi, si ha che

$$d\tilde{b}_e = pr d\varphi dl$$

$$d\tilde{b}_c = pr \sqrt{e'g'} d\varphi dl \sin w$$

Di conseguenza

$$m_A = \frac{d\tilde{b}_c}{d\tilde{b}_e} = \frac{\sqrt{e'g'} \sin w}{pr}$$

Il seno di  $w$  è noto perché si sa il coseno

$$\sin w = \sqrt{1 - \cos^2 w} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{eg}}$$

$$m_A = \frac{\sqrt{eg - F^2}}{pr}$$

Sostituendo tutta

$$m_A = \frac{1}{pr} \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

$$m_A = \frac{1}{pr} \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

→ forma differenziale

PROPRIETÀ

→

$$m_A > 0$$

Non esistono superfici negative



Inoltre, x il teorema di Pitagora

$$ds_e^2 = r^2 d\lambda^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

$$\begin{aligned} ds_c^2 &= e d\varphi^2 + 2f d\varphi d\lambda + g d\lambda^2 = \\ &= e d\varphi^2 + g d\lambda^2 \end{aligned}$$

→ Nelle carte conformi  $f = f' = 0$

Se vale anche l'equazione

$$g\rho^2 = er^2$$

Si sostituisce e si ha

$$ds_c^2 = g d\lambda^2 + \frac{r^2}{r^2} g d\varphi^2$$

Si moltiplica x  $r^2$

$$r^2 ds_c^2 = r^2 g d\lambda^2 + g\rho^2 d\varphi^2 = g(r^2 d\lambda^2 + \rho^2 d\varphi^2)$$

Di conseguenza il modulo di deformazione lineare vale

$$m^2 = \frac{ds_c^2}{ds_e^2} = \frac{g}{r^2} = g'$$

$$m^2 = g'$$

Dunque il modulo di deformazione lineare x le carte conformi si lega a  $g'$

D'altra parte sfruttando

$$g\rho^2 = er^2$$

Si ha

$$m^2 = \frac{g}{r^2} = \frac{e}{\rho^2} = e'$$

$$m^2 = e'$$

Così x le carte conformi il modulo di deformazione lineare è anche legato a  $e'$

CONSEGUENZA: si è visto come varia il modulo di deformazione lineare in funzione dell'azimut x ogni carta

$$\frac{e' \cos^2 \alpha}{m^2} + \frac{2f'}{m^2} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{g'}{m^2} \sin^2 \alpha = 1$$

Per le carte conformi  $f' = 0$ , x cui l'ellisse ha assi paralleli a  $x$  e  $y$  ma inoltre c'è che

$$e' = g'$$

Per così l'ellisse è una circonferenza, x cui si ha che il modulo di deformazione lineare è INDIPENDENTE DALL'AZIMUT (i semiassi sono uguali)



Così si ottiene un nuovo ma più semplice sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{cases}$$

Sistema di equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi

Ora non resta che risolvere questo sistema (è ovvio che ci sia un sistema perché si deve risolvere  $x$  e  $y$  rispetto a  $u$  e  $\lambda$ ) e, se si trova una soluzione generalizzata, a trovare la soluzione numerica, bisogna applicare la funzione di contorno cioè

$$x = f_x(u; \lambda) \qquad y = f_y(u; \lambda)$$

La soluzione è data da <sup>qualsunque</sup> tutte le funzioni complesse di variabili complesse del tipo

$$(y + ix) = f(u + i\lambda) \qquad \text{arbitraria}$$

Si possono così scegliere infinite funzioni e qualsiasi di essa sarà rappresentazione di una carta conforme. Per fissarla, si impone il valore assunto dalla funzione di contorno, cioè imponendo il valore  $x$  una certa  $u$  (dunque  $x$  una certa  $u$ ) e  $x$  una certa  $\lambda$ . Per semplicità, il contorno è dato da

$$\lambda = 0$$

In modo che la funzione dipenda da parte reale.

Inoltre queste funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor

$$\begin{aligned} f(u + i\lambda) &= y + ix = \\ &= f(u) + i\lambda f'(u) + (i\lambda)^2 \frac{f''(u)}{2} + (i\lambda)^3 \frac{f'''(u)}{3!} + (i\lambda)^4 \frac{f^{IV}(u)}{4!} + (\dots) \end{aligned}$$

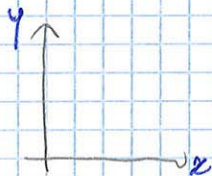
Così è possibile uguagliare parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} y = f(u) - \frac{\lambda^2}{2} f''(u) + \frac{\lambda^4}{4!} f^{IV}(u) + (\dots) \\ x = \lambda f'(u) - \frac{\lambda^3}{3!} f'''(u) + (\dots) \end{cases}$$

Si nota che, posto  $\lambda = 0$ , <sup>si ha che</sup>  $x = 0$  <sup>si ha che</sup>

$$y = f(u)$$

Così basta solo individuare la funzione  $f$



meglio, ~~ta~~ dice che la carta ha sugli assi  $x$  e  $y$  e l'equazione

$$x = 0$$

corrisponde all'asse  $y$  ed equivale a parte sull'ellissoide

$$\lambda = 0$$

ossia sulla carta l'equazione

$$x = \text{cost}$$

corrisponde all'EQUAZIONE DI UN MERIDIANO SULL'EL-  
LISSOIDE

$$\lambda = \text{cost}$$

Inoltre il meridiano origine scelto come riferimento in tutte le carte conformi si trasforma nell'ASSE  $y$



Tenendo conto che

$$(u+iv) = f^{-1}(y+ix)$$

anche tali funzioni inverse sono sviluppabile

$$\begin{aligned} \varphi &= \phi - \frac{\phi''}{2!} x^2 + \frac{\phi'''}{3!} x^3 + \dots \\ \lambda &= \phi' x - \frac{\phi''}{2!} x^2 + \frac{\phi'''}{3!} x^3 + \dots \end{aligned}$$

→

### → MODULI DI DEFORMAZIONE LINEARE

Si osserva che in tutto il Mercatore rispetta il sistema delle rappresentazioni conformi.

Inoltre x le carte conformi vale che

$$m^2 = g' = e'$$

$$m^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$$

$$m = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

$$m = \frac{a}{r}$$

Si osserva che all'Equatore ( $\varphi = 0$ ) vale che

$$r = a$$

Di conseguenza  $m = 1$ , ossia le misure sulla carta coincidono con le misure reali.

A  $\varphi = 45^\circ$  invece le misure sono maggiorate del 50% ( $m = 1,4$ )

→ la TRASFORMATA DELLA GEOMETICA è detta **ortodroma** che, sulla carta sembra più lunga ma in realtà è deformata (è la linea più corta nella realtà).  
D'altra parte il fatto che la lissodroma sia una retta è evidente valutando

$$\tan \alpha = \frac{rd\lambda}{\rho d\varphi}$$

$$\text{Poichè } \rho d\varphi = r du$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{d\lambda}{du} = \\ &= \frac{dx}{a} \cdot \frac{a}{dy} = \frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

Così sulla carta,  $\alpha = \text{cost}$ , la lissodroma è una retta

OSSERVAZIONE: x la navigazione, nota la velocità e l'ortodroma si traccia con il compasso una cerchia che interseca l'ortodroma e così si definisce, giorno x giorno, la rotta che cambia proprio perché

$$\alpha \neq \text{cost}$$



In realtà è già un problema calcolare  $f(u)$  perché bisogna svolgere un integrale

$$\int_0^{\varphi} p d\varphi$$

che è già esso stesso uno sviluppo in serie e non a caso è detto **INTEGRALE ELLITTICO** perché esprime la lunghezza di un'ellisse, in genere non calcolabile in forma chiusa

Allora si è cercato di ricavare  $x$  e  $y$  in un altro modo (anche perché le serie di prima sono convergenti ma non velocemente), a cui si è cercata una serie convergente più velocemente (FORMULA DI YNORNEH)

Così, capita come ricavare le relazioni da  $\varphi$  e  $\lambda$  a  $x$  e  $y$ , servono anche le formule inverse  $x$  tornare sull'ellissoide, una anche come **trasformano meridiani e paralleli** dalla carta

→ **MERIDIANO**: essi hanno equazione

$$\lambda = \text{cost}$$

Di conseguenza l'equazione della trasformata del meridiano è

$$\begin{cases} x = x(\varphi) \\ y = y(\varphi) \end{cases}$$

→ dipende solo da  $\varphi$  (in genere da  $\varphi$  e  $\lambda$ )  
 → es. x meridiano origine l'equazione è  $f(u) = P$  (equatore-punto)

→ **PARALLELO**: analogamente

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{cases}$$

Le **TRASFORMATE** ottenute hanno proprietà

→ **MERIDIANO ORIGINE** (che si trasforma in vera lunghezza) ed **EQUATORE** sono **RETTE**

→ gli altri meridiani e paralleli si **INTERSECANO** a  $90^\circ$  (perché la carta è conforme - si vede con le tangenti)

Però allontanandosi dal meridiano origine le deformazioni diventano notevoli

→ questa carta equivale a proiettare l'ellissoide su un cilindro **TANGENTE NEL MERIDIANO ORIGINE**, a cui la sua lunghezza non è alterata. Però bisogna tenere conto che tale cilindro ha base ellittica corrispondente a una sezione meridiana e proiettando un punto dal centro, questo è più distante (se  $P$  è sul meridiano origine,  $P$  si mantiene ma  $Q$  si allontana)

⇒

c'è un **AUMENTO** (o conservazione) **DELLE DISTANZE** che è più marcato all'aumentare della deformazione

**VANTAGGI**: nonostante questo, è la più utilizzata perché si sono limitate le deformazioni (tramite convenzioni internazionali)

→ si usano <sup>x il mondo</sup> non una ma **TANTI FUSI** di  $6^\circ$  di dimensione e ciascuna avente origine convenzionale. Il primo ha origine a  $3^\circ$  dal meridiano di Greenwich, il secondo a  $9^\circ$  di longitudine  
 In Italia si usano due fusi x la cartografia, il Fuso Ovest e il Fuso Est (il primo con origine a  $9^\circ$  - va da 6 a 12 - e il secondo con origine  $15^\circ$  - va da 12 a 18) convenzionalmente, questi fusi hanno associato un numero che non parte da Greenwich in quanto

$$9^\circ \Rightarrow 32$$

$$15^\circ \Rightarrow 33$$

Questo sistema è detto **UTM (UNIVERSALE TRASVERSA DI MERCATORE)**



## MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE IN GAUSS ( $\lambda \neq 90^\circ, 15^\circ \dots$ )

Ora si valuta  $m$  in un punto qualsiasi che non giaccia sul meridiano origine

$$m = m_{CR}$$

Si sa che

$$m^2 = q' = \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$$

si deriva e si sviluppa sfruttando che in queste rappresentazioni  $\lambda$  è piccolo, e cui si può troncare nelle formule di Gauss ( $\lambda_{max} = 5$  centesimi) e si ha

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\rho R_N}$$

$$\approx m = 1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \text{ ma } \lambda \approx \frac{x}{R_N \cos \varphi} \quad (x \text{ piccolo})$$

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\rho R_N}$$

$x$  = distanza dal fuso origine (non è E - non è ridotta)  
 → poi si MOLTIPLICA x CR

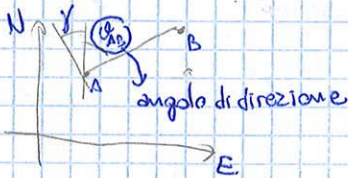
Si osserva che  $m$  varia con il quadrato con la distanza dal fuso origine (è una parabola). Però questo è il modulo di un punto, ma interessa agire su distanze. Si dimostra però che i valori puntuali possono essere estesi a un intorno di 10 km (con precisione degli EODM). Per distanze  $>$ , il modulo varia punto x punto, e cui interessa un MODULO MEDIO dato da

$$m_{12} = 1 + \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{6\rho R_N}$$

→ media ottenuta x integrazione  
 poi si moltiplica x CR

$\bar{\rho}, \bar{R}_N = \rho$  e  $R_N$  calcolati nel punto medio

## 17 ANGOLO X-MERIDIANO



ecco il perché del diverso nome

$$\alpha > \gamma \Rightarrow \delta > \beta$$

$$(x=0 \Rightarrow \delta=0)$$

$$E = xCR + E_0$$

$$\gamma = N = \gamma CR \rightarrow \text{la parallela all'asse N non va verso Nord}$$

Si sa che la trasformata nel Mercatore era no rette, che dava così la direzione del Nord (quella del meridiano)

Ora si hanno curve, e cui la direzione degli assi  $x$  e  $y$  non coincidono con la direzione dell'Est e del Nord.

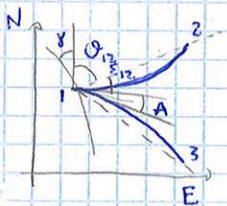
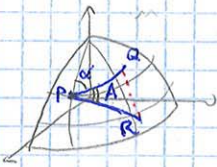
Dunque bisogna sapere l'angolo tra parallela all'asse  $y$  e la tangente al meridiano, che equivale a individuare l'angolo di direzione  $\varphi_{AB}$  distinto da un valore  $\gamma$  dal meridiano (questo è da trovare)

Dunque l'azimut non coincide con l'angolo di direzione e (in questo esempio è esplicitato), cioè la trasformata del meridiano ha una certa direzione e quindi tra la parallela all'asse  $y$  è tale trasformata che  $\varphi_{AB} + \gamma$  (da aggiungere) x il cambio di trasformazione di azimut in angolo di direzione e che non

coincidono (la carta è conforme ma direzione  $N' = \gamma CR$  non è quella del vero Nord) e serve sapere la differenza

Lo stesso x asse E e tangente al parallelo perché la carta è conforme e il parallelo è normale al meridiano (stessi angoli formati)

## 18 TRASFORMAZIONE DELLE GEODETICHE



gli angoli si mantengono su curve trasformate e non su carte

Finora si è trattato di figure infinitesime, grazie a cui si sono trovate le equazioni delle rappresentazioni, e non di geodetiche e si vuole vedere come si comportano sulla carta. In particolare si sono viste le distanze ( $x > 10$  km, usa modulo medio) e ora si guardano le figure, la cui più elementare è il triangolo (non infinitesimo) PQR, con QR non misurato

Si ipotizza che sulla carta gli angoli rimangano uguali e così la tangente alle curve (non le carte) danno  $\alpha$  e  $\alpha = \varphi_{12} + \gamma + \epsilon_{12}$ .

L'ultimo termine  $\epsilon_{12}$  serve a dire che l'azimut è lo stesso, perché la tangente al meridiano ha già direzione diversa dall'asse N (= correzione di  $\delta$ ) e inoltre la tangente di PQ ha trasformato ha direzione diversa dall'angolo di direzione.

Così c'è bisogno di passare da angoli su trasformate non solo di meridiani e paralleli ma anche di geodetiche ad ANGOLO SU CARTE x avere conformità e x poter passare da angoli misurati su curve ad angoli misurati su carte (Medri, con correzioni opportune



Tenendo che

$$S_T = 100 \text{ km}, \alpha = 45^\circ \Rightarrow \Delta s' = 10^{-8} \text{ (1 mm)}$$

cioè lunghezza trasformata di 100 km è minore della sensibilità e così x trasformate di tali lunghezze si può confondere la corda con il segmento perché 1 mm è nella precisione di distanziometri

$$\begin{cases} S_T = 10 \text{ km} \Rightarrow \epsilon = 0 \\ S_T = 100 \text{ km} \Rightarrow \rho_T = \rho_{corda} \end{cases}$$

CONSEGUENZA

Rappresentazione di Cassini-Soldner

è una RAPPRESENTAZIONE EQUIFICATICA ma anche EQUIVALENTE IN PICCOLE ZONE e contiene porzioni cartografiche mantenendo nuove origine (e così che l'area non è deformata)

MODULO AEREALE (dimostrato)

$$M_A = 1 + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{2pR_N} \rightarrow \text{sul meridiano origine } M_A = 1$$

Valutandolo, si osserva che

$$x = 70 \text{ km} \Rightarrow \delta_{\max} = 6'' \text{ e } M_{A, \max} = 6 \text{ cm/km}$$

così analizzando l'errore di graficismo (0,2 mm x denominatore della scala) e tenendo conto della scala è di 2000

Esso è dettagliato e l'errore di graficismo è

$$0,2 \text{ mm} \cdot 2000 = 40 \text{ cm}$$

Il territorio italiano è diviso in 35 zone principali di lato 20 km, M modo che sia equivalente e le deformazioni siano trascurabili;   
 angolari e lineari   
 e ulteriormente in zone secondarie

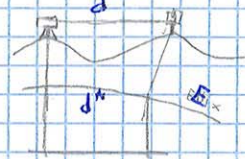
Così non c'è problema a parlare di angoli, corde e geodetiche

INSERIMENTO DI DISTANZE

A questo punto bisogna vedere quando e come INSERIRE UNA DISTANZA MISURATA con distanziometro ~~in carta~~ SULLA CARTA, visto come si confonde la curva con segmento

Dopo la misura con distanziometro, tenendo conto delle condizioni atmosferiche (x misura digitale) e nota la posizione da cui si fa la misura

Si proietta la distanza sulla carta passando x la SUPERFICIE DI RIFERIMENTO rispetto alla quale si proietta e si ottiene una distanza  $d' \neq d$  (soprattutto in livellazioni trigonometriche)   
 Da qui si passa alla cartografia



↓ della distanza   
 cioè c'è doppia proiezione e la varianza si modifica x la legge di propagazione   
 per una funzione generica f; nota lo sqm di  $x_i$  si ha

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \sigma_p^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + \dots$$

↓   
 0 (nel caso di incorrelazione)   
 ↓   
 covarianza



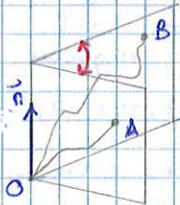
## STRUMENTI DI MISURA

1 Si è visto che lo scopo della topografia è conoscere, misurare e rappresentare la forma

↓  
bisogna saper misurare e trattare i dati d'osservazione

### 2 PARAMETRI

→ **angolo azimutale** → è l'angolo diedro formato da due piani del fascio avente come generatrice la verticale  $x O$  e passanti  $x A$  e  $B$



↓  
in un punto s'individua la verticale e tra i piani infiniti aventi come generatrice  $\vec{n}$  si valutano i piani tra A e B

La misura avviene con un goniometro tenuto normale a  $\vec{n}$

→ **distanza zenitale** → non è una vera e propria distanza ma è riferita a uno zero, associato alla direzione dello zenit.  
È l'angolo giacente sul piano verticale definito dalla normale e dalla congiungente  $OA$

→ **distanza reale** → è la lunghezza del segmento che congiunge A e B

→ **distanza topografica** → è la lunghezza dell'arco di geodetica (cioè sulla superficie di riferimento) che unisce l'intersezione le proiezioni di A e B

→ **distlivello** → è la differenza di quota tra A e B

3 **Teodolite**: nel tempo sono cambiate le proprietà eccetto il meccanismo di rotazione perché il principio base è la rotazione attraverso la normale e la necessità non solo di guardare ma di **COLIMARE** (individuare con precisione con un reticolo) A e B. Poiché in funzione dell'inclinazione del cannocchiale si misura ~~un~~ l'angolo zenitale, una volta collimato un punto si sfrutta un cerchio solidale al cannocchiale che ruota con esso e si ha che

- ROTAZIONE DELL'ALIDADA: dà l'angolo azimutale (su circonferenza orizzontale)
- ROTAZIONE DEL CANNOCCHIALE: dà l'angolo zenitale (su circonferenza verticale)

↓  
rispetto agli inizi, ora la lettura non è più ottica ma elettronica e inoltre si definisce l'inclinazione dell'asse principale  $\alpha$  (verticale) una volta si dava ~~so~~ con la livella ma con il compensatore **ELETTRONICO** (o livella elettronica)

+  
ora include il distanziometro, creando uno strumento detto **STAZIONE TOTALE** (teodolite + distanziometro) → dà una misura diretta della distanza

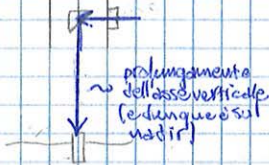
+  
alcuni dispositivi hanno la possibilità di osservare in modo automatico certi punti retroflettenti (prismi) perché sono motorizzati particolari

↓  
però la struttura meccanica è la stessa

↓  
i punti sono individuati in modo automatico perché è motorizzato (la rotazione avviene in automatico)



III) Il viteone è forato in modo da permettere in maniera meccanica ad ottica con il PIOMBINO OTTICO, la con (prisma in genere sull'alidada che permette di vedere se  $q_1$  quando è verticale intercetta il picchetto - è collegato meccanicamente all'alidada e dunque solidale ad essa)

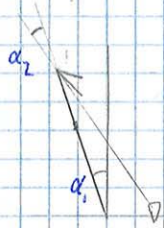


Caso IIIa) : VICINANZA AL PICCHETTO

Si suita leggermente il viteone e si trasla leggermente con l'aiuto del piombino, la base finché non c'è centratura (senza rotazioni perché se no c'è il rischio di perdita della verticalità)

Caso IIIb) : NON VICINANZA AL PICCHETTO

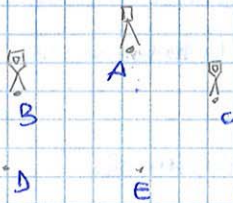
L'operazione è velocizzabile non rendendo subito la verticalità ma ruotando in modo che il piombino veda il punto e poi ruotando. La rotazione non avviene con le razze ma con le viti dei treppiedi che ne gestiscono la lunghezza, alzandone o abbassandone le aste e bloccandone la lunghezza. Sistemato il piombino, si ruota intorno all'asse  $q_1$  di un angolo  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$ . Quando poi si mette in bolla, cioè si mette in verticale, si osserva che ci si porta in modo abbastanza preciso proprio sulla verticale passante x il punto di riferimento (perché gli angoli sono simili)



A volte la base non è composta da corpo unico ma ci sono

→ BASE DEL TREPIEDE

→ BASETA : essa è comoda perché x la messa in stazione ci si può basare invece che con il teodolite con un SEGNALE ANGOLARE, dando un CENTRAMENTO FORZATO



il vantaggio è che con misurazioni con più punti si può farre il segnale angolare in corrispondenza di uno di essi e così si può fare più misure senza dover rifare la messa in stazione. Fatte le misure in A, infatti, è sufficiente togliere il teodolite in A e scambiarlo con il segnale posto in B, senza dover rifare la messa in stazione e con una centratura di altissima precisione

questo procedimento è detto **centramento forzato**

↳ Nei documenti occorre scrivere i gradi primi e secondi centesimali (quindi 4 cifre decimali - spesso però gli strumenti si arrestano alla III cifra)



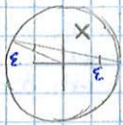
**7 Errore di collimazione:** è dovuto alla non ortogonalità tra gli assi  $a_2$  e  $a_3$  e dunque l'angolo azimutale è sbagliato secondo un errore

$$\epsilon_c = \frac{c}{\sin z}$$

L'errore è proporzionale al reciproco del seno dell'angolo azimutale, x cui allo zenit questo errore non esiste  
 In questo caso si può usare sempre la regola di Bessel ruotando l'ali stria e il cannocchiale visto che, cambiando di segno, l'errore si annulla

↓ stesso risultato e stesso metodo

**8 Errore di eccentricità:** è dovuto alla non coincidenza tra centro del goniometro e l'asse primario  $a_1$ , x cui l'asse di rotazione non passa x il centro goniometrico



↓ anche questo errore è eliminabile con la regola di Bessel, ruotando di  $180^\circ$  intorno all'asse effettivo di rotazione e considerando i valori azimutali

↓ quindi questi 3 errori sono **ELIMINABILI**

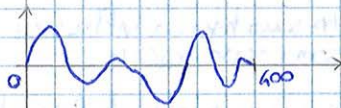
**4 Errore di verticalità:** si ha quando l'asse primario non è verticale (dipende dalla sensibilità della livella), x cui non è misurabile l'angolo azimutale (fattibile solo se  $a_1$  è verticale) ma valori approssimati. Si dimostra che l'errore nell'angolo azimutale vale

$$\epsilon = v \sin \alpha \cot \alpha z$$

$\alpha$  = direzione principale in cui c'è errore di verticalità (non nota)  
 $v$  = scarto di  $a_1$  rispetto alla verticale

Con il metodo di Bessel, se si ruota di  $180^\circ$  i valori cambiano ma il seno e la cotangente hanno gli stesso segno x cui in questo modo non è eliminabile. Si ha così un **ERRORE SISTEMATICO** non eliminabile e da rendere accidentale con una buona messa in stazione e controllando ogni volta la messa in stazione

**10 Errore di graduazione dei cerchi:** i cerchi di base non sono perfetti e le suddivisioni fatte non sono identiche, x cui se si graficassero gli errori da 0 a 360 gon, ci sarebbero errori che però si compensano e la somma è 0 (errori positivi e negativi con elemento fisso di partenza). Dalla direzione considerata però c'è il rischio che l'errore sia maggiore (se le due scelte hanno errore positivo e negativo, l'errore totale nella differenza è massimo)



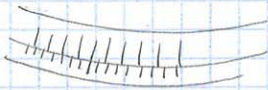
Il sistema x eliminare questo errore è usare tutto il cerchio facendo letture man mano ruotando il goniometro (tanto non conta lo  $\rho$ ) e facendo la media. Queste letture in questo modo sono dette **strati** e permettono di ridurre gli errori



→ LEICA-WILD: si usa un pendolarismo basato sul pelo libero ~~ref~~ di un liquido (a cuneo ottico) riflettente

### 13 METODI DI LETTURA DEI CERCHI

→ **nanio**: è il metodo più antico ma esiste una corrispondenza elettronica di tale sistema



È un cerchio graduato con uno zero che viene associato a una graduazione fine (suddivisione in 20 parti) non identica a quella propria del cerchio graduato (19 parti del goniometro corrispondono a 20 parti del nanio - più fine).  
 Dunque guardando lo zero capiterà una suddivisione in cui a un certo punto gli indici coincidano e da qui la lettura si fa prendendo da sotto la parte mancante

infatti quando si fa lettura si fa  
 → LETTURA GREZZA (approssimata - es  $19^{\circ} 40'$ )  
 → LETTURA FINE

+

si tende a fare una scala con suddivisione diversa dalla prima perché i cerchi principali e secondari sono di materiale fotocinisi (una volta era in metallo) perché fanno passare luce, a seguito delle incisioni ravvicinate, si hanno fenomeni frange d'interferenza di dimensione molto maggiore al singolo tratto (20 volte di più) e, guardando lo sfasamento di tale onda, si può valutare il valore frazionario con alta precisione



↓  
 letto elettronicamente

#### ~~TEORIE ESGL:~~

#### ↳ Principi di misura elettronica

i metodi sono classificati a seconda dei metodi

→ CERCHI CODIFICATI: sono cerchi dove esiste una zero → lettura assoluta

→ CERCHI GRADUATI: sono cerchi suddivisi in cui non si può sottrarre una zero, in modo identico a cui si fa misura la direzione angolare relativa (confronto tra le direzioni)

Un'altra distinzione dei metodi di lettura deriva dal metodo fisico di lettura

→ lettura statica: le uniche cose in moto sono l'alidada e il cannocchiale

→ lettura dinamica: ci sono motori che ruotano anche il cerchio azimutale e zenitale (non solo l'alidada e il cannocchiale)

#### Letture assoluta

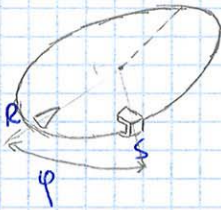
Supponendo di rettificare il cerchio goniometrico, se ne usa una piccola parte e la si divide in parte, fino a 200 parti (la metà).

Poi se ne prende una seconda striscia di uguali dimensioni e si fa un'altra suddivisione divisa a due e così via (si può fare non all'infinito ma una potenza di due).

L'indice di lettura ha una certa posizione e ha dei fotodiodi, a cui facciamo passare luce, in parte si vede e non si vede, ciò può essere interpretato in codice come 1 e 0 e si ottiene un codice binario che corrisponde alla lettura



Questi sono i metodi in generale ma ogni casa costruttrice adotta propri metodi e uno particolare è il **metodo di lettura dinamico**, metodo assoluto x cui il cerchio di misura (prima fermo) ruota x azione di due sensori R e S.



Uno di essi è solidale al basamento e l'altro lo è all'alidada e si sa che occorre calcolare l'angolo  $\varphi$ .  
Il cerchio è suddiviso in 1026 intervalli chiariscuri e sembra non ci siano novità dal metodo statico incrementale ma in realtà i chiariscuri rappresentano dall'analogico un'onda quadra di tipo tale.  
A questo punto si individua un marker e quando arriva a S s'avvia il conteggio dei chiariscuri che termina quando è a R, misurando così il conteggio dei chiariscuri.

↳ a questo punto è possibile misurare lo sfasamento delle onde quadre misurate in R e S (misura grezza fine che si accompagna alla misura grezza)

Si osserva che però lo sfasamento è riferito all'intero cerchio e dunque non c'è un'onda ma ce ne sono 1026, x cui da una parte si migliora la precisione e dall'altra si elimina con una sola lettura l'errore di graduazione. La misura così vale

$$\varphi = n\varphi_0 + \Delta\varphi$$

La lettura fine è molto precisa perché è fatta dopo aver convertito il segnale completo in forma digitale ed è analizzato da un contatore con frequenza di campionamento di 1,72 MHz e, poiché il segnale digitale è costituito da 538 millisecondi in cui c'è il campionamento, si hanno così  $538 \cdot 10^{-3} \cdot 1,72 \cdot 10^6 = 581000$  campionamenti, ossia numeri che costituiscono il segnale di tutto il cerchio. Essendo il cerchio di 100 grad, dividendo x 581000 si ha la sensibilità (0,68  $\mu$ grad) che è MIGLIORE del milligrad; tenendo però anche conto del miglioramento dovuto alla densità di probabilità ( $\pm \sqrt{2}$ ) si scende a 0,2  $\mu$ grad. Occorre però anche moltiplicare x  $\sqrt{2}/1026$ , perché si fanno 1026 misure ma anche perché l'angolo deriva dalla differenza di due misure (R e S) che hanno un loro errore ( $\times \sqrt{2}$ ).

In realtà in condizioni reali si osserva che lo scarto è pari a 0,05  $\mu$ grad, x cui è comunque lo strumento più preciso perché si hanno valori a 5-6 cifre decimali.

Es

27,28158

↳ in teoria si arriva al centesimo di milligrad, in pratica si arriva a metà della sesta cifra

## 15 GESTIONE DELL'ERRORE SISTEMATICO

↳ **precisione**: misura la DISPERSIONE



↳ **accuratezza**: misura l'ERRORE SISTEMATICO delle misure, associato allo spostamento della quantità (se la misura è accurata, non c'è errore sistematico)

