NUMERO: 1592A - ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Rizzi

MATERIA: Ingegneria Edile, Prof.Butera

1

LEZIONE DEL 04/03/14

I fluidi non oppongono resistenza alla variazione di forma e sono permanenti.
Più piccola è la velocità del fluido, più piccola è l'opposizione alla variazione di forma.
I fluidi si dividono in:
LIQUIDI: oppongono una grande resistenza alle forze di volume.
GAS: non oppongono ~~una grande resistenza~~ variazioni a forze di volume.
Quando studiamo l'acqua o altri liquidi, non la studiamo a livello MICROSCOPICO ma a livello MACROSCOPICO.
Per noi il punto, la particella, sono elementi che hanno una dimensione pari a quella del REV (Volume rappresentativo elementare). Cioè il REV è quella dimensione (al di sotto del millimetro) per la quale le grandezze della meccanica sono ben descritte.
Per esempio se prendiamo in considerazione la DENSITÀ:

A seconda del mio volume di indagine, avremo che se il volume è piccolo, la densità non è ben definita. Quindi il mio

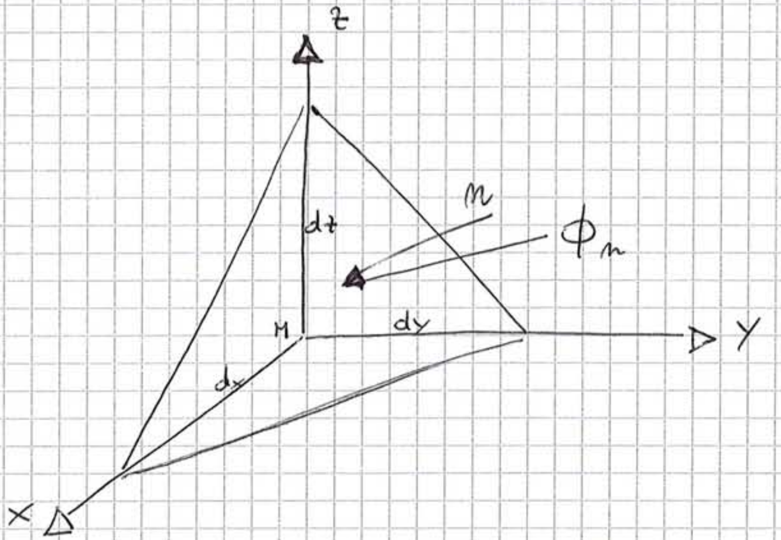

campionamento mi darà un valore della densità che oscilla. Via via queste oscillazioni si smorzano fino a quando arrivo alla dimensione del REV. Esso quindi è rappresentativo di tutti gli stati che si trovano all'interno, per cui quando io vedo a studiare su una dimensione pari al suo REV avrò sempre lo stesso valore.
Le UNITÀ DI MISURA che utilizziamo sono quelle del SISTEMA INTERNAZIONALE.

| | |
|---|---|
| Massa | Kg |
| Lunghezza | m |
| Tempi | s |
| Forze | N |

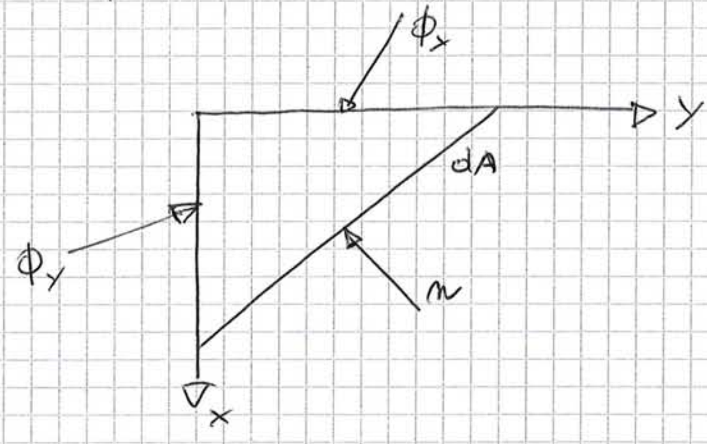
Quindi il sistema di forte ~~$\Pi$~~ $\Pi$ sarà la somma di tutte le $d\Pi$ e quindi faccio l'integrale:

$$\overline{\pi} = \int d\Pi = \int_A \phi_n \, dA$$

Adesso vogliamo capire ~~come~~ questo $\phi_n$ come varia a seconda del punto M e a seconda di come oriento la giacitura dello spazio e quindi a seconda del vettore $\overline{n}$.
$\phi_n$ cambia in funzione di dove metto M. Vediamo ora come si caratterizza in funzione di $n$.




Per semplicità facciamo il disegno sul piano xy.




Questo tetraedro subisce forze da ~~tutti~~ tutti i lati:
Sulla faccia xz agisce una sforzo $\phi_y$. ~~per~~ Lo chiamo così perché agisce su una faccia che ha come perpendicolare l'asse y.
Stessa cosa vale per $\phi_x$ e $\phi_n$.

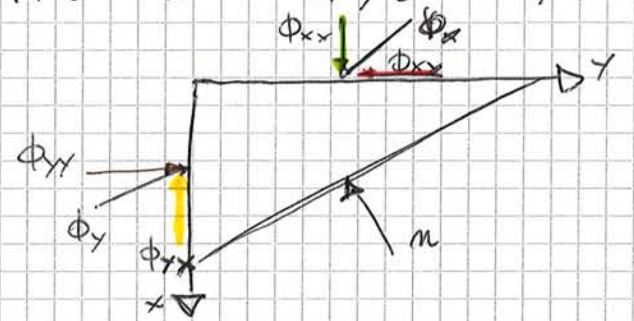
Il nostro sforzo $\phi_n$ non sappiamo come sia orientato. Quindi anche lo sforzo $\phi_n$ avrà una componente lungo x, una lungo y e una lungo z. Per individuarli metto un secondo pedice.

è la componente lungo x dello sforzo che agisce sulla faccia che ha come perpendicolare l'asse x.

$$\phi_{nx} = \phi_{xx} \cos nx + \phi_{xy} \cos ny + \phi_{zx} \cos nz$$ → nel disegno è la componente verticale al foglio.

$$\phi_{ny} = \phi_{xy} \cos nx + \phi_{yy} \cos ny + \phi_{zy} \cos nz$$

$$\phi_{nz} = \phi_{xz} \cos nx + \phi_{yz} \cos ny + \phi_{zz}\, nz$$




Quando la componente dello sforzo ha i due pedici uguali $\phi_{xx}$ è una componente normale.
Quando la componente dello sforzo ha i due pedici diversi $\phi_{xy}$ è una componente tangente alla superficie.

$\phi_y$ invece è lo sforzo comunque orientato che agisce su una faccia che ha per perpendicolare l'asse y.
Di $\phi_y$ prendo la componente lungo y: è normale alla superficie.
Se invece prendo la componente lungo x che si chiama $\phi_{yx}$ vedo che è tangente alla superficie.

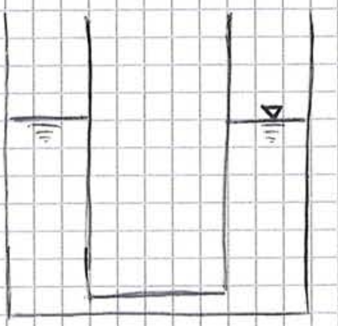
Quindi in definitiva $\phi_{xx}$, $\phi_{yy}$ e $\phi_{zz}$ sono delle componenti normali $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$
Le componenti $\phi_{xy}$ e $\phi_{yx}$ sono ~~tangenziali~~ componenti tangenziali $(\tau_z)$
Le componenti $\phi_{zx}$ e $\phi_{xz}$ sono componenti tangenziali $(\tau_y)$
Le componenti $\phi_{yz}$ e $\phi_{zy}$ sono componenti tangenziali $(\tau_x)$
Può capitare che comunque sia orientata la faccia obliqua, ovvero l'orientamento di $n$, lo sforzo sia sempre e solo normale: in questo caso il sistema si dice ISOTROPO.
In questo caso: $\vec{\phi}_n = p \cdot \vec{n}$

L'intensità dello sforzo si chiama pressione mentre $\vec{n}$ è sempre la direzione.

# VISCOSITÀ

(7) LEZIONE DEL 05/03/14

Prendiamo due cilindri coassiali. Ponendo in rotazione il cilindro esterno, a seguito ~~della~~ ~~[illegible]~~ degli sforzi tangenziali che si innescano all'interno del fluido, si mette in moto anche il cilindro interno. Se io misuro la forza necessaria per tenere fermo il cilindro interno, questa forza risulta:



- proporzionale all'area della ~~[illegible]~~ superficie laterale del cilindro interno
- direttamente proporzionale alla variazione di velocità tra il cilindro interno e quello esterno. Se teniamo fermo il cilindro interno $\omega R_i = 0$
- inversamente proporzionale alla distanza fra i due cilindri $(R_e - R_i)$

$$T \propto A \frac{\omega R_e - \omega R_i}{R_e - R_i}$$

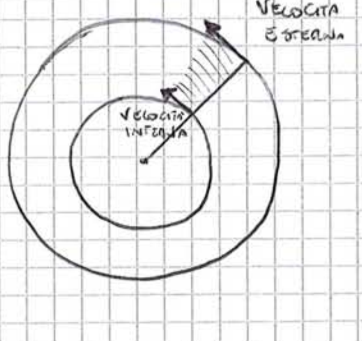
$$T = \underbrace{\mu}_{\text{COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ: VISCOSITÀ DINAMICA}} A \frac{\overbrace{\Delta v}^{\text{VARIAZIONE DI VELOCITÀ}}}{\underbrace{\Delta r}_{\text{DIFFERENZA DI RAGGIO}}}$$

La forza necessaria a tenere fermo il cilindro deve essere uguale e contraria alla forza che il fluido imprime sul cilindro ($\tau$). Questo vale anche se la distanza fra i due cilindri $(R_e - R_i)$ è infinitesima.

$$\underbrace{\frac{T}{A}}_{\text{SFORZO TANGENZIALE DEL FLUIDO SULLA SUPERFICIE INTERNA}} = \tau = \mu \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}$$

Vediamo i cilindri dall'alto:



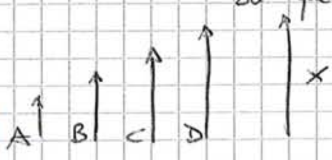

Le varie traiettorie hanno velocità diverse e questo fa sì che ci sia attrito all'interno del fluido. (Variazione di velocità lungo il raggio)

CASO PIÙ GENERICO:

$$\boxed{\tau = \underbrace{\mu}_{\text{VISCOSITÀ DINAMICA}} \frac{dv}{dn}}$$

LEGGE DI NEWTON

intendiamo dire che la velocità varia non in direzione del moto, ma n è la direzione perpendicolare di quella del moto.




C'è una variazione di velocità nella direzione trasversale al moto. Questo fa sì che nascano le $\tau$.

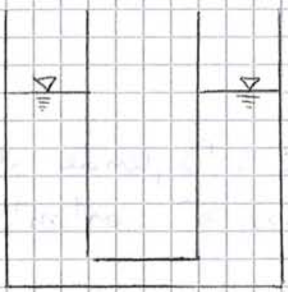
La viscosità dinamica $\mu$ si misura in $Kg/m \cdot s$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu_{ACQUA} = 10^{-3}\ Kg/m \cdot s \\ \mu_{ARIA} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ Kg/m \cdot s \end{array}}$$

# LEZIONE DEL 05/03/2014

## VISCOSITÀ

Prendiamo due cilindri coassiali. Ponendo in rotazione il cilindro esterno, a seguito degli sforzi tangenziali che si innescano all'interno del fluido, si mette in moto anche il cilindro interno. Se io misuro la forza necessaria per tenere fermo il cilindro interno, questa forza risulta:



- proporzionale all'area della superficie laterale del cilindro interno;
- direttamente proporzionale alla variazione di velocità tra il cilindro interno e quello esterno. Se teniamo fermo il cilindro interno $R_i\omega = 0$
- inversamente proporzionale alla distanza fra i due cilindri $(R_e - R_i)$.

$$T \propto A \frac{\omega R_e - R_i \omega}{R_e - R_i}$$

$$T = \mu A \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ: VISCOSITÀ DINAMICA

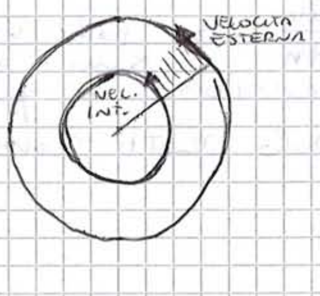
La forza necessaria a tenere fermo il cilindro deve essere uguale e contraria alla forza che il fluido imprime sul cilindro $(\tau)$. Questo vale anche se la distanza fra i due cilindri $(R_e - R_i)$ è infinitesima.

$$\underbrace{\frac{T}{A}} = \tau = \mu \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

SFORZO TANGENZIALE DEL FLUIDO SULLA SUPERFICIE INTERNA

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}$$

Vediamo i due cilindri dall'alto:




le varie traiettorie hanno velocità diverse e questo fa sì che ci sia attrito all'interno del fluido. (Variazione di velocità lungo il raggio).

CASO PIÙ GENERICO:

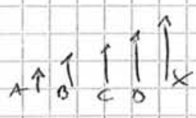
$$\boxed{\tau = \mu \frac{dv}{dn}}$$

LEGGE DI NEWTON

intendiamo dire che la velocità varia non in direzione del moto ma n è la direzione perpendicolare di quella del moto

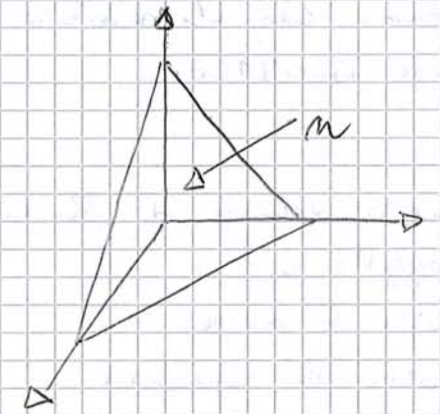
$\mu$ = la viscosità dinamica si misura in $kg/m \cdot s$

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_{ACQUA} &= 10^{-3}\ kg/m \cdot s \\ \mu_{ARIA} &= 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ kg/m \cdot s \end{aligned}}$$




C'è una variazione di velocità nella direzione trasversale al moto. Questo fa sì che nascono le $\tau$.

Sul nostro tetraedro avevamo sulla faccia inclinata lo sforzo n e poiché tutte le τ sono nulle questa volta sappiamo anche la sua direzione. (secondo $\vec{n}$)



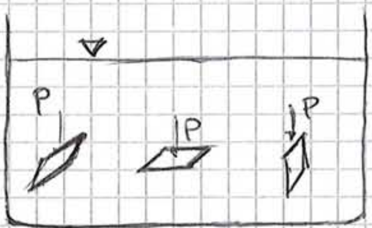

$$\boxed{\phi_n = \sigma_n \cdot \vec{n}}$$ dato che siamo in statica e quindi $V=0$

le componenti saranno:

$$\phi_{nx} = \sigma_n \cos\widehat{nx} = \sigma_x \cancel{\cos\widehat{nx}}$$
$$\phi_{ny} = \sigma_n \cos\widehat{ny} = \sigma_y \cancel{\cos\widehat{ny}}$$
$$\phi_{nz} = \sigma_n \cos\widehat{nz} = \sigma_z \cancel{\cos\widehat{nz}}$$

$$\sigma_x = \sigma_n$$
$$\sigma_y = \sigma_n$$
$$\sigma_z = \sigma_n$$

Quindi vedo che lo sforzo normale su queste facce è uguale: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n$.
Quindi in condizioni di quiete, lo sforzo che agisce in un punto, è sempre normale all'elemento considerato, e ha lo stesso intensità qualunque sia la giacitura, ovvero l'elemento piano considerato. Il sistema è ISOTROPO.
Vediamo cosa vuol dire in concreto. L'intensità degli sforzi si chiama pressione.
Immaginiamo di avere un contenitore e un elemento di dimensioni infinitesime.




Quanto vale lo sforzo che agisce nel punto quando l'elemento è piano? Sarà uguale alla pressione p.
Se prendo l'elemento e lo metto verticale lo sforzo sarà sempre uguale a p.
Se lo mettiamo inclinato vale sempre p

Questa è una caratteristica importante dell'idrostatica.

$\rho\vec{F} - \text{grad}\, p = 0$

$$\boxed{\rho\vec{F} = \text{grad}\, p}$$ EQUAZIONE INDEFINITA DELL'EQUILIBRIO IN CONDIZIONI STATICHE

Se $\vec{F} = \text{grad}\, \mu$ allora:

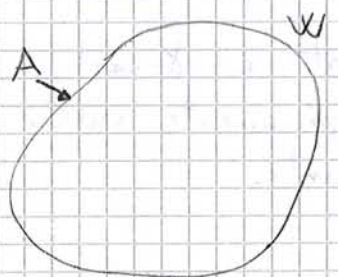
$\rho\, \text{grad}\, \mu = \text{grad}\, p$

Se su una superficie abbiamo pressione costante il suo gradiente = 0. Una superficie qualunque che ha pressione costante si chiama superficie ISOBARICA.

Se $\text{grad}\, p = 0$ vuol dire che il $\text{grad}\, \mu = 0$; cioè una superficie equipotenziale è anche isobarica e viceversa.

Su questo si basa il principio della bolla

EQUAZIONE GLOBALE DI EQUILIBRIO in condizioni STATICHE.




Immagino di avere una massa fluida e al suo interno, isolo un volume W che ha una superficie di contorno A.

Per tutti gli elementi infinitesimi vale:

$\rho F = \text{grad}\, p$

Quindi se vado ad integrare vale a dire che per tutti i punti della massa fluida vale l'equazione di equilibrio locale.

$$\underbrace{\int_W \rho\vec{F}\, dW}_{\substack{\text{FORZE DI MASSA}\\ \text{APPLICATE ALVOLUME } W\\ \vec{G}}} = \underbrace{\int_W \text{grad}\, p\, dW}_{*}$$

$$* \int_W \text{grad}\, p\, dW = \int_W \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) dW$$

Passiamo dall'integrale di volume all'integrale di superficie.

$$= \int_A -p\, \underbrace{\left(\cos \widehat{mx}\, \vec{i} + \cos \widehat{my}\, \vec{j} + \cos \widehat{mz}\, \vec{k}\right)}_{\text{versore } \vec{m} \text{ normale alla superficie}} dA$$

$$= \int_A -p\, \vec{m}\, dA = -\vec{\Pi}$$ FORZE APPLICATE SUL CONTORNO

$$\boxed{\vec{G} + \vec{\Pi} = 0}$$ EQUAZIONE GLOBALE

N.B. questo equilibrio non dipende dal valore di pressione dell'interno del fluido ma solo dalle spinte che ci sono sul contorno (restante parte del fluido o parete)

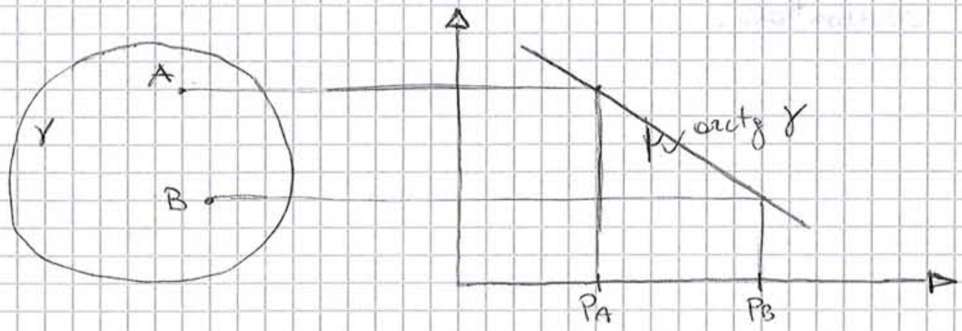
La legge con cui varia la pressione in funzione di z è lineare.
Se conosciamo il valore della pressione in un punto, possiamo conoscere il valore della pressione in qualsiasi altro punto.

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

$$P_B = P_A + \gamma (z_A - z_B)$$

Se B è più alto di A $z_A - z_B < 0$

ESEMPIO




$$z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost}$$

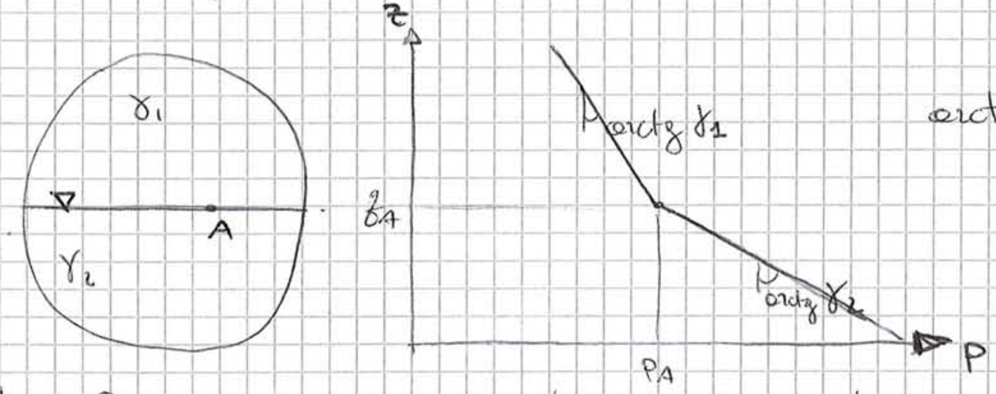
$$\gamma z = -P + C_1$$

$$\gamma dz = -dP$$

$$\gamma = -\frac{dP}{dz}$$

Più il peso specifico è grande e maggiore sarà l'angolo

ESEMPIO



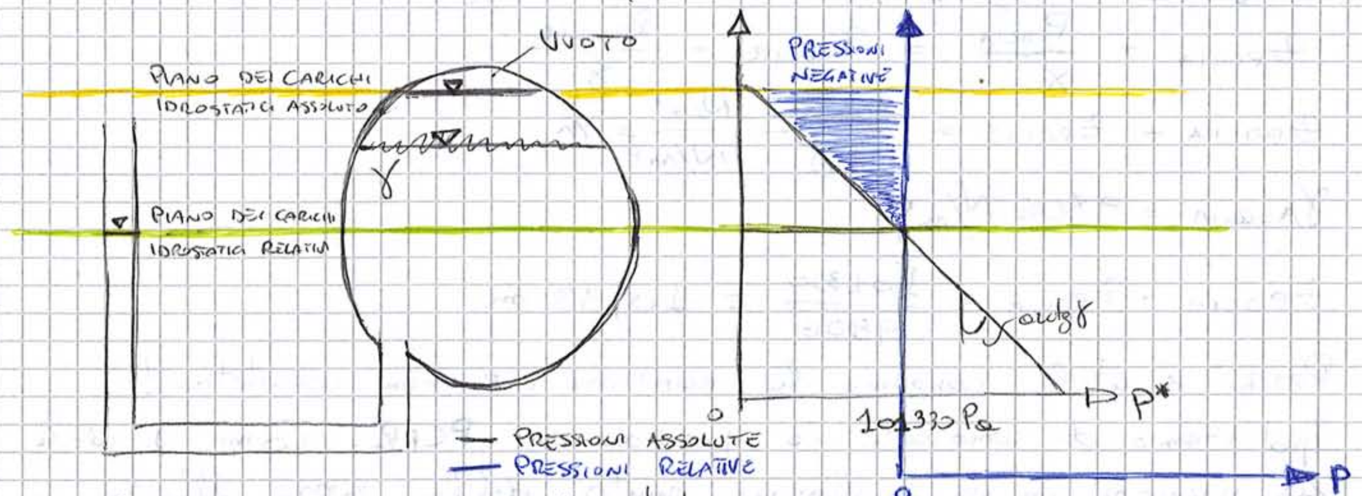

$\gamma_2 > \gamma_1$

arctg $\gamma_2 >$ arctg $\gamma_1$

La legge di STEVIN ci dice che la quota piezometrica del fluido 1 si mantiene costante all'interno del fluido 1, mentre la quota piezometrica del fluido 2 si mantiene costante all'interno del fluido 2. Ma la quota piezometrica del fluido 1 non è uguale alla quota piezometrica del fluido 2

LEZIONE DEL 11/03/2014 8:30 - 11:30

Abbiamo un serbatoio chiuso che è in collegamento con l'esterno attraverso un tubicino (piezometro)




Il fluido esce da questo tubicino e si dispone ad una quota di equilibrio con la pressione che riceve all'esterno con quella che riceve da parte del recipiente. Riportiamo nel grafico l'andamento delle pressioni. (pressioni assolute).

Poiché non posso avere pressioni negative il tratto si fermerà in corrispondenza dello zero. Il fluido si fermerà in corrispondenza di quella quota e sopra c'è il vuoto. Nella realtà, quando la pressione inizia ad essere piuttosto bassa, si raggiunge la tensione di vapore e il liquido passa allo stato di vapore. Quindi al di sotto del valore di pressione abbiamo il liquido e sopra il vapore del liquido.

Ragionando invece con le pressioni relative, siccome ho spostato l'asse verticale, più avanti, abbiamo una parte del grafico che ha pressione negativa.

Possiamo quindi definire due piani:

Ragioniamo prima con le pressioni relative: esiste una quota che individua un piano dove la pressione relativa è uguale a zero. Dalla legge di Stevin $z + \frac{p}{\gamma} = cost$, se impongo pressione relativa uguale a zero trovo una zeta, e questa zeta è quella che individua un piano orizzontale che si chiama PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVO.

Ragioniamo ora con le pressioni assolute: esiste una ~~piano~~ quota che individua un piano orizzontale dove la pressione assoluta è uguale a zero, e questo si chiama PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI

Se invece abbiamo il PCIA:
Applico la legge di stevin:

$$z_{p.c.i.a} + \frac{p_{pcia}}{\gamma} = z_A + \frac{p_A}{\gamma}$$

$p_{pcia} = -101330$

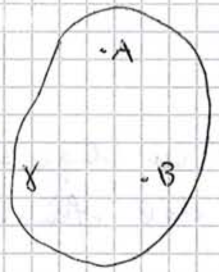
$$p_A = \underbrace{\gamma \underbrace{\left( z_{pcia} - z_A \right)}_{h_A^*}}_{p_a^*} - 101330 \text{ Pa}$$

$p_A = p_A^* - 101330$ perché abbiamo detto che: $p_{rel} = p_{ass} - 101330$

$h_A^*$ è sempre $\geq 0$ perché non esiste $p^* < 0$

Quindi in definitiva la pressione assoluta o relativa in un punto è pari al prodotto del peso specifico del fluido per l'affondamento del punto stesso rispetto il corrispondente piano dei carichi idrostatici.

ESEMPIO




$p_A$ nota

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

$$p_B = p_A + (z_A - z_B)\gamma$$

Se è nota la distanza fra i due punti $\Delta$ allora:

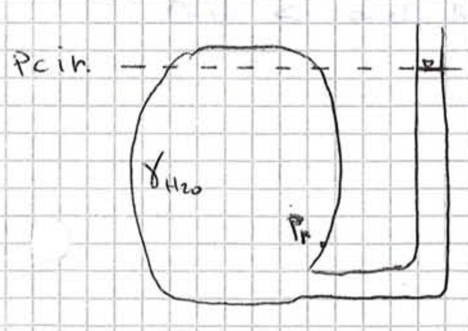
$$p_B = p_A + \underbrace{\Delta\gamma}_{\text{incremento di pressione}}$$

Se invece è noto $p_B$ e voglio conoscere $p_A$:

$$p_A = p_B + \underbrace{(z_B - z_A)}_{\text{negativo}}\gamma$$

$p_A = p_B - \Delta\gamma$ quindi il $|\Delta|$ è dato in valore assoluto e ci metto il segno $-$ davanti

ESERCIZIO



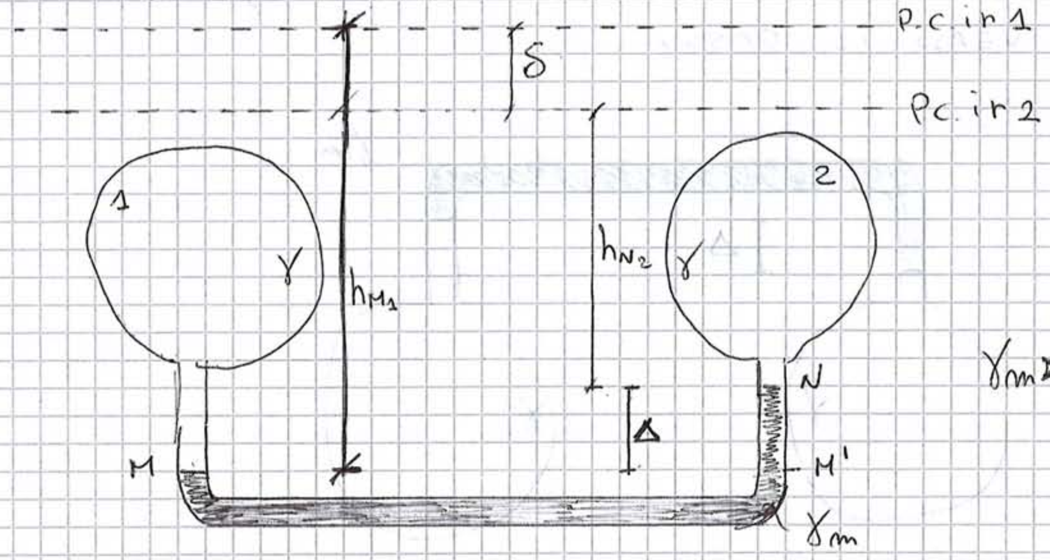

Voglio conoscere p in qualsiasi punto e quindi uso il piezometro. Adesso conosco il piano dei carichi relativo

$p_r = 300000$ Pa

$\gamma_{H_2O} = 9806$

Posso usare il piezometro o serve una colonna molto alta?

Un altro modo per misurare la pressione è il MANOMETRO DIFFERENZIALE.




$\gamma_m > \gamma$

Il liquido manometrico si porta a livelli diversi nei due rami del manometro sul quale si legge un dislivello Δ fra i due menischi.

se M appartiene a $\gamma_m$ $\Rightarrow$ $P_M = P_{M'}$

se M appartiene a $\gamma$ $\Rightarrow$ $P_M = \gamma \cdot h_{M1}$

$P_{M'} = \gamma_m \cdot \Delta + P_N$ dove $P_N = h_{N2} \cdot \gamma$ cioè $P_N = \gamma(h_{M1} - \Delta - \delta)$

Andiamo ad eguagliare $P_M$ e $P_{M'}$

$$\gamma h_{M1} = \gamma(h_{M1} - \Delta - \delta) + \gamma_m \cdot \Delta$$

$$\cancel{\gamma h_{M1}} = \cancel{\gamma h_{M1}} - \Delta\gamma - \delta\gamma + \gamma_m \cdot \Delta$$

$$0 = -\gamma\delta - \Delta\gamma + \gamma_m \cdot \Delta$$

$$\delta = \frac{\gamma_m \Delta - \Delta\gamma}{\gamma} = \Delta\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)$$

Se $\gamma_m > 2\gamma$ $\rightsquigarrow$ $\delta = \Delta \cdot (>1)$

$$\Delta < \delta$$

Vediamo come si misura la pressione
Nel sistema internazionale in Pascal

$$1\ Pa = 1\ \frac{N}{m^2}$$

Conversioni

$$1\ atm = 101330\ Pa$$

$$1\ bar = 10^5\ \frac{N}{m^2}$$

$$S \cdot \eta = \int_A dS \cdot y = \int h \cdot \gamma \cdot dA\, y = \int \gamma \cdot x \operatorname{sen}\alpha \cdot y\, dA = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int xy\, dA$$

$$S \cdot \xi = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int x^2 dA$$

$$\cancel{\gamma} \cdot A \cdot h_G\, \xi = \cancel{\gamma} \operatorname{sen}\alpha \int x^2 dA \qquad h_G = \operatorname{sen}\alpha \cdot x_G$$

$$x_G \cdot \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \cdot A \cdot \xi = \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \int x^2 dA$$

$$\xi = \frac{\int x^2 dA}{x_G \cdot A} = \frac{I_{es}}{M_{statico}}$$

$I_{es}$ è il momento d'inerzia I della superficie A rispetto alla retta di sponda

$M_{statico}$ è momento statico di A rispetto alla retta di sponda

$$S\eta = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int x\cancel{y}\, dA$$

$$\cancel{\gamma} \cdot A h_G \cdot \eta = \cancel{\gamma} \operatorname{sen}\alpha \int x\cancel{y}\, dA$$

$$A \cdot x_G \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \eta = \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \int xy\, dA$$

$$\eta = \frac{\int xy\, dA}{A \cdot x_G} = \frac{I_{xy}}{M_s}$$

$I_{xy}$ è il momento centrifugo $I_{xy}$ di A rispetto ai due assi x e y.

Conclusioni:

$$\xi = \frac{I_{es}}{M} = \frac{I_G + A \cdot x_G^2}{M} = x_G + \frac{I_G}{M}$$

$\eta = 0$ se $I_{xy} = 0$ per figure simmetriche rispetto anche a un solo asse.

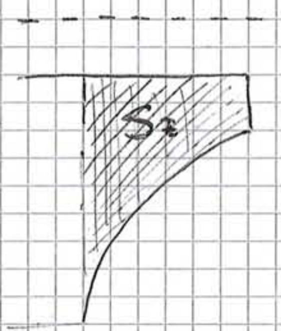
Quindi in conclusione si può dire che:

- la posizione del centro di spinta è indipendente dalla inclinazione $\alpha$, ossia rimane inalterata al ruotare del piano della superficie intorno alla retta di sponda
- la $\eta$ si annulla se l'asse delle x è di simmetria della superficie A, il centro di spinta si trova cioè sull'eventuale asse di simmetria di A se questo coincide con una linea di massima pendenza.
- il centro di spinta è sempre più distante del baricentro

$$dS_x = dS \cos \widehat{nx} = \gamma \cdot h \cdot dA \cos \widehat{nx} = \gamma \cdot h \cdot dA_x$$
$$dS_y = dS \cdot \cos \widehat{ny} = \gamma \cdot h \cdot dA \cos \widehat{ny} = \gamma \cdot h \cdot dA_y$$
$$dS_z = dS \cdot \cos \widehat{nz} = \gamma \cdot h \cdot dA \cos \widehat{nz} = \gamma \cdot h \cdot dA_z$$

$$S_x = \int dS_x = \int \gamma h \, dA_x = \gamma h_G A_x$$
$$S_y = \int dS_y = \int \gamma h \, dA_y = \gamma h_G A_y$$
$$S_z = \int dS_z = \int \gamma h \, dA_z = \gamma \underbrace{\int h \, dA_z}_{\text{Volume } \Sigma \text{ cilindri}} =$$ peso volume tra superficie curva e p.c.I.

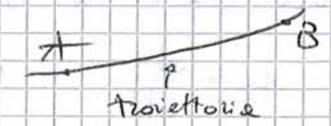
$$S_z = \gamma \cdot W$$



APPROCCIO LAGRANGIANO

Vado a studiare il movimento di una particella quindi mi interessa la sua velocità che è quella che ho in ogni punto quando lei passa di lì e mi interessa l'accelerazione della particella

Ipotizzo che la particella passa da A a B nel tempo $dt$




Nel caso dell'approccio lagrangiano calcoliamo un'accelerazione totale. In realtà la distanza AB è piccola perchè avviene in tempi $dt$.

Dico che:

$$u_B = u_A + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Quanto vale l'accelerazione della particella? la indico con $\vec{A}$. Ci limitiamo a calcolare l'accelerazione lungo $x$, per il momento.

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u_B - u_A}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\overset{u}{\frac{\partial x}{\partial t}} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\overset{v}{\frac{\partial y}{\partial t}} + \frac{\partial u}{\partial z}\overset{w}{\frac{\partial z}{\partial t}}$$

$$\boxed{A_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}}$$ ACCELERAZIONE TOTALE

Significa che la particella non è soggetta solo all'accelerazione locale $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, ma anche a un'accelerazione dovuta a queste 3 componenti che viene chiamata accelerazione convettiva (dovuta al fatto che le velocità sono diverse).

$$A_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$A_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Mentre in notazione vettoriale l'accelerazione totale è:

$$\vec{A} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

Viene chiamata regola di derivazione euleriana. Ma è un approccio lagrangiano.

Quindi ogni volta per conoscere lo spostamento successivo devo conoscere il tempo e la v nel punto dove ero finito.

LINEA DI FLUSSO

Devo sapere in che tempo le devo tracciare. Sono linee tangenti al vettore $\vec{V}$ al tempo considerato $t = t_1$

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t_1)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t_1)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t_1)}$$

Cioè io fotografo al $t = t_1$ in ogni istante i vettori velocità e faccio una linea tangente ad essi.

Se al $t = t_2$ sono in condizioni di moto vario $\Rightarrow \vec{V}$ varia $\Rightarrow$ linea di flusso non varia.

La traiettoria è diversa dalla linea di flusso

la costruisco nel tempo e vedo come $\vec{V}$ è orientata nel tempo

lo vedo in un dato istante

La traiettoria è uguale alla linea di flusso solo se il moto è stazionario, perché mi trovo sempre nella stessa posizione. e non dipende da t.

TUBO DI FLUSSO

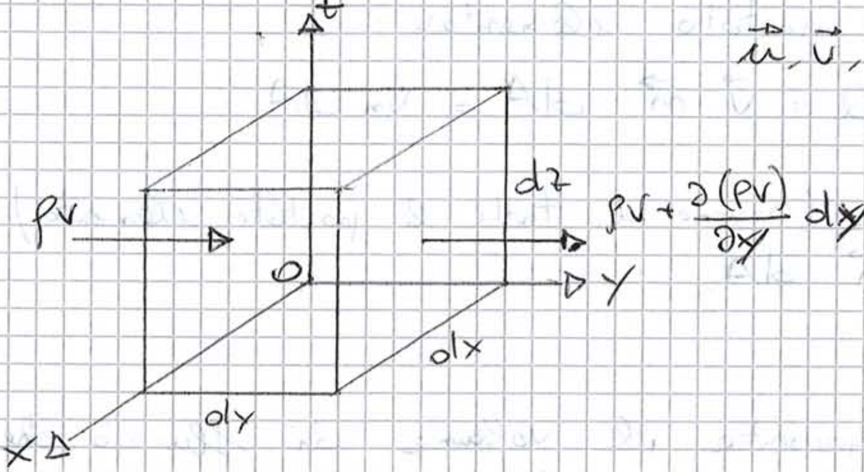
Ho una corrente, prendo una linea chiusa e ottengo un tubo di flusso quando le linee di flusso passano per la linea chiusa, cioè sul contorno e non all'interno

Il tubo di flusso non si fa attraversare dal flusso perché le linee di flusso con cui l'ho costruito sono tangenti al vettore velocità

A questo punto taglio il tubo di flusso con una sezione non necessariamente piana e ottengo:

in forma locale, cioè che deve valere in un punto.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ componenti del moto.




Nel tempo dt il volume che entra nella faccia dxdz $V \cdot dx dz dt$. Se moltiplico per $\rho$ (densità) ottengo la massa che entra nella faccia dxdz: $\rho V \, dx dz dt$.
La massa uscente invece sempre relativo alla faccia dxdz sarà:
$$\left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dx dz dt.$$
Stesso caso faccio anche nella direzione x e z.

| | Massa entrante | Massa uscente |
|---|---|---|
| // x | $\rho u \, dy dz dt$ | $\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt$ |
| // z | $\rho w \, dx dy dt$ | $\left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dx dy dt$ |

Quindi $M_e - M_u = \Delta M_{int}$.

$$\cancel{\rho u} \, \cancel{dy dz} dt - \left(\cancel{\rho u} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt$$
$$\cancel{\rho v} \, \cancel{dx dz} dt - \left(\cancel{\rho v} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dx dz dt$$
$$\cancel{\rho w} \, \cancel{dx dy} dt - \left(\cancel{\rho w} + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dx dy dt$$
$$-\frac{\partial u\rho}{\partial x} dx dy dz dt - \frac{\partial v\rho}{\partial y} dx dy dz dt - \frac{\partial w\rho}{\partial z} dx dy dz dt$$

Questo deve eguagliare la diminuzione
$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$
subita nello stesso intervallo di tempo, per effetto della variazione della densità, della massa in esso contenuta.

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x} \cancel{dx dy dz dt} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} \cancel{dx dy dz dt} - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \cancel{dx dy dz dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \cancel{dx dy dz dt} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 154

LEZIONE DEL 25/03/2014 8:30 - 11:30

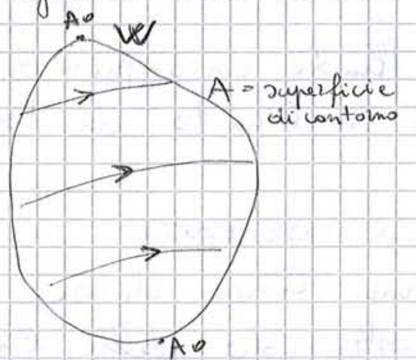
CINEMATICA

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ in forma locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{v} = 0$$ e nel caso di fluidi incomprimibili $div\vec{v} = 0$

Adesso vediamo l'equazione di continuità su un volume.

Disegnamo un volume di fluido (che lo attraversa)




La differenza fra la massa entrante e la massa uscente nel tempo di riferimento dt, è uguale alla variazione di massa che nello stesso tempo è avvenuta all'interno.

Inizio a calcolarmi la variazione di massa all'interno nel tempo dt. La massa vale $\partial \rho W$. Mentre la variazione di massa nel tempo unitario è: $\frac{\partial \rho W}{\partial t} dt$.

Se io scrivo:

$V_n\,dA \Rightarrow$ volume che attraversa la superficie dA nell'unità dt.

$\rho V_n\,dA \Rightarrow$ massa che attraversa la superficie dA nell'unità di tempo

$\rho V_n\,dA\,dt \Rightarrow$ massa che attraversa la superficie dA nel tempo dt.

$\int_A \rho V_n\,dA\,dt \Rightarrow$ differenza tra la massa entrante e quella uscente attraverso A nel tempo dt

questa è già massa entrante meno massa uscente perché $V_n$ ha un segno

Quindi:

$$\int_A \rho V_n\,dA\,\cancel{dt} = \frac{\partial \rho \overset{\text{costante}}{W}}{\partial t} \cancel{dt}$$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Se studio un fluido incomprimibile, cioè con densità costante:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e il secondo termine va a zero

$$\int_A \underset{\text{è una costante}}{\rho} V_n\,dA = 0 \Rightarrow \int_A V_n\,dA$$

Divido A in tre parti:

una superficie $A_e$ dove il flusso è entrante;

una superficie $A_u$ dove il flusso è uscente;

una superficie $A_o$ attraverso la quale non passa fluido.

$\left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right)$ = massa che esce nell'unità di tempo

$\left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right) dt$ = massa che esce nel tempo $dt$

La massa iniziale è $\rho A\, ds$

La variazione di massa ~~nell'unità di tempo~~ all'interno avvenuta nel tempo: $\frac{\partial \rho A ds}{\partial t} dt$.

Quindi

ENTRANTE − USCENTE = VARIAZIONE DI MASSA

$$\rho Q\, dt - \left(\rho Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right) dt = \frac{\partial \rho A\, ds}{\partial t} dt$$

$$\cancel{\rho Q\, dt} - \cancel{\rho Q\, dt} + \frac{\partial Q}{\partial s} \cancel{ds}\, \cancel{dt} = \frac{\partial \rho A \cancel{ds}}{\partial t} \cancel{dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0}$$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Se il fluido è incomprimibile: $\rho = \text{cost}$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Considerazioni:

Se $\frac{\partial Q}{\partial s}$ è positiva vuol dire che la funzione è crescente e quindi la portata che entra è ~~maggiore~~ minore della portata che esce, e di conseguenza la sezione trasversale diminuisce.

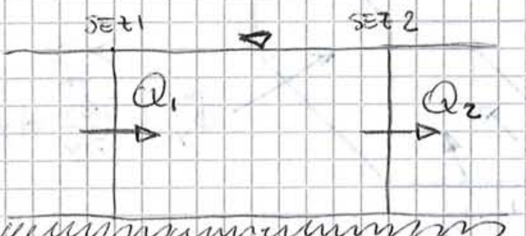
Se $\frac{\partial Q}{\partial s}$ è negativa vuol dire che la funzione è decrescente e quindi la portata che entra è maggiore della portata che ~~entra~~ esce. Se il fluido è incomprimibile la sezione trasversale aumenta.

Vediamo alcuni casi:

MOTO PERMANENTE = qualunque derivata fatta rispetto al tempo è uguale a zero (moto stazionario) $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$

Quindi: $\frac{\partial Q}{\partial s} + \cancel{\frac{\partial A}{\partial t}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$ cioè $Q$ è costante lungo $s$.

CORRENTE:




$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 \cdot V_{m1} = A_2 V_{m2}$$

Le forze di massa che agiscono sulla particella saranno date da: $F \rho \cdot dx\,dy\,dz$

Forze di superficie: in questo caso ci possono essere delle $\tau \neq 0$

Indicando da $\vec{\Phi}_z$ io non so in che direzione agisce. So solo che agisce sulla faccia perpendicolare all'asse $z$.

Sulla faccia opposta agisce lo sforzo con inclinazione generica e vale: $\vec{\Phi}_z + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dz$

Ora vado a sommare le spinte di superficie che agiscono sulla faccia opposta (somma vettoriale).

$$\vec{\Phi}_z\, dx\,dy - \left(\Phi_z + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} dz\right) dx\,dy = -\frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dx\,dy\,dz$$

In maniera analoga vado a fare la somma nella direzione $x$ e $y$.

$$\vec{\Phi}_y\, dx\,dz - \left(\vec{\Phi}_y + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} dy\right) dx\,dz = -\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dx\,dy\,dz$$

$$\vec{\Phi}_x\, dy\,dz - \left(\vec{\Phi}_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx\right) dy\,dz = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$$

Quindi la somma di tutte le forze di superficie sarà somma di tre vettori:

$$-dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)$$

Adesso che ho sia le forze di massa che le forze di superficie riscrivo la I° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA di questa particella

$$\rho F\, dx\,\cancel{dy}\,dz - dx\,\cancel{dy}\,dz\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right) = \rho\, dx\,dy\,dz \cdot A$$

$$\rho F - \rho A = \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\rho(F - A) = \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)}$$

EQUAZIONE INDEFINITA IN CONDIZIONI DINAMICHE

Vediamo come si trasforma se il fluido è in quiete.

$\vec{A} = 0 \qquad \Phi_x = p\vec{i} \qquad \Phi_y = p\vec{j} \qquad \Phi_z = p\vec{k}$

pressione

$$\rho(F - \cancel{A}) = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k}_{\text{grad } p}$$

Quindi se $a = 0$:

$$\boxed{\rho F = \text{grad } p}$$

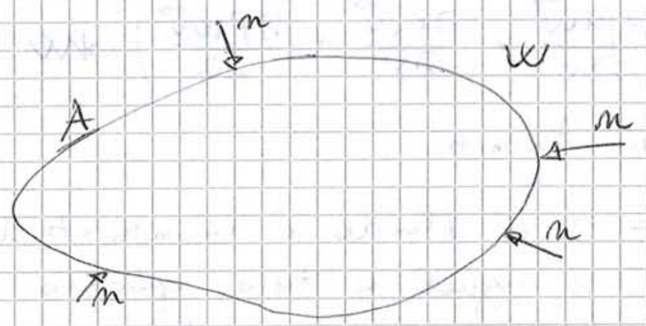
LEZIONE DEL 26/03/2014 14:30 - 16:00

Passiamo dall'EQUAZIONE INDEFINITA, all'EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO IN CONDIZIONI DINAMICHE.

Consideriamo all'interno della massa fluida in movimento ad un dato istante, un volume $W$, che avrà una sua superficie di contorno $A$ ma questa superficie è fatta di tante particelle di dimensioni infinitesime, per ciascuna delle quali vale la legge dell'equazione indefinita:

$$\rho\left(\vec{F}-\vec{A}\right)=\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

Se per ciascuna particella si applica l'equazione indefinita, sono autorizzato a integrare ciascun termine di questa equazione al volume $W$.




$$\rho\vec{F}-\rho\vec{A}=\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

Vado ad integrare:

$$\int_W \rho\vec{F}\,dW-\int_W \rho\vec{A}\,dW=\int_W\left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)dW$$

Analizziamo i singoli termini:

- $\int_W \rho\vec{F}\,dW$ = $\rho dW$ è la massa infinitesima $dm$, $F$ sono le forze per unità di massa ($F dm$). Quindi questo termine indica la forza di massa che agiscono ~~ogni particella~~ sul volume del fluido che in quell'istante è individuato da $W$.

  $\downarrow$

  $G$

- $\int_W\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)dW$ = (passo dall'integrale di volume all'integrale di superficie considerando la normale di superficie rivolta verso il volume.

  TEOREMA DI GREEN

Questa equazione integrata sul volume ha dato:

$$\vec{G} + \vec{I} + \int_A \rho \vec{V} V_n \, dA = -\vec{\Pi}$$

Il volume W di superficie A e che ha normale n in ogni punto, risulta in ogni istante in equilibrio sotto l'azione di:

$$\underbrace{G}_{\text{FORZE DI MASSA}} + \underbrace{\Pi}_{\text{FORZE DI SUPERFICIE}} + \underbrace{I}_{\text{INERZIE LOCALI}} + \int_A \rho \vec{V} V_n \, dA = 0$$

Nell'ultimo termine $V_n dA = Q$ ed esprime il volume che nell'unità di tempo passa attraverso la superficie dA.

$\rho V_n dA \Rightarrow$ massa che nell'unità di tempo passa attraverso dA

$\rho V_n dA \vec{V} \Rightarrow$ quantità di moto della massa che nell'unità di tempo passa attraverso dA. (flusso di quantità di moto)

$\int \rho V_n dA \vec{V} \Rightarrow$ quantità di moto della massa che attraversa A nell'unità di tempo.

Quando $V_n > 0$ il flusso è entrante;

quando $V_n < 0$ il flusso è uscente

Allora:

$$\int_A \rho \vec{V} V_n \, dA = \underbrace{\int_{A_e} \rho \vec{V} V_n \, dA}_{\vec{M}_e} - \underbrace{\int_{A_u} \rho \vec{V} |V_n| \, dA}_{\vec{M}_u}$$

flusso della quantità di moto entrante $\vec{M}_e$ ; $\vec{M}_u$ flusso della quantità di moto uscente.

Quindi:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$M_e = \int_{A_e} \rho \vec{V} V_n \, dA \qquad M_u = \int_{A_u} \rho \vec{V} V_n \, dA$$

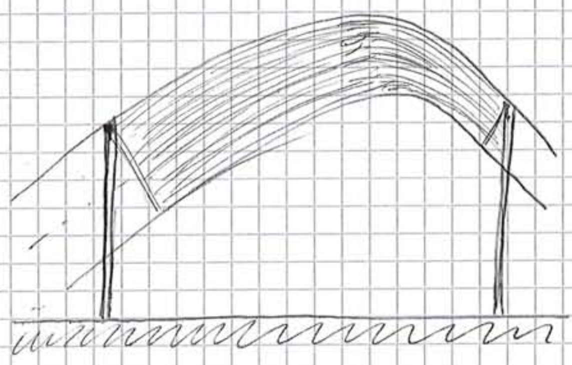
Poiché l'integrale è una sommatoria e all'interno abbiamo dei vettori, si tratta di una somma vettoriale. Per semplificare molto il calcolo, quando abbiamo delle sezioni di ingresso e di uscita le traiettorie sono praticamente rettilinee e parallele tra di loro.

Quindi se il volume è delimitato da una sezione trasversale (ortogonale al vettore velocità), avendo le traiettorie parallele tra di loro, i vettori sono paralleli e la

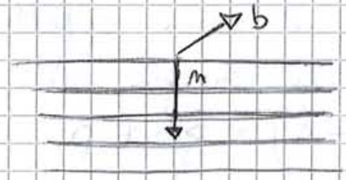
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(\rho v_0^2 \cdot 1)^2 (1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha) + (\rho v_0^2 \cdot 1)^2 \operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \rho v_0^2 1 \sqrt{1 + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos\alpha} = \rho v_0^2 \cdot 1 \sqrt{2(1-\cos\alpha)} =$$

Se devo massimizzare la spinta su quella piastra $\alpha = 180°$
Consideriamo una condotta ancorata al terreno. Il liquido quando passa nella condotta determina una spinta sulla condotta che poi si trasmette agli ancoraggi. Quindi anche qui possiamo isolare il volume di fluido e calcolare la spinta che questo volume trasmette sulla condotta.

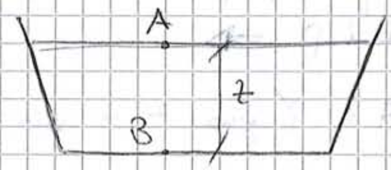


Quindi nel caso di traiettorie rettilinee, e // tra di loro, la quota piezometrica si mantiene costante lungo la sezione trasversale.



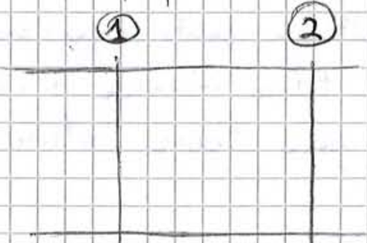

b e n mi danno il piano trasversale.

Vediamo con un esempio cosa vuol dire:
prendiamo un canale con moto verso il foglio



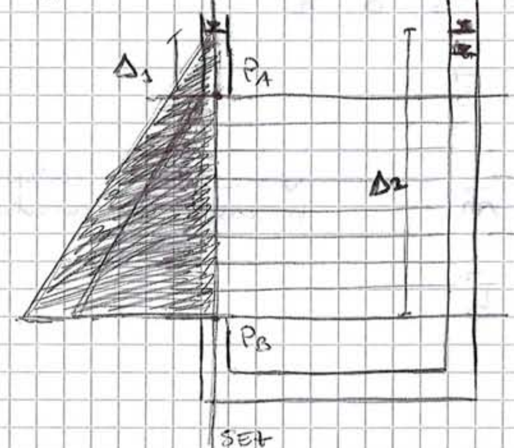

In A la p è uguale a quella atmosferica quindi in B sarà: $P_B = P_A + \gamma \cdot z$.
Questo non vuol dire che tutti i punti della massa fluida hanno la stessa quota piezometrica.

Facciamo un profilo:




Questo vuol dire che da una sezione all'altra la quota piezometrica può cambiare ma abbiamo che $z + \frac{p}{\gamma}$ è costante.

Applicazione:




Nella stessa sezione monto un piezometro sotto e uno sopra. Dove si dispone il liquido nei due piezometri?

$\Delta_1 = \frac{P_A}{\gamma}$ $\qquad P_A = \gamma \cdot \Delta_1$

$\Delta_2 = \frac{P_B}{\gamma}$ $\qquad P_B = \gamma \cdot \Delta_2$

Se guardo all'interno della sezione poiché abbiamo distribuzione della pressione di tipo idrostatico, poiché le traiettorie sono rettilinee e tra di loro parallele, $P_B = P_A + \gamma \cdot D$, quindi deve sussistere la stessa relazione con: $\gamma \Delta_2 = \gamma \Delta_1 + \gamma D \Rightarrow \Delta_2 = \Delta_1 + D$
Quindi il livello dei due piezometri deve essere alla stessa quota perché hanno la stessa quota piezometrica.

ENUNCIATO TEOREMA DI BERNOULLI

Per un fluido perfetto, incomprimibile, nel campo della gravità, in condizioni di moto permanente, lungo una traiettoria, il carico totale si conserva, cioè rimane costante.

Cos'è il carico totale?

$$H = \text{TRINOMIO DI BERNOULLI} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$$

$z$ = quota del punto

$p/\gamma$ = altezza piezometrica

$z + p/\gamma$ = quota piezometrica

$v^2/2g$ = altezza cinetica

sono tutte delle lunghezze

La somma di questi tre termini rappresenta l'energia meccanica per unità di peso del fluido.

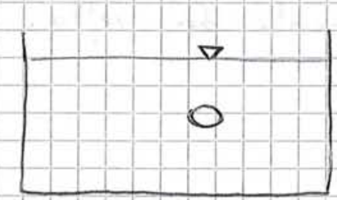
Vediamo quali tipi di energie sono chiamate in causa:

$z$ = energia potenziale

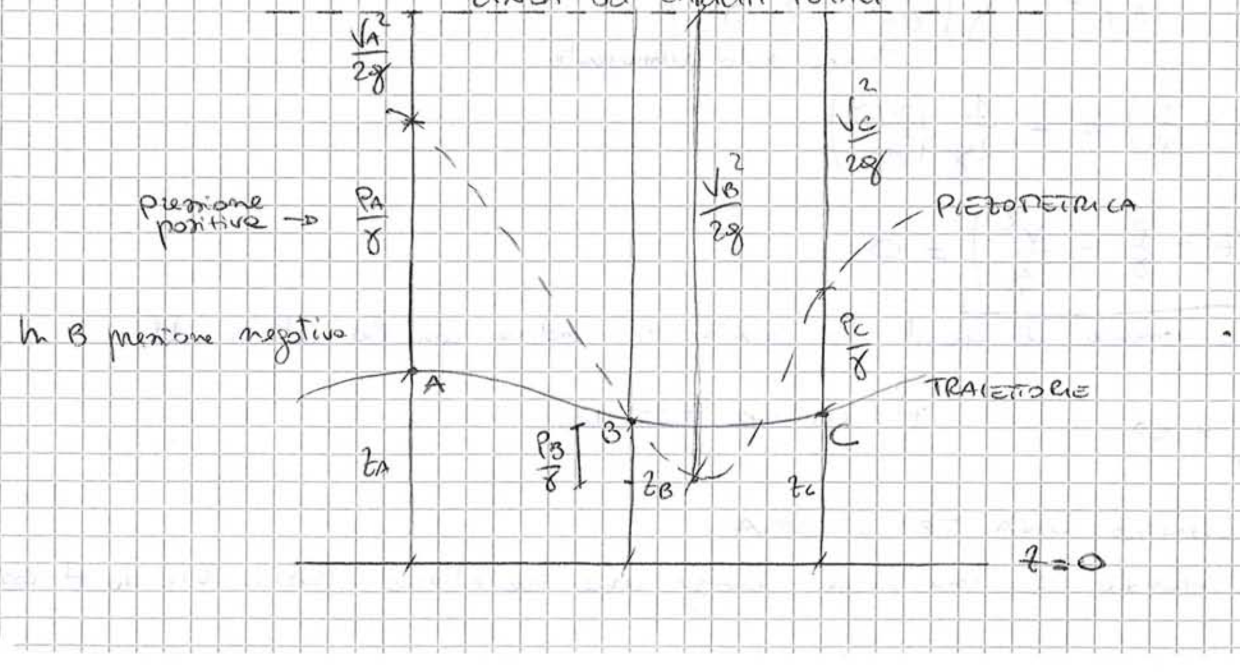
$v^2/2g$ = energia cinetica per unità di peso. $E_c = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{mg} = \frac{v^2}{2g}$

$p/\gamma$ = energia di pressione

ESEMPIO LIBRO:



dW = che si trova in equilibrio peso = dW · γ



Posso dire che il carico totale si mantiene costante per queste traiettorie!

1° IPOTESI: io non ho ipotizzato che il fluido sia perfetto però poiché il fluido da P, dove è fermo, a Q accelera, in queste condizioni ~~esso ha~~ un fluido reale ha un comportamento simile a quelli perfetti.

2° IPOTESI: siamo nel campo della gravità.

3° IPOTESI: il fluido è incomprimibile. (o comunque ritenuti incomprimibili.)

4° IPOTESI: MOTO PERMANENTE: se il livello del serbatoio si abbassa non siamo in condizioni di moto permanente. Allora o diciamo che il livello si mantiene costante perché immettiamo una portata che lo mantiene costante, oppure diciamo che il livello si abbassa molto lentamente e quindi siamo quasi nel caso di sistema stazionario.

Quindi $H = cost.$

Quindi:

$$H_P = H_Q$$

$$\underbrace{z_P + \frac{p_P}{\gamma_e}}_{h} + \cancel{\frac{V_P^2}{2g}}_{\approx 0} = z_Q + \cancel{\frac{p_Q}{\gamma_e}}_{=0} + \frac{V_Q^2}{2g}$$

Il mio obbiettivo è conoscere la portata $Q = V \cdot A$. L'area la conosciamo ma la velocità no. Vediamo il punto Q che velocità ha. Il punto P ha una velocità trascurabile. Q appartiene alla sezione contratta dove le traiettorie sono rettilinee e parallele. La sezione contratta è orizzontale e tutta a pressione atmosferica all'esterno. Quindi per la leggi di STEVIN la pressione è costante lungo z. Quindi tutti i punti sono a pressione atmosferica e quindi $p_Q = 0$

$z_P + \frac{p_P}{\gamma} = h$ perché ho ipotizzato velocità trascurabili

$z_Q = -\delta$ ;

$$\frac{V_Q^2}{2g} = h + \delta \Rightarrow V_Q = \sqrt{2g(h+\delta)}$$

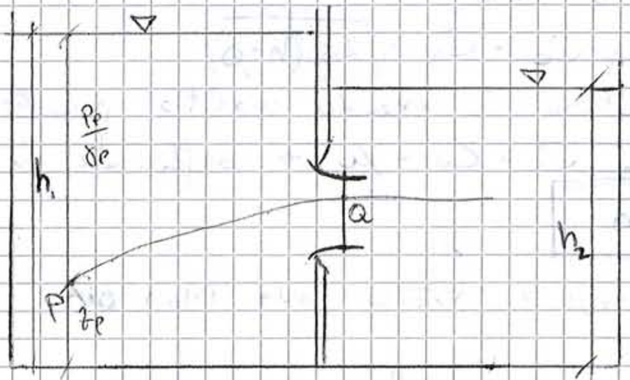
Se calcolo la velocità in un altro punto della sezione contratta non cambia. Quindi $V_Q = V_{media}$

Questa però è una velocità ideale perché in realtà non è

$$Q = C_c A \cdot C_v \cdot \sqrt{2g(h - a \cdot C_c)}$$

$$Q = \mu A \sqrt{2g(h - a \cdot C_c)}$$

③ CASO: DUE SERBATOI CON DIFFERENZA DI LIVELLO (Vena sommersa)




$$H_P = H_Q$$

$$z_P + \frac{p_P}{\gamma_P} + \cancel{\frac{V_P^2}{2g}}_{\simeq 0} = z_Q + \frac{p_Q}{\gamma_Q} + \frac{V_Q^2}{2g}$$

Nella sezione contratta l'andamento delle pressioni è di tipo IDROSTATICO.

$$z_Q + \frac{p_Q}{\gamma_Q} = h_2 \qquad z_P + \frac{p_P}{\gamma_P} = h_1$$

$$\frac{V_Q^2}{2g} = h_1 - h_2$$

$$V_Q = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$V_Q = V_m$$

$$Q = C_c \cdot A \cdot C_v \cdot \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$\boxed{Q = \mu A \sqrt{2g(h_1 - h_2)}}$$

Oss. tutto questo è valido perchè sopra c'è pressione atmosferica.

- $z_A + \frac{p_A}{\gamma}$, poiché conosciamo il livello di serbatoio di monte, qualunque sia la posizione del serbatoio in A la somma è pari al livello del serbatoio ①, quindi è uguale ad $h_{S1}$
- La pressione in B è uguale a p' perché nella sezione contratta abbiamo traiettorie rettilinee parallele e all'esterno della vena fluida c'è in tutti i punti la pressione p', quindi anche all'interno vale p'.

Quindi:

$$\frac{V_B^2}{2g} = h_{S1} - z_B - \frac{p'}{\gamma} =$$

$$V_B = \sqrt{2g\left(h_{S1} - z_B - \frac{p'}{\gamma}\right)} =$$

La velocità nella sezione contratta non è uniforme perché è in funzione della quota di B ($z_B$). Quindi non potendo calcolare la velocità media dovrei calcolare la velocità per ogni traiettoria.
Ma poiché ~~spesso~~ spesso la variazione di z nella sezione contratta che è legata alla dimensione della luce è piccola rispetto alla differenza tra il livello a monte e la posizione in B. Quindi:

$$V_B = \sqrt{2g\left(\underbrace{h_{S1} - z_G}_{CARICO} - \frac{p'}{\gamma}\right)} =$$

$z_G$ = quota del baricentro della luce a cui noi compete la velocità media

COSA SI INTENDE?

$$V_{medio} = \sqrt{2g\left(h_{CARICO} - \frac{p'}{\gamma}\right)} =$$

Se la luce è molto grande questo non è più possibile

Questo però è una velocità teorica perché non tiene conto del fatto che il fluido perde un po' di energia. Quindi

$$V_{m\,REALE} = C_r \sqrt{2g\left(h_{CARICO} - \frac{p'}{\gamma}\right)}$$

$C_r$ = coefficiente correttivo della velocità (0,98 ÷ 0,99)

Quindi la portata Q è data da:

$$Q = C_c A \cdot C_r \cdot \sqrt{2g\left(h_{CARICO} - \frac{p'}{\gamma}\right)} = \mu A \sqrt{2g\left(h_{CARICO} - \frac{p'}{\gamma}\right)} =$$

Se siamo in condizioni di pressione atmosferica $p' = 0$ e quindi

$$Q = \mu A \sqrt{2gh}$$

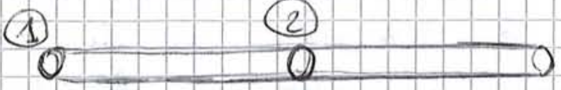
Se nel recipiente aumenta la pressione la portata diminuisce.
Il valore più basso a cui posso sottoporre il fluido è:

$$p_{min} = -101330 \text{ Pa}$$

Quindi più diminuisce la pressione e più aumenta la portata.

ma $\gamma H dQ$ è anche la potenza infinitesima in una sezione $dA$. Quindi:

$dP = \gamma \cdot H dQ$ ⟹ Questa è la potenza che passa nella sezione trasversale nell'unità di tempo.



tubo di flusso.

La potenza $dP$ nella sezione ② sarà uguale alla potenza della sezione ①? SI perché dato che $\gamma$ è cost, $H$ è costante, $dQ$ è costante di conseguenza $dP$ è costante. Quindi poiché la corrente è fatta da tanti tubi di flusso la potenza nella sezione ① sarà: $P_1 = \int dP_1$. Stessa cosa per la sezione ②: $P_2 = \int dP_2$. Poiché la potenza si mantiene costante avremo che $P_1 = P_2$.

**Def.** Per un fluido perfetto, incomprimibile, in gravità e in condizioni di moto permanente, la POTENZA SI MANTIENE COSTANTE DA UNA SEZIONE ALL'ALTRA.

$$P = \int dP = \int_Q \gamma H dQ = \int_A \gamma H v dA = \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) v dA$$

Divido l'integrale in due parti

$$P = \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) v dA + \int_A \gamma \frac{v^3}{2g} dA$$

Ipotesi: considero le correnti gradualmente variate e lineari ovvero quei moti del fluido dove le traiettorie hanno praticamente tutte la stessa direzione, e quindi nelle sezioni trasversali $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ è costante

$$P = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \cdot \gamma \int_A v dA + \underbrace{\gamma \int_A \frac{v^3}{2g} dA}_{\text{Potenza cinetica}}$$

$$P = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \cdot \gamma \cdot Q + P_c$$

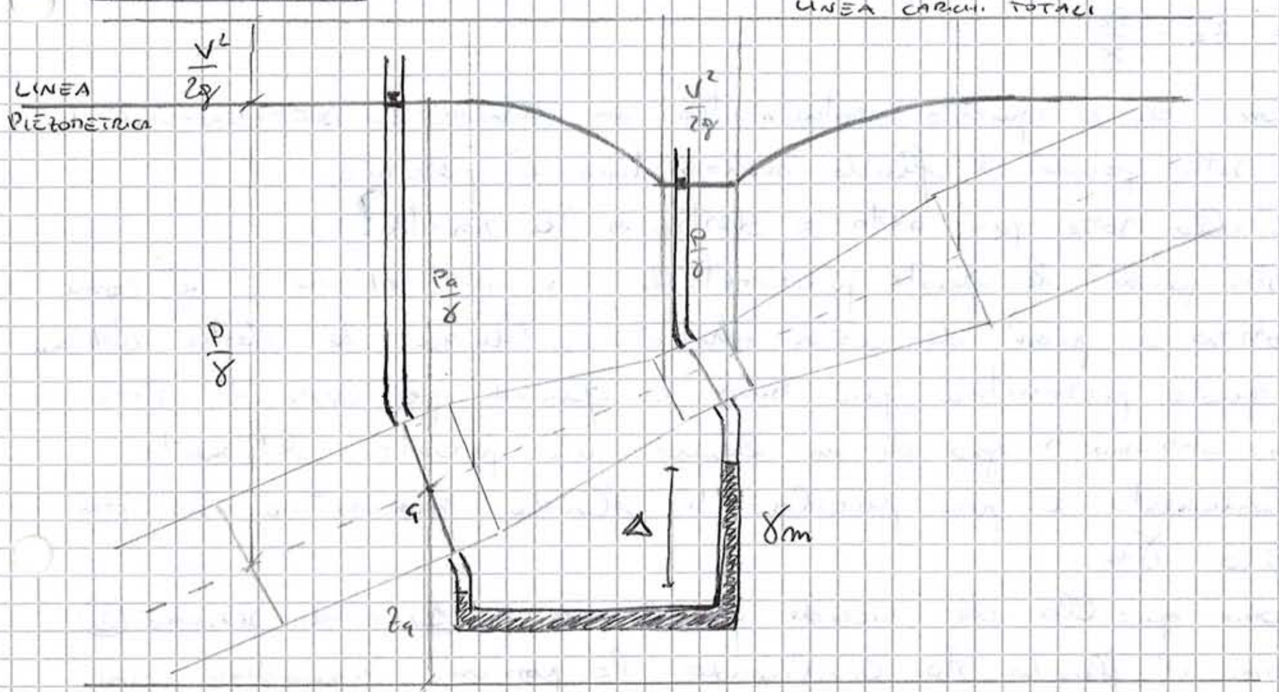
Poiché per calcolare la potenza cinetica devo calcolarmi tutte le velocità, è più comodo lavorare con la velocità media. Per questo utilizzo un coefficiente di ragguaglio in modo tale che la potenza cinetica la posso esprimere in questo modo:

$$P_c = \alpha \gamma \frac{V_m^3}{2g} A = \alpha \gamma \frac{V_m^2}{2g} v A = \alpha \gamma \frac{V_m^2}{2g} Q$$

LEZIONE DEL 08/04/2016 8:30 - 11:30

Prendiamo una tubazione con un'inclinazione generica:

VENTURIMETRO




Il tratto che porta la tubazione dal diametro $D_1$ a $D_2$ si chiama CONVERGENTE, mentre il tratto che porta la tubazione dal diametro $D_2$ a $D_1$ si chiama DIVERGENTE. Il CONVERGENTE è di lunghezza più piccola del DIVERGENTE. Il venturimetro serve a misurare la portata all'interno della tubazione. Serve anche per i fluidi reali, per il momento ci limitiamo ai fluidi perfetti. La corrente mantiene il suo carico totale medio da una sezione all'altra, costante.

CONSIDERAZIONI:

- Fino a quando il diametro della tubazione rimane costante, le due linee (piezometrica e linea dei carichi totali) sono parallele.

PRESA STATICA: è una presa che si pone ortogonale al vettore velocità.

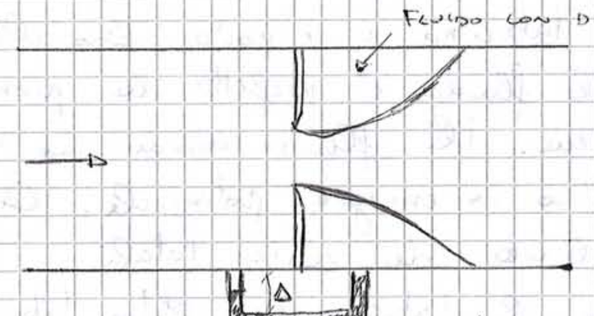
- Se poniamo una presa statica in una sezione con $D_1$, quindi mettiamo una come piezometrico, il fluido lì dentro, grazie alla pressione che c'è in condotta, fino a quale quota arriva? Fino alla piezometrica, perché la distribuzione delle pressioni in ogni sezione è di tipo idrostatico, ovvero il punto in cui la pressione è uguale a zero.

$$\boxed{Q = \sqrt{\Delta \cdot \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \cdot \frac{2g}{\cancel{\alpha}} \cdot \frac{A_2^2 \cdot A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}}}$$

$\alpha \cong 1$ (applicazioni pratiche)

Quindi con una lettura manometrica $\Delta$ e nota la geometria delle tubazioni possiamo misurare la portata $Q$.
Il divergente è più lungo perché quando il fluido rallenta perde energia, e quindi è fatto in modo di rallentare più lentamente e quindi di perdere meno energia possibile.
Se stringiamo troppo il venturimetro maggiore sarà la velocità del fluido e quindi la piezometrica si abbassa sempre di più. Se la piezometrica va sotto la tubazione la pressione relativa sarà negativa (impossibile) e il venturimetro non è più regolare.
Esistono due strumenti che devono essere opportunamente tarati che sono meno ingombranti: il DIAFRAMMA e il BOCCAGLIO
Il principio è sempre lo stesso, cioè provocare una variazione di velocità della corrente, a seguito della quale, se la velocità aumenta abbiamo un abbassamento di pressione, e la registrazione di un abbassamento della quota piezometrica.

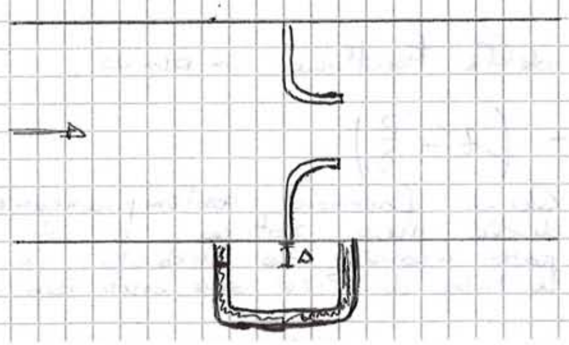
DIAFRAMMA




$Q = Q(\Delta)$

Abbiamo un setto che provoca un restringimento, e si inserisce un manometro differenziale. Lo strumento è tarato in modo tale che la portata sia funzione di quel $\Delta$.

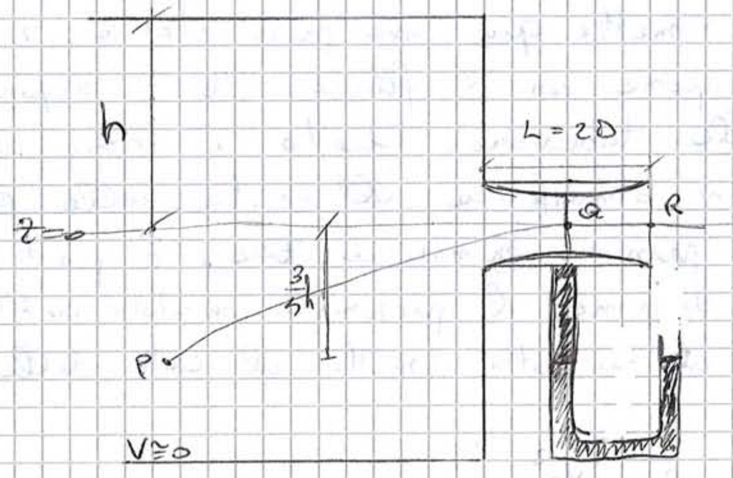
BOCCAGLIO




$Q = Q(\Delta)$

PASSAGGIO DI FLUIDO CHE ESCE DAL SERBATOIO CON TUBO ADDIZIONALE ESTERNO.

Questo tubo ha una lunghezza di circa 2 volte il diametro




h = carico della luce

Le velocità nel serbatoio sono trascurabili, cioè che sono rilevanti solo nell'ingresso della luce. Gli spigoli determinano un distacco della vena in modo tale da formare una sezione contratta. La vena si riespande ed occupa l'intera sezione ad una distanza pari a 2D dalla luce, e poi esce in atmosfera.

Poiché il fluido tra Q ed R sta rallentando non posso dire che la particella mantiene il suo carico totale fra P ed R. Posso dirlo però tra P e Q, ovvero nel tratto dove accelera

$$H_P = H_Q$$

$$z_P + \frac{p_P}{\gamma} + \frac{V_P^2}{2g} = z_Q + \frac{p_Q}{\gamma} + \frac{V_Q^2}{2g}$$

Nel punto R $p_R = 0$ perché è a contatto con l'atmosfera.

La velocità in Q sarà sicuramente maggiore della velocità in R, perché si passa da una sezione contratta ad una sezione normale.

Quindi se anche, ma non è vero, potessi dire che:

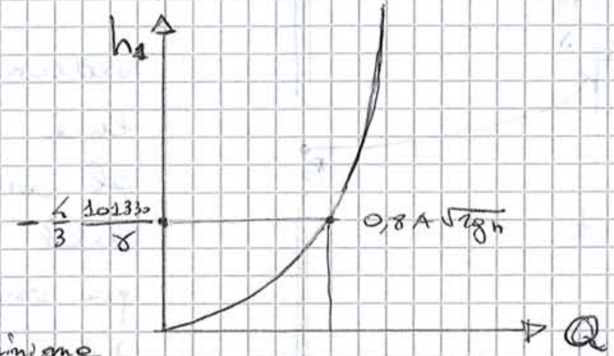
$$H_Q = H_R$$

$$\cancel{z_Q} + \frac{p_Q}{\gamma} + \frac{V_Q^2}{2g} = \cancel{z_R} + \cancel{\frac{p_R}{\gamma}} + \frac{V_R^2}{2g}$$

Le due z sono molto vicine quindi posso semplificarle

In $z=0$ $\frac{p}{\gamma} = -\frac{3}{4} h$. Questo valore deve essere sempre maggiore di $-\frac{101330}{\gamma}$. Quindi per aver quel funzionamento:

$$\boxed{h = -\frac{101330}{\gamma} \cdot \frac{4}{3}}$$




se $h > -\frac{101330}{\gamma}\frac{4}{3}$

si forma una sezione di controllo, cioè:
~~espressione~~ il fluido impone la minima pressione $(-101330)$ e con questa pressione si determina la portata che passa.

$$\underbrace{z_P + \frac{p_P}{\gamma}}_{h} + \cancel{\frac{V_P^2}{2g}}^{\,0} = \underbrace{\cancel{z_a}^{\,0}}_{\text{TRASCURABILE}} + \frac{p_a}{\gamma}^{\,-101330} + \frac{V_a^2}{2g}$$

$$\frac{V_a^2}{2g} = h + \frac{101330}{\gamma}$$

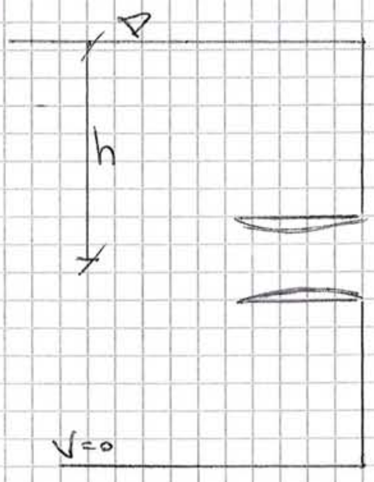
$$V_a = \sqrt{2g\left(h + \frac{101330}{\gamma}\right)} = V_m$$

$$Q = C_V \cdot C_c \cdot A \sqrt{2g\left(h + \frac{101330}{\gamma}\right)}$$

$$Q = 0{,}6\, A \sqrt{2g\left(h + \frac{101330}{\gamma}\right)}$$

Nel caso dell'acqua $\frac{101330}{9806} = 13 m$

TUBO ADDIZIONALE INTERNO (contrazione maggiore)

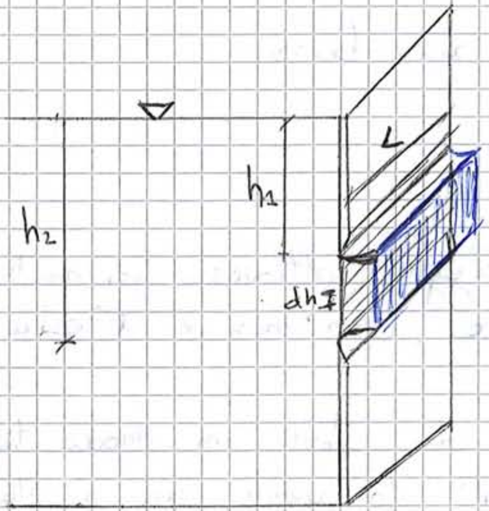



$$Q = \mu A \sqrt{2gh}$$
$\mu \to 0{,}5$

Se il fluido ha una velocità metteremo a $V_P = \frac{Q}{A}$

LEZIONE DEL 09/04/2014 14:30 - 16:00

LUCE A BATTENTE RETTANGOLARE




Per un fluido perfetto la velocità in un punto* quando parte da condizioni in cui la velocità è trascurabile:

$$V = \sqrt{2gh}$$ VELOCITÀ TORRICELLIANA

punto* = in uscita con $p=0$

dove $h$ è la distanza di ogni punto a monte. Calcoliamo $Q$ nella sez. ~~ristretta~~ ~~Q~~ della luce in approssimazione.

$$Q = \mu \int dQ = \mu \int \underbrace{V\, dh L}_{\text{area striscioline}}$$

area striscioline nelle quali $V = \sqrt{2gh}$ dove $h$ è la generica distanza da monte.

$$Q = \mu \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gh}\, dh\, L =$$

$$Q = \mu \cdot L \cdot \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h} h^{\frac{1}{2}} dh =$$

$$Q = \mu \cdot L \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} \left[ h^{\frac{3}{2}} \right]_{h_1}^{h_2} =$$

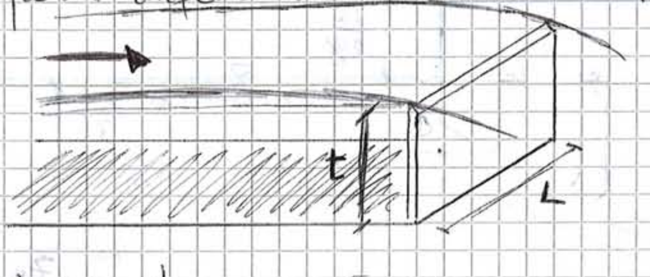
$$\boxed{Q = \mu \frac{2}{3} L \sqrt{2g} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right).}$$

Questo nel caso in cui le dimensioni della luce non siano più trascurabili rispetto al carico, e nel caso di una luce rettangolare. Questo caso ci serve per passare agli stramazzi.

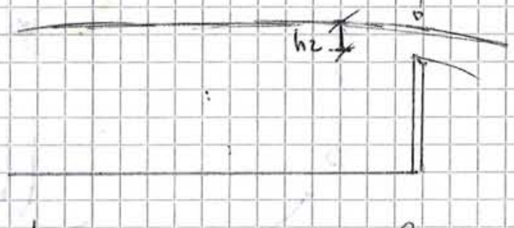
STRAMAZZO

Sono dei misuratori di portata dove la corrente, la vena fluida non ha tutto il contorno a contatto con la luce ma solo la parte inferiore.

t = petto dello stramazzo




qui c'è già una curvatura




In questo caso è come se avessimo $h_1 = 0$ e simile al precedente

$$Q = \mu \frac{2}{3} L \sqrt{2g}\, h_2^{\frac{3}{2}}$$

$h_2$ in questo caso rappresenta la distanza fra il lembo ~~superiore~~ inferiore della vena e la posizione del piano dei carichi idrostatici a monte.

In entrambi i serbatoi possiamo ritenere le velocità trascurabili, e per semplicità metto pressione atmosferica sui serbatoi.
Sono note le altezze dei due livelli $z_A$ e $z_B$.
Calcolare la portata nel caso in cui il fluido sia perfetto.
Il fluido va dal serbatoio (1) al serbatoio (2), perché il fluido va sempre da condizioni di energia maggiore a condizioni di energia minore. (energia potenziale (S1) > (S2))
Il carico totale di sezione in sezione si mantiene costante.
Lungo una traiettoria il carico totale si mantiene costante.

$$H_p = H_a$$

$$\underbrace{z_p + \frac{p_p}{\gamma}}_{z_A} + \frac{\cancel{V_p^2}}{2g} = \underbrace{z_a + \frac{p_a}{\gamma}}_{z_B} + \frac{V_a^2}{2g}$$

$$\frac{V_a^2}{2g} = z_A - z_B$$

{La differenza tra i due serbatoi si è trasformata in ALTEZZA cinetica

$$V_a = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

$$Q = A \cdot V_a = A \cdot \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

Il carico nel serbatoio (1) lo indico con $H_A$ mentre il carico del serbatoio (2) lo indico con $H_B$.

$H_A = z_A$ xké tutti i punti hanno $V = 0$

$H_B = z_B$ xké tutti i punti hanno $V = 0$

Quindi

$$Q = A \cdot \sqrt{2g(H_A - H_B)}$$

La linea dei carichi idrostatici totali coincide con la linea del (1) serbatoio e poi siccome la traiettoria non perde energia rimarrà alla stessa quota. Mentre nel serbatoio (2) la linea dei carichi totali è alla quota $z_B$.
La linea piezometrica si traccia sempre da valle verso monte.
Nel serbatoio (2) poiché $z_a + \frac{p_a}{\gamma} = z_B$ vuol dire che la piezometrica coincide con il livello del fluido.
Visto che il fluido scorre in una tubazione a sezione costante la linea piezometrica sarà costante.
Quindi la differenza fra il carico a monte e quello a valle si è trasformato completamente in energia cinetica.

$$J = -\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right)$$

- moto uniforme $\frac{\partial}{\partial s}\frac{v^2}{2g} = 0 \Rightarrow J = -\frac{\partial h}{\partial s}$

Quindi nel caso di moto uniforme la cadente dei carichi è uguale alla cadente piezometrica.

$$J = -\frac{\partial H}{\partial s}$$

$$\int_{H_{ini}}^{H_{fin}} \partial H = \int_{s_{ini}}^{s_{fin}} -J\,\partial s$$

$$H_{finale} - H_{iniziale} = -\int_{s_{ini}}^{s_{fin}} J\,ds =$$

Se siamo in condizioni di moto uniforme tutte le caratteristiche si ripetono da una sezione all'altra. ($J = cost$)

$$= -J\int_{s_{ini}}^{s_{fin}} ds = -J\left(s_{fin} - s_{ini}\right)$$

$$H_{finale} = H_{iniziale} - J\left(s_{fin} - s_{ini}\right) =$$

$$\boxed{H_{fin} = H_{ini} - JL}$$

ESEMPIO

$H_{ini} = 5\,m$

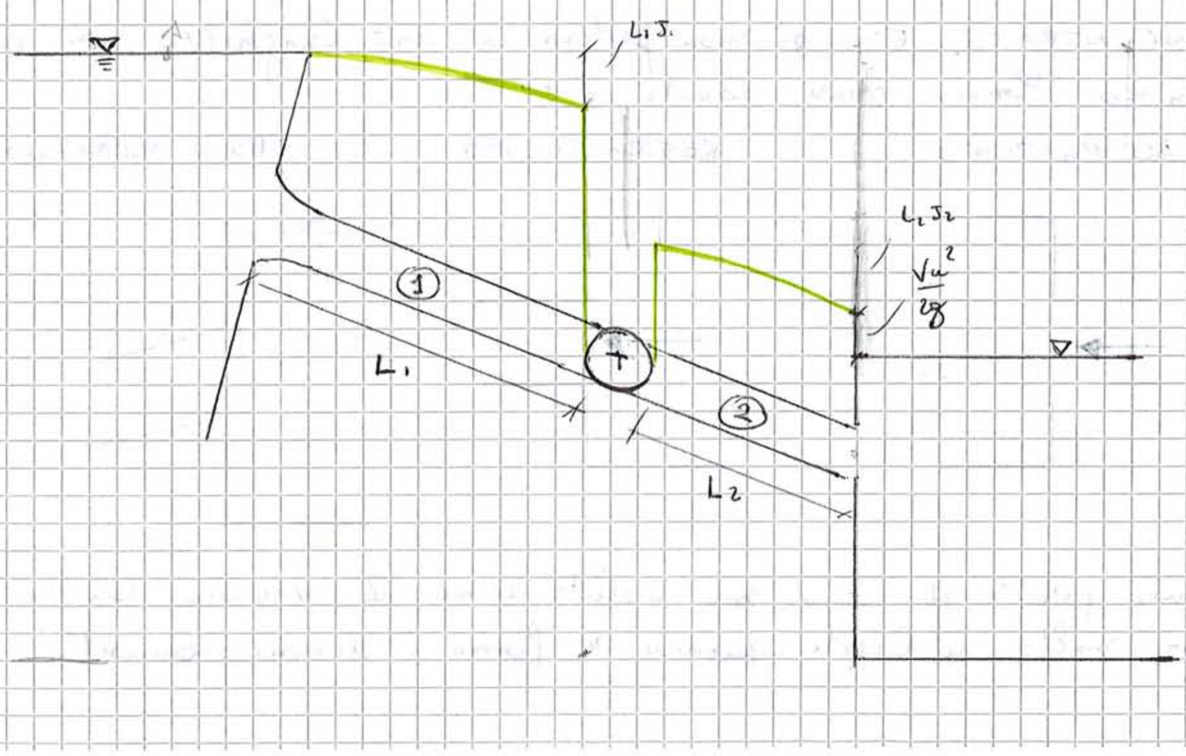
$J = 0{,}002$

$L = 1000\,m$

$H_{fin} = 5 - 0{,}002 \cdot 1000 = 3$ metri

MACCHINE MOTRICI O OPERATRICI.

Le MACCHINE MOTRICI sono quelle che sottraggono energia dal fluido (turbine). Quindi l'energia della corrente diventa energia meccanica e quindi energia elettrica.
Le MACCHINE OPERATRICI sono quelle che cedono energia alla corrente (Pompe). Quindi l'energia elettrica si trasforma in energia meccanica e quindi in energia della corrente idraulica.
Ogni trasformazione da un tipo di energia all'altra ha un rendimento. L'obbiettivo è che questi rendimenti siano il più possibile vicino a 1, in modo da avere una trasformazione completa. Questo ovviamente non è possibile.
Parlando di TURBINE esistono due tipologie di impianto: più piccoli (< 1 Mw):
MICRO IMPIANTI IDROELETTRICI: la potenza della macchina (potenza nominale) è minore di 100 KW
MINI IMPIANTI IDROELETTRICI: la potenza nominale della macchina è compresa fra 1 Mw e 100 KW.
Quindi le turbine che possono essere ad AZIONE o a REAZIONE, si distinguono a seconda del tipo di portata e del tipo di salto di un solo soggetto.



olto di energia.
Vediamo come si calcola la potenza ceduta: (dalla corrente):

$P_{MONTE} = \gamma \cdot Q \cdot H_M$ (sezione d'ingresso)

$P_{VALLE} = \gamma \cdot Q \cdot H_V$ (sezione d'uscita)

$P_{CEDUTA} = P_M - P_V = \gamma Q (H_M - H_V)$

$P_{ELETTRICA} = \gamma Q (H_M - H_V) \eta \rightarrow$ rendimento (a seconda della macchina il rendimento è più vicino o più lontano a 1.)

la produzione di energia nel tempo:

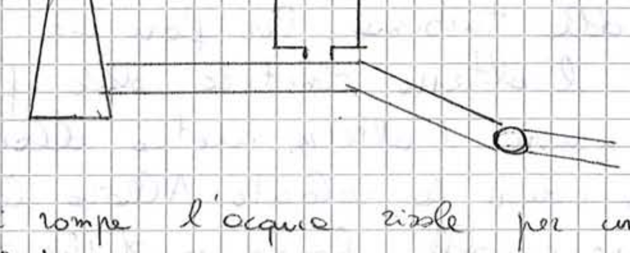
$E = \int_0^t P dt$ Questa è la producibilità.

L'energia che non posso vendere è quella che ho perso lungo la condotta.

ES. Se abbiamo ~~1 m³ di acqua~~ una portata di $1\ m^3/s$ e un SALTO $\Delta H$ di un metro, quanti W abbiamo?

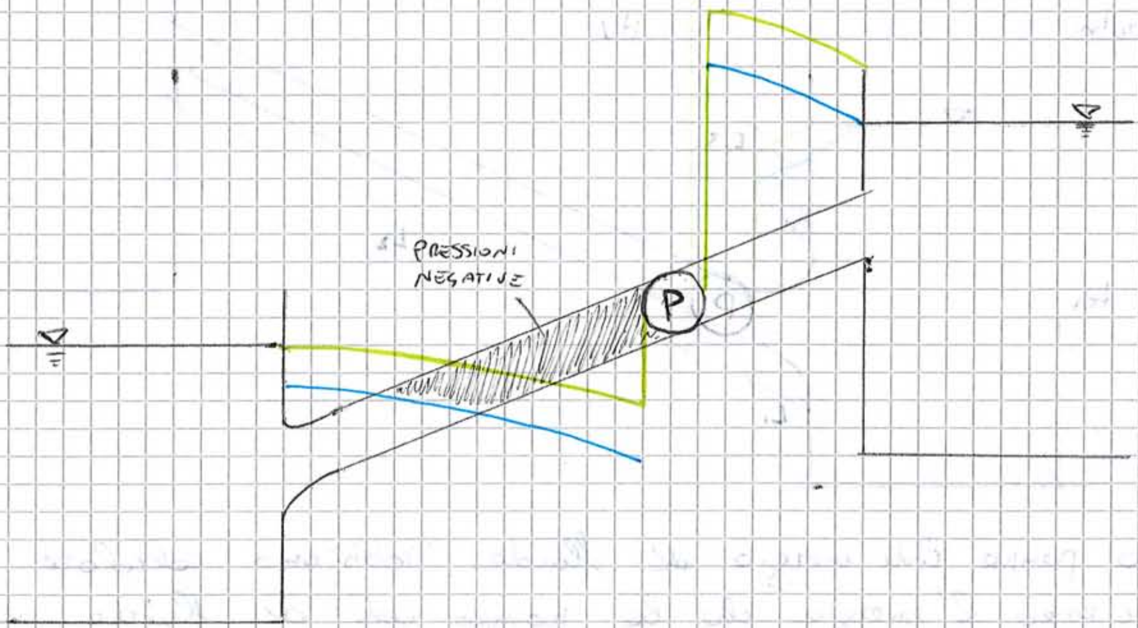
$P = \gamma \cdot Q (\Delta H) = 9806\ kW$

Le problematiche legate alle turbine sono diverse:
- come fare a tenere alto il livello di $z_A$ e basso $z_B$. Questo è possibile attraverso delle paratoie che cercano di regolare i livelli.
- guasti delle turbine
- problemi di attenuazione del colpo di ariete. Nei grandi impianti vengono istallati dei pozzi piezometrici




Se la turbina si rompe l'acqua risale per un cambio di moto e per smorzare le forti pressioni viene messo un pozzo piezometrico con un livello dell'acqua alto quasi quanto il livello a monte. C'è una serie di oscillazioni di masse fino a quando il continuo passaggio in condotta ha delle continue perdite di carico che va a smorzare il moto.

con la PREVALENZA perché non è detto che le due velocità siano uguali. (Dipende dai diametri delle condotte). La condotta a monte si chiama di ASPIRAZIONE e la condotta a valle si chiama di MANDATA.
Vediamo cosa succede se a parità di impianto metto la POMPA più a valle.




Quello che cambia è il valore di pressione nelle tubazioni. La prevalenza è lo stesso. Quello che cambia è che adesso c'è un tratto di condotta di aspirazione con pressioni relative minore di zero (quello che si trova sopra la piezometrica.)
Quindi dobbiamo verificare che queste pressioni siano compatibili, cioè siano superiori di $-101\,330$ Pa e superiori di $-10{,}33$ m di altezza d'acqua (e comunque superiori di 7,8 metri trattandosi di acqua con il rischio che si formi il vapore.)
Riprendiamo l'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO IN CONDIZIONI DINAMICHE.

$$G + \Pi + I + M_e - M_u = 0$$

Noi l'abbiamo applicato per studiare per esempio la spinta sulla flangia del rubinetto. Quando abbiamo calcolato la spinta $\Pi_1$ nella sezione 1 abbiamo fatto: $\Pi_1 = p_1 \cdot A$.
Però ora di fatto abbiamo un fluido reale, e quindi ci sono degli sforzi aggiuntivi che sono quelli che non sono solo dovuti dalla pressione. Quindi è utile riscrivere l'equazione indefinita:

Il fluido ha diversi REGIMI DI MOTO < LAMINARE / TURBOLENTO.

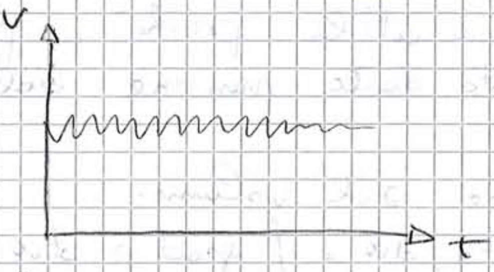
MOTO LAMINARE: le traiettorie sono regolari e se mi metto in un punto, anche in condizioni dinamiche permanenti, il vettore velocità è costante.

MOTO TURBOLENTO: le velocità non sono costanti nel tempo ma hanno delle fluttuazioni.

VELOCITÀ ISTANTANEA

$$\vec V = \bar{\vec V} + \vec V'$$

$\bar{\vec V}$ → Valore medio temporale; $\vec V'$ → fluttuazione




Se io misuro l'intensità della velocità nel tempo mi accorgo che questa varia, però se vado a fare il valor medio in un tempo t abbastanza grande da stabilizzare questo valor medio, allora definisco un valor medio.

In termini matematici: *

$$\bar{\vec V} = \frac{1}{t}\int_0^t \vec V \, dt$$

$$\bar{\vec V'} = \frac{1}{t}\int_0^t \underbrace{\vec V - \bar{\vec V}}_{\text{fluttuazione media}} \, dt =$$

$$\bar{\vec V'} = \frac{1}{t}\int_0^t \vec V \, dt - \frac{1}{t}\int_0^t \bar{\vec V} \, dt = -\frac{1}{t}\bar{\vec V}\cdot t = 0 \quad \left(\text{MEDIA DELLE FLUTTUAZIONI}\right)$$

Quindi nel moto turbolento avremo le componenti del vettore velocità:

$u = \bar u + u'$

$v = \bar v + v'$

$w = \bar w + w'$

e a seguito di queste oscillazioni anche la pressione avrà delle oscillazioni.

$p = \bar p + p'$

Come si fa a sapere se siamo in moto laminare o moto turbolento:

c'è un numero (NUMERO DI REYNOLDS) $= \dfrac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu}$

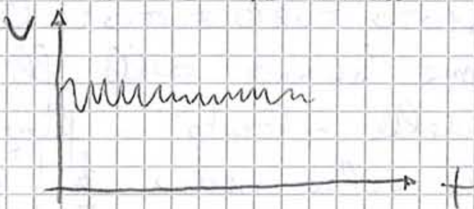
viscosità dinamica

MOTO TURBOLENTO: le velocità, se mi metto in un punto, non sono costanti nel tempo anche se sembra, ma se vado a vedere a ~~tempo~~ scala di tempo ridotta mi accorgo che le velocità hanno delle fluttuazioni.
Quindi vuol dire che ho un valore del vettore velocità in un punto che non rimane costante nel tempo ma un pochino cambia, cambia così rapidamente che per le applicazioni pratiche non me ne accorgo. Dico che in quel punto la velocità è di 3 m/s ma in realtà oscilla intorno a questo valore medio, infatti posso dire che la velocità che ho in un dato istante:

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$$

valore istantaneo della velocità — valore medio temporale — fluttuazione

cioè vuol dire che se misuro




la velocità nel tempo, questa varia, però mi accorgo anche che ~~quando~~ se vado a fare un valore medio in un tempo T abbastanza grande da stabilizzare questo valore medio, e quindi se riprendo lo stesso intervallo di tempo (stessa ampiezza), ottengo lo stesso valore medio, allora in questo intervallo di tempo definisco un valore medio temporale. (siamo sotto il secondo)
In termini matematici il valore medio temporale vuol dire fare la media cioè:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{1}{t}\int_0^t \vec{v}\,dt$$

tempo di integrazione — valori di velocità

Allora mi chiedo la media temporale delle fluttuazioni quanto è? 0 Perché è come dire

$$\bar{\vec{v}}' = \frac{1}{t}\int_0^t \underbrace{\vec{v} - \bar{\vec{v}}}\,dt$$

fluttuazione media = valore v istantaneo − valore v medio

Spezzo l'integrale.

$$\bar{\vec{v}}' = \underbrace{\frac{1}{t}\int_0^t \vec{v}\,dt}_{\text{x definizione di valore medio è proprio il valore medio}} - \underbrace{\frac{1}{t}\int_0^t \bar{\vec{v}}\,dt}_{\text{ho il valore medio sotto l'integrale, lo porto fuori}} = \bar{v} - \frac{1}{t}\,t\cdot\bar{\vec{v}} = 0$$

MEDIA DELLE FLUTTUAZIONI

Se vado a svolgere questa equazione è come fare la media temporale di ciascun termine. Proviamo a fare la media di alcuni termini. Ad esempio la facciamo di $\Pi_p$.

$$\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \Pi_p \, dt$$

$$\frac{1}{t}\cdot\int_0^t\int_A p \, dA \, dt$$

siccome siamo in moto turbolento la pressione è data da una p medio più una fluttuazione.

$$\frac{1}{t}\cdot\int_0^t\int_A (\bar{p} + p') \, dA \, dt$$

siccome la superficie A è fissa nel tempo posso invertire gli integrali

$$\int_A \frac{1}{t}\cdot\int_0^t (\bar{p} + p') \, dt \, dA$$

risolvo l'integrale interno andandolo a spezzare.

$$\int_A \left[\frac{1}{t}\int_0^t \bar{p} \, dt + \frac{1}{t}\int_0^t p' \, dt\right] dA =$$

$\bar{p}$ è una costante e la porto fuori e quindi diventa $\bar{p}\cdot t/t$ e rimane $\bar{p}$ mentre l'integrale di una fluttuazione è uguale a zero.

$$\int_A (\bar{p} + 0) \, dA =$$

$$\int_A \bar{p} \, dA$$

Quindi

$$\frac{1}{t}\int_0^t (1) \, dt$$

$\rightarrow \Pi_p = \int_A \bar{p} \, dA$ è come se lavoro solo con la p medio. (è comodo)

$\rightarrow I = -\int_W \frac{\partial \rho v}{\partial t} dW \rightarrow \vec{I}_v$ SICCOME NON HO UN TERMINE CHE FLUTTUA ha la stessa espressione e dovremo far comparire il vettore velocità media

~~I inerzia locale~~

$\rightarrow G$ non oscilla e rimane uguale.

$\rightarrow -\mu\int_A \frac{\partial v}{\partial n} dA \rightarrow -\mu\int_A \frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial n} dA$ — velocità media temporale

Quindi quando vado a lavorare nel moto turbolento i termini mediati nel tempo di queste forze hanno l'espressione dove al posto della velocità istantanea metto la velocità media e al posto della pressione istantanea metto la pressione media.

Un po più difficile è il flusso della quantità di moto, perché c'è una velocità al quadrato.

Lavoro su $M_e - M_u = \int_A \rho \vec{v} v_n \, dA$

Quando questo termine subisce l'operazione di media temporale vediamo come si trasforma:

$$\frac{1}{t}\int_0^t M_e - M_u \, dt = \frac{1}{t}\int_0^t\int_A \rho \vec{v} v_n \, dA \, dt$$

$v$ e $v_n$ sono delle velocità istantanee.

$$\frac{1}{t}\int_0^t\int_A \rho(\bar{\vec{v}} + \vec{v}')(\bar{v}_n + v_n') \, dA \, dt$$

scambio l'integrale nel tempo con l'integrale nello spazio.

avremo un'azione frenante.
- sulla superficie di contorno nascono degli sforzi turbolenti dovuti a queste fluttuazioni turbolente

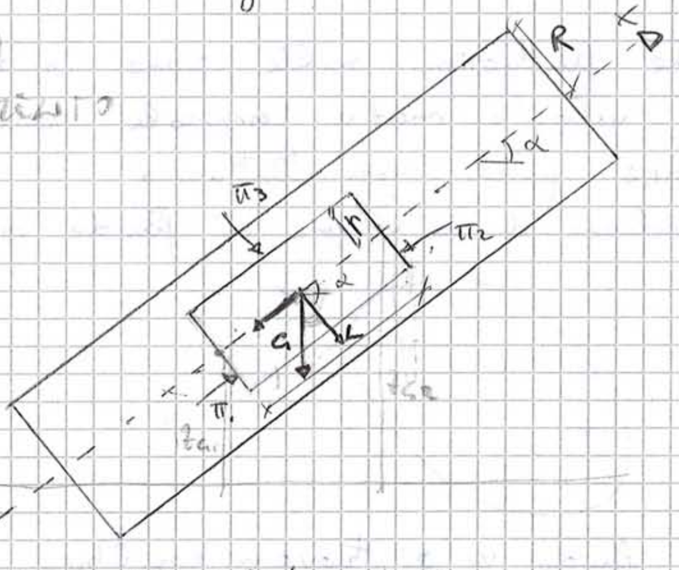
Quindi la somma degli ultimi due termini dell'equazione rappresentano le resistenze che agiscono sul contorno.
Se questi due termini li porto a destra:

$$G + \Pi_0 + I + M_e - M_u = \underbrace{\mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\, dA - \int_A \rho \overline{\vec{v}'\vec{v}_n'}\, dA}$$ effetto di trascinamento di $w$

il cambio di segno rappresenta la forza di trascinamento di questa corrente sull'esterno. (quindi non più la resistenza che l'esterno applica sul volume $w$) 10:00

Studiamo ora l'effetto di trascinamento per moto uniforme.
Per avere moto uniforme vuol dire che le velocità sono costanti lungo ciascuna traiettoria, la velocità media da una sezione trasversale all'altra non cambia (quindi moto permanente), e richiede anche che le caratteristiche dell'involucro siano costanti.
Consideriamo una tubazione con asse inclinato di $\alpha$ rispetto all'orizzontale. $D$ = cost e moto da sinistra a destra. Il volume di fluido che studiamo è un cilindro coassiale con l'asse che ha raggio $r$ e lunghezza $L$.

AZIONE DI TRASCINAMENTO




Vediamo l'equilibrio del cilindro: 14:24
$I = 0$

$$G + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \underbrace{M_e - M_u}_{\text{per l'uniformità del moto la somma è } = 0} = \underbrace{\mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\, dA - \int_A \rho \overline{\vec{v}'\vec{v}_n'}\, dA}_{\text{agisce lungo l'asse e la chiamiamo } T\text{. Azione di trascinamento nella direzione del moto}}$$

Gli sforzi turbolenti non ci sono vicino la parete. Questo si chiama lo strato limite laminare perché le $V'_n$ sono uguali a zero.

Riprendiamo il passaggio fatto un po' prima:

$$\tau = \gamma \cdot \frac{\pi R^2 \cdot J}{2\pi R} = \gamma \frac{A_{base}}{Perimetro} J$$

Immaginiamo di avere un canale, una sezione piena e una parzialmente piena e devo calcolare lo sforzo $\tau$:

$$\tau = \gamma \cdot \frac{\text{Area sezione bagnata}}{\text{Perimetro bagnato}} \cdot J = \gamma \mathcal{R} J$$

dove Perimetro bagnato è la parte, l'estensione del contorno tra il fluido e parete solida.

Questo rapporto $\frac{\text{Area sez. bagnata}}{\text{Perimetro bagnato}}$ si chiama RAGGIO IDRAULICO $(\mathcal{R})$

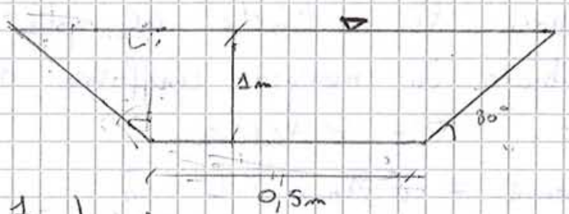
ESEMPIO

canale a forma trapezia con $\alpha = 30°$

$J = 0{,}01$

$\gamma = 9806\ N/m^2$

$\tau = ?$




$$\text{Area bagnata} = \frac{\left(0{,}5 + 0{,}5 + 2 \cdot \frac{1}{tg30}\right) \cdot 1}{2} = 2{,}23\ m^2$$

$$\text{perimetro} = 0{,}5 + \frac{1}{\sin 30} \cdot 2 = 4{,}5\ m$$

$$\mathcal{R} = \frac{2{,}23}{4{,}5} = 0{,}5\ m$$

$$\tau = 9806 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01 = 49{,}03\ N/m^2$$

Se abbiamo una sezione circolare, quanto vale il raggio idraulico sapendo che il raggio della condotta è pari ad R.

$$\mathcal{R} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$$

CALCOLO DEL PROFILO DI VELOCITÀ

Consideriamo una condotta circolare percorsa da moto uniforme. Partiamo dal moto turbolento e poi per il laminare otterremo le fluttuazioni.

$$T = \int_A \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA - \int_A \rho \overline{\vec{v}'\vec{v}'_n}\, dA$$

Adesso l'espressione della T la scrivo nel caso della condotta in moto uniforme con le stesse condotte di prima.

Siccome il moto è uniforme la $\frac{du}{dr}$ si ripete uguale lungo la superficie laterale (cioè costante) e quindi la porto fuori dalla derivata. È anche il prodotto $u'v'$ è costante lungo la superficie laterale e la porto fuori.

$$T = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} \underbrace{2\pi r L}_{\text{sup. laterale}} + \rho \overline{u'v'} \underbrace{2\pi r L}_{\text{sup. laterale}} = \gamma \underbrace{\pi r^2 L}_{W} J$$

A questo punto voglio vedere l'andamento della $\bar{u}$ in funzione di $r$ e lavoro con la precedente uguaglianza.

$$-\mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dr} \cdot 2\pi \cancel{r} \cancel{L} + \rho \overline{u'v'} \, 2\pi \cancel{r} \cancel{L} = \gamma \pi \cdot r^2 \cancel{L} J \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Siccome voglio calcolare la $\frac{du}{dr}$ tolgo tutti i coefficienti di $\frac{du}{dr}$

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{\gamma}{\mu} J \cdot \frac{R}{2} + \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'}$$

A questo punto per sapere il profilo di velocità in una condotta circolare vado ad integrare:

$$\bar{u} = -\frac{\gamma}{\mu} \cdot J \frac{R^2}{4} + \int_0^R \frac{\rho}{\mu} \cdot \overline{u'v'} \, dr + C_1$$

La $C_1$ si calcola dicendo che $u(R=r)=0$ (quando →0)

$$0 = -\frac{\gamma}{\mu} \cdot J \frac{R^2}{4} + \int_0^R \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr + C_1$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{\mu} \cdot J \frac{R^2}{4} - \int_0^R \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr$$

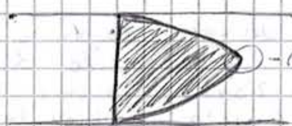
$$\bar{u} = -\frac{\gamma}{\mu} J \frac{r^2}{4} + \int_0^r \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr + \underbrace{\frac{\gamma}{\mu} \cdot J \cdot \frac{R^2}{4} - \int_0^R \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr}_{C_1}$$

$$\boxed{\bar{u} = \frac{\gamma}{\mu} J \left( \frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) - \int_r^R \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr}$$

PROFILO DELLA VELOCITÀ MEDIA TEMPORALE IN UNA CONDOTTA CIRCOLARE (moto turbolento)

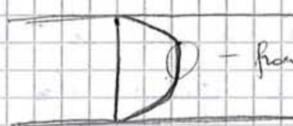
Se fossimo nel caso di moto laminare:

$$u = \frac{\gamma J}{\mu} \left( \frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right)$$




Nel caso di moto turbolento:

$$\bar{u} = \frac{\gamma \cdot J}{\mu} \left( \frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) - \int_r^R \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr$$




N.B. Il moto laminare non è un sottocaso del moto turbolento ma le espressioni si ricavano otterendo le velocità di fluttuazioni.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 154

Quindi ora il problema è capire quanto vale $\lambda$.
Vediamo da cosa dipende: $\lambda = \lambda(V, D, \varepsilon, \rho, \mu)$
- caratteristiche cinematiche (velocità) $V$
- caratteristiche geometriche (diametro) $D$
- asperità della condotta (scabrezza) $\varepsilon$
- proprietà del fluido (densità e viscosità dinamica o cinematica) $\rho; \mu$

L'indice dell'espressione di $\lambda$ lo possiamo riassumere in questa tabella

| | MOTO LAMINARE | MOTO DI TRANSIZIONE | MOTO TURBOLENTO | MOTO TURBOLENTO COMPLETAMENTE SVILUPPATO |
|---|---|---|---|---|
| TUBI LISCI | $\lambda = \frac{64}{Re}$ | | $\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25}$ <br> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$ | |
| TUBI SCABRI | $\lambda = \frac{64}{Re}$ | | FORMULA DI COOLEBROOK <br> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3,71}\cdot\frac{\varepsilon}{D}\right)$ | stessa formula <br> FORMULA DI PRANDTL-VON KARMAN <br> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{1}{3,71}\cdot\frac{\varepsilon}{D}\right)$ |

Commento sulla formula di COOLEBROOK

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3,71}\cdot\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

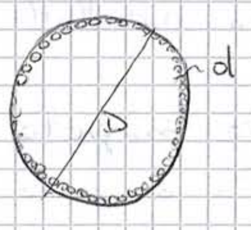
Il vantaggio di questa formula è il seguente:
se $Re$ aumenta si va verso moto turbolento completamente sviluppato
infatti se nella formula aumenta il numero di $Re$ il termine $\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}$ va a zero e quindi si va verso la formula di PRANDTL-VON KARMAN; mentre se uso una tubazione liscia e quindi la scabrezza tende a zero si va verso la formula $\frac{1}{\lambda} = -2\log_{10}\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$
Quindi quando non si sa in che regime ci si trova bisogna utilizzare la formula di COOLEBROOK perché pesa sia la scabrezza che il numero di $Re$.
Vediamo l'espressione della cadente $J$:

$$J = \lambda \cdot \frac{V^2}{2gD}$$

Questa ci dà l'idea delle perdite di carico. Esse cambiano in funzione del tipo di moto?
Se siamo in moto laminare:

$J = \frac{64\mu}{\rho \cancel{V} D} \cdot \frac{V^{\cancel{2}}}{2gD}$ = quindi $J$ è proporzionale alla velocità alla 1° potenza.

o se fosse regolare con l'altezza uniforme non è un criterio sufficiente perchè non tiene conto della lunghezza del flusso.
Allora si è pensato di dare ad ogni tubazione un valore della scabrezza che è una lunghezza, però facendo riferimento non a una caratteristica geometrica, ma alle perdite di carico che induce.
NIKURDSE fece degli studi su delle tubazioni speciali dove l'asperità della parete era realizzata tramite granulini di sabbia.




$\frac{d}{D}$ → ARPA di NIKURDSE

d: diametro dei granelli
D: diametro tubazione

Su una tubazione commerciale si utilizza l'ABACO di MOODY.

(2) Conosco Q, D, ε e devo calcolare J. Vuol dire che ho già scelto la tubazione.
Mi determino il numero di $Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{Q\, 4 D}{\pi D^2}$.
$\varepsilon/d$ la conosco, e quindi:
dall'abaco di Moody entro con il numero di Re, incrocio $\varepsilon/d$ e leggo in corrispondenza l'indice di resistenza $\lambda$.
Ricavato $\lambda$ mi calcolo la cadente $J = \frac{V^2}{2g\,D} \cdot \lambda$ (FORMULA DI DARCY - WEISBACH)
(3) Problema di verifica. Conosco D, J e ε e devo calcolare la Q che posso. Per come è formato l'abaco di Moody, l'unico dato che abbiamo è $\varepsilon/d$; perché sia il numero di Re che $\lambda$ sono in funzione della velocità e quindi della portata.
Allora si aggiunge una linea:

$$Re \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{\cancel{V} D}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot J \cdot 2g}{\cancel{V^2}}}$$

$\nu$ viscosità cinematica

SI TROVA ALL'ESTREMITÀ DELL'ABACO

$$Re \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{D}{\nu} \cdot \sqrt{2g D \cdot J} = C_1$$ - diventa un numero

L'indice di resistenza $\lambda$ e il numero di Re sono in scala logaritmica

$$\log\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) = \log C_1$$

Proprietà dei logaritmi:

$$\log Re + \log\sqrt{\lambda} = \log C_1$$

$$\log Re + \frac{1}{2}\log\lambda = \log C_1$$

$$\log\lambda = -2\log Re + 2\log C_1$$

Quindi $\log(Re \cdot \sqrt{\lambda})$ diventa una retta con coefficiente angolare $-2$ e una costante $C_1$ che conosciamo.
A questo punto entriamo con il valore di $\frac{\varepsilon}{d}$, vediamo dove interseca la retta che abbiamo tracciato, l'intersezione è la soluzione, e quindi andando in basso posso individuare il numero di Re.
Ricavato il numero di Re mi ricavo la velocità e quindi la portata.
(4) Problema di dimensionamento. Conosco Q, ε e J e devo calcolare il D da assegnare alla tubazione. (PROGETTO)
Tutti e tre i dati contengono il diametro e quindi non abbiamo nessun ingresso nell'abaco. Quindi dobbiamo trovare due raggruppamenti che non contengono il diametro.