



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1589A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Neirotti

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale. Prof.Cornetti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

11

*

3/03/2014

• STRUTTURA : QUALSIASI CORPO O INSIEME DI CORPI CAPACE DI TRASMETTERE FORZE

• I PROBLEMI STRUTTURALI

- 1) DETERMINARE COME LE FORZE SI DIFFONDONO NELLA STRUTTURA E VERIFICARE CHE LA STRUTTURA POSSA RESISTERE
- 2) DETERMINARE GLI SPOSTAMENTI CHE LA STRUTTURA SUBISCE PER EFFETTO DELLE FORZE E VERIFICARE CHE QUESTI SPOSTAMENTI SIANO ACCETTABILI

• STATICA E DINAMICA DELLE STRUTTURE

Usiamo 3 tipi di strutture →

- 1) TRIDIMENSIONALE
- 2) BIDIMENSIONALE
- 3) MONODIMENSIONALE (TRAVI)

• Modelli MATEMATICI → 1) CORPO RIGIDO

- CINEMATICA
- STATICA
- TRAVI e SISTEMI DI TRAVI

2) CORPO DEFORMABILE

- ANALISI DI ESSO
- CINEMATICO
- STATICA
- LEGAME COSTITUTIVO → LEGAME TRA PARTE STATICA e DEFORMATA
- APPLICATE A SISTEMI DI TRAVI

Come trovo il centro?

è un punto che non si muove.

$$\vec{v}_c = 0 \Rightarrow \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{oc} = 0$$

$$\vec{v}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{co}$$

$$\vec{co} \perp \vec{v}_0$$

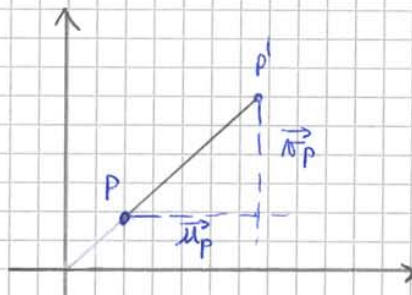
$$|\vec{co}| = \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{\omega}|}$$

cioè giace sulle normali alle
traiettorie dei punti dello struttura

Scrivo in termini differenziali l'eq del moto:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{op}$$

$$\frac{d\vec{s}_p}{dt} = \frac{d\vec{s}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{op}$$



$$\vec{pp}' = \text{Vettore spostamento} = \vec{v}_p$$

Posso quindi scrivere

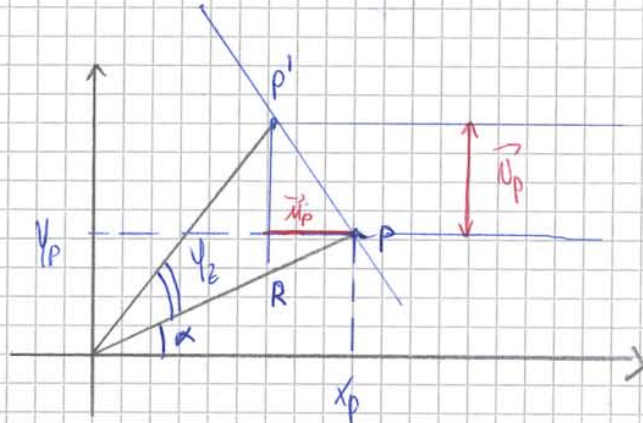
$$d\vec{s}_p \approx \underbrace{v_p \vec{i} + v'_p \vec{j}}_{\vec{v}_p}$$

è un' approssimazione
pochi un su \oplus dei
differenziali

• CASO PARTICOLARE

$M_0 = N_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{cases} \vec{M}_P = -\varphi_z y_P \\ \vec{N}_P = \varphi_z x_P \end{cases}$$



$\overline{PP'} = \varphi_z R$

Eg $\varphi_z =$ UN PICCOLI ANGOLO
Eg $\sim \varphi_z$

$$\begin{cases} N_P = \overline{PP'} \cos \alpha = \varphi_z R \cdot \cos \alpha = \varphi_z x_P \\ M_P = \overline{PP'} \sin \alpha = -\varphi_z y_P \end{cases}$$

I Vincoli

Qualunque dispositivo meccanico atto a bloccare gli spostamenti di una struttura

• (b) Gradi di libertà di una struttura

$g = 3 \cdot m$

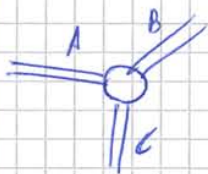
$m =$ numero di corpi della struttura

I vincoli possono essere
 → ESTERNI
 → INTERNI (tra corpi della stessa struttura)

Vincoli interni

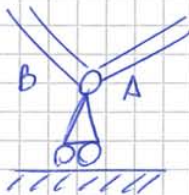
SIMBOLO	NOME	DEF. STATICO	DEF. CINEMATICA	CIR	GRADO
<p>(PUNTO ASSE VERTICALE)</p>	BISCELLETTA	$M_A = M_B$ $N_A \neq N_B$ $\varphi_A \neq \varphi_B$	$N \neq 0$ $T = 0$ $M = 0$	SO ASSE X	1
	DOPPIO ROLLER INTERNO	$M_A = M_B$ $N_A \neq N_B$ $\varphi_A = \varphi_B$	$N \neq 0$ $T = 0$ $M \neq 0$	\rightarrow SO X	2
	CERNIERA INTERNA	$N_A = N_B$ $M_A = M_B$ $\varphi_A \neq \varphi_B$	$N \neq 0$ $T \neq 0$ $M = 0$	IN P	2
	INCASTRO INTERNO	$M_A = M_B$ $N_A = N_B$ $\varphi_A = \varphi_B$	N $T = 0$ M		3

PARTICOLARI



di vincolo
 GRADO $4 = 2 \cdot (m-1)$

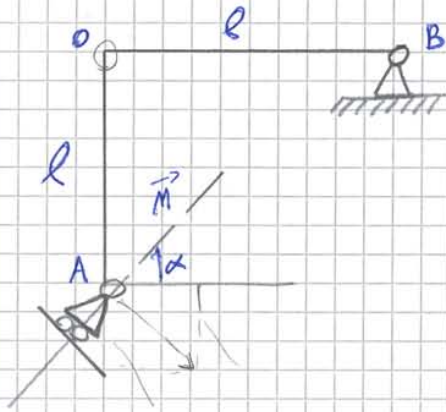
$M_A = M_B$ $N_A = N_B$
 $M_B = M_C$ $N_B = N_C$



$\begin{cases} M_A = M_B \\ N_A = N_B \\ N_A = 0 \end{cases}$

GRADO di vincolo
 3

• Studio Algebrico della Cinematica



$$\vec{M}_{\Delta A} = \langle \vec{M}_A \cdot \vec{M} \rangle$$

$$\vec{M} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{M}_A = \mu_A \vec{i} + \nu_A \vec{j}$$

ORA SCELGO IL POLO "O"

$$\begin{cases} \mu_A = \mu_0 - \varphi_0 (y_A - y_0) = \mu_0 - \varphi_0 y_A + \varphi_0 y_0 \\ \mu_B = \mu_0 - \varphi_0 (y_B - y_0) \\ \nu_A = \nu_0 + \varphi_0 (x_A - x_0) \\ \nu_B = \nu_0 + \varphi_0 (x_B - x_0) \end{cases}$$

SCRIVO IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & l \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \nu_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \\ \nu_B \end{pmatrix}$$

$$\det = -\sin \alpha l + l \cos \alpha$$

IL SIST AMMETTE SOLU se $\text{rk} = \text{MAX} \Rightarrow \det \neq 0$

• CATENA CINEMATICA

È un \forall SISTEMA a Volto Libero di TRAVI

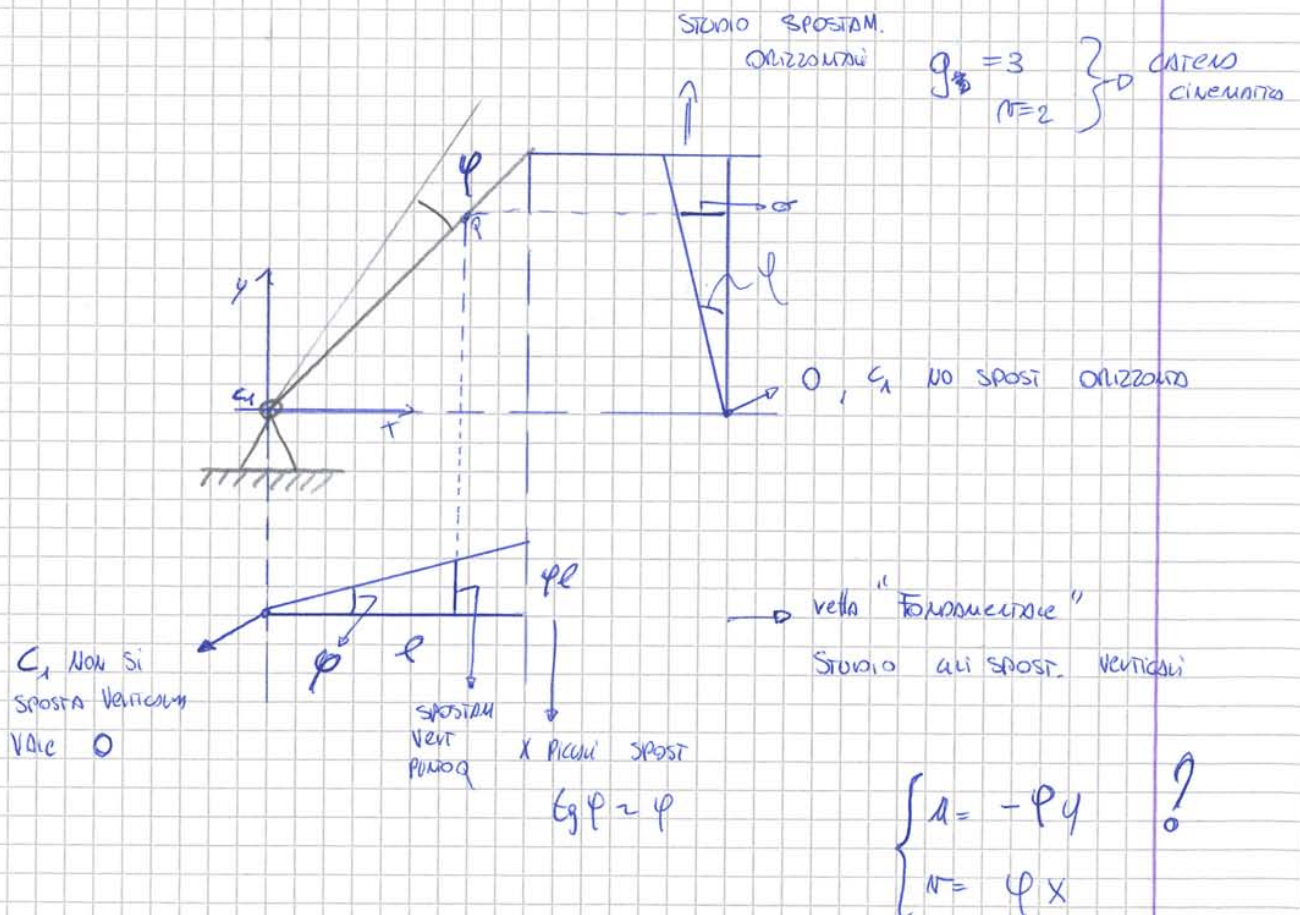
• TEOREMA 1 : SE IL SISTEMA È COSTITUITO DA ALMENO DUE TRAVI
 ALLORA \wedge QUALSIASI COPPIA DI TRAVI :
PER

$C_i ; C_j ; C_{ij}$ SONO ALLINEATI

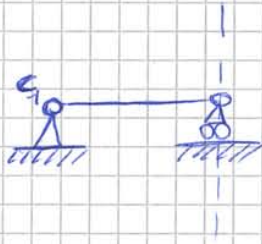
• TEOREMA 2 : SE CI SONO ALMENO 3 TRAVI

$C_{ij} ; C_{jk} ; C_{ik}$ SONO ALLINEATI

ESEMPIO

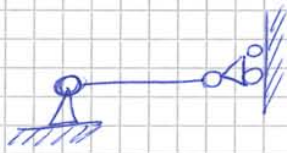


ES \Rightarrow UNA disposizione ISOSTATICA



$$\begin{cases} q=3 \\ r=3 \end{cases}$$

isostatica? sì, x_{K_1} è impossibile
 ch $c_1 \leftarrow$ ~~non~~
 non può essere anche
 solo u_{K_1} !



$$\begin{cases} q=3 \\ r=3 \end{cases}$$

isostatica? no!
 x_{K_1} c_1 APPONTO
 anche ALTO u_{K_1}

\Downarrow
labile!

(15)

x_{K_1} rispetto Teor 1 deve labile!

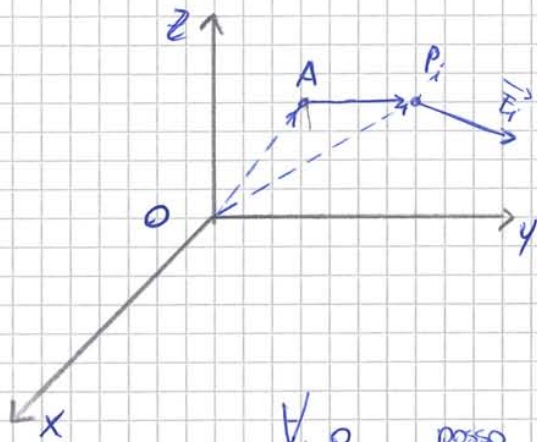
6/03/2014

• Equazioni cardinali della statica

AFFINCHÉ UN CORPO SOGGETTO A FORZE \vec{F}_i e MOMENTI \vec{M}_j SIA IN EQUILIBRIO, DEVONO ESSERE SODDISFATTE LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA. DEVONO CIÒ ESSERE NULLE TANTO LA RISULTANTE QUANTO IL MOMENTO RISULTANTE

⇓
però Valere Vero 0!

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{j=1}^m \vec{M}_j + \sum_{i=1}^m \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = 0 \end{cases}$$



V. O posso scrivere:

$$\textcircled{1} \vec{M}_A = \sum_{j=1}^m \vec{M}_j + \sum_{i=1}^m \vec{AP}_i \times \vec{F}_i$$

$$(\vec{AO} + \vec{OP}_i) \times \vec{F}_i$$

possoscrivere $\vec{AP}_i = \vec{AO} + \vec{OP}_i$

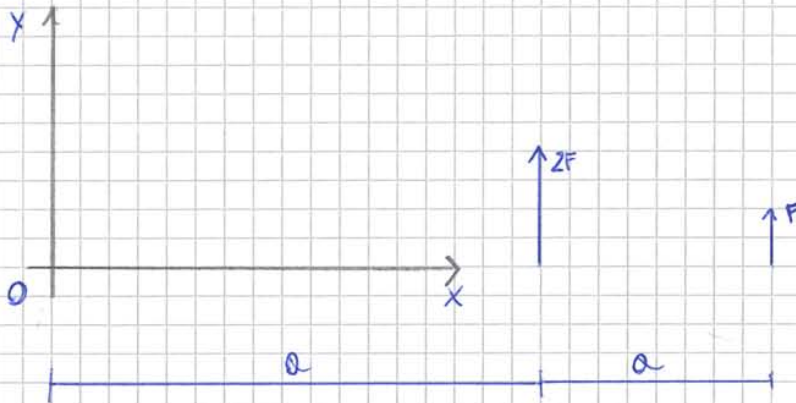
quindi $\textcircled{1} = \sum_{j=1}^m \vec{M}_j + \underbrace{\vec{AO} \times \sum \vec{F}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^m \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O$
 $R=0$ ✓

SISTEMI RARI

Se $\vec{R} \neq 0$ \exists una e una sola retta, detta "Asse centrale", del piano tale che il momento risultante rispetto ai suoi punti (pencil) è nullo.

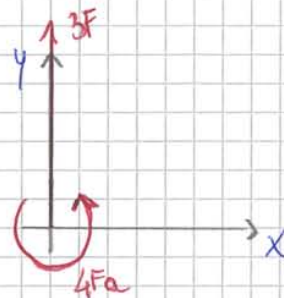
↓
 Il sistema, se ridotto ad un punto appartenente all'asse centrale, equivale alla sola risultante

Ese



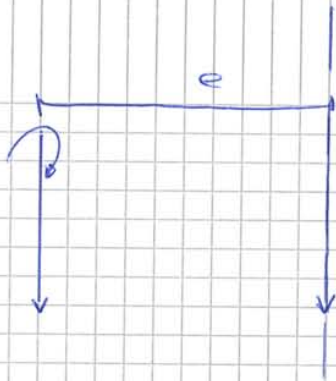
$$\begin{cases} \vec{R}_y = 2F + F = 3F \\ \vec{M}_O = 2F \cdot a + F \cdot 2a = 4Fa \end{cases}$$

CREO UN SIST eq. IN O



HA STESSO \vec{R} o STESSO \vec{M} rispetto a O
 equivale ✓

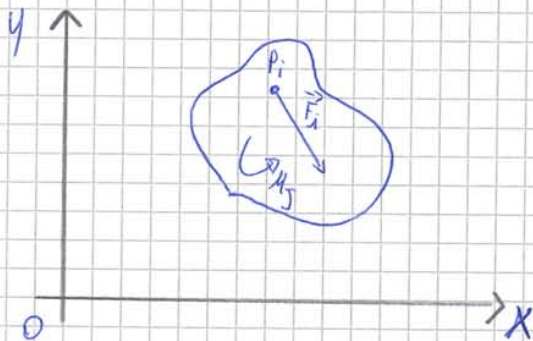
CERCO L'ASSE CENTRALE : →



$$\frac{\bar{q}l^2}{3} = e \cdot \frac{\bar{q}l}{2}$$

$$e = \frac{2}{3}l$$

SISTEMI PIANI



$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = R_{xi} + R_{yi} = 0 \\ M_o = \sum_j M_j + \sum_i (\vec{OP}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{k} \end{cases}$$

→ 2 eq
→ 1 eq = eq alla posizione

3 gradi di libertà

$$g = 3 \times m$$

↓
num di carni

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x & l \cos x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_o \\ N_o \\ \varphi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{Am} \\ N_{Am} \\ \varphi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} M_o \cos x + N_o \sin x + \varphi_o l \cos x - M_{Am} = 0 \\ M_o = N_o = 0 \\ N_o + \varphi_o l = 0 = \varphi_o \end{cases}$$

$$[A] = [C]^T$$

⇒ sempre

"DUNQUA" STATICO-COMPLETO"



Ammettono Soluzione se $\det \neq 0$

⇒ se $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

1 sola soluzione

se $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$

SIST. indeterminato
(3 eq. con 4 inc.)

⇒ $\begin{cases} B \neq 0 & \text{SISTEM. IMPOSSIBILE} \\ B = 0 & \text{SIST. e' INDETERMINATO} \end{cases}$

Th del teorema \rightarrow $L=0$

• Dimostrazione

$$L = \underbrace{\left\{ F_0^A \right\}^T}_{1 \times g} \cdot \underbrace{\left\{ M_0^B \right\}}_{g \times 1} + \underbrace{\left\{ X^A \right\}^T}_{1 \times n} \cdot \underbrace{\left\{ M_x^B \right\}}_{n \times 1} =$$

Lavoro Virtuale

= Applico proprietà Matrici = $-\left([A] \left\{ X^A \right\} \right)^T \left\{ M_0^B \right\} + \left\{ X^A \right\}^T [C] \left\{ M_0^B \right\} =$

$$= -\left\{ X^A \right\}^T [A]^T \left\{ M_0^B \right\} + \left\{ X^A \right\}^T [C] \left\{ M_0^B \right\} =$$

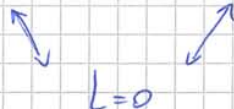
$$= \left\{ X^A \right\}^T \left(-[A]^T \left\{ M_0^B \right\} + [C] \left\{ M_0^B \right\} \right) = 0$$

\Leftrightarrow
 $= 0$

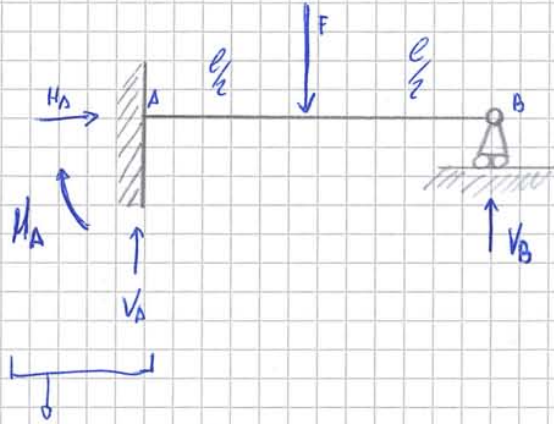
Reazione

\uparrow
Rever !!!
000

Convergenza \leftrightarrow Equilibrio



Calcolo di Reazioni Vincolari in Strutture Isostatiche



INUSIVO, 3 GRADI DI LIBERTÀ

3 reazioni vincolari per impedire i movimenti

IMPOSSIBILE LE FORZE REAZIONI VINCOLARI

$$g = 3$$

$$D = 3 + 1 = 4$$

↓
IPERSTATICA

3 eq
4 incognite
↓
IMPOSSIBILE!

Per esempio, scriviamo le eq.

$$\rightarrow H_A = 0$$

$$\uparrow V_A + V_B - F = 0$$

$$\curvearrowright -F \cdot \frac{l}{2} + V_B l - M_A = 0$$

Scrivo le eq:

$$\text{Corpo I} \begin{cases} \rightarrow H_A - H_B = 0 \\ \uparrow V_A - F + V_B = 0 \\ \text{A)} -F \frac{l}{2} + V_B l + H_B 2l = 0 \end{cases}$$

$$\text{Corpo II} \begin{cases} \rightarrow H_B - H_C = 0 \\ \downarrow V_C + V_B = 0 \\ \text{B)} l V_C + l H_C = 0 \end{cases}$$

e risolvo ...

$$\int H_A = H_B = H_C$$

$$V_A = F - V_B = F + V_C$$

$$V_C = -V_B$$



$$V_C = -\frac{F}{6}$$

$$V_B = \frac{F}{6}$$

$$V_A = \frac{5}{6} F$$

$$H_A = H_B = H_C = \frac{F}{6}$$

Faccio il disegno con i risultati corretti in verso e verso

Metodo GRAFICO

V corpo

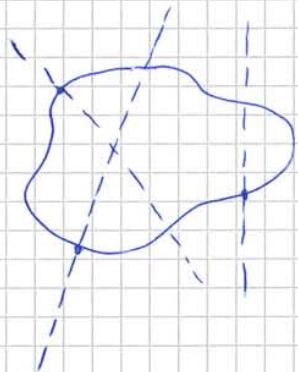


X Equilibrio devono essere diretti e
opposti

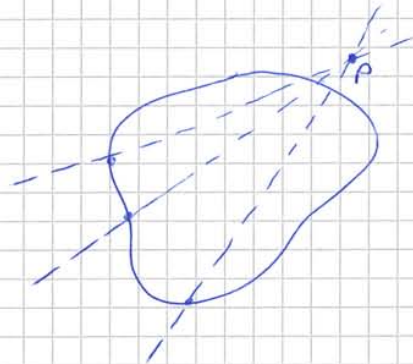
Condizioni a 3 Forze



Condizione NECESSARIA (NO SUFF) per equilibrio e che le 3
rette d'azione devono passare per un unico stesso punto

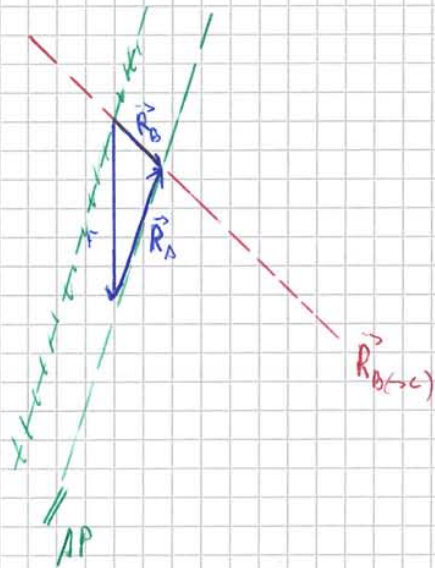


~~No~~ eq non può esserci!



OK.
Condiz. Necessaria
Soddisfatta.

Disegno piano l'uno di momento F

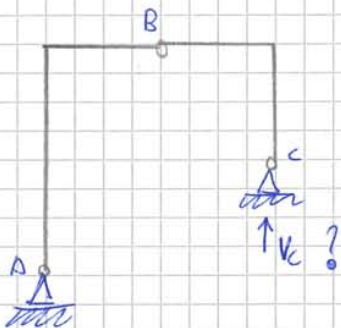


1/3

Metodo 3 (LAVORI VIRTUALI)

Considera un sistema di spostamenti / cedimenti virtuali ~~congruenti~~ congruente in cui un cedimento virtuale non nullo è quello reale alla reazione virtuale incognita.

Questo Metodo è molto utile a calcolare una Forza / Momento in particolare



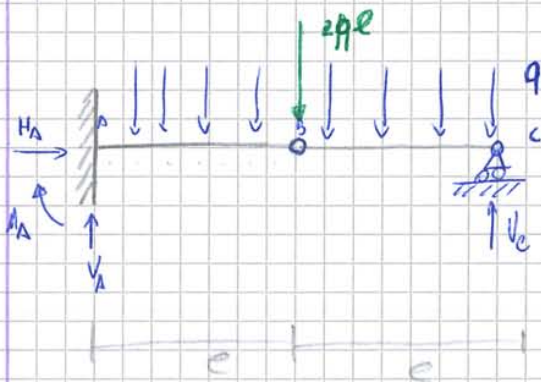
~~Decidere~~ Decidere il vincolo X per il quale lo spostamento reale al vincolo.



Next pag - - -

CASI PARTICOLARI

1) SISTEMI di carichi distribuiti con \vec{R}

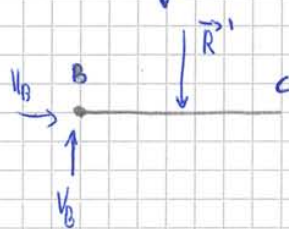


$f=6$
 $N=6$

$\vec{R} = 2ql$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow H_A = 0 \\ \uparrow V_A + V_C - \underbrace{2ql}_{\text{risultante}} = 0 \\ \curvearrowright M_A - 2lV_C + 2ql^2 = 0 \end{array} \right.$$

eq. ausiliaria $\curvearrowright_{B_C} V_C l - \frac{ql^2}{2} = 0$



$\vec{R}' = \vec{R}$
Una nuova risultante
per A $R' = ql$

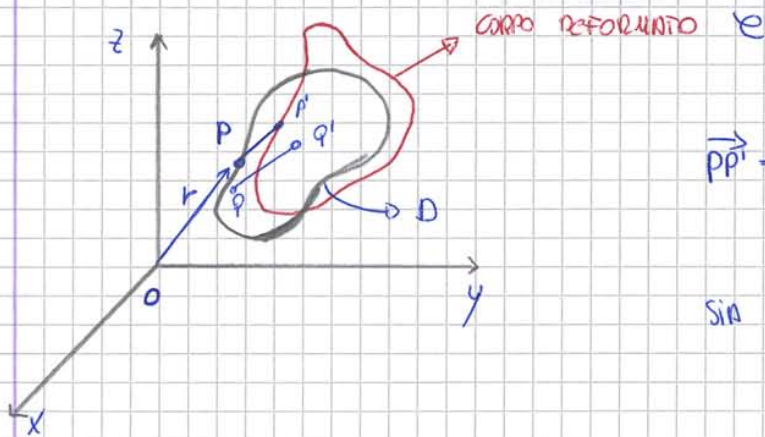
Applicando a $\frac{l}{2}$!
 $\Rightarrow M \frac{ql^2}{2} !$

(NB)

e nuovo

$$\begin{pmatrix} u_q \\ v_q \\ w_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \\ z_q - z_p \end{pmatrix}$$

$$\{M_q\} = \{M_p\} + [\varphi] \{Q-P\}$$



$$\vec{PP'} = \{M_p\}$$

Sia q nell'intorno di P

Funzione spostamento

$$f: P \rightarrow P'$$

$$D \rightarrow e$$

$$\{z\} \rightarrow \{u\}$$

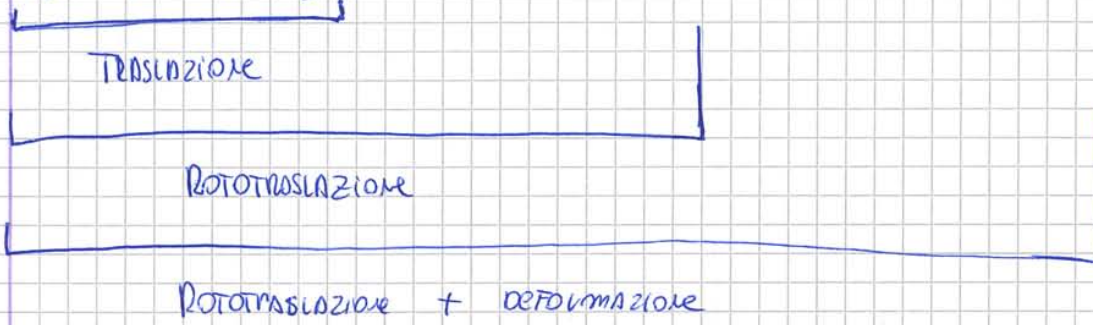
$$\left(H_p : \text{esclusivo in } P \text{ punto} \right)$$

$$P \begin{cases} P' \\ Pz \end{cases}$$

↳ Caratterizza $f(p)$ un valore det. $f(q)$

esempio q nell'intorno di P posso utilizzare lo sviluppo in Taylor
 Poiché solo per piccoli spostamenti possiamo fermarci al 1° ordine

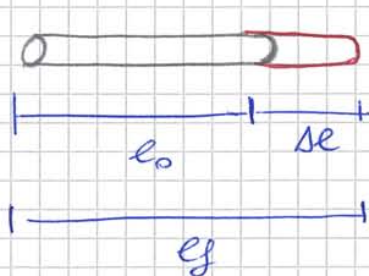
$$\bullet \left\{ \mathbf{M}_q \right\} = \left\{ \mathbf{M}_p \right\} + \left[\mathbf{\Psi}_p \right] \left\{ \mathbf{Q}-\mathbf{P} \right\} + \left[\mathbf{\varepsilon}_p \right] \left\{ \mathbf{Q}-\mathbf{P} \right\}$$



$$\left[\mathbf{\varepsilon}_p \right] = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \text{Symmetric} & \frac{dv}{dy} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & & \frac{dw}{dz} \end{pmatrix}$$

$$= \text{Nominale} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

ESEMPIO



$$\text{Allungamento} \rightarrow \text{Allungamento relativo} = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Per la Variazione di U

$$\frac{\Delta U}{U} - \mathcal{D} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_p (x_Q - x_p)}{x_Q - x_p} + \frac{\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_p (y_Q - y_p)}{y_Q - y_p}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_p = \underbrace{\mathcal{D}_{xy}}_{\text{Scostamento Anzioso}}$$

U_b Menzioni Variazioni Particolari

se



+ una o un poco

$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ eq. generici} \end{array} \right.$

2 eq. Assumendo rispetto a 2 dei 3 car.

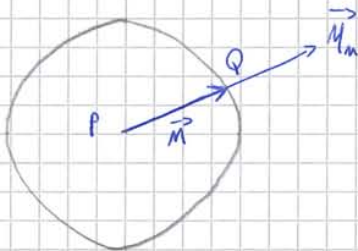
(se la var. 3 ecc ecc...)

$$\gamma_{m,m} = \gamma_{m,m} = \underbrace{\mu_{m,m} + \mu_{m,m}}_{2 \mu_{m,m}}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{m,m} = \mu_{m,m}$$

~~1111~~
2000

-] Direzioni rispetto alle quali $\vec{\mu}_m \parallel \vec{m}$?



$$\{\mu_m\} = [E] \{m\}$$

se sono //

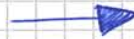


$$\{\mu_m\} = K \{m\}$$

ESSEDO \vec{m} ULTIMO

$$K = |\mu_m| = \epsilon_m$$

Relazioni
di
PARALLELISMO



$$\ominus \downarrow \{\mu_m\} = [E] \{m\}$$

$$\downarrow \{\mu_m\} = \epsilon_m [I] \{m\}$$

$$\emptyset \quad ([E] - \epsilon_m [I]) \{m\} = \{0\}$$

se $\det([E] - \epsilon_m [I]) \neq 0$ Allora ho soluzioni \neq zero
bollo

3 casi → 1) $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow \{M_1\} \{M_2\} \{M_3\} \left(\begin{array}{c} \perp \\ \text{distinti} \end{array} \right)$

2) $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow \{M_3\}$ è direzione principale

↳ Vettore \perp a $\{M_3\}$ è autovettore

3) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow$ qualsiasi direzione è principale

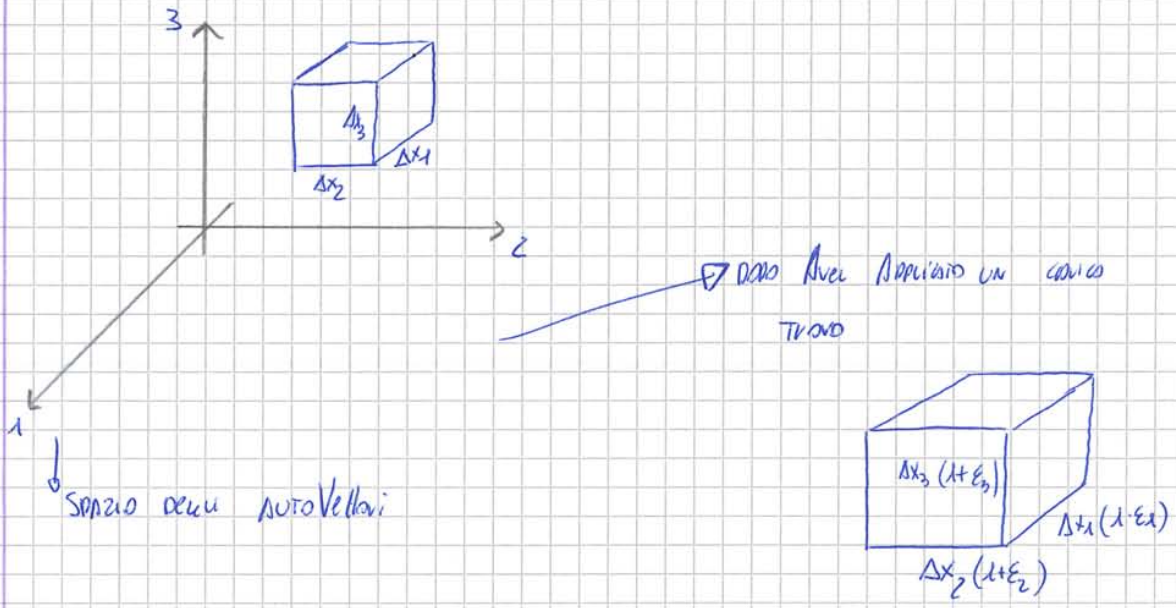
• SISTEMA DI Auto vettori (1,2,3)

$$\begin{pmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \\ M_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

↓
Componenti del vettore M lungo i 3 Auto vettori.

$$\begin{cases} J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ J_{II} = \text{inv } K=0 \text{ quad } = -\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 \\ J_{III} = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \end{cases}$$

Dilatazione Volumica



Dilatazione Volumica

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 (1+\epsilon_1) (1+\epsilon_2) (1+\epsilon_3) - \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$$

$$= (1+\epsilon_1) (1+\epsilon_2) (1+\epsilon_3) - 1$$

$$= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 =$$

$$= \text{Hp piccole deformazioni} \cong \underbrace{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}_{\text{poiché } J_I \text{ è invariante}} = J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$= \begin{pmatrix} m_x & m_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x m_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_x & \epsilon_y m_y \end{pmatrix} =$$

$$= \epsilon_x m_x^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_y m_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_y m_x + \epsilon_y m_y^2 = \epsilon_m$$

direzioni $0^\circ \Rightarrow m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ①

$60^\circ \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ ②

$120^\circ \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ ③

$$\begin{cases} \text{①} & \epsilon_x = \epsilon_{0^\circ} \\ \text{②} & \frac{\epsilon_x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} + \frac{3}{4} \epsilon_y = \epsilon_{60^\circ} \\ & \frac{\epsilon_x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} + \frac{3}{4} \epsilon_y = \epsilon_{120^\circ} \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ})$$

$$\epsilon_y = \frac{2\epsilon_{60^\circ} + 2\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_x}{3}$$

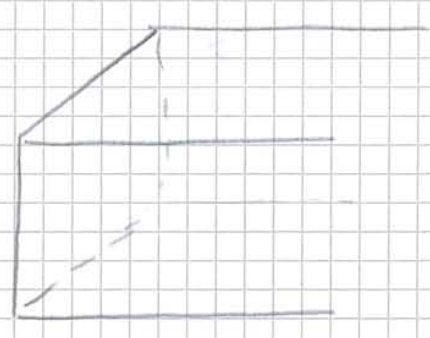
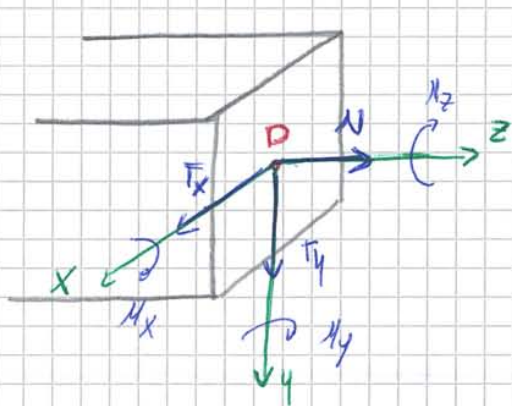
Se $\epsilon_{60^\circ} \neq \epsilon_{120^\circ} \Rightarrow \gamma_{xy} \neq 0$ xy non è autovalore

$\epsilon_{60^\circ} = \epsilon_{120^\circ} \Rightarrow \gamma_{xy} = 0$ xy è autovalore

$\epsilon_{60^\circ} = \epsilon_{120^\circ} = \epsilon_x \Rightarrow$ qualsiasi sistema è principale

Innanzitutto

D = DIVERGENTE



X la spazio posso ridurre a D.

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = T_x & \text{TAVO LUNGO X} \\ R_y = T_y & \text{TAVO LUNGO Y} \\ R_z = N & \text{FORZO NORMALE} \end{cases}$$

$$\vec{M} \begin{cases} M_x & \text{MOMENTO FLESSIONE INTORNO A X} \\ M_y & \text{MOMENTO FLESSIONE INTORNO A Y} \\ M_z & \text{MOMENTO TORSIONE INTORNO A Z} \end{cases}$$

(NB)

CASO PINNO

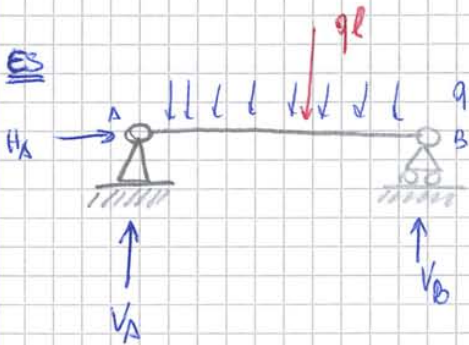
$$\begin{cases} R_y \equiv T_y \\ R_z \equiv N \\ M_x \equiv M_x \end{cases}$$

Apertura in \vec{s}

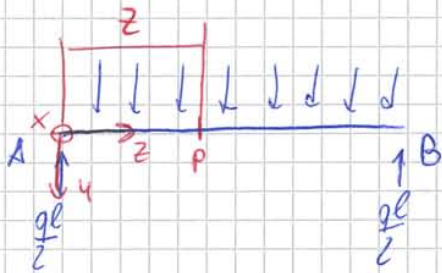
\vec{s} = ASSISA CURVILINEA (ASSE BIANCINI)

2) Per il diagramma

$\left\{ \begin{array}{l} T > 0 \quad V_0 \text{ riprodotto dalla parte } y < 0 \text{ e viceversa} \\ M > 0 \quad V_0 \text{ riprodotto dalla parte } y > 0 \text{ e viceversa} \\ N \quad \text{inverso.} \end{array} \right.$

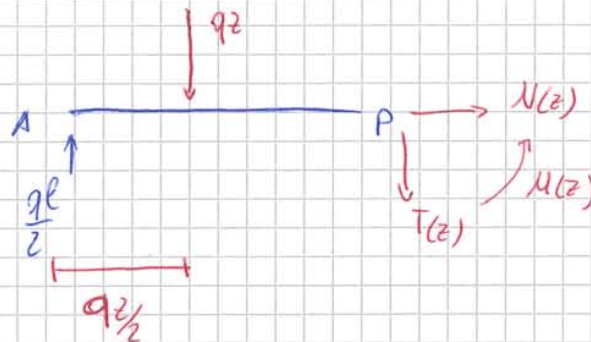


$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B - ql = 0 \\ \overset{A}{\curvearrowright} V_B l - \frac{ql^2}{2} = 0 \end{cases}$$

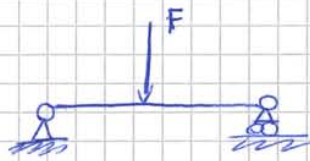


$$0 < z < l$$

isole AP e guando le successioni



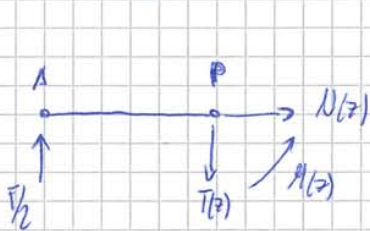
ES



ISOLO UN AP

Mi concentro su Δx e dx di F

$z \in [0, \frac{l}{2}]$



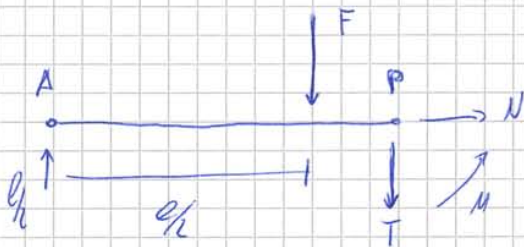
$$\left\{ \begin{array}{l} N(z) = 0 \\ \frac{F}{2} - T(z) = 0 \end{array} \right. \quad \underbrace{T(z) = \frac{F}{2}}_{\text{costante!}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{P)} \quad M(z) - \frac{F}{2}z = 0 \\ \\ \end{array}$$

$$M(z) = \frac{Fz}{2}$$

$\frac{l}{2} < z < l$

qui invece (Δx) c'è F !



$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ \frac{F}{2} - F - T = 0 \end{array} \right. \quad \underbrace{T = -\frac{F}{2}}_{\text{cost}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{P)} \quad M(z) - \frac{F}{2}z + F(z - \frac{l}{2}) = 0 \\ \\ \end{array}$$

$$M(z) = -\frac{Fz}{2} + \frac{Fl}{2}$$

Se conosco $G(x_u; y_u)$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_x = \int_A y dA = A \cdot y_u \\ S_y = \int_A x dA = A \cdot x_u \end{cases} \quad (\neq 0) \quad [L^3]$$

Se ho un'area scomposta $\Rightarrow S_{x,y} = \sum_{i=1}^n S_{x_i}; S_{y_i}$

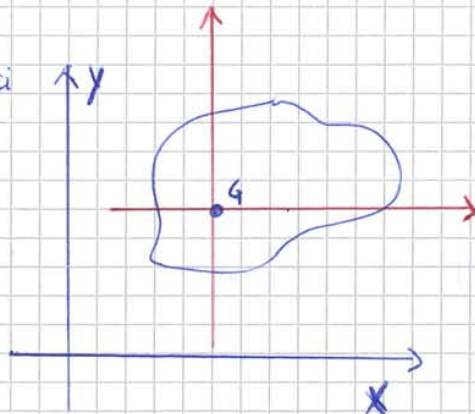
• MOMENTO D'INERZIA (Momenti del 2° ordine)

$$\begin{cases} I_x = \int_A y^2 dA \\ I_y = \int_A x^2 dA \end{cases} \quad (> 0) \quad [L^4]$$

in più: "Momento centrifugo o Momento Misto"

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (\geq 0)$$

• Assi Baricentrici



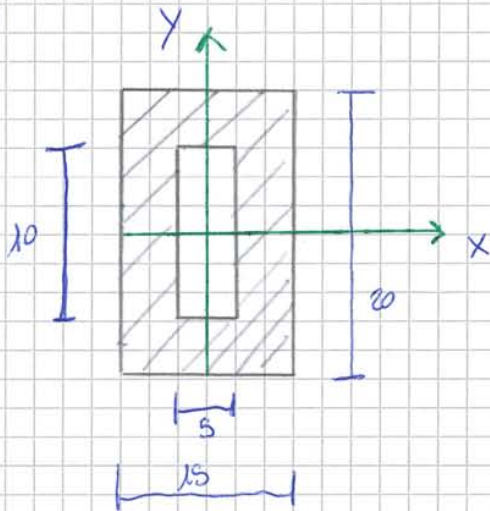
di qst conosco

$$I_{x_u}, I_{y_u}, I_{x_u y_u}$$

Non questi, posso calcolare questi rispetto a xy con il

"Teorema dei assi //"

ES



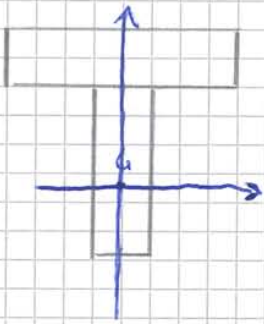
$$I = \sum_{i=1}^n I_i$$

Prendi il rettangolo - rettangolo interno

$$I_x = \frac{15 \cdot 20^3}{12} - \frac{5 \cdot 10^3}{12} \approx \text{cm}^4$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 15^3}{12} - \frac{10 \cdot 5^3}{12} \approx \text{cm}^4$$

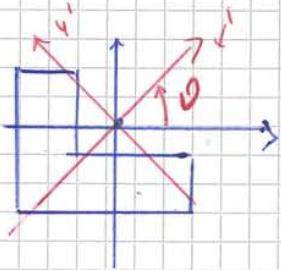
ES quando



Se centro gli assi in G

$$\underline{\underline{I_{xy} = 0!}}$$

Assi principali d'inertzia



x', y' Assi principali d'inertzia

(NB) \exists un ϑ_0 / $I_{x'y'}$ si annulla

e I_x ($0 I_{x'}$) e' Max e

l'altro min.

DATI $I_x; I_y; I_{xy} \rightarrow ? I_{x'}; I_{y'}; I_{x'y'}$

$$\begin{cases} I_{x'} = I_x \cos^2 \vartheta + I_y \sin^2 \vartheta - 2 I_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ I_{y'} = I_x \sin^2 \vartheta + I_y \cos^2 \vartheta + 2 I_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ I_{x'y'} = I_{xy} \cos(2\vartheta) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin(2\vartheta) \end{cases}$$

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \text{Arctg} \left(\frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} \right)$$

$$\boxed{-T + \frac{dM}{dz} + m = 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dz^2} = -q(z)}$$

(16)

DA (2)

Passiamo in forma matriciale il sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[D]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

Rimemo \circ

$$\int_{z_a}^{z_b} \left[\frac{d}{dz} (A - Tz) + m - qz \right] dz = 0$$

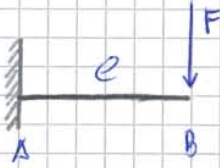
$$\int_{z_a}^{z_b} \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dT}{dz} z - T + m - qz \right) dz = 0$$

$$\int_{z_a}^{z_b} \left[-z \left(\frac{dT}{dz} + q \right) - T + \frac{dM}{dz} + m \right] dz = 0$$

$$dM - T dz + m dz = 0$$

$$\boxed{-T + \frac{dM}{dz} + m = 0}$$

ES (cassa)



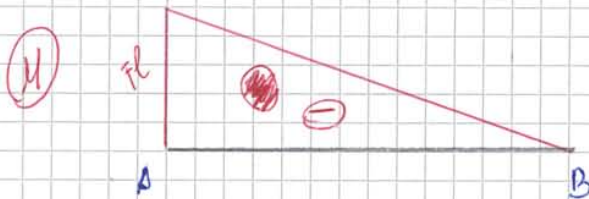
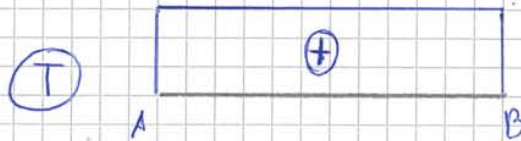
$$\frac{d^2M}{dz^2} = 0$$

$$\frac{dM}{dz} = C_1$$

$$M = C_1 z + C_2$$

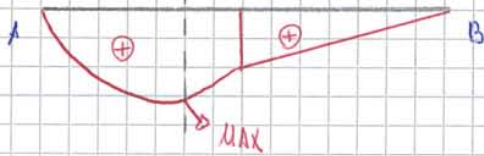
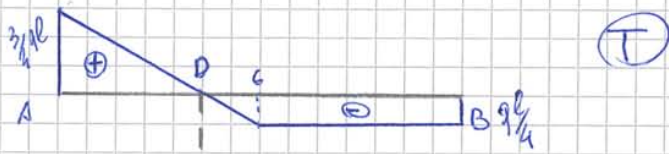
$$cc \begin{cases} M(e) = 0 \Rightarrow C_1 e + C_2 = 0 \\ T(e) = F \Rightarrow C_1 = F \left(\frac{dM}{dz} \Big|_e = F \right) \end{cases} \begin{cases} C_2 = -Fe \\ C_1 = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = Fz - Fe = -F(e-z) \\ T = F \end{cases}$$



$$\begin{cases} M(0) = -Fe \\ M(e) = 0 \end{cases}$$

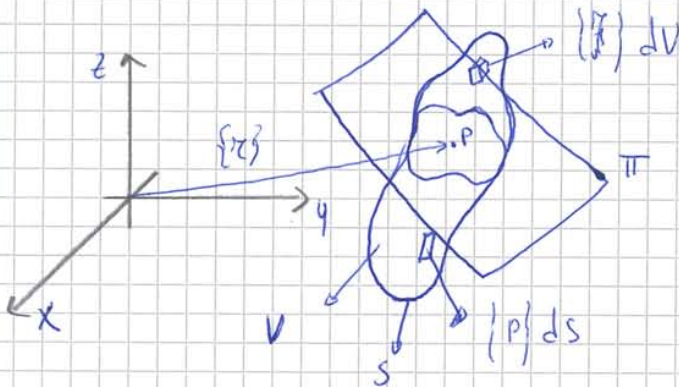
$$\begin{cases} V_A = T(0) = F \\ V_B = T(e) = F \end{cases}$$



Quanto vale il MAX? ovv e?

il MAX e' dove $T(z) = 0$

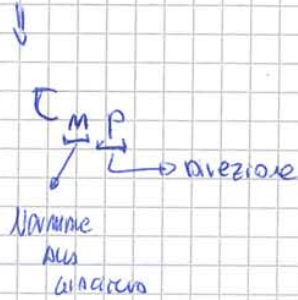
• STATICA DEI CORPI DEFORMABILI



(Force)
$$\int_V \{F\} dV + \int_S \{p\} ds = \{0\}$$

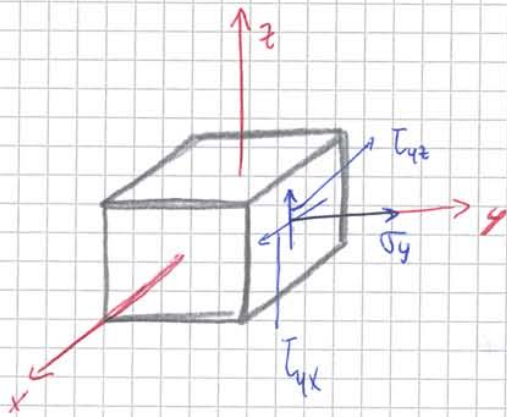
(Momenti)
$$\int_V \{r\} \times \{F\} dV + \int_S \{r\} \times \{p\} ds = \{0\}$$

$$\left\{ \tau_m \right\} = \tau_m \vec{n} + \underbrace{\tau_{tp} \vec{p} + \tau_{tp} \vec{q}}_{\text{Componenti TANGENZIALI (poiché coltano nella tangente)}}$$



$$|\tau_m| = \sqrt{\tau_{tp}^2 + \tau_{tp}^2}$$

Un cubo con:



(idem su altre facce)

Verifica in una piccola porzione di superficie: →

$$\begin{pmatrix} t_{mx} \\ t_{my} \\ t_{mz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{xy} \\ t_{xz} \end{pmatrix} m_x + \begin{pmatrix} t_{yx} \\ t_{yy} \\ t_{yz} \end{pmatrix} m_y + \begin{pmatrix} t_{zx} \\ t_{zy} \\ t_{zz} \end{pmatrix} m_z$$

Svolgo i calcoli

$$\begin{cases} t_{mx} = t_{xx} m_x + t_{yx} m_y + t_{zx} m_z \\ t_{my} = t_{xy} m_x + t_{yy} m_y + t_{zy} m_z \\ t_{mz} = t_{xz} m_x + t_{yz} m_y + t_{zz} m_z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t_{mx} \\ t_{my} \\ t_{mz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$$

$$\{t_m\} = [\sigma] \{m\}$$

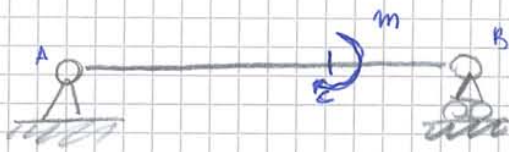


$$\begin{pmatrix} t_{mx} \\ t_{my} \\ t_{mz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$$



Tensori per i sforzi

ES



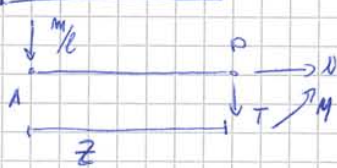
Eq

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ \text{A)} -m + V_B l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_A = -\frac{m}{l} \\ V_B = \frac{m}{l} \end{cases}$$



Movente?

Diviso in due: $0 < z < \frac{3}{4}l$



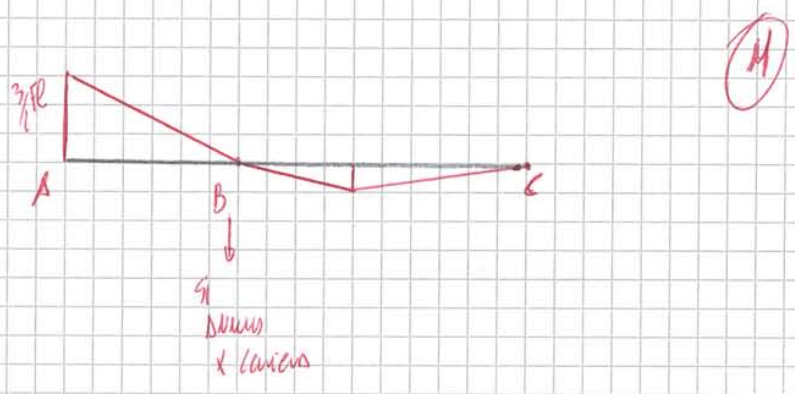
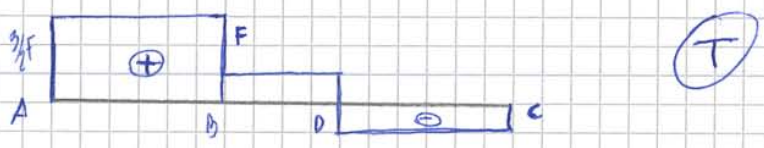
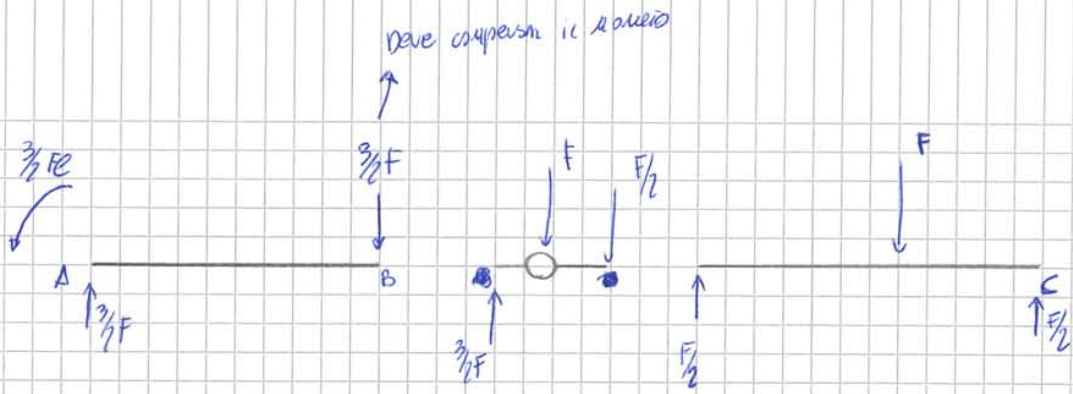
$$\begin{cases} N = 0 \\ \frac{m}{l}z + T = 0 \quad T = -\frac{m}{l}z \\ \text{P)} M + \frac{m}{l}z^2 = 0 \end{cases}$$

$$M = -\frac{m}{l}z^2$$

$\frac{3}{4}l < z < l$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -\frac{m}{l}z \\ \text{P)} M - m + \frac{m}{l}z = 0 \quad M = m\left(\frac{z}{l} - 1\right) \end{cases}$$



$$\sigma_m^3 - J_I \sigma_m^2 - J_{II} \sigma_m - J_{III} = 0$$

siavo

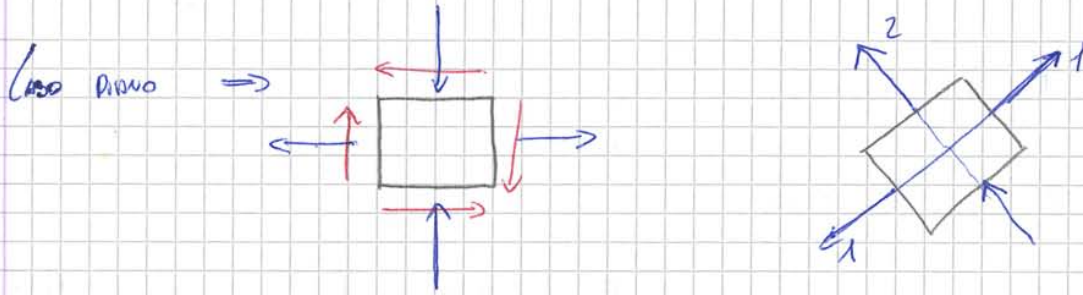
$$\begin{cases} J_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_{II} = \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ J_{III} = \det [\sigma] \end{cases}$$

↓
INVARIANTI

Ho 3 soluzioni

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow$ AUTOVALORI, sono le tensioni principali
che agiscono sulle linee con $\forall \tau = 0$
se li sostituisce in (1)

Trovo le autovalori: $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3 \Rightarrow$ direzioni principali delle tensioni



ESEMPIO

DATI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ quali sono i valori di σ_m e τ_m realizzabili?

1) DEVO CERCARE LA DIREZIONE DI NORMALE M SU CUI LA TENSIONE HA COMPONENTI σ_m, τ_m

Attraverso la relazione di Cauchy $\{t_m\} = [\sigma] \{M\}$

$$\begin{pmatrix} t_{mx} \\ t_{my} \\ t_{mz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 M_1 \\ \sigma_2 M_2 \\ \sigma_3 M_3 \end{pmatrix}$$

↓
(Componenti)

$$|\vec{t}_m|^2 = \sigma_1^2 M_1^2 + \sigma_2^2 M_2^2 + \sigma_3^2 M_3^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2$$

$$\vec{M} \cdot \vec{t}_m = \{M_i\}^T \{t_m\} = \{M\}^T [\sigma] \{M\} = t_{mm} = \sigma_m$$

$$\{M_1, M_2, M_3\} \begin{pmatrix} \sigma_1 M_1 \\ \sigma_2 M_2 \\ \sigma_3 M_3 \end{pmatrix} = \sigma_1 M_1^2 + \sigma_2 M_2^2 + \sigma_3 M_3^2 = \sigma_m$$

$$M_2^2 = - \frac{(\sigma_m - \sigma_1)(\sigma_m - \sigma_3) + t_m^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} \geq 0$$

$$M_3^2 = \frac{(\sigma_m - \sigma_1)(\sigma_m - \sigma_2) + t_m^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \geq 0$$

$N =$ equazioni di circonferenze

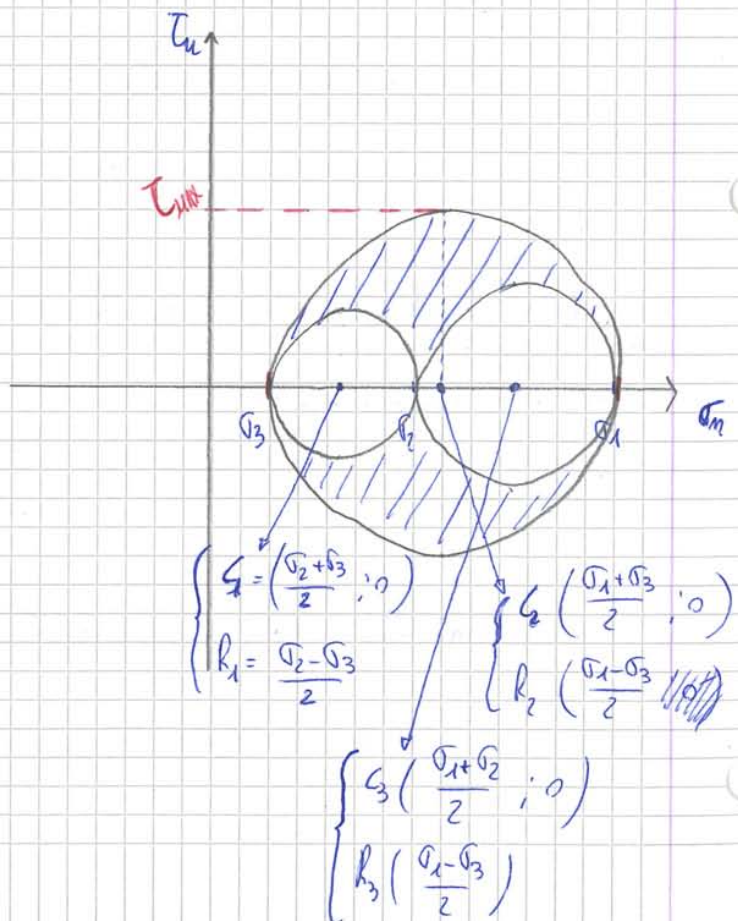
quindi non c'è sempre soluzione.

x Passare cioè che $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \Rightarrow D > 0$ ok!

- Per $N_1 \geq 0$
- $N_2 \geq 0$
- $N_3 \geq 0$

/// = Vari. ammissibili
x le 3 diseg.

"Cerchi di Mohr"



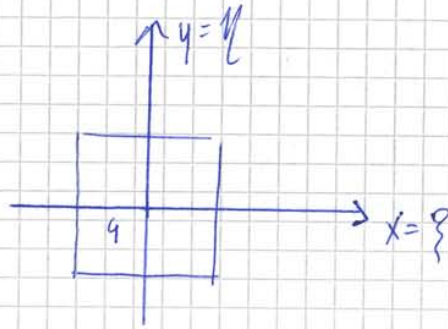
27/02/2014

Geometria delle Aree

SISTEMA PRINCIPALE DI inerzia \Rightarrow ^{se} centro in G \Rightarrow centro di inerzia

• CASO 1 $I_x = I_y$

1a) $I_{xy} = 0$



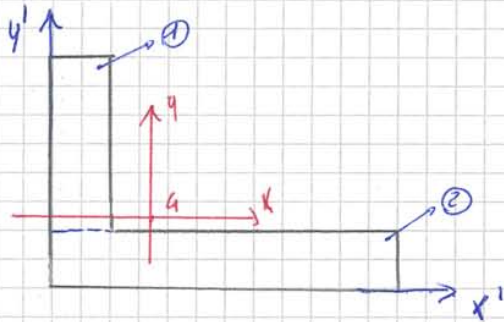
1b) $I_{xy} \neq 0$

$$I_{\xi} = I_x - I_{xy}$$

$$I_{\eta} = I_y + I_{xy}$$

ESEMPIO

1:1



$$x'_a = \frac{S'_1}{A} = \frac{(2 \cdot 6) \cdot 1 + (12 \cdot 2) \cdot 6}{12 + 24} = \frac{A_1 x'_{a1} + A_2 x'_{a2}}{A_{TOT}} = 4,33 \text{ cm}$$

$$y'_a = \frac{S'_2}{A} = \frac{(6 \cdot 2) \cdot 5 + (12 \cdot 2) \cdot 1}{12 + 24} = 2,33 \text{ cm}$$

$$I_x = \left[\frac{2 \cdot 6^3}{12} + 12 (5 - 2,33)^2 \right] + \left[\frac{12 \cdot 2^3}{12} + 24 (1 - 2,33)^2 \right] =$$

$$= \left[\frac{x y^3}{12} + A (y_{PARTE1} - y_{TOT})^2 \right]$$

$$I_y = \left[\frac{y x^3}{12} + A (x_{PARTE1} - x_{TOT})^2 \right] \dots$$

$$I_{xy} = \left[\phi + A (x_{PARTE1} - x_{TOT}) (y_{PARTE1} - y_{TOT}) \right]$$

$$J_0 = \dots$$

31/03/2014

Stato Tensionale Piano

$$\vec{t}_m \in \Pi \quad \forall \vec{m}$$

Condizione Necessaria e suff. $\Leftrightarrow \sigma_3 = 0$

↓ anche lo z

$$\begin{pmatrix} t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 = 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 m_1 \\ \sigma_2 m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

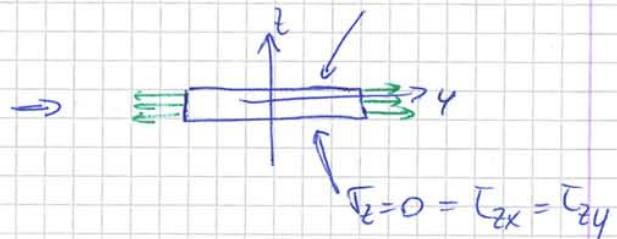
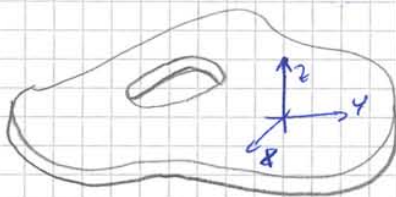
⇓

\vec{t}_m è il piano definito

da $1, 2, z$ (due piani)

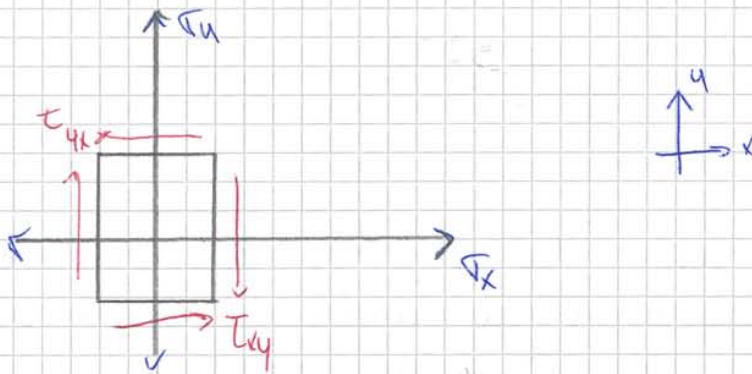
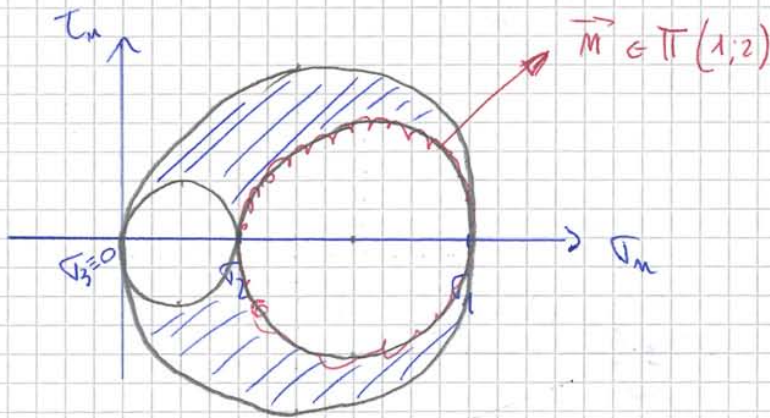
$\Pi =$ piano delle tensioni

es lastre piano



$$\begin{pmatrix} t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

↓ $z \Rightarrow$



Lo riportiamo nel piano di Mohr

(NB) se $\tau \geq 0$ se FA ruotare elemento IN SENSO ORARIO

$$P(\sigma_x; \tau_{xy}) \quad C \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; 0 \right)$$

$$P'(\sigma_y; -\tau_{xy})$$

III

$$P'(\sigma_y; \tau_{yx})$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

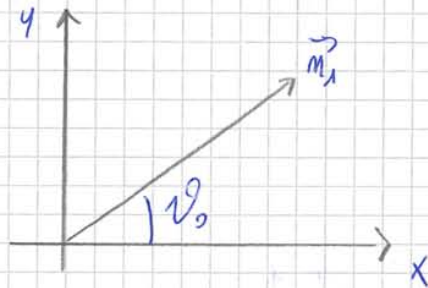
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

DIREZIONI PRINCIPALI?

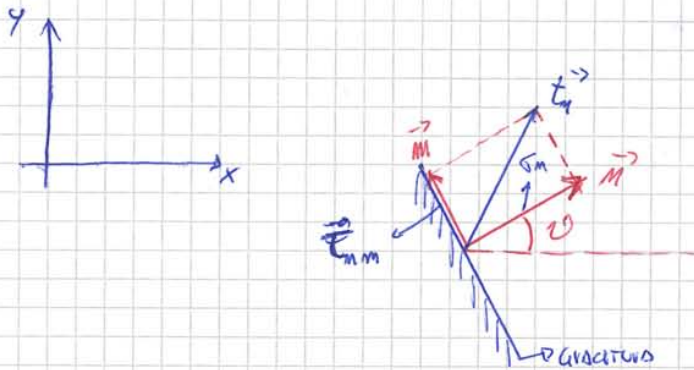


Calcolo \vec{M}_1 : Vero punto x metodo

$$(\sigma_x - \sigma_1)(M_{1x}) + \tau_{xy} M_{1y} = 0$$



$$\tan \vartheta = \frac{M_{1y}}{M_{1x}}$$



$$\begin{cases} M \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \\ M \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{cases}$$

\vec{M} è principale $\Leftrightarrow T_{mm} = 0$

$$T_{mm} = \vec{m} \cdot \vec{t}_m = \{m^i\}^T [\sigma] \{m\} = 0$$

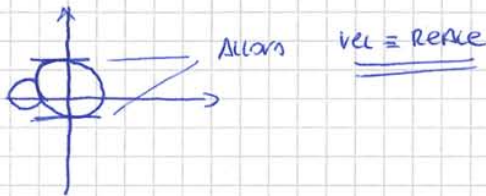
$$T_{mm} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} =$$

$T_{max, min}$ ventose \rightarrow Hanno σ del centro
e sono ventose al caso bidimensionale

Le ventose sono esterne. Nel cerchio + la parte

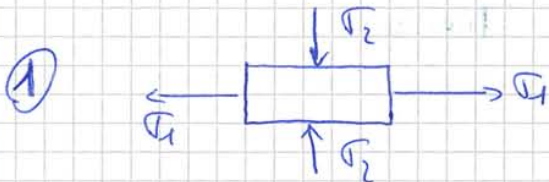


SE



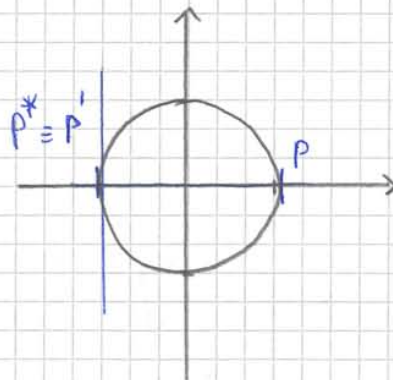
[ESERCIZI QUADRO 2]

CASI PARTICOLARI



$P(\sigma_1; 0)$

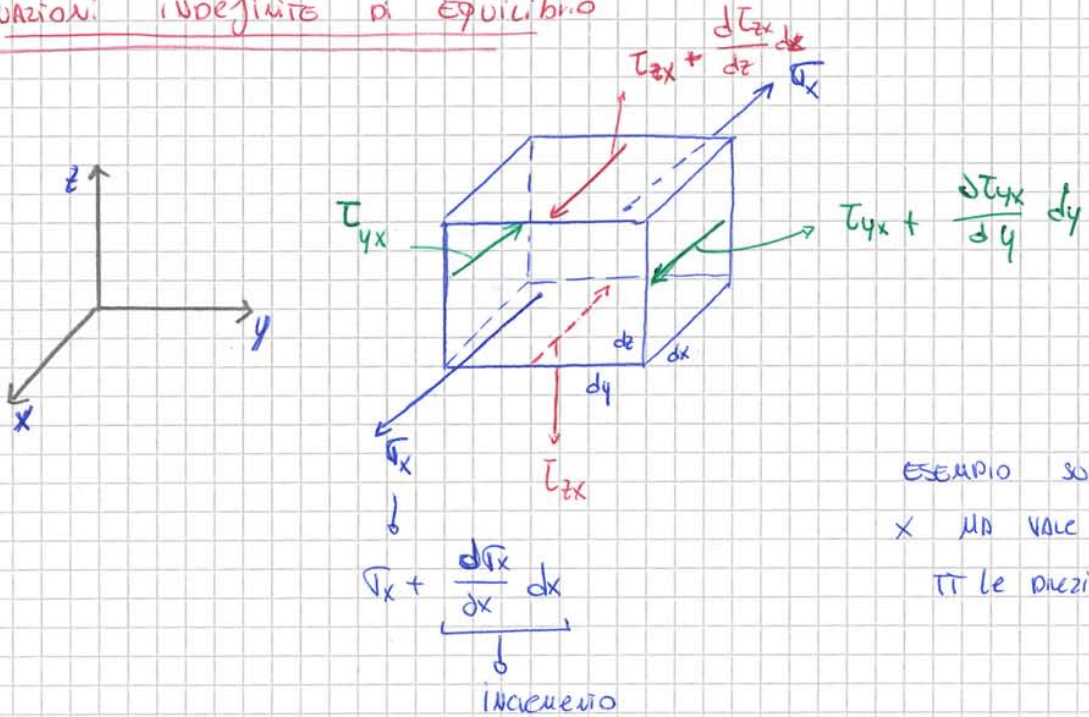
$P'(\sigma_1; 0)$





7/04/2014

Equazioni indefinite di equilibrio



ESEMPIO SU
X HA VALORE X
Tutte le direzioni

$$\left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \int_V f_x dx dy dz = 0$$

Forze di volume

Diviso per V

3 eq indefinite

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$