



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1583A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Lingardo

MATERIA: Fisica II + Temi d'esame. Prof. Giorgis

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

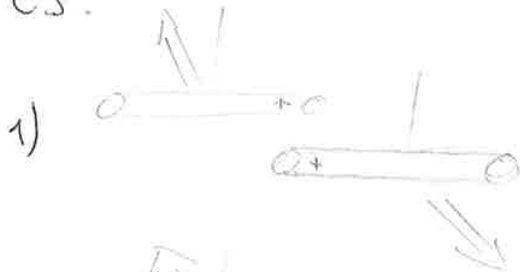
FISICA II

②

1^o PARTE (ELETTROMAGNETISMO)

• INTERAZIONE ELETTROSTATICA Forze e Campo Elettrico

La materia, se non stimolata, dal punto di vista della carica è neutra. Una volta stimolata, però, essa trasferisce alcuni elettroni o protoni verso il corpo stimolante. Così facendo, ionizza la materia, rendendo carica l'estremità.
Es:



bacchette di vetro strofinate da un panno in seta.



bacchette di vetro strofinate da un panno in gomma.



bacchette cariche inversamente si attraggono

Def (Coulomb):

Un Coulomb rappresenta la carica che, posta alla distanza di un metro da una carica uguale nel vuoto, la respinge con una forza pari a:

$$F = 8.9874 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, per motivi di calcolo, per

cui

$$\vec{F} = \frac{q_0 \cdot q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

LEGGE DI
COULOMB

$\epsilon_0 = \text{cost. dielettrica del vuoto} = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Vm}^2$

$e = \text{carica elementare} = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$1 \text{ C} = 6.24 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$

ϵ_0 è definito cost. dielettrica nel ~~vuoto~~
vuoto perché le cariche interagenti, si
suppone, non siano circondate da materia.

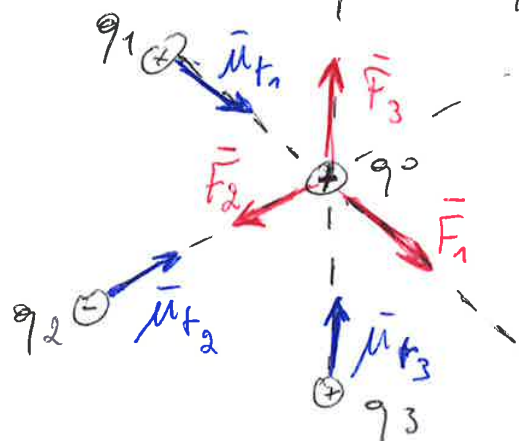
• PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

(5)

Dice che, le forze elettriche agenti su una carica q_0 dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori. Ciò vuol dire che, la forza totale che agisce sulla carica q_0 è la somma vettoriale delle forze dovute a q_1, q_2, \dots, q_n , analizzando separatamente l'interazione di ognuna di esse con la carica q_0 , utilizzando la legge di Coulomb.

Es:

Date 3 cariche q_1, q_2, q_3 e una carica q_0



$$\vec{F}_1 = k_e \frac{q_0 \cdot q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1}$$

$$\vec{F}_2 = k_e \frac{q_0 \cdot q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2}$$

$$\vec{F}_3 = k_e \frac{q_0 \cdot q_3}{r_3^2} \vec{u}_{r_3}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

CONCLUDO:

Per il "principio di sovrapposizione degli effetti" la forza totale agente sulla carica q_0 sarà:

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{q_0 \cdot q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

$$\vec{F}_{TOT} = q_0 \cdot \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

LINEE DI CAMPO (o DI FORZA)

(7)

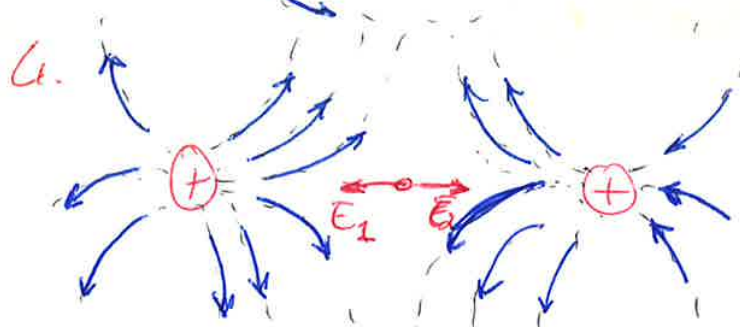
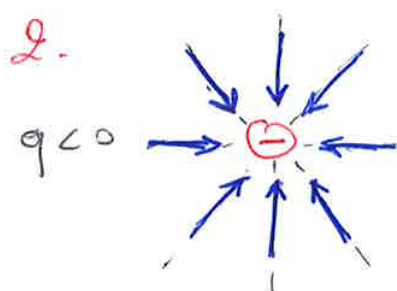
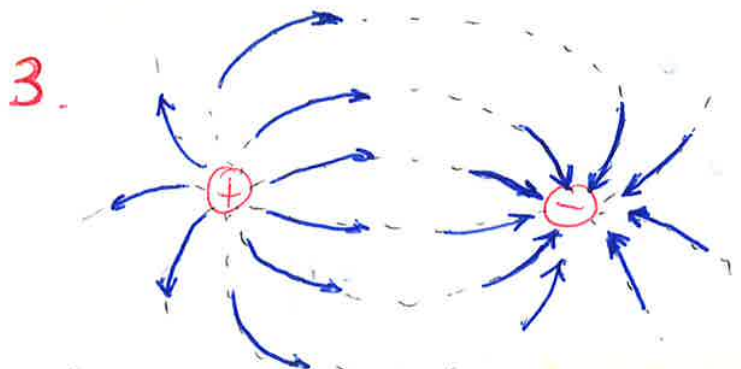
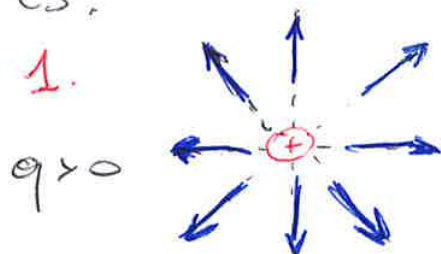
Assegnato un campo $\vec{E}(\vec{r})$, si definisce LINEA DI CAMPO di un campo vettoriale una curva ideale che ha come tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso. Per ogni punto passa una sola linea di campo, per cui si può dire che è univocamente definita.

Tali LINEE DI CAMPO danno una rappresentazione grafica, in 3^o dimensioni, del campo elettrico (\vec{E})

Proprietà delle Linee di campo:

1. Una linea di forza è in ogni suo punto tangente e concorde al campo in quel punto.
2. Le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo è maggiore.
3. Le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte.
4. Le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative o qualora ci siano solo cariche dello stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito.

Es:

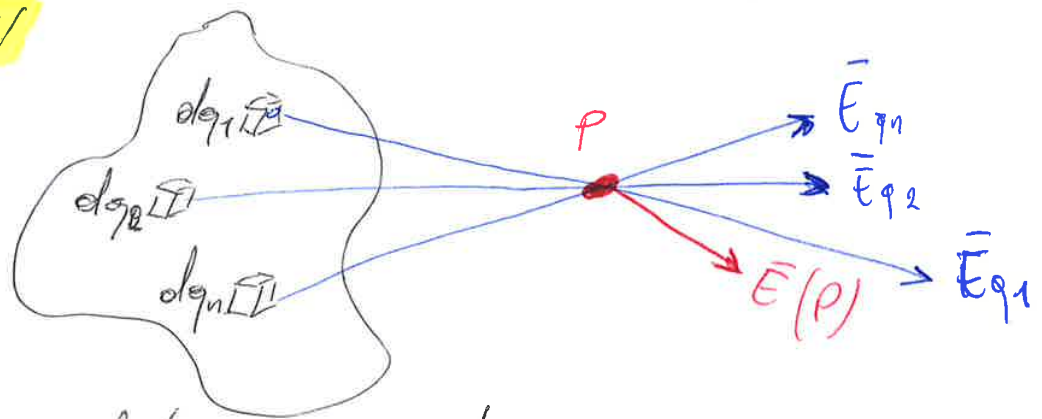


Data una distribuzione di carica continua (Q) e uniforme, il campo elettrico (\vec{E}) nel punto P , si ottiene scomponendo la distribuzione continua di carica di DENSITA' VOLUMICA $\rho = dq/dV$ in tanti volumetti, dV contenenti una carica dq . Ogni carica dq genera un campo $d\vec{E}$, in direzione del vettore \vec{r}_+

$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{r}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{Vol.} \frac{dV}{r^2} \rho \vec{r}_+$$

La densità volumica di carica è cost. se la distribuzione di carica è uniforme

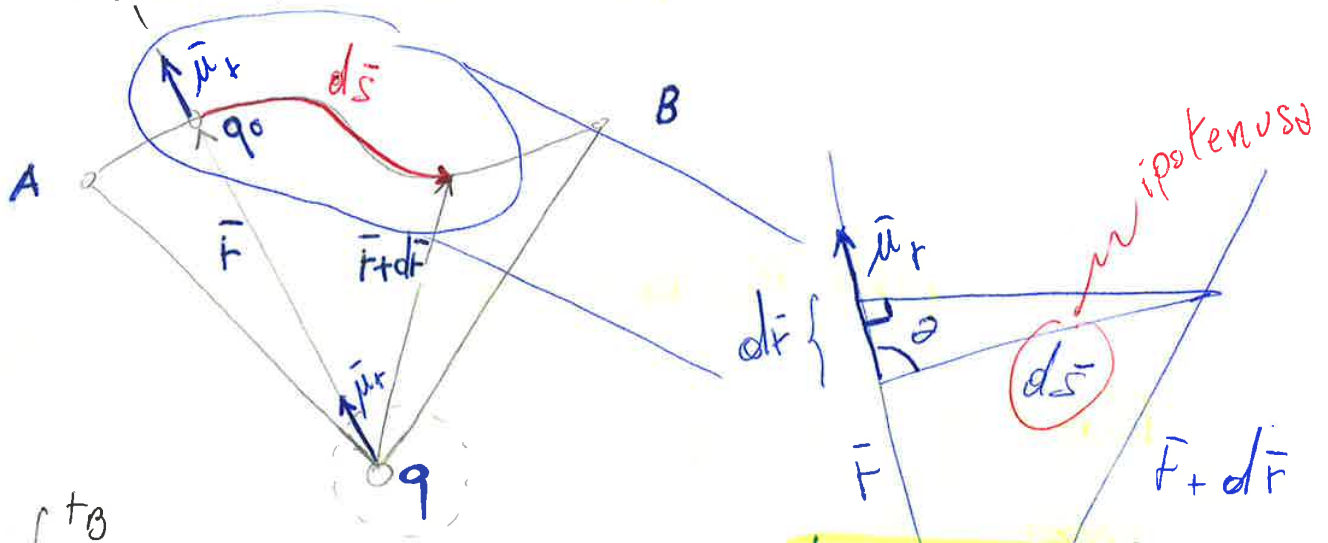
$$\rho = dq/dV$$



il punto P è dato dall'intersezione delle direzioni delle cariche (q_1, q_2, \dots, q_n)



Per il campo creato da una carica sorgente q , il lavoro per spostare una carica di prova q_0 da A a B dipende solo dalla posizione degli estremi. (11)



$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$d\vec{s} \cdot \cos\theta = dF$$

$$W_{AB} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{s}}{r^2} \cdot \vec{\mu}_r = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_A}^{t_B} \frac{ds \cdot \mu_r \cos\theta}{r^2} \quad \text{with } \cos\theta = 1$$

$$W_{AB} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_A}^{t_B} \frac{ds \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_A}^{t_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

en. potenziale associabile ad una carica elettrica immersa in un campo elettrico

$$W_{AB} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(r_A^{-1} - r_B^{-1} \right) = - \left(E_p^B - E_p^A \right)$$

in GENERALE

$$E_p^q = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{en. potenziale di una carica elettrica}$$

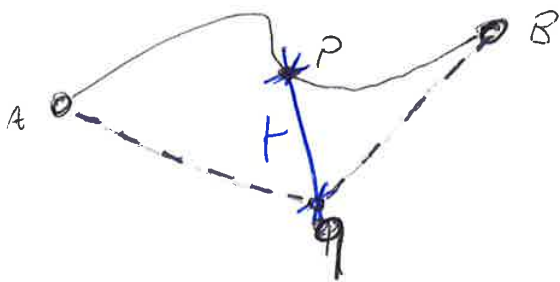
Il potenziale prodotto da una carica q sorgente in un punto è dato da (93)

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{const.}$$

Di solito si sceglie il valore della const. in modo arbitrario. Ponendo $V=0$, $r \rightarrow \infty$, allora la formula:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

assume il significato di lavoro (compiuto dal campo \vec{E}) necessario per portare una carica unitaria (1C) positiva dal punto P distante r dalla carica sorgente q , fino all'infinito. Tale definizione rappresenta la Def. di **POT. ELETTROSTATICO (V)**.



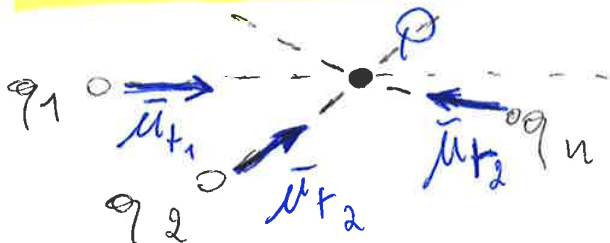
$$\int_{P \rightarrow \infty} = V(P) - \left\{ V(\infty) = 0 \right.$$

$$\int_{P \rightarrow \infty} = V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER IL POT. (V)

Per una distribuzione discreta di cariche unitarie, avendo n cariche (q_1, q_2, \dots, q_n), il pot. totale è dato da:

$$V(P) = \sum_i V_i(P) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



P = punto di interesse in cui voglio calcolare il potenziale elettrostatico.

Campo \vec{E} come gradiente di V

(15)

Dato $\vec{E}(P) = \vec{E}(x, y, z)$

$$W_{AB} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_0 \Delta V$$

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \Delta V = - \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

esprimendo il campo \vec{E} in coordinate cartesiane:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = - \left[\frac{dV}{dx} \vec{u}_x + \frac{dV}{dy} \vec{u}_y + \frac{dV}{dz} \vec{u}_z \right]$$

$\Rightarrow \vec{E} = - \vec{\nabla} V$, Allora capisco che la ddp tra 2 punti è proporzionale al lavoro fatto dalle forze del campo per spostare una carica di prova da un punto ad un altro, dimostrando quanto già detto precedentemente, per cui:

$$\Delta V_{A,B} = V_B - V_A = - \frac{W_{AB}}{q_0}$$

Posso ora riscrivere la $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$, come:

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}, \text{ ovvero:}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

Tale **TEO. DEL GRADIENTE** applicato al potenziale, in generale, afferma che, la variazione di una funz. scalare tra 2 punti A e B è data ~~dal~~ dall'integrale di linea del gradiente della funzione lungo un qualunque percorso che unisce A e B .

LE SUPER. EQUIPOTENZIALI

Sapendo che le LINEE DI FORZA consentono una rappresentazione visiva di un campo elettrico, definiamo ora le **SUPERFICI EQUIPOTENZIALI**, le quali forniscono una rapp. grafica del potenziale elettrostatico. Poiché il potenziale è una funzione univoca, in un punto passa una ed una sola super. equipotenziale.

Def. (Super. equipotenziali):

È definita Super. equipot. una superficie, tale per cui, in ogni punto il potenziale ha lo stesso valore. Allora:

$$V(P) = \text{cost.} \Rightarrow V(x, y, z) = \text{cost.}$$

Dalla formula $dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ abbiamo che per uno spostamento $d\vec{s}$ tangente ad una super. equipotenziale la variazione dV è nulla e quindi il gradiente è ortogonale in ogni punto alla super. equipotenziale. Inoltre

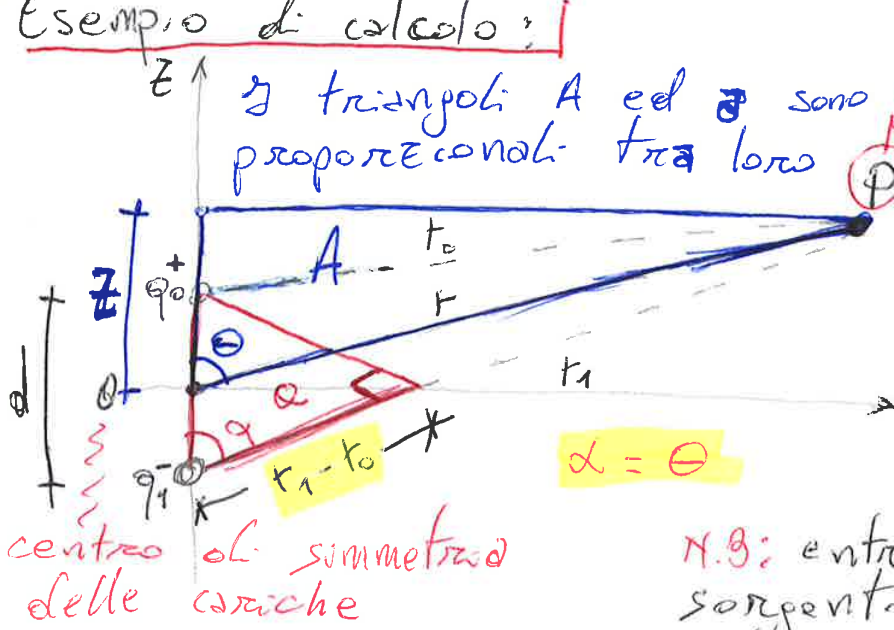
$$|\nabla V| = \frac{dV}{dn}$$

dn = spostamento ortogonale alla super. equipot. e diretto nel verso di crescita del potenziale (V)

Per cui il modulo del gradiente è uguale alla derivata del potenziale nella direzione ortogonale alla super. equipot. che indica il verso di crescita del potenziale.

Questo sta ad indicare che le super. equipot. sono in ogni punto perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico!!!

Esempio di calcolo:



2 triangoli A ed B sono proporzionali tra loro $t \gg d \Rightarrow t_0 \approx t_1 \approx t$

ammontare di carica

$$\begin{cases} V_0(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 t_0} \\ V_1(P) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 t_1} \end{cases}$$

centro di simmetria delle cariche

N.B: entrambe le cariche sono sorgenti del campo e del potenziale

Un dipolo elettrico ha un momento di dipolo elettrico come il vettore $\vec{p} = qd$ con verso che va da q^- a q^+

Il pot. totale in un generico punto (P) è dato:

$$V(P) = V_0(P) - V_1(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 t_0} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 t_1}$$

ma in un dipolo, per definizione, $q_0 = q_1 = q$

$$\Rightarrow V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (t_0^{-1} - t_1^{-1}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{t_1 - t_0}{t_0 t_1} \right)$$

$$\Rightarrow V(P) = \frac{q \cdot d \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 t^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 t^2} \cdot \frac{t \cos \theta}{t \cos \theta}$$

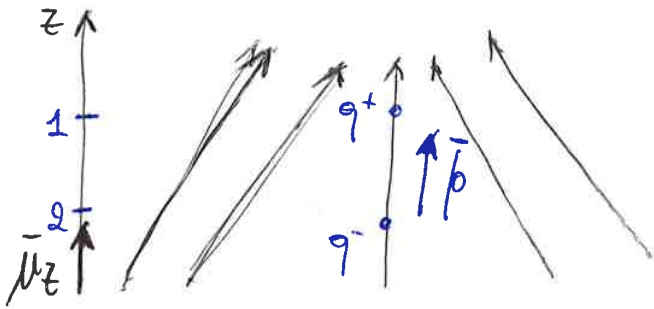
So che $z = t \cos \theta \Rightarrow V(P) = \frac{p z}{4\pi\epsilon_0 t^3}$

Calcoliamo ora il campo $\vec{E} = -\nabla V$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{p z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3x}{r^5} \\ E_y = -\frac{dV}{dy} = \frac{p z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3y}{r^5} \\ E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos^3 \theta - 1}{r^3} \end{cases}$$

Ricordo quanto detto per un dipolo immerso in un campo elettrico non uniforme 21



$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E}_1 - q\vec{E}_2 \\ &= q(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = q(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \frac{\Delta z}{\Delta z} \\ &= q \Delta z \frac{\Delta \vec{E}}{\Delta z} \end{aligned}$$

campo elettrico

in forma vettoriale: $\Rightarrow \vec{F} = \vec{p} \frac{\Delta \vec{E}}{\Delta z}$ momento di dipolo

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{p} \frac{\Delta \vec{E}}{\Delta z} \vec{\mu}_z \Rightarrow d\vec{F} = \vec{p} \frac{d\vec{E}}{dz} \vec{\mu}_z = \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{E})}{dz} \vec{\mu}_z \\ \Rightarrow \vec{F} &= \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{E})}{dz} \vec{\mu}_z \end{aligned}$$

GENERALIZZANDO: considero il caso in cui il momento di dipolo non è parallelo alla forza, che significa che il campo $\vec{E}(x, y, z)$ non è uniforme. Allora:

$$\vec{F} = \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{E})}{dz} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{E})}{dx} \vec{\mu}_x + \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{E})}{dy} \vec{\mu}_y + \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{E})}{dz} \vec{\mu}_z$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \left(\vec{\mu}_x \frac{d}{dx} + \vec{\mu}_y \frac{d}{dy} + \vec{\mu}_z \frac{d}{dz} \right) \vec{p} \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Tale principio vale per ogni orientamento del momento di dipolo. Analizziamo la quantità $\vec{p} \cdot \vec{E}$:

$$\vec{p} \cdot \vec{E} = -q \Delta z \frac{\Delta V}{\Delta z} = -q \Delta V$$

$$\Rightarrow -q \Delta V = -E_p, \text{ Allora:}$$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\vec{\nabla} (-\vec{p} \cdot \vec{E})$$

RICAPITOLANDO!

Un dipolo elettrico presenta:

$$\left\{ \begin{aligned} E_p &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \\ \vec{\tau} &= \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge (q\vec{E}) = q\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \end{aligned} \right.$$

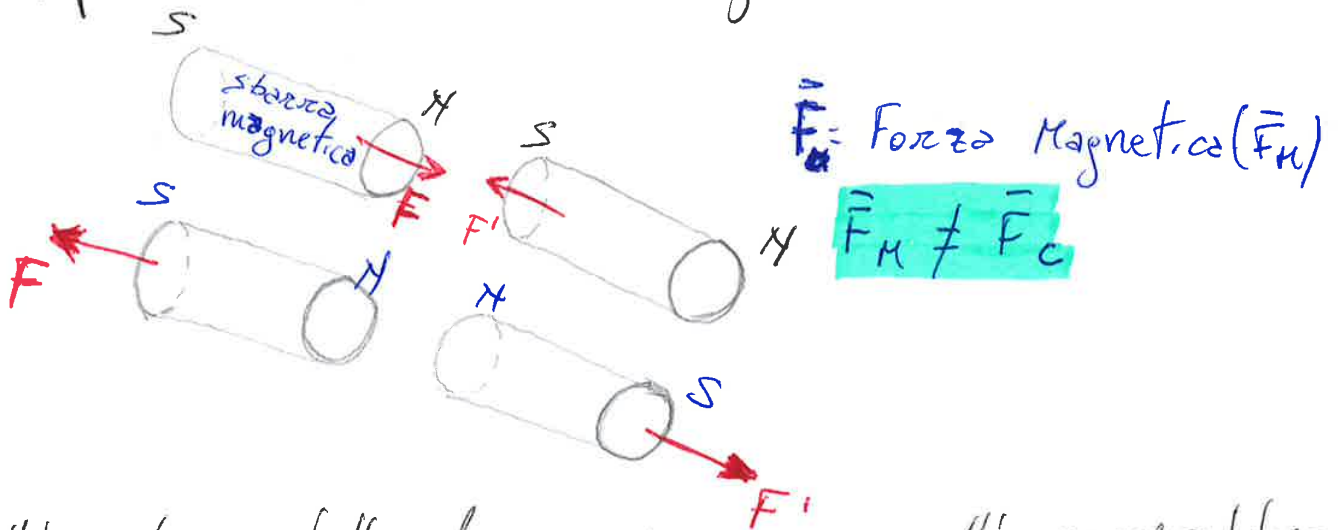
MAGNETOSTATICA

CAMPO MAGNETICO

Introduciamo qualche concetto preliminare.

La proprietà magnetica di attrazione non è uniformemente presente nel materiale, ma si manifesta principalmente in alcune parti ed è in particolare possibile costruire campioni cilindrici in cui essa è localizzata nella zona delle basi. Sia questi oggetti, che altri con diversa geometria sono indicati col nome di **MAGNETI** e le parti in cui si localizza la proprietà di attrazione vengono detti **POLI DEL MAGNETE**.

• Esempi sull'interazione magnetica:



Dall'analisi delle forze in gioco nell'esempio (dopo aver escluso la natura grav. o elettrica delle interazioni), si introduce una nuova proprietà:

il MAGNETISMO

FORZA MAGNETICA (o di Lorentz):

(25)

Le azioni magnetiche sono il risultato dell'interazione tra cariche in moto; adottando la rappresentazione tramite un campo, diciamo che l'azione magnetica è dovuta al fatto che un sistema di cariche in moto genera un campo magnetico, che indichiamo con \vec{B} e che ~~le~~ cariche risentono di una forza (\vec{F}_M) in quanto immerse in \vec{B} .

Sperimentalmente osserviamo:

1. una carica elettrica in quiete posta in \vec{B} non risente di alcuna forza;
2. una carica elettrica che si muove con velocità \vec{v} e immersa in \vec{B} , risente di una forza, tale che:

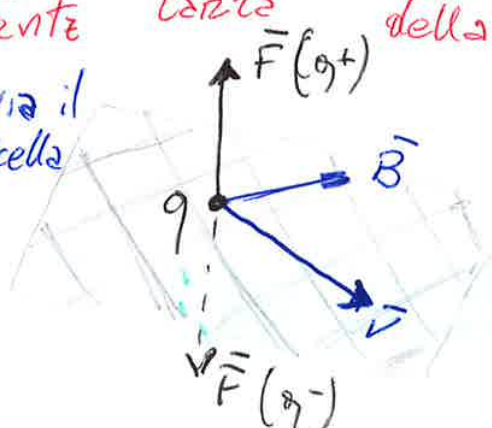
$$\vec{F}_M = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

forza di Lorentz

carica
velocità della carica

campo magnetico

il campo \vec{B} devia il moto della particella q, che questa avrebbe in assenza di \vec{B}



M.B.: nel S.I.:

$$B = \frac{Ns}{Cm} = \text{tesla}$$

unità molto grande

La forza magnetica avrà:

1. Modulo proporzionale alla carica e alla velocità perpendicolare al campo;
2. Direzione perpendicolare a quella del piano definito dal vett. velocità della carica (\vec{v}) e dal campo magnetico (\vec{B});
3. verso determinato dalla regola della mano destra

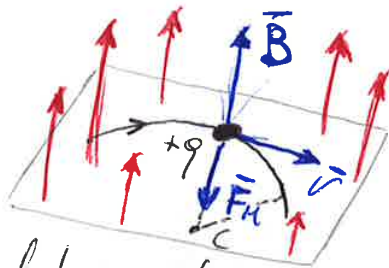
curiosità:

il campo \vec{B} terrestre è di ≈ 1 millesimo di Tesla

PARTICELLA CARICA IN MOTO IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME ($B = \text{cost.}$, $\theta = \pi/2$) (27)

Supponiamo che il campo \vec{B} sia uniforme in una certa regione e che la velocità iniziale della particella carica q sia ortogonale a \vec{B} : la forza \vec{F}_H , anch'essa ortogonale a \vec{B} , produce una variazione della direzione della velocità ancora ortogonale a \vec{B} , per cui, sapendo che:

$\vec{F}_H = q \vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{F}_H \perp \vec{v}$, deduco che la direzione di \vec{v} cambia, ma il suo modulo rimane costante ($v = \text{cost.}$), per cui la forza non induce una variazione di E_k cinetica ($\Delta E_k = 0$) e $v^2 = \text{cost.}$ nonostante la particella q sia soggetta alla forza di interazione \vec{F}_H .



Ponendo $\theta = \pi/2$, ottengo

la legge del moto: $F_H = qvB \sin \theta = qvB$, per cui:

$$F_H = qvB \approx F_{\text{centripeta}} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{r}$$

per cui la F_H incurva la traiettoria della particella q , facendola muovere di moto circolare uniforme ($v = \text{cost.}$); ottengo:

1. $r =$ raggio di curvatura;

$$r = \frac{mv}{qB}$$

2. $a_c =$ accelerazione centripeta $\Rightarrow a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}$

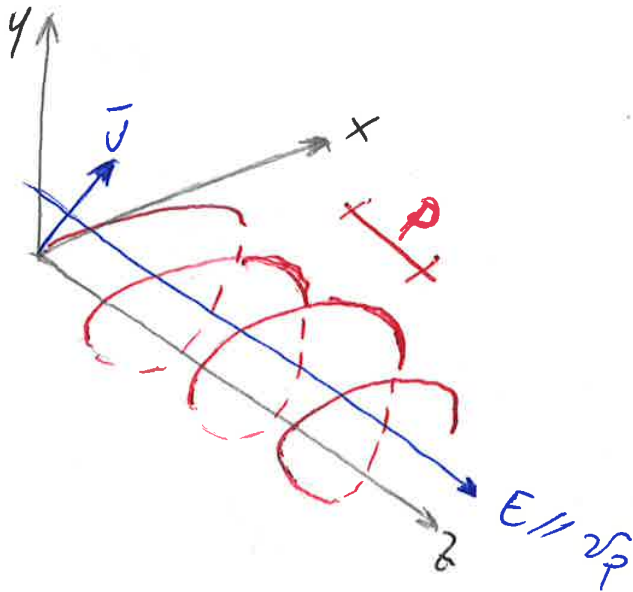
3. $\omega =$ vel. angolare, detta **FREQUENZA CICLOTRONICA**;

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

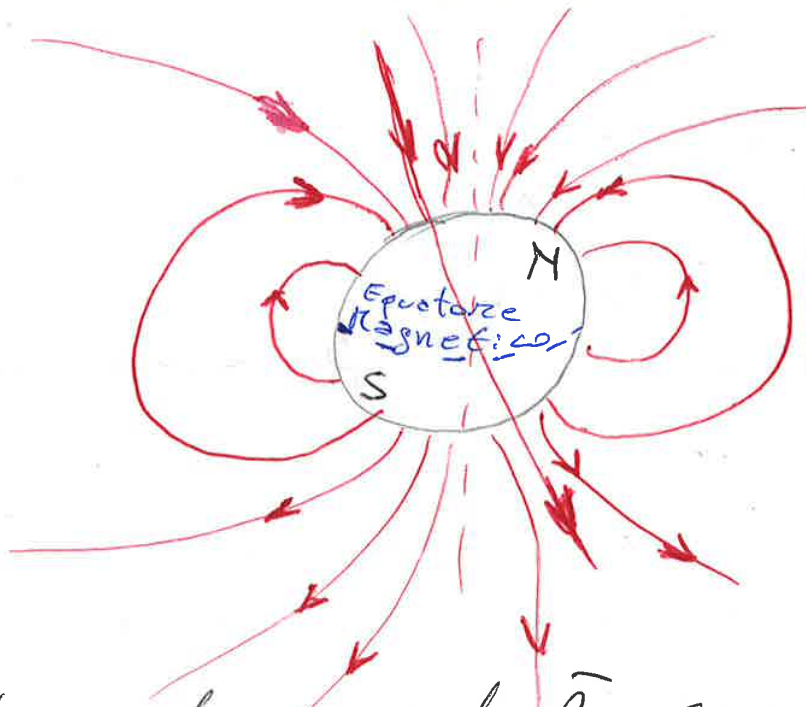
Il moto complessivo sarà un **MOTO** (23)
Edico: DADÉ (moto rett. uniforme + circ. uniforme), in cui la particella si muove con passo (p):

$$p = v_p \bar{T} = \frac{2\pi m v \cos\theta}{qB}$$

passo dell'elica
periodo $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega}$



CAMPO MAGNETICO TERRESTRE



PN geo = PS magn.
 PS geo = PN magn.

Le linee di campo di \vec{B} sono tutte chiuse su sé stesse, cosa che non accade per \vec{E} .

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA CARICA IN MOTO

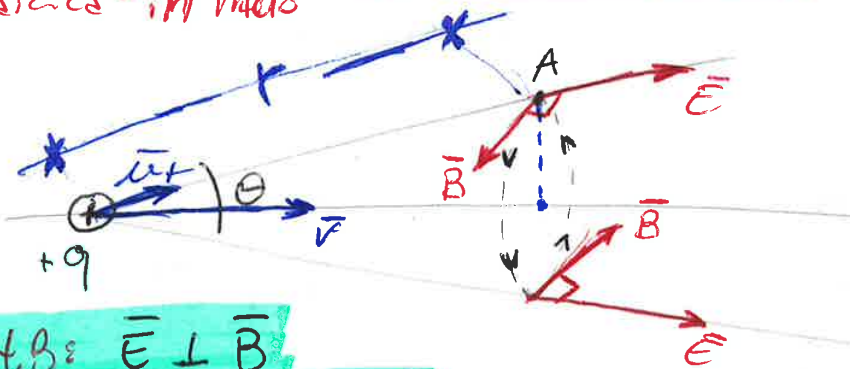
Le sorgenti del campo \vec{B} sono le cariche elettriche in moto, che dipende dalla distanza tra il punto di osservazione e la posizione della particella. La particella q genera un campo \vec{B} in un punto arbitrario dello spazio. Sperimentalmente si è verificata la seguente legge per il campo generato da una carica q in moto con velocità \vec{v} :

FORMULA DI AMPERE-LAPLACE

campo \vec{B} prodotto da una singola carica in moto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

μ_0 = permeabilità magnetica nel vuoto
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{mkg}{c^2}$



A = punto di osservazione
 q = carica sorgente del campo \vec{E} e \vec{B}
 r = dist. tra q e A

N.B: $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\mu_0 = \frac{mkg}{c^2} = \frac{N}{A^2}$$

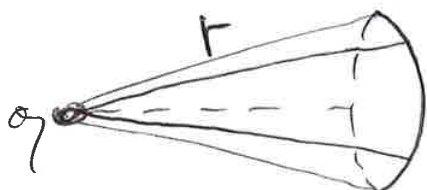
Tengo presente che la stessa carica q genera:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{r} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

NON elettrostatico

vel. della luce nel vuoto = 3×10^8 m/s

N.B: $r = \text{cost.}$ perché la circonferenza è perpendicolare alla retta di perpendicolarità di $q \Rightarrow$ genero un cono

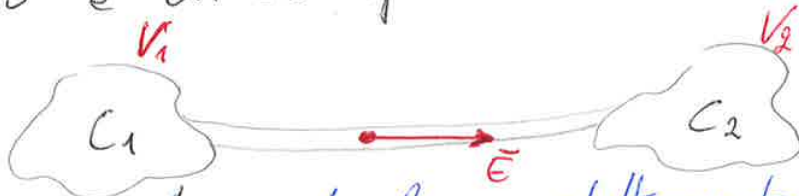


se la vel. (v) di un corpo è tale che:

$$v > c \Rightarrow \vec{B}$$

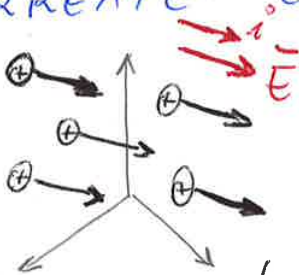
CONDUZIONE ELETTRICA:

Mettendo a contatto due conduttori (C_1 e C_2), a potenziali V_1 e V_2 , tali che $V_1 \neq V_2$, si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i conduttori si portano allo stesso potenziale V .
 Nel processo, un certo numero di elettroni passa dal conduttore a pot. minore a quello a pot. maggiore, sotto l'azione del campo E dovuto alla d.d.p. (ΔV).
 Questo moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una corrente elettrica e il fenomeno è un esempio di conduzione elettrica.

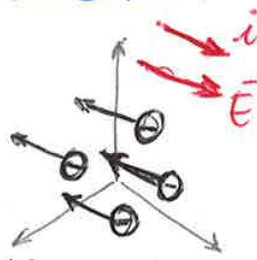


Un generatore di forza elettromotrice (f.e.m.) è un dispositivo capace di mantenere una d.d.p. e quindi un campo elettrico E , tra i capi di un conduttore. Così facendo il flusso di elettroni può durare molto tempo e quindi nel conduttore si instaura una corrente elettrica stabile, in un regime di equilibrio dinamico e non più di equilibrio elettrostatico.

CORRENTE ELETTRICA



a) cariche positive



b) cariche negative

- a) le cariche si muovono nel verso del campo E
- b) le cariche si muovono in verso contrario al campo E

La corrente elettrica è un flusso di particelle cariche. L'intensità di una corrente (I) è definita come la quantità

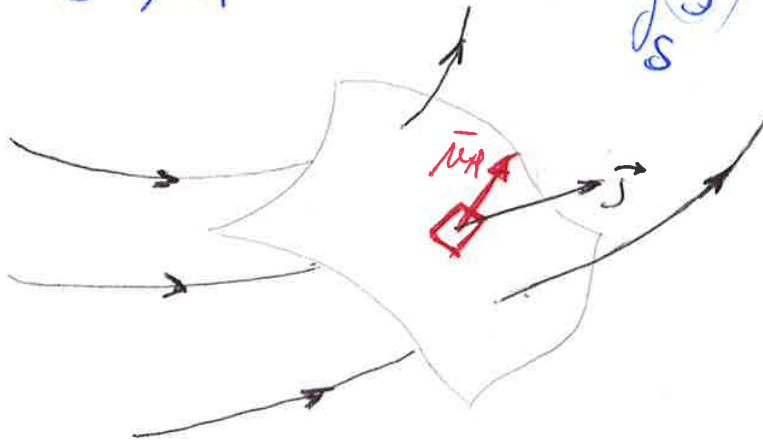
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{C}{s} = \text{Ampere (A)}$$

Definiamo il vettore **DENSITA' DI CORRENTE** (39) come la corrente che passa per una superficie:

$$\vec{J} = \frac{I}{S} = nq\vec{v}_d = A/m^2, \text{ per cui}$$

posso ridefinire l'intensità di corrente lungo una superficie finita S :

$$di = \vec{J} \cdot \vec{n}_n dS \Rightarrow i = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n}_n dS$$



LEGGE DI OHM (A LIVELLO MACROSCOPICO)

In un materiale conduttore (con elettroni liberi) la presenza di un campo \vec{E} dà origine ad un moto ordinato degli elettroni che si sovrappone al moto termico casuale. Allora:

A $T = \text{cost.}$ (in genere $T = 300K$) il rapporto fra la d.d.p. fra due punti e la corrente elettrica è una costante, dipende dal tipo di materiale e dalla sua geometria, detta **RESISTENZA ELETTRICA (R)**

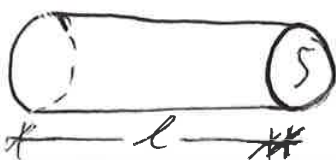
\Rightarrow

$$\Delta V = R i = \rho \cdot A$$

Legge di Ohm per i conduttori metallici

\Rightarrow

$$R = \frac{\Delta V}{i} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} = \text{OHM} = \Omega$$



$$\Delta V = R i$$

N.B.: R è una ~~proprietà~~ proprietà intrinseca del materiale

Tenendo conto delle due relazioni

(37)

$$\begin{cases} j = \sigma E \\ j = nq v \end{cases} \Rightarrow v_d = \left[\frac{\sigma}{nq} \right] \cdot E = \mu E$$

$\underbrace{\quad}_{\text{velocità di deriva}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{mobilità} = \mu}$

v_d è la velocità di deriva degli elettroni dovuta al campo elettrico \vec{E} , la quale è direzionata e proporzionale al campo elettrico stesso.

Vettorialmente posso riscriverla come;

$$\vec{v}_d = - \frac{e \hbar}{m} \vec{E} = + \frac{|e| \hbar}{m} \cdot \vec{E}$$

Quindi i portatori di carica in un conduttore raggiungono una velocità di deriva **costante** anche se sono sottoposti alla forza del campo elettrico. Si può quindi supporre l'esistenza di un meccanismo di perdita di energia cinetica (E_k) dovuta agli urti tra atomi!

M.B.:

$$v_{e^-} = \mu E \neq v_{e^+} = \mu E$$

posso avere mobilità diverse a seconda che ragioni con elettroni o lacune!!!

!!!
OSSERVAZIONE SULLA II LEGGE DI OHM

$j = \sigma E$ stabilisce che il rapporto tra j ed \vec{E} è dato da una grandezza caratteristica del conduttore.

$\sigma = \frac{n e^2 \hbar}{m}$, allora la conduttività è intrinsecamente positiva, per cui ~~non~~ viene marcato il fatto che j sia concorde al campo elettrico, indipendentemente dal segno di q .

VELOCITÀ TERMICA (v_{th})

(39)

La velocità propria di una particella, all'interno di un materiale, dovuta alla temperatura a cui si trova il materiale stesso, viene detta VELOCITÀ TERMICA e, per tale contributo, una particella si muove di moto totalmente casuale attraverso un percorso detto RANDOM WALK. Nonostante sussista la relazione:

$$v_{th} \rightarrow v_d$$

l'unico contributo per il calcolo della velocità di una particella in moto all'interno di un materiale, è dovuto alla v_d , questo perché:

$$\langle v_{th} \rangle = 0 ; \quad \langle v_d \rangle \neq 0 = \text{cost}$$

Se calcolo v_{th} , noto:

$$T = 300 \text{ K}$$

$$E_k = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 10^5 \text{ m/s}$$

Se analizzassi il moto di una particella sottoposta all'azione di un campo elettrico (moto ordinato), il quale caratterizza la carica con una velocità v_d , e ad un'azione di tipo termica (moto casuale), che caratterizza la particella con una velocità v_{th} , ottengo che la particella si muove di un moto casuale lungo un baricentro fisso, il quale si muove seguendo la velocità $v_d = \text{cost.}$ seguendo le linee del campo \vec{E} .

FORZA ELETTROMOTRICE (f.e.m.)

(41)

Come già detto la d.d.p. (ΔV) è data:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int^B_A \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_i$$

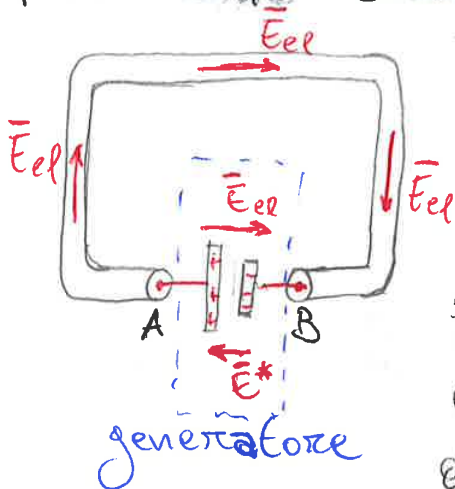
secondo la legge di Ohm. Tale legge, applicata ad un circuito chiuso, diventa:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T i$$

R_T = resistenza totale del circuito

Tale relazione afferma che per ottenere nel ~~circolo~~ circuito (percorso chiuso) una corrente di intensità i , è necessaria la presenza, nel circuito, di una sorgente di f.e.m., ovvero di un campo \vec{E} la cui circolazione non sia nulla $\Rightarrow \vec{E} \neq \text{cost.} \Rightarrow \text{NO Elettrostatico.}$

Ne segue che non può essere un campo elettrostatico \vec{E}_{el} a fare circolare le cariche nel circuito, in quanto la corrispondente f.e.m. è sempre nulla. La sorgente di f.e.m. deve invece avere al suo interno forze di natura non elettrostatica, che possono determinare il moto continuo delle cariche.

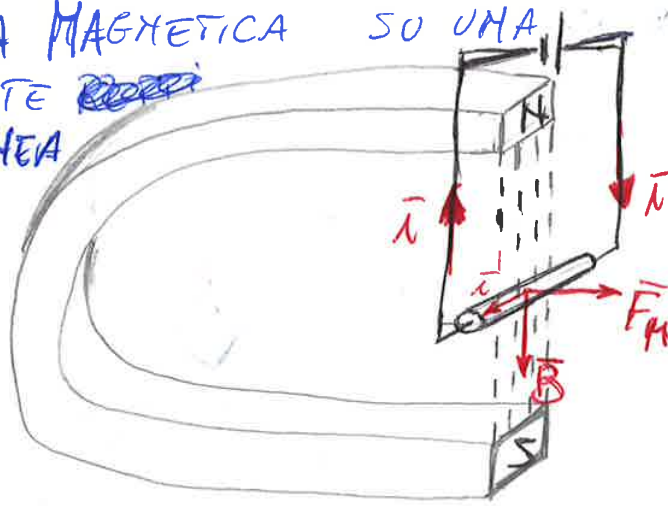


$$\vec{E}^* + \vec{E}_{el} = 0$$

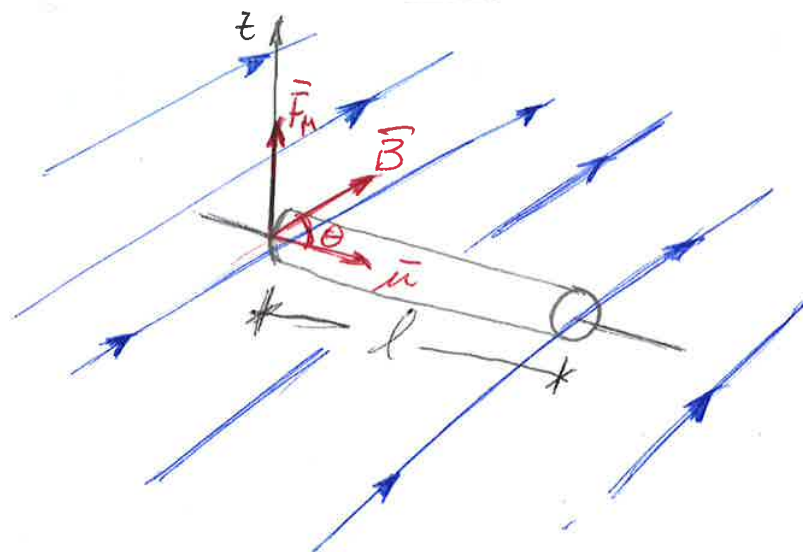
$$\Rightarrow \Delta V = V_A - V_B = f.e.m. (E)$$

Per cui, la f.e.m. di un generatore, è uguale alla d.d.p. misurata ai capi del generatore a circuito aperto.

FORZA MAGNETICA SU UNA CORRENTE RETTILINEA



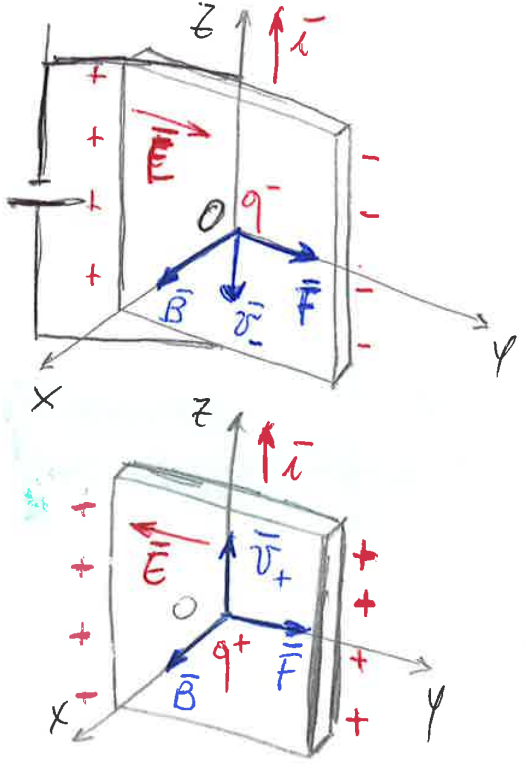
$\vec{B} = \text{cost.}$



- ~~nota~~
 \vec{F}_M nulla se:
 1. $\vec{l} \parallel \vec{B}$
 \vec{F}_M massima se:
 1. $\vec{l} \perp \vec{B}$

$$\vec{F} = I \int_{\text{cond.}} d\vec{l} \wedge \vec{B} = I (l \vec{\mu}) \wedge \vec{B} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

EFFETTO HALL



L'effetto Hall è la dim. della forza sulle cariche che percorrono un conduttore.
 Se prendiamo una lamina metallica e vi facciamo passare una corrente i parallela alla superficie in un campo B perpendicolare alla lamina, gli elettroni vengono spinti nella direzione Y positivo.
 Se i portatori fossero cariche positive si avrebbe l'effetto opposto.
 Lungo Y viene a crearsi un campo E a causa dell'accumulo di cariche. Allora

$$\vec{F}_H = q \vec{v} \wedge \vec{B} ; \vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

BIPOLIO MAGNETICO

(45)

Un bipolo magnetico è dato da una spira (di geometria qualsiasi) percorsa da corrente elettrica e immersa in un campo \vec{B} .

Definisco il **momento di bipolo magnetico** come la quantità:

$$\vec{M} = iS\vec{\mu}_H ; \quad M = iS$$

tale vettore è parallelo e concorde al vettore $\vec{\mu}_H$. Possiamo riscrivere il momento meccanico ($\vec{\tau}$):

$$\vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B} = iS\vec{\mu}_H \wedge \vec{B}$$

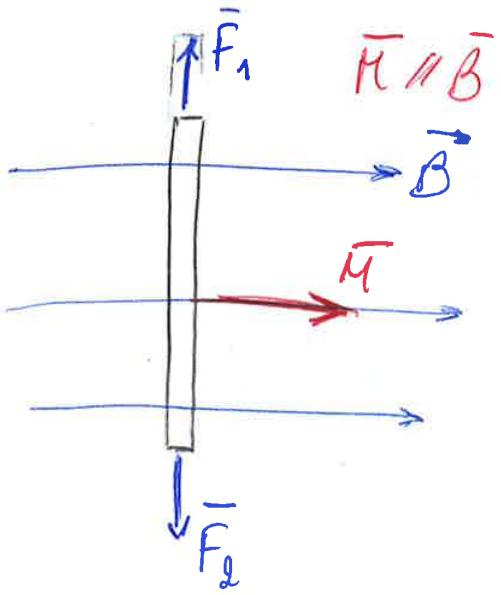
$$\tau = iSB\sin\theta = MB\sin\theta$$

il momento (\vec{M}) sarà definito dal verso di circolazione della corrente i :

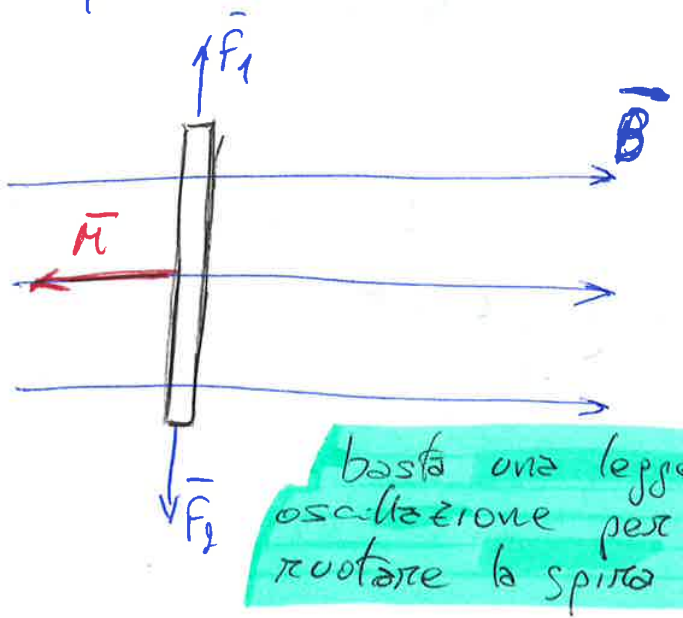
- i senso orario $\Rightarrow \vec{M}$ entrante
- i senso antiorario $\Rightarrow \vec{M}$ uscente

θ è l'angolo che indica com'è inclinata la spira rispetto al campo \vec{B} .

Cond. stabile



Cond. instabile



$$E_p = - \vec{M} \cdot \vec{B} = - mB \cos \theta = - i s B \cos \theta \quad (47)$$

tale en. potenziale, legata alla posizione ~~angolare~~ angolare rispetto alla direzione di \vec{B} è minima nella posizione di equilibrio stabile ($\theta=0$) e massima in quella di equilibrio instabile ($\theta=\pi$). Tra il momento meccanico $\vec{\tau}$ ed E_p sussiste:

$$\vec{\tau} = - \frac{dE_p}{d\theta} = - mB \sin \theta$$

Dipolo in campo \vec{E}

$$\begin{cases} \vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} \\ E_p = - \vec{p} \cdot \vec{E} \end{cases}$$

\Rightarrow Complete Analogia

Dipolo in campo \vec{B}

$$\begin{cases} \vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B} \\ E_p = - \vec{M} \cdot \vec{B} \end{cases}$$

il sistema può ruotare grazie alla corrente i che fluisce nel sistema (sistema Magneto-Meccanico) (49)

M.B:

$$\tau = MB \sin(\pi/2 - \alpha), \text{ suppongo } \alpha \rightarrow 0$$

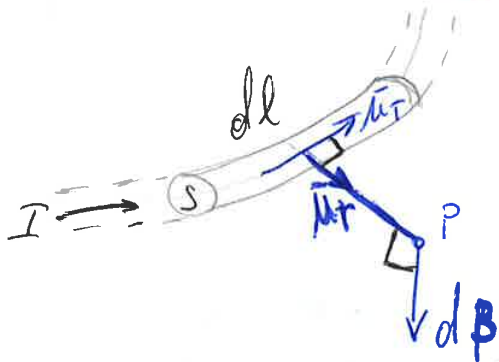
$$\tau = MB \sin \pi/2 \Rightarrow \tau_{\max} = MB = I S B$$

~~Se la corrente i aumenta all'interno del sistema,~~

Se la corrente i aumenta all'interno del sistema, allora aumenta l'angolo α .

Se faccio oscillare continuamente il valore della corrente i , il galvanometro oscillerà velocemente generando un moto di tipo oscillatorio

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA CORRENTE



$$\frac{\mu_0}{4\pi} = \text{permeabilità magnetica nel vuoto}$$

Ricordo che una carica elettrica in moto con velocità v_d genera un campo \vec{B} per la legge di Ampere-Lo Place

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}_d \wedge \vec{r}}{r^2}$$

Dato un filo di sezione S e lunghezza dl ($dv = S dl$), questo sarà percorso da n cariche per unità di volume che si muovono con velocità \vec{v}_d , generando

Un campo:

$$\frac{\vec{B}}{v_d} = \frac{\mu_0 n q v_d \wedge \vec{r}}{4\pi r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{filo}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

(51)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin\theta}{r^2} \vec{\mu}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^2 \sin\theta}{R^2} \cdot \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta \vec{\mu}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \vec{\mu}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [-\cos\theta]_0^\pi \vec{\mu}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\cos\theta]_0^\pi \vec{\mu}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{\mu}_\theta$$

M.B.:

- $\frac{R}{l} = \text{tg}(\pi - \theta) = \text{tg}(\theta)$
- $l = -\frac{R}{\text{tg}\theta}$; • $\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$
- $dl = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$

LEGGE DI BIOT-SAVART
 definisce la variazione dell'int. del campo \vec{B} all'aumentare del raggio R

Tale legge definisce che, se mi sposto ~~lungo~~ un nuovo punto $A \neq P$ lungo la circonferenza, Allora

$\vec{\mu}_{rA} \neq \vec{\mu}_{rB}$ ma $\theta_A = \theta_B$

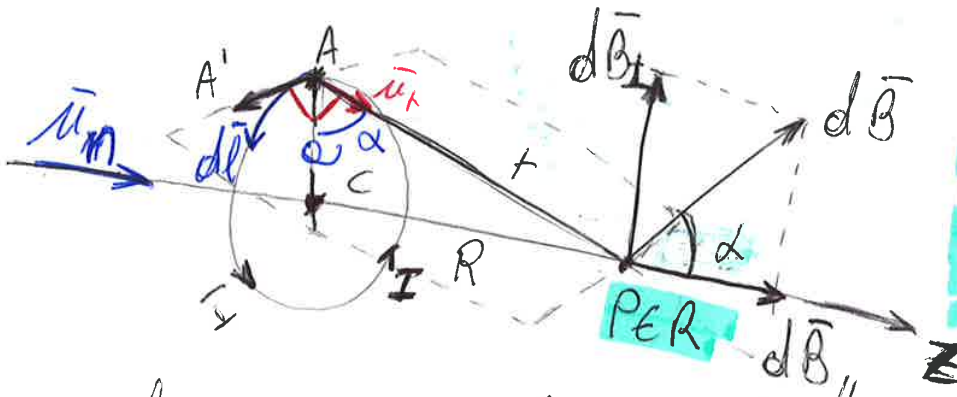
Il campo \vec{B} sarà perpendicolare al vettore $\vec{\mu}_r$ e quindi tangente alla circonferenza in ogni punto. La circonferenza rappresenta una linea di campo \vec{B} generata dal filo carico $d\vec{l}$. il quale genera una serie di linee di campo concentriche di forma circolare!!!

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA SPIRA CIRCOLARE LUNGO L'ASSE

(93)

Calcoliamo il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio a , percorsa dalla corrente I .
 Nel punto P , distante R dal centro O della spira, un elemento $d\vec{l}$ di spira genera il campo $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \quad \vec{B} \perp d\vec{l}, \forall P$$



M.B.: il punto P è scelto in maniera arbitraria lungo l'asse \vec{z}

quando si considerano i contributi $d\vec{B}$ di tutti gli elementi $d\vec{l}$ che formano la spira, le componenti parallele all'asse \vec{z} si sommano, mentre quelle trasversali si annullano, a due a due, per la simmetria del problema. Allora:

$$d\vec{B}_{||} = d\vec{B} \cos \alpha \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{a}{r} \quad ; \quad r = \sqrt{a^2 + R^2}$$

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2} d\vec{l} \vec{u}_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r^2} \cos \alpha \vec{u}_n$$

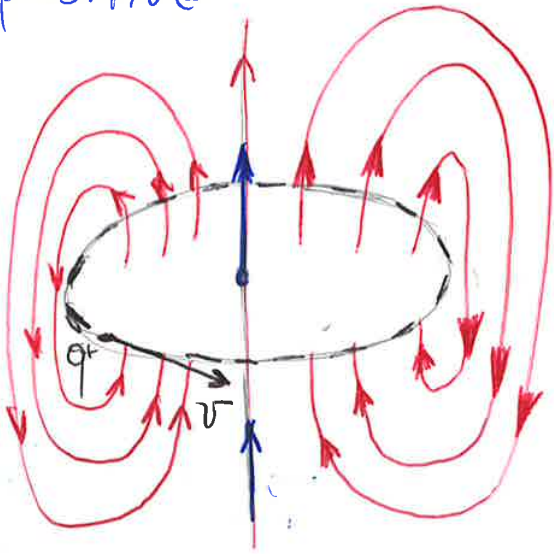
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\vec{l} \vec{u}_n \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \vec{u}_n = \frac{\mu_0 I a^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_n$$

M.B.1: la dist. r tra la spira e il punto è cost. ($r = \text{cost.}$) perché circuitando la circ. formo un cono di lunghezza r e centro P

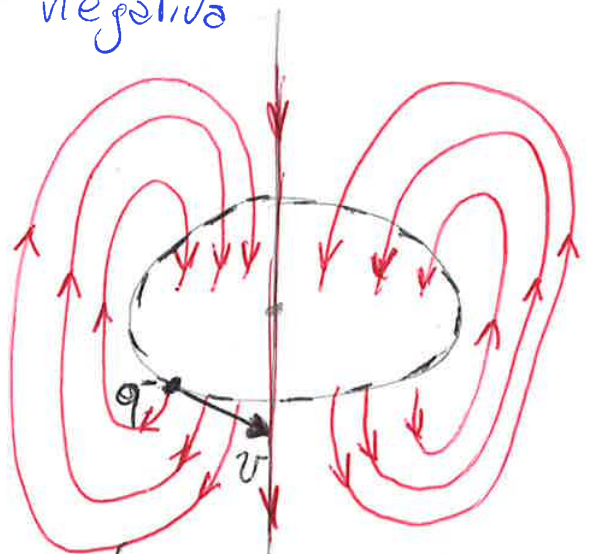
M.B.2: se $R=0$, siamo nel centro della spira, il campo ha valore max.
 Se $R \rightarrow \infty$, allora $\vec{B} \approx 0$

Le linee di campo di un bipolo magnetico sono: 55

q^+ positiva



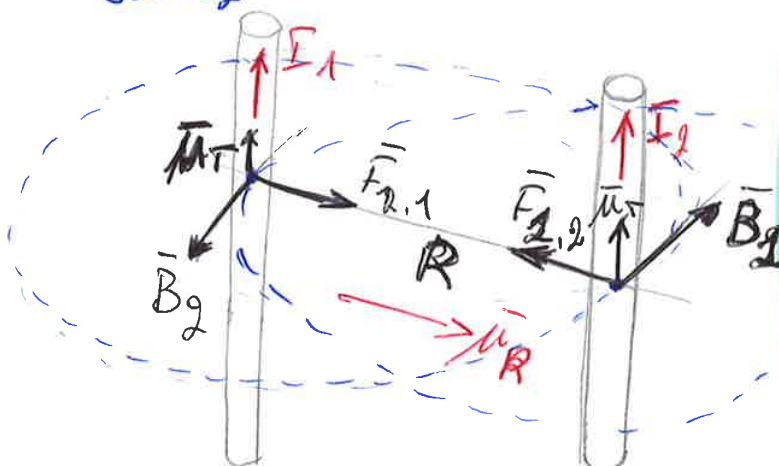
q^- negativa



Le linee di un campo magnetico \vec{B} si chiudono sempre su loro stesse, unica eccezione fatta per la linea centrale

FORZE MAGNETICHE FRA CORRENTI:

Quando due fili rettilinei di lunghezza l_1, l_2 ($l_1 = l_2$ oppure $l_1 \neq l_2$) percorsi da correnti \vec{I}_1, \vec{I}_2 ($I_1 = I_2$ oppure $I_1 \neq I_2$) sono posti parallelamente ad una distanza R l'uno dall'altro, il filo \vec{I}_1 genera un campo magnetico \vec{B} che agisce con una forza $\vec{F}_{2,1}$ su l_2 .



H.B.: i fili non generano campi elettrici (\vec{E}) a causa della neutralità del materiale.

FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

(57)

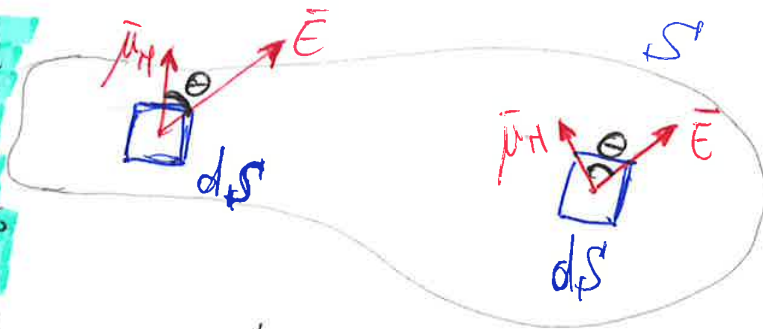
Consideriamo una superficie infinitesima dS' immersa in una regione in cui è definito un campo \vec{E} e orientiamola fissando il verso del vers. normale $\vec{\mu}_N$ alla superficie dS' ($\vec{\mu}_N$). Si definisce flusso del campo \vec{E} attraverso dS' la quantità:

$$d\phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N dS' = E \cos\theta dS' = E_N dS', \text{ che diventa:}$$

$$\phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N dS' \text{ con } S \text{ finito e lungo un cammino chiuso.}$$

Il flusso di campo, quindi, misura il numero di linee di corrente che passano per il dS' considerato.

N.B.: le componenti di \vec{E} perpendicolari a $\vec{\mu}_N$, non forniscono contributo in quanto si annullano



Se la superficie è chiusa, è convenzionale orientare la normale verso l'esterno. I contributi positivi all'integrale sono quelli per cui $\vec{E} \cdot \vec{\mu}_N > 0$, dovuti a quelle zone dove anche \vec{E} punta verso l'esterno: essi rappresentano un flusso di \vec{E} uscente dalla superficie. I contributi negativi provengono dalle zone in cui $\vec{E} \cdot \vec{\mu}_N < 0$, in cui \vec{E} punta verso l'interno e rappresentano un flusso di \vec{E} entrante. Pertanto l'integrale dà il flusso netto (somma di contributi entranti ed uscenti) attraverso la superficie chiusa.

Data la relazione precedentemente discussa:

59

$$d\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

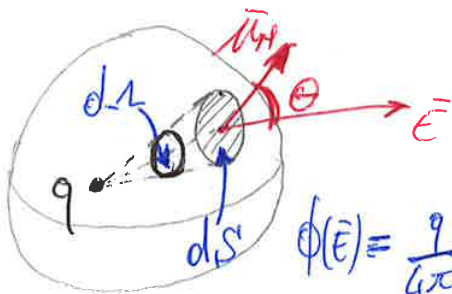
pare evidente che, il flusso del campo \vec{E} generato da una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido $d\Omega$ e non dalla superficie o dalla sua distanza dalla carica. Allora:

$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Se volessimo calcolare il flusso di \vec{E} attraverso una superficie chiusa, dovremmo distinguere due casi:

CASO 1:

Se la carica q è interna alla superficie chiusa S' , allora tutti i contributi $\phi_i(\vec{E})$ si sommano in quanto hanno sempre lo stesso segno in qualsiasi dS' . Allora:

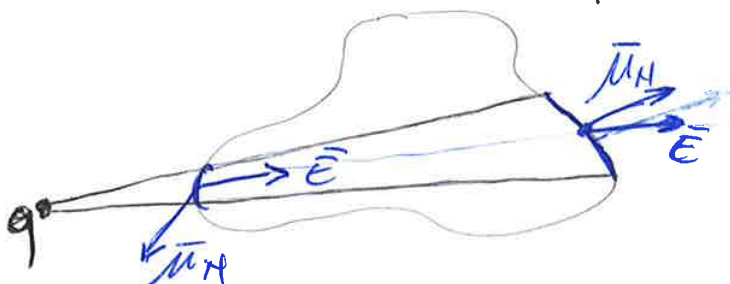


$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N dS' = \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS' \cos\theta}{r^2}$$

$$\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS' \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega \Rightarrow \phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

CASO 2:

Se la carica q è esterna alla superficie S' chiusa, allora "stacciamo" dalla super chiusa due elementi (dS'_1, dS'_2) , l'orientazione di $\vec{\mu}_N$ è tale che su dS'_1 il flusso sia negativo mentre su dS'_2 il flusso sia positivo. Allora:



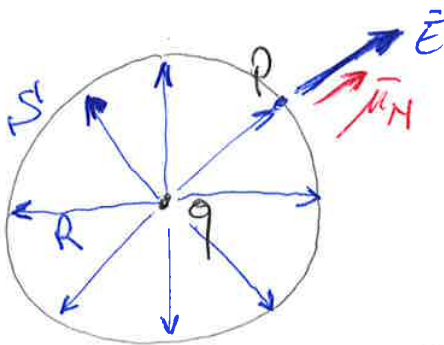
$$\phi_1(\vec{E}) = -\phi_2(\vec{E})$$

$$\Rightarrow \phi_{tot}(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N dS' = 0$$

Esempi

(61)

1. Data una carica q , considero una sfera come super. di riferimento



$\vec{E} \perp S, \forall P \in S$ $R = \text{cost.} \Rightarrow \vec{E} = \text{cost.}$
 $\vec{\mu}_N \perp S, \forall P \in S$
 $\Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{\mu}_N, \forall P \in S \Rightarrow \theta = 0$

So che $\phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$, $Q_{\text{tot}} = q$, Allora:

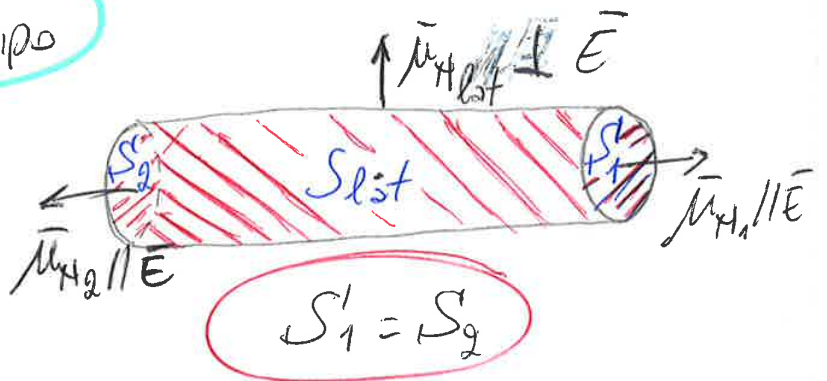
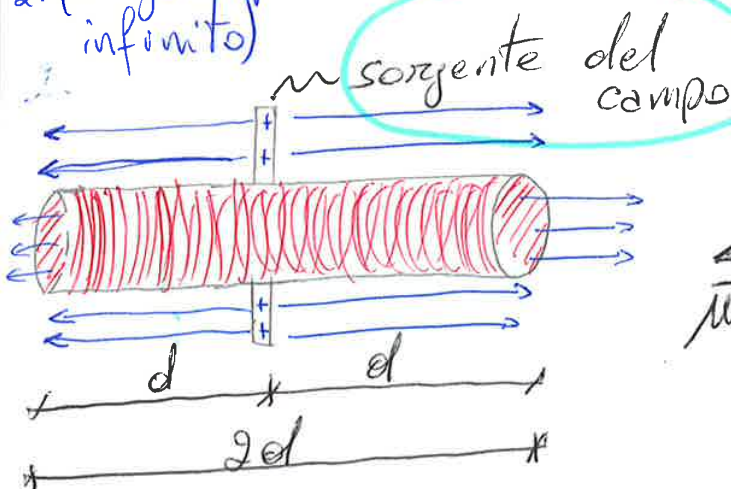
$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N dS' = \int_S \underbrace{E \mu_N \cos \theta}_1 dS' = \int_S E dS'$$

$$\phi(\vec{E}) = E \int_0^{4\pi R^2} dS' \Rightarrow \phi(E) = E \cdot 4\pi R^2$$

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

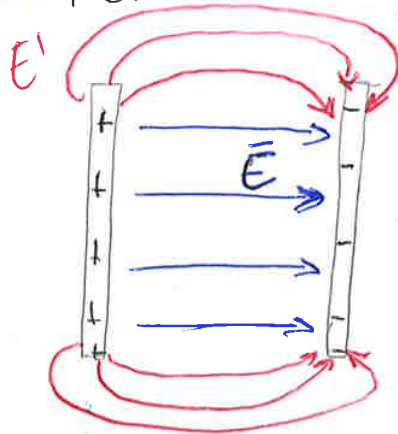
N.B: della legge di Gauss mi sono ricondotto alla legge di Coulomb

2. (singolo piano infinito)



Voglio calcolare il campo di una distribuzione di carica piano distribuita uniformemente. Come super. di riferimento scelgo una super. cilindrica in ogni punto perpendicolare alla sorgente, la cui super. $\rightarrow \infty$

Il caso ideale discusso in precedenza (piam cariche ∞) chi infiniti) può essere esteso al caso reale in cui i piam sono finiti, con l'unica condizione che i punti analizzati, siano a distanza (r) sufficientemente più grande rispetto alla distanza (d) tra le piastre. In questo caso, però, avviene il fenomeno chiamato **effetto di bordo**, che si verifica ai bordi dei piam carichi.

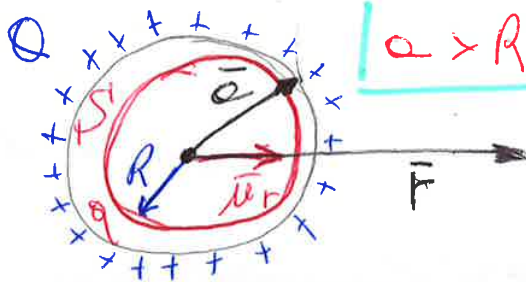


All'interno del volume ho il campo $E = \text{cost.} = \sigma / \epsilon_0$, mentre ai bordi l'intensità del campo **diminuisce** ($E' \neq \text{cost.}$)

Applicazioni:

1. (Sfera carica solo superficialmente)

Data una superficie sferica carica positivamente in maniera uniforme ($\sigma = \text{cost.} \forall P \in S$), voglio calcolare il campo \vec{E} in un punto arbitrario appartenente alla superficie sferica, sapendo che $a = \text{raggio sfera}$



$a > R$

la sfera in rosso, ~~è~~ inscritta in quella per cui voglio calcolare il campo generato, rappresenta la mia superficie di riferimento (S')

$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_n dS' = \frac{q}{\epsilon_0} = \phi$, poiché la carica è spalmata

sulla super. della sfera, allora $q = q_{\text{int.}} = 0$, per cui, per la geometria della sfera uniformemente carica, $\vec{E} \parallel \vec{n}_n, \forall P$

$\Phi(\vec{E}) = E \int_0^{4\pi} dS = E 4\pi R^2 \Rightarrow E 4\pi R^2 = 0 \Rightarrow E = 0$

il campo interno risultante è nullo

Direi che $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \text{cost.}$, con $r < a$

è corretto in quanto sappiamo che:

• $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

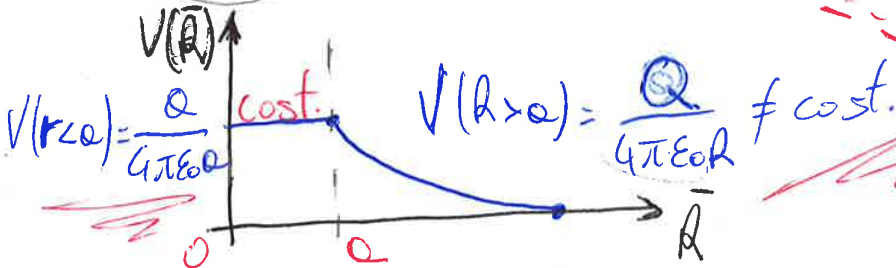
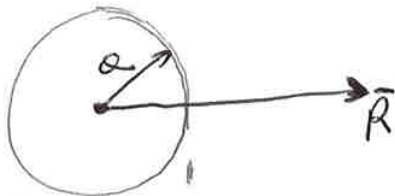
• $\vec{E}_{\text{int}} = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla}V = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow V = \text{cost.}$

Andando a calcolare il potenziale ϕ di un punto posto ad $R > a$ ed ~~ottenendo~~ ottengo, in maniera speculare al caso precedente:

$V(R) = V(a) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \neq \text{cost.}$

Si noti la totale analogia col caso visto per il campo \vec{E} , per cui posso affermare che il potenziale di un punto esterno alla super. carica, decresce come il quadrato della distanza R , e lo stesso potenziale avrò se tutta la super. sferica collassasse nel suo centro, generando una singola carica q . Riportando sul grafico:



N.B.: con $R > a$, il potenziale decresce ~~come~~ come l'inverso della distanza

Sapendo che : $E_{S_1} \perp E_{S_2} \perp \vec{\mu}_H$

(67)

$E_{S_{lat}} \parallel \vec{\mu}_H$

Allora : *lo scompongo in 3 contributi*

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_H dS = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{\mu}_H dS_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{\mu}_H dS_2 + \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_H dS_{lat}$$

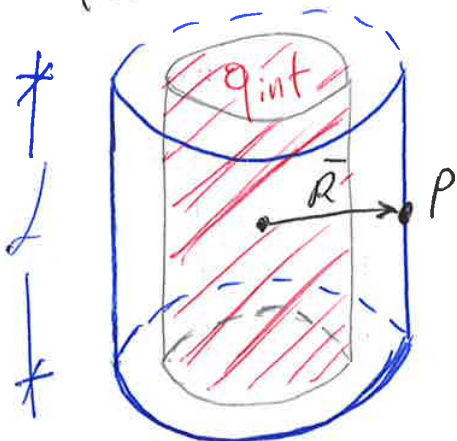
$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_H dS_{lat} = E 2\pi r L, \text{ per cui:}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{L^2}, \quad \Phi(\vec{E}) = E 2\pi r L$$

$$\Rightarrow E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{L^2} \Rightarrow E = \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 r^2}, \quad r < a$$

campo elettrico per un punto interno al cilindro

Posso estendere il ragionamento ad un punto esterno rispetto al cilindro, per cui $R > a$, $R \in S'$



$$\Phi = \frac{q_{int.}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = E_2 \perp S'$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_H dS$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{\mu}_H dS_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{\mu}_H dS_2 + \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_H dS_{lat}$$

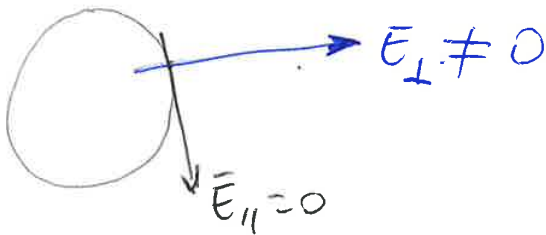
$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = E 2\pi R L$$

$$\Rightarrow E 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}, \quad R > a$$

superficie della sfera. Dopo un certo τ cessa (69) il fenomeno di migrazione delle cariche, che si ~~stabiliscono~~ stazionano sulla superficie della sfera, generando un campo secondario \vec{E}_2 antiparallelo ad \vec{E}_1 . All'interno del materiale il campo \vec{E}_2 compensa il campo \vec{E}_1 , per cui ci troviamo in una situazione di stazione rieta.

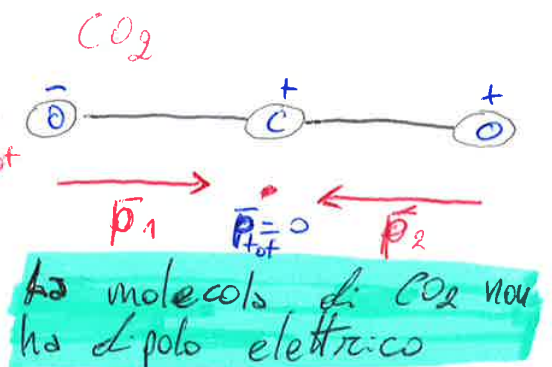
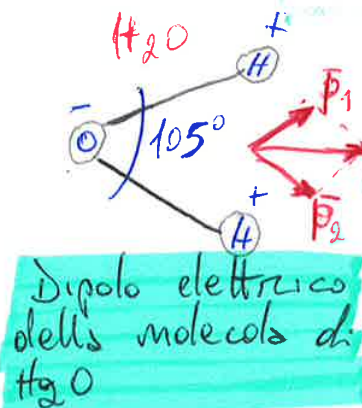
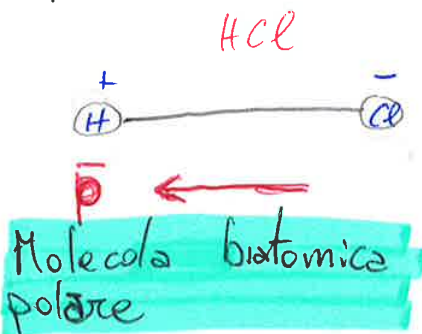
$$\vec{E}_{INT} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$$

N.B: l'unica condizione per cui le cariche generano un campo \vec{E}_2 è che non hanno più componenti parallele alla superficie, la quale trascinerrebbe la sfera. ~~È~~ È importante tenere presente che anche la componente \vec{E}_\perp può trascinare la sfera, ma solo per valori molto elevati del campo \vec{E} .



MATERIALI DIELETTICI (ISOLANTI)

I materiali dielettrici non sono più caratterizzati dall'aver cariche libere, le quali possono "viaggiare" all'interno del volume in presenza di una d.d.p., in quanto le cariche sono vincolate, mediante forze di attrazione ~~debole~~ a valori elevati, agli atomi. Avviene così il fenomeno di polarizzazione elettrica. Posso schematizzare i mat. dielettrici come un insieme di dipoli elettrici.



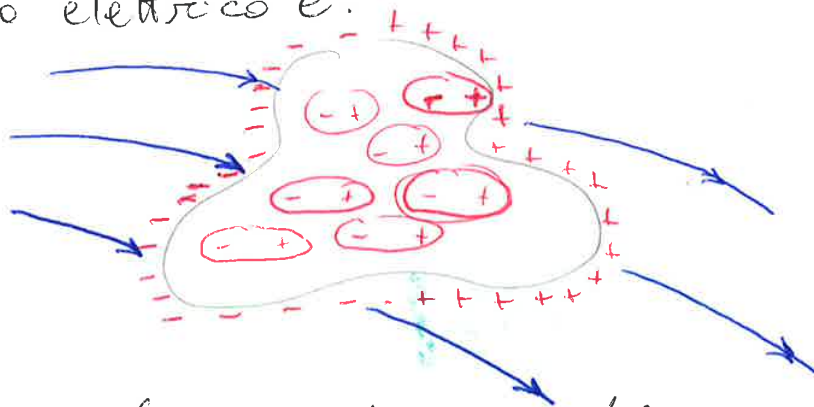
Anche questo meccanismo, che prende il nome $\textcircled{71}$ di **polarizzazione per orientamento**, porta il risultato che ogni molecola acquista un momento di dipolo medio $\langle \bar{p} \rangle$ microscopico parallelo a \bar{E} .

Nel primo caso illustrato ($\bar{E}=0$), il momento di dipolo medio è nullo, anche se ogni dipolo, preso singolarmente, ha un momento di dipolo $\bar{p} \neq 0$.

Aumentando il campo aumenta la polarizzazione e, al limite, ho la condizione di saturazione del materiale, in cui $\bar{E} \parallel \bar{p} \Rightarrow \langle \bar{p} \rangle = \text{max}$.

N.B: per ogni materiale posso definire una soglia al di sopra della quale la polarizzazione è massima.

Immerso un pezzo di mat. dielettrico (baricentro cariche positive e negative diversi) di geometria qualunque, in un campo elettrico \bar{E} .



Anche in questo caso, ho un addensamento di carica sulla superficie del materiale. Le **cariche di polarizzazione** (che si condensano in un mat. dielettrico in presenza di un campo \bar{E}) hanno una densità molto minore delle cariche libere dei mat. metallici. Conseguenzialmente ho: l'addensamento di cariche opposte sulla superficie, genera un campo \bar{E}_2 secondario, interno alla superficie, che si oppone al campo \bar{E}_1 interno. A differenza dei mat. metallici ($\bar{E}_{INT} = 0$), in caso di un dielettrico ho:

$$\bar{E}_{INT} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 > 0$$

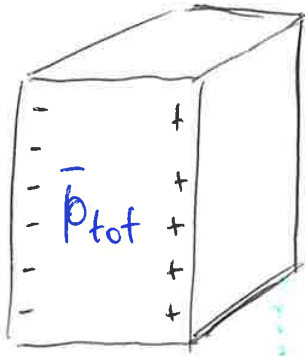
Se la lastra ha lunghezza l e superficie S , (73)
 posta perpendicolarmente al campo \vec{E} , la polarizzazione
 parallela ad \vec{E} e perpendicolare ad S ($\vec{E} \parallel \vec{P}$)

Allora:

$$P(Sl) = (PS)l = Ql = p_{tot}$$

\Rightarrow

$$PS = Q$$



dal punto di vista macroscopico, il
 dielettrico immerso in un campo \vec{E}
 Un grande dipolo elettrico di

$$p_{tot} = Ql \Rightarrow P(Sl) = Ql \Rightarrow P = \frac{Q}{S}$$

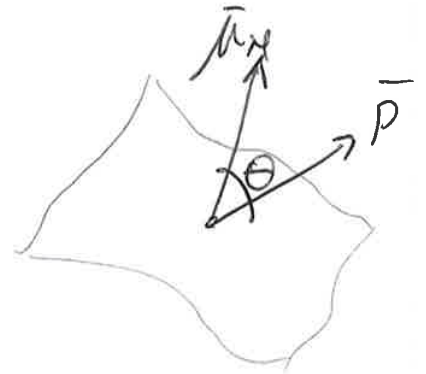
$+ l -$

Allora la polarizzazione elettrica è definita come
 carica totale sulla superficie.

Generalizzando il risultato, ottengo:

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{\mu}_N$$

$\vec{\mu}_N$: versore normale
 alla superficie
 σ : carica per unità
 di superficie



Posso, quindi, generalizzare la legge di Gauss, 75
 nel caso ci sia un dielettrico immerso nel campo \vec{E} :

$$\begin{cases} Q_{lib} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{lib} + Q_{pol.}}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

SUSCETTIVITÀ E PERMETTIVITÀ ELETTRICA

La polarizzazione e il campo elettrico sono relazionati dalla legge:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e = chiamata suscettività, è una cost. adimensionata il cui valore dipende dalla temp. e dal materiale (prop. intrinseca).

Tale relazione, poiché $\epsilon_0 \chi_e = \text{cost}$, mette in evidenza come il vettore polarizzazione sia parallelo e concorde al campo \vec{E} (N.B: questo non è sempre vero).

Tale relazione vale solo per i materiali isotropi, cioè quelli in cui le proprietà chimico-fisiche non dipendono dall'orientazione in cui lo misuro. In tal caso avremo:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_x \\ \vec{P}_y \\ \vec{P}_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \\ \vec{E}_z \end{pmatrix}, \quad \text{con } \underline{\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz}}$$

Nei anisotropi, invece, vale la relazione:

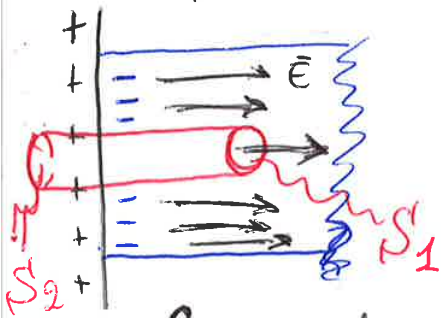
$$\begin{pmatrix} \vec{P}_x \\ \vec{P}_y \\ \vec{P}_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \\ \vec{E}_z \end{pmatrix}$$

N.B: la mat. 3x3 contenente i valori di suscettività è chiamata tensor

Dalla precedente relazione, notiamo che il valore del **(77)** campo generato da una carica in presenza di un dielettrico, sia smorzato di un coeff. ϵ_r rispetto ~~al~~ al campo generato dalla stessa particella nel "vuoto".

Allora, lo smorzamento del campo elettrico di una carica in un dielettrico, rispetto al vuoto, è una conseguenza degli effetti di schermatura dei dipoli elettrici indotti o orientati dal campo elettrico sorgente.

Per una piastra con densità di carica superficiale σ_{lib} e di polarizzazione σ_{pol} , ho che:



Usando Gauss:

$$\phi = \frac{Q_{lib}^{int}}{\epsilon_r \epsilon_0} ; \quad \phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n dS'$$

$$\phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n dS'_1 = E \int_0^{2\pi R} dS'_1 = E 2\pi R$$

$$E 2\pi R^2 = \frac{Q_{lib}^{int}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q_{lib}^{int}}{2\pi R^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \quad \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow E = \frac{\sigma_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Anche in questo caso è stato messo in evidenza come il ~~caso~~ valore del campo sia decelerato dal coeff. di smorzamento ϵ_r

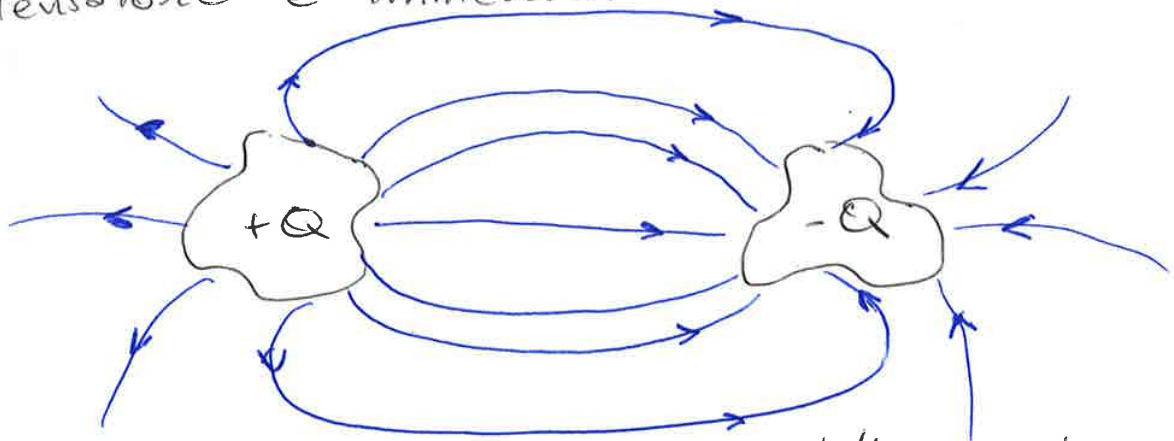
N.B.: l'integrale è costituito da 3 contributi, uno dei quali è nullo perché $\vec{\mu}_n \perp \vec{E}$ (super. lat.) un altro è nullo perché è al di fuori del condensatore (super. S_2)

SISTEMA CONDENSATORE

Dati, due condensatori isolati, di geometria arbitraria su cui abbiamo posto due cariche Q uguali in modulo ma di segno opposto, abbiamo un condensatore. Si può dimostrare che, qualunque sia la geometria del sistema, sussiste la relazione:

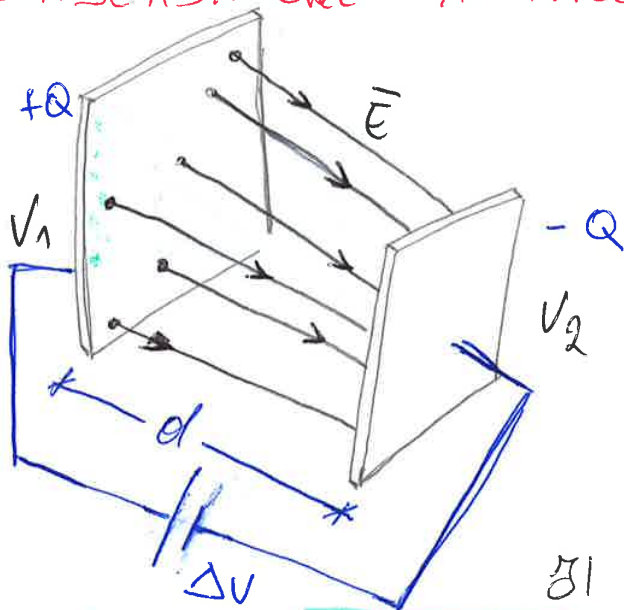
$$Q = C \Delta V$$

Dove ΔV è la d.d.p. fra le piastre metalliche e C dipende solo dalla geometria e dal dielettrico in cui il condensatore è immerso.



poiché $C = \frac{Q}{\Delta V}$, inserendo un dielettrico nel condensatore, dal momento che ΔV diminuisce, allora C aumenta!

CONDENSATORE A FACCE PIANE E PARALLELE



Not. $S', Q, \sigma_{lib} = \frac{Q}{S}$

Inizialmente le piastre sono scariche. Mediante una fem genero una ddp all'interno del condensatore che consente alle cariche di migrare dal polo negativo al polo positivo. Il campo crescerà nel tempo, fino

che $\text{ddp} = \text{fem}$, allora il condensatore raggiunge il livello di max. saturazione di carica e cessa il flusso elettronico

Il lavoro svolto se a finire nella costruzione del campo \vec{E} dentro al condensatore, mediante il trasferimento di energia tra la fem e ~~il~~ il sistema, per cui diventa en. propria del campo elettrostatico.

Per un conduttore a facce piane e parallele, ottengo:

$$L = \frac{1}{2} C V_0^2 = W \text{ (en. del campo elettrico)}$$

Ricordando che: $C = \frac{\epsilon S'}{d}$; $V_0 = Ed$, ottengo

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon S'}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \underbrace{(S'd)}_{\text{Volume tra le due piastre.}}$$

Introducendo il concetto di densità di energia del campo \vec{E} :

$$\text{densità di energia del campo elettrostatico} \quad w = \frac{W}{S'd} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Si può dimostrare che il risultato è generalizzabile a qualsiasi campo elettrostatico.

$$\phi(\bar{E}) = \frac{Q_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Anche in questo caso l'integrale può essere suddiviso in 3 contributi, 2 dei quali si annullano: uno per $\vec{\mu}_H \perp \bar{E}_0$, uno perché è all'esterno delle piastre.

$$\phi(\bar{E}) = \oint_S \bar{E} \cdot \vec{\mu}_H dS' = E \int dS' = ES$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{Q_{lib}}{S \epsilon_0 \epsilon_r} = 2634.02 \text{ V/m} \quad \underline{E < E_0}$$

$\epsilon_r = 2.61$

4) Calcolo $\Delta V'$ in presenza del dielettrico ($\Delta V'$)

$$\Delta V' = V^+ - V^- = \int \bar{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V' = \int_b^d \bar{E}_0 \cdot d\vec{l} + \int_0^b \bar{E} \cdot d\vec{l} = E_0(d-b) + Eb$$

$$\Delta V' = 52.3 \text{ V}$$

$$\underline{\Delta V' < \Delta V}$$

5) Calcolare la capacità in presenza del dielettrico (C')

$$C' = \frac{Q_{lib}}{\Delta V'} = 13.4 \cdot 10^{-12} \text{ Farad}$$

$$\underline{C' > C_0}$$

N.B.: se avessi inserito un dielettrico in tutto il volume libero tra le piastre cariche

$$C' = C_0 \epsilon_r$$

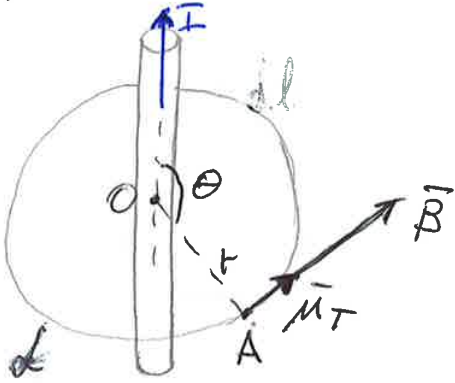
LEGGE DI AMPERE

(89)

~~CIRCUITO~~

CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO \vec{B}

Consideriamo un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso dalla corrente i . Lo spostamento di carica lungo il filo genererà un campo magnetico \vec{B} :



$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r} \vec{\mu}_T$$

Il prodotto scalare tra il campo \vec{B} e un generico vettore infinitesimo $d\vec{s}$, posto nello spazio circostante il filo, a distanza r da questo, definisce la circuitazione di \vec{B} lungo la linea di campo rappresentata dalla circonferenza \mathcal{L} di raggio r . Allora:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{L}} B \cdot \vec{\mu}_T d\ell = B \oint_{\mathcal{L}} d\ell = B(2\pi r)$$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 \frac{I}{2\pi r} \right) (2\pi r) = \mu_0 I$$

Da tale ragionamento definisco la **LEGGE DI AMPERE**, la quale mi consente di calcolare la circuitazione lungo un campo magnetico, data una superficie lungo la quale scorrono più correnti:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$

Consideriamo il caso $r > a$:

(81)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \int_0^{2\pi R} d\ell = B 2\pi R$$

$$\Rightarrow B 2\pi R = \mu_0 I \quad ; \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Consideriamo il caso $r < a$, il quale si presta per qualche commento in più:

in primis, sottolineiamo il fatto che la distribuzione di carica è spaziale, per cui la $Q_{int} \neq 0$. Allora

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I'$$

N.B.: I' rappresenta la somma di correnti interne alla superficie L' , per cui $I' \neq I$

Per calcolare I' imposto la proporzione, considerando che la distr. di carica è uniforme:

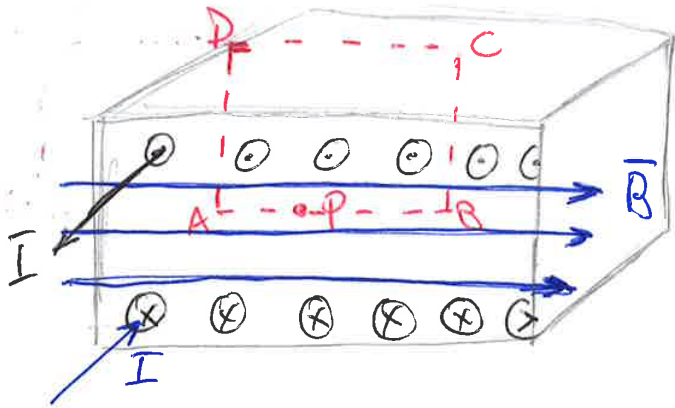
$$I : S = I' : S' \Rightarrow I' = I \cdot \frac{2\pi r^2}{2\pi a^2} \Rightarrow I' = I \frac{r^2}{a^2}$$

Allora, concludo:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \int_0^{2\pi r} d\ell = B 2\pi r$$

$$\Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$



Per calcolare il campo su un punto P interno al solenoide, uso, come super. chiusa di riferimento, un rettangolo [ABCD]

numero spire interne al rettangolo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [N] I$$

In modo analitico:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l_{AB}$$

M.B. di l_{AB} sopravvive una sola componente. Le altre si eliminano o perché esterne al solenoide o perché $\vec{B} \perp d\vec{l}$

Allora:

$$B l_{AB} = \mu_0 [N] I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 [N] I}{l_{AB}}$$

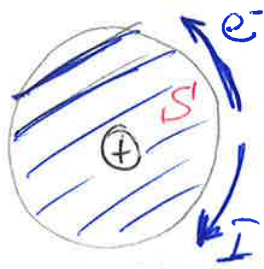
se considero le spire molto vicine tra loro o rarefatte, avrò

$$\frac{[N]}{l_{AB}} = \text{cost.} = n \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

~~...~~
Dato un sistema reale ($l = \text{finito}$), avrò gli effetti di bordo, Allora $\Rightarrow \vec{B} \neq \text{cost.}$

MAGNETIZZAZIONE DELLA MATERIA

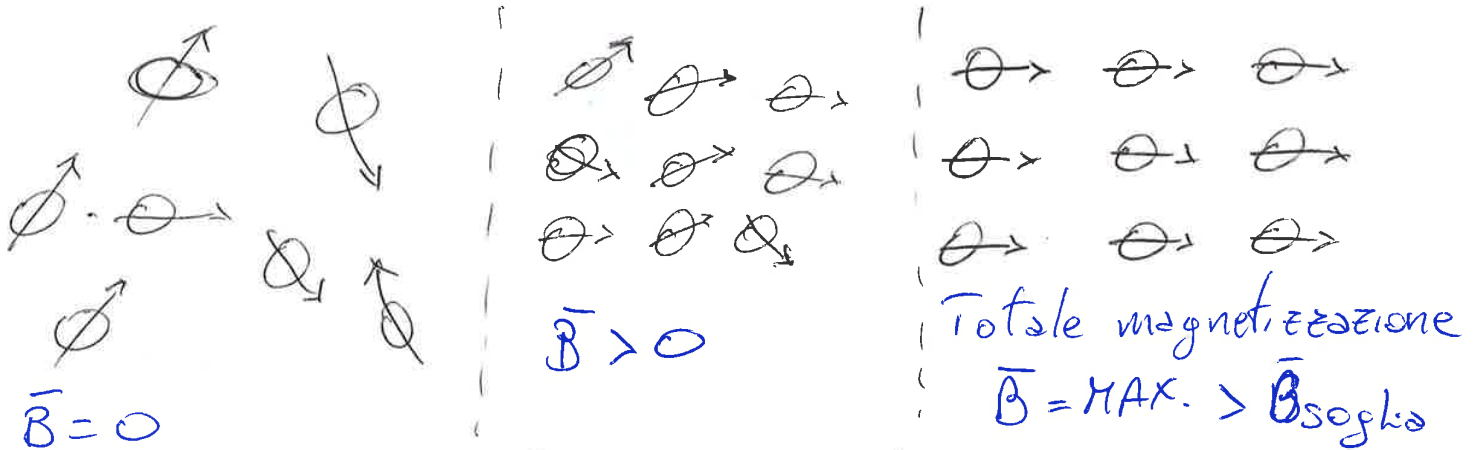
(91)



Sistema = atomo
 $\omega = \text{cost.}$ Posso analizzare il sistema come una spirale elementare percorsa da corrente.

Dato ω , posso conoscere $T = \frac{2\pi}{\omega}$
 e $I = \frac{le}{T}$

Il vettore magnetizzazione di un materiale è definito come il momento di dipolo magnetico per unità di volume, cioè la somma di tutti i momenti magnetici microscopici nell'unità di volume.



Un atomo è costituito da infiniti momenti di dipolo magnetico. Questi possono annullarsi totalmente (2ne⁻ in genere) o avere un **MOMENTO MAGNETICO RISULTANTE**.

- N.B.: • **DIAMAGNETICI** → $\bar{M} = 0$
- **PARAMAGNETICI** → $\bar{M} \neq 0$

Se $\bar{m} = I \cdot S \cdot \mu_H$ è il momento di dipolo di ciascun atomo o molecola e n è il loro numero per unità di volume, il vett. magnetizzazione è:

$\bar{M} = n \bar{m} = A/m$

somma di momenti di dipolo elementari nell'unità di volume

All'interno del cilindro la corrente si annulla per ogni spira vicina, poiché le singole correnti si annullano. Per PUNTI INTERNI, $I_{mag} = 0$. (93)

Quindi il cilindro si comporta come una spira gigante. Deduco quindi che, la corrente di magnetizzazione è una corrente superficiale.

Anche se il risultato è stato ottenuto in un caso particolare, la sua validità è generale:

la corrente di magnetizzazione efficace per unità di lunghezza sulla super. di un pezzo magnetizzato di materia è uguale alla componente del vettore magnetizzazione:

(\vec{I}) parallela al piano tangente alla superficie del corpo e ha direzione perpendicolare a \vec{M} . In generale si ha:

$$\frac{I_{mag}}{l} = \vec{M} \cdot \vec{\mu}_T$$

$\vec{\mu}_T$ = vettore tangente alla corrente I_{mag}
 $\vec{\mu}_T \perp I_{mag}$

CAMPO MAGNETIZZANTE

Se mettiamo un pezzo di cilindro di materia entro un solenoide percorso da una corrente I , il campo magnetico generato dal solenoide magnetizza il materiale creando una corrente superficiale per unità di lunghezza del cilindro:

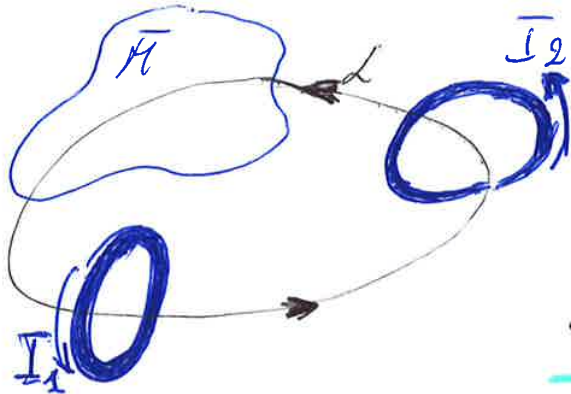
$$I_{mag}/l = M$$

Il sistema costituito da solenoide più cilindro ha una corrente effettiva per unità di lunghezza pari a:

$$nI + \frac{I_{mag}}{l} = nI + M$$

corrente libera del Solenoide corrente superficiale
n = numero spire per unità di lunghezza

Si può dimostrare che la circuitazione del campo magnetizzante lungo una linea chiusa è uguale alla corrente libera totale concatenata 95



LEGGE DI AMPERE PER IL CAMPO MAGNETIZZANTE \vec{H}

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_{l.b.,k}$$

Estendendo il concetto al calcolo ~~del campo magnetico~~ della circuitazione del campo \vec{B} , dobbiamo tenere conto di tutte le correnti libere e di magnetizzazione:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k (I_{l.b.,k} + \sum I_{m.s.,k})$$

SUSCETTIVITÀ E PERMEABILITÀ MAGNETICA

Dato un materiale isotropo, la relazione tra il campo magnetico \vec{B} , campo magnetizzante \vec{H} e magnetizzazione \vec{M} , si può scrivere:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

il vettore magnetizzazione, per molti materiali si può esprimere come:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Dove χ_m è detta suscettività magnetica del mezzo ed è adimensionata.

Riprendendo il discorso precedente:

(97)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \underbrace{\chi_m \vec{H}}_{\vec{M}}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

N.B.: Mea materiali isotropi, $0 < \chi_m < 1$

con $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$

μ_r = permeabilità magnetica relativa

μ_0 = permeabilità magnetica nel vuoto

μ = permeabilità magnetica del mezzo

N.B.: μ_r è una caratteristica intrinseca del mezzo e della temperatura

La circuizione di \vec{H} diventa:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \sum_K I_{l.b,k}^{int.}$$

Se il materiale è omogeneo ($\mu = \text{cost.}$ in ogni punto):

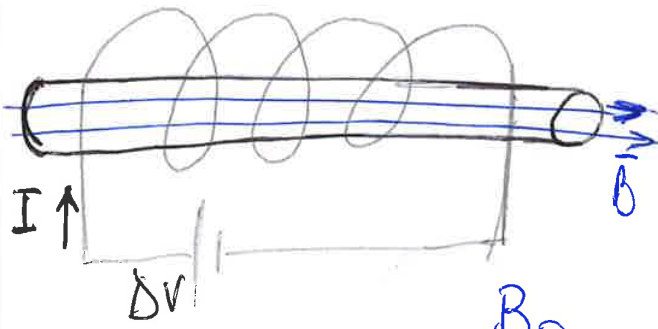
1) $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \sum_K I_{l.b,k}$, inoltre

2) $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_K (I'_{l.b,k} + I'_{mag,k})$

Questa relazione ① è molto importante, in quanto, ai fini del calcolo, conoscere la I_{mag} è molto difficile ma, conoscendo la permeabilità magnetica relativa (μ_r), posso trovare l'equivalente della relazione ② svincolandomi dalla conoscenza della I_{mag} e semplificando, così, il calcolo della circuizione, che diventa, appunto:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \sum_K I_{l.b,k}$$

Immagino di inserire un cilindro all'interno del solenoide, ~~allora~~ alimentato dalla stessa corrente I :



$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$$

dove $H = n I$ ($\vec{H} \cdot \vec{\mu}_r = n I$)

Allora $B = \mu_r \mu_0 n I$ $\Rightarrow B = \mu_r B_0$

Tale relazione è fondamentale perché mette in luce la differenza tra un **DIAMAGNETICO** ($\chi_m < 0 \Rightarrow \mu_r < 1$) e un **PARAMAGNETICO** ($\chi_m > 0 \Rightarrow \mu_r > 1$). Nel primo caso $B < B_0$, nel secondo caso $B > B_0$.

Per giustificare, a livello microscopico, cosa accade ad un diamagnetico, introduco il fenomeno di **DIAMAGNETISMO**. Questo comportamento magnetico, è presente in tutti i materiali!!! Nei paramagnet, tale fenomeno è trascurabile rispetto al fenomeno di magnetizzazione!!!

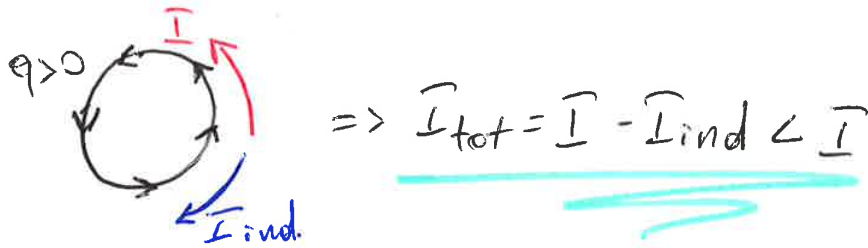
Dato una carica q , in moto con una velocità \vec{v} , questa sarà spinta, per la legge di Lorentz, da una forza:

$\vec{F}_M = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$. Se sono nella condizione $\vec{v} \perp \vec{B}$, allora il moto della carica sarà deflesso in maniera da generare un moto circolare

uniforme, con raggio di curvatura dipeso dalle caratteristiche del campo magnetico, e la particella tenderà ad avvolgersi lungo le linee di campo \vec{B} . Posso calcolare:

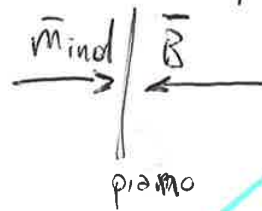
$$\vec{\omega} = - \frac{q}{\text{massa}} \vec{B}$$

La diminuzione di I_{tot} è dovuta alla generazione di (101) una corrente indotta dal campo \vec{B} (I_{ind}), che scorre con verso discorde alla corrente I .



Posso studiare il sistema come due spire sovrapposte, ~~sulle quali scorre~~ dove su una scorre la corrente I , sull'altra la corrente I_{ind} .

Calcolo il momento di dipolo indotto conseguente all'applicazione del campo \vec{B} . Poiché I_{ind} circola in senso orario, il momento di dipolo è entrante nel piano e quindi anti-parallelo al campo \vec{B} :



Nel caso in cui la circolazione della carica sia contraria (I in senso orario), allora, in presenza di un campo \vec{B} , la F_c sarà centripeta e la I_{ind} avrà verso concorde ad I . Sarà generato un \vec{m}_{ind} , anti-parallelo al campo \vec{B} , il quale genera un campo $\vec{B}_{ind} // \vec{m}_{ind}$. Allora il campo $\vec{B}_{tot} = \vec{B} - \vec{B}_{ind} < \vec{B}$. Questo è ciò che accade nei diamagnetici (FENOMENO DI DIAMAGNETISMO).

Nei paramagneti tale fenomeno è trascurabile perché prevale il fenomeno di magnetizzazione!!!

C'è da aspettarsi una variazione della magnetizzazione 103
 nei ~~paramagnetici~~ e quindi della suscettività magnetica, ~~nei~~
con la temperatura, a parità di campo B applicato

Sperimentalmente si osserva che: $M = C \cdot \frac{H}{T}$
 (M inversamente prop. alla T)

Da cui la legge di Curie:

$\chi_m = \frac{C}{T}$ Legge di Curie (andamento iperbolico)

Tale legge giustifica la dipendenza inversa della magnetizzazione con la temperatura. ($T \uparrow, M_s \downarrow$)

~~Considerando~~ Considerando che nei diamagnetici $\chi_m < 0$ e che $|\chi_m| \ll 1$ [$10^{-9} \div 10^{-5}$] e nei paramagnetici $\chi_m > 0$ e che $|\chi_m| \ll 1$ [$10^{-3} \div 10^{-6}$], posso concludere che:

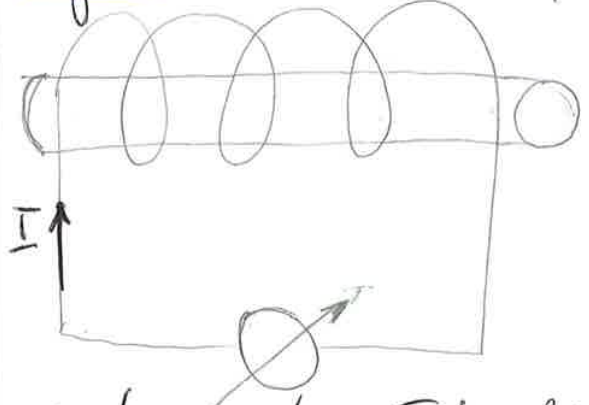
$\mu_r = 1 + \chi_m \approx 1$

$B = \mu_r B_0 \approx B_0$

B differisce da B_0 per valori molto esigui, per cui misurabili solo con particolari apparecchiature

Nei materiali ferromagnetici il campo $B = \mu_r B_0$ può essere incrementato o decrementato di molti ordini di grandezza.

Allora non è semplice relazionare il vettore magnetizzazione \vec{M} con il campo magnetizzante \vec{H} , in quanto la relazione che lega le due grandezze non è lineare. Si parla, allora, del fenomeno di isteresi (memoria magnetica inerente alla storia del magnetizzazione del ferromagnete).

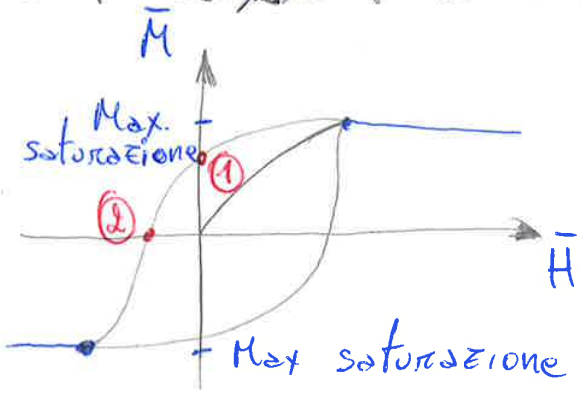


Dato un solenoide, "immerso" negli avvolgimenti, un cilindro di materiale ferromagnetico. Aumentando la ~~corrente~~ f.e.m., aumento la corrente che circola all'interno degli

avvolgimenti. Tale flusso genera un campo magnetico \vec{B} interno al cilindro.

Poiché sussiste la relazione $\vec{H} = \vec{\mu}_r = n\vec{I}$, modulando la corrente (vario la f.e.m.) modolo il campo magnetizzante.

Se smagnetizzassi il materiale ($\vec{B}=0$; $\vec{M} \neq 0$ localmente, $\vec{M}=0$ globalmente), osserverei che, all'interno del solenoide, ~~il~~ l'andamento di $\vec{M}(\vec{H})$ sarebbe:

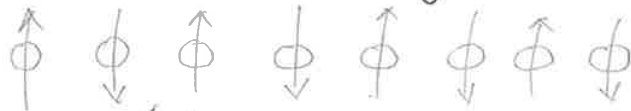


- ① Ho la condizione di magnete permanente ($\vec{H}=0$, $\vec{M} \neq 0$)
- ② **Campo COERCITIVO**: Valore in cui il vettore \vec{M} si annulla. Significa che il materiale è smagnetizzato! Questo è possibile applicando \vec{H}_1 discorde ed eguale ad \vec{H} . Se $\vec{H}_1 \gg \vec{H}$, allora \vec{H} sarà minore di zero e crescerà in modulo.

ANTI-FERROMAGNETI e FERROMAGNETI

(107)

Gli anti-ferromagnet, presentano caratteristiche ferromagnetiche, con la differenza che sono costituiti da coppie di atomi antiparalleli tra loro, per cui $M = 0$ sempre a livello macroscopico, perché i momenti di dipolo sono opposti (concetto ~~invalido~~ a prescindere dalla presenza o meno di campo magnetico).



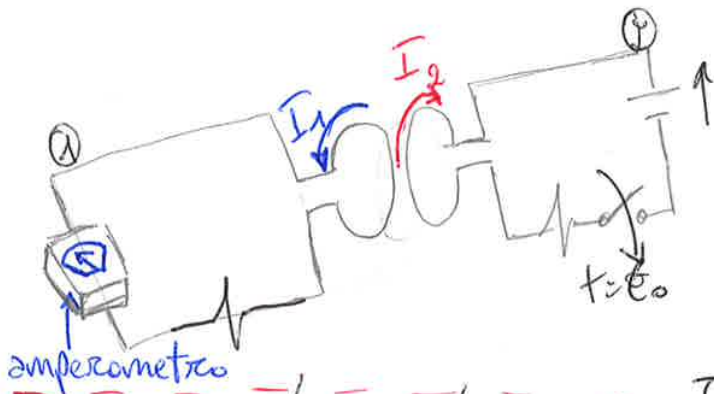
Momenti di dipolo opposti

Analoghi agli anti-ferromagnet, sono i ferromagnet, con l'unica differenza che un momento di dipolo prevale sugli altri (momenti non costanti).



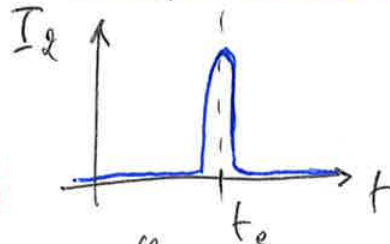
Momenti di dipolo opposti e non costanti

Un fenomeno analogo si manifesta se al posto del magnete in movimento abbiamo un circuito in cui la corrente varia col tempo, posto a distanza esig. Si verifica che, se il circuito con corrente variabile genera un campo magnetico \vec{B} , concatenato al circuito in cui si misura la corrente, osserviamo una f.e.m. indotta e quindi una corrente indotta. 109

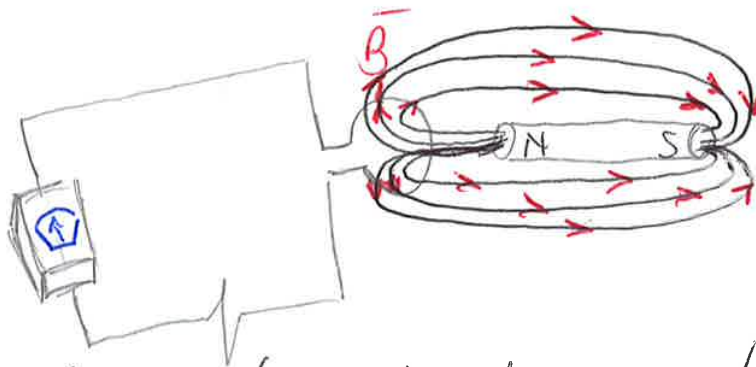


H.B: la corrente che fluisce nel circuito 1, è di tipo impulsivo, cioè ha un massimo per $t=t_0$ in cui viene chiuso il circuito 2, ma per un tempo $t=t_0^+$ torna ad annullarsi.

ragionamento analogo avviene al tempo $t=t_1$ in cui chiudo il circuito!!!

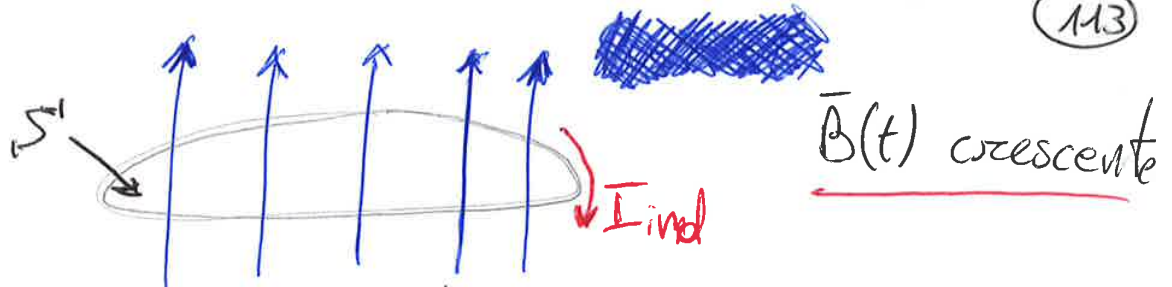


La corrente indotta è quella generata dall'interazione fra il circuito e una sorgente di campo magnetico \vec{B} . Rifocendoci all'esempio a pag. 108, avremo.



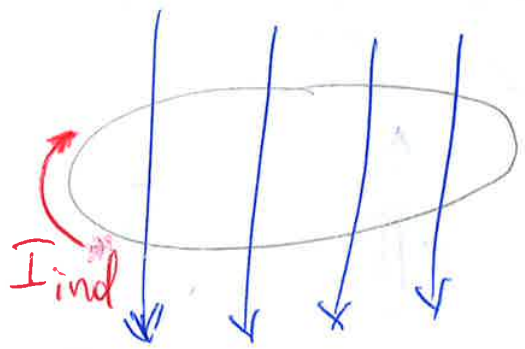
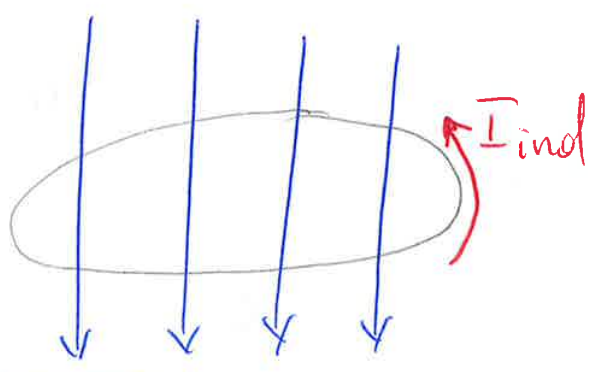
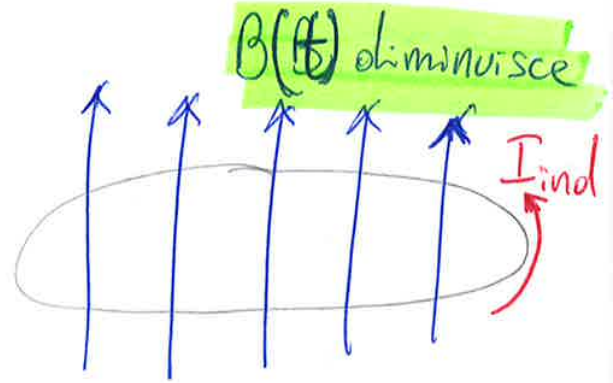
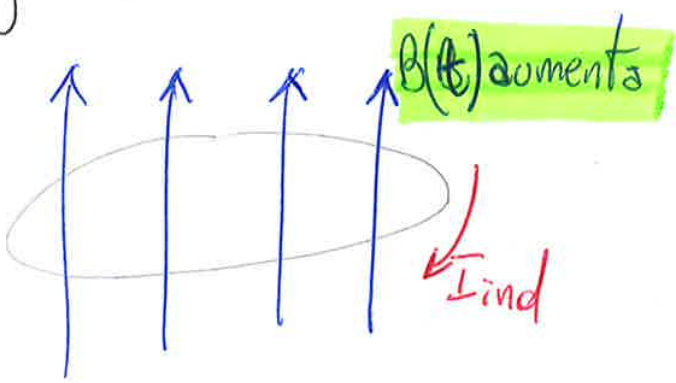
Tale campo \vec{B} viene detto campo \vec{B} concatenato con il ~~spira~~ circuito di riferimento.

È stato dimostrato che, la corrente di induzione è generata da un flusso di campo magnetico \vec{B} **VARIABILE** nel tempo $\Rightarrow \Phi_B(t) \neq \text{cost.} \Rightarrow i_{\text{ind}}$

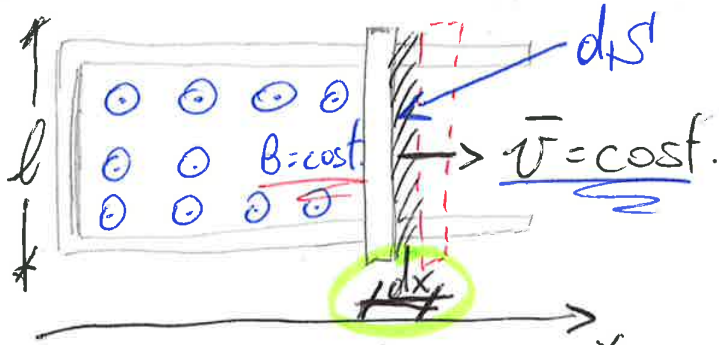


Se il campo B aumenta nel tempo in modulo, il flusso concatenato subisce una variazione dal basso verso l'alto, per cui la corrente indotta avrà un verso che si oppone al flusso del campo magnetico primario, per cui il campo magnetico indotto deve crescere dall'alto verso il basso, per cui I_{ind} procederà in senso orario.

Ragionamento ~~duale~~ nel caso in cui il campo B ~~diminuisce~~ diminuisse nel tempo, mentre, nel caso in cui il campo avesse verso diretto, dall'alto verso ~~il basso~~ il basso ragioniamo in maniera duale.



Posso calcolare la \vec{V}_{ind} . Allora ridisegno il sistema visto dall'alto verso il basso. (119)



moto rettilineo uniforme

Allora, per Faraday-Henry:

$$fem_{ind} = \int \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

facendo variare il flusso nel tempo $\Phi_B(t)$ [poiché la superficie è variabile nel tempo] allora la derivata del flusso $\frac{d}{dt} \Phi_B(t) \neq 0$ e la risoluzione di quell'equazione mi dà la fem.

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}' = B \int_S dS', \quad \text{ma } dS' = l \cdot dx$$

sapendo la tipologia di moto, ottengo la superficie infinitesima:

$$dS' = l \cdot dx = l v dt$$

$$\Rightarrow d\Phi_B(t) = B \cdot dS' = B l v dt \cdot \frac{dt}{dt}$$

la variazione di $\Phi_B(t)$ dopo un intervallo dt

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = B l v \Rightarrow fem = -B l v \quad \text{C.V.D.}$$

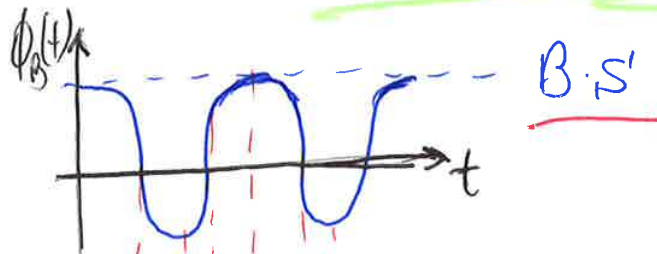
Da quanto detto:

$$\Phi_B(t) = BS' \cos(\omega t)$$

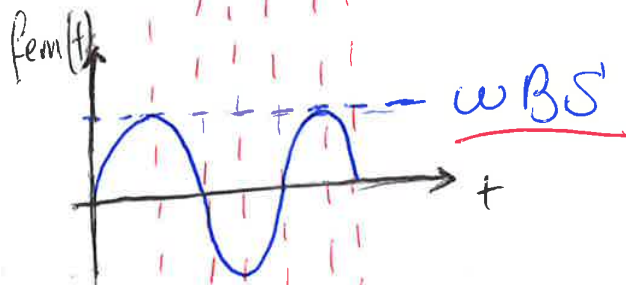
$$\Rightarrow f.e.m._{ind} = - \frac{d}{dt} \Phi_B(t) = - BS' \frac{d}{dt} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow f.e.m._{ind} = \omega BS' \sin(\omega t) \quad \text{C.V.D.}$$

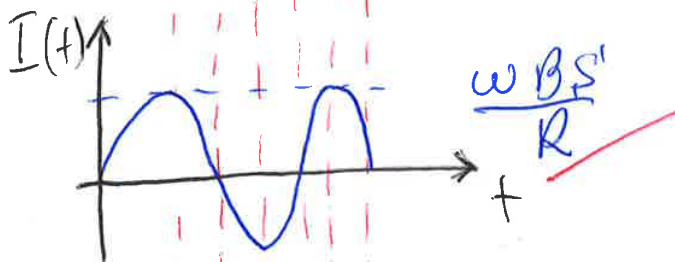
$$\Rightarrow \underline{I}_{ind} = \frac{f.e.m._{ind}}{R} = \frac{\omega BS' \sin(\omega t)}{R}, \quad \text{Allora graficamente:}$$



$$\Phi_B(t) = BS' \cos(\omega t)$$



$$f.e.m._i(t) = + \omega BS' \sin(\omega t)$$



$$I_i(t) = \frac{\omega BS' \sin(\omega t)}{R}$$

Da ragionamenti fatti ne segue che, mantenendo costante $B, \omega = \text{cost.}$, posso aumentare il flusso, e quindi la fem, aumentando la superficie, ad esempio costruendo un solenoide con N spire di superficie S' .

$\Rightarrow f.e.m. = \omega B N S' \sin(\omega t)$. NB: per \underline{I}_{ind} c'è da ragionare col conseguente aumento della resistenza R .

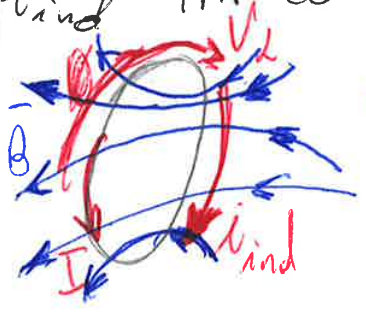
l'unità di misura di L :

$$W \cdot A^{-1} = H \text{ (Henry)}$$

Poiché L dipende dalla forma del circuito, se non varia la superficie nel tempo ($S(t) = \text{cost.}$), Allora:

$$i_{ind} = f.e.m._{ind} / R_{spira} = - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$$

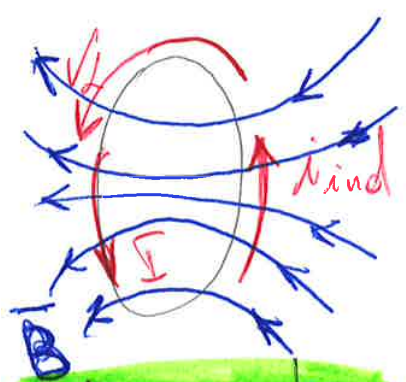
La i_{ind} sarà sommata alla $I_{primaria}$, così da ottenere una corrente risultante (I_{tot}). Per il verso di i_{ind} invoco Lenz, ottenendo:



I crescente

$$\Rightarrow I_{tot} = I - i_{ind}$$

M.B.: di solito $I \gg i_{ind}$



I decrescente

M.B.: se la corrente I nel circuito è variabile nel tempo, anche il flusso magnetico autoconcatenato varia con t ($\Phi_B(t)$) si viene a creare, per la legge dell'induzione elettromagnetica, una f.e.m. =
$$V_d = - \frac{d}{dt} \Phi(t) = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I + i_{ind}$$

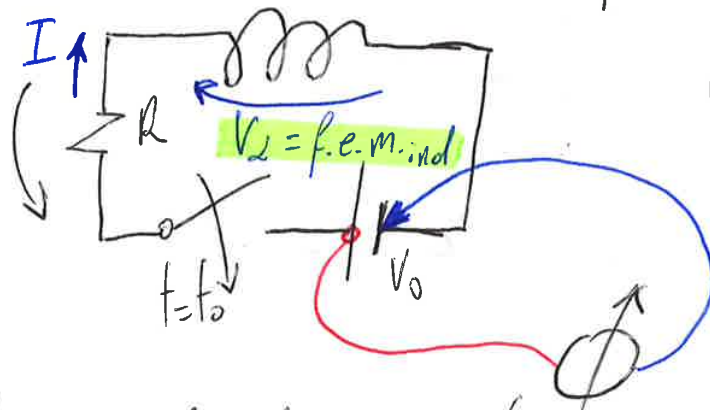
ENERGIA DI UN CAMPO MAGNETICO

(121)

Nella fase di transitorio nei circuiti, R e L ai capi dell'induttanza si ha una tensione ~~V_L~~ V_L e quindi la f.e.m. impiega potenza per forzare la corrente. Tale potenza è espressa come:

$$P = V_L I = \left(L \frac{dI}{dt} \right) I$$

Connetto, ora, un circuito ad una f.e.m.:



$$V_0 = IR + V_L$$

Al tempo $t = t_0$ chiudo il circuito per instaurare una f.e.m. all'interno del circuito. All'interno del solenoide genero un campo magnetico \vec{B} che, variando istantaneamente il flusso di corrente, varia il flusso autoconcatenato che genero un fenomeno di autoinduzione, per cui avrò una f.e.m. ind.

NOTO: $V_L = +L \frac{dI(t)}{dt}$

$$\Rightarrow V_0 = I(t)R + L \frac{dI(t)}{dt}, \quad \underline{I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = V_0/L}$$

Questa differenziale considerata è una NON omogenea di grado primo ordine, la quale è risolta come: \rightarrow

Quindi, quando la corrente diventa stazionaria, il lavoro fatto dal generatore sull'induttore, necessario a raggiungere il valore V_0/R , vale:

$V_0/R =$ corrente di corto circuito

$$W = \int P dt = \int_0^{I=V_0/R} L I dI = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R} \right)^2$$

Se prendiamo un induttore a forma di solenoide:

$$B = \mu n I \quad ; \quad L = \mu \frac{N^2}{l} S$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \left(\mu \frac{N^2}{l} S \right) I^2 \left(\frac{\mu l}{\mu l} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2 N^2 S}{\mu l^2} \right) I^2 l$$

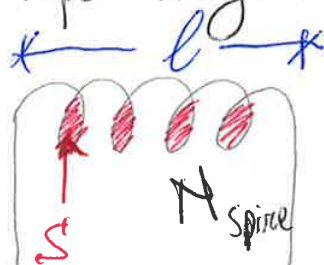
$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{B^2 (Sl)}{\mu}$$

Introducendo il concetto di densità di energia del campo magnetico:

$$w = \frac{W}{(Sl)} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

Cioè l'energia del generatore si è accumulata nel campo magnetico \vec{B} .

Si può dimostrare che, il risultato ottenuto, è valido per qualsiasi campo magnetostatico.

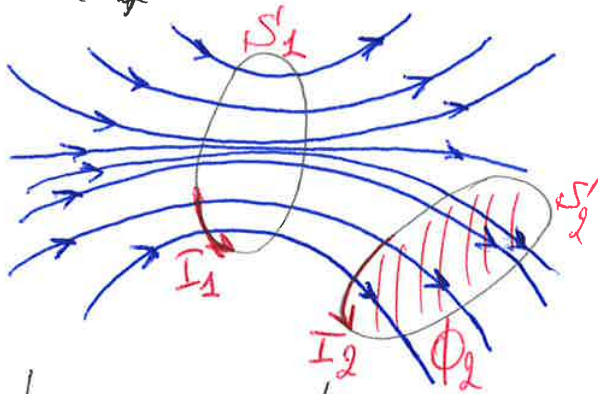


FENOMENO DI MUTUA INDUZIONE

(129)

Prendiamo due circuiti (1) e (2) di geometria nota e posti in due punti fissi dello spazio.

Nel circuito (1) circola la corrente I_1 , mentre nel circuito (2) circola la corrente I_2 .



La corrente I_1 crea intorno al circuito (1) un campo magnetico $\vec{B}_1(P)$. Alcune linee di forza del campo \vec{B}_1 sono concatenate al circuito (2) (cioè danno origine ad un flusso concatenato del vettore \vec{B}_1 attraverso una superficie S_2 , che ha come contorno il circuito (2)).

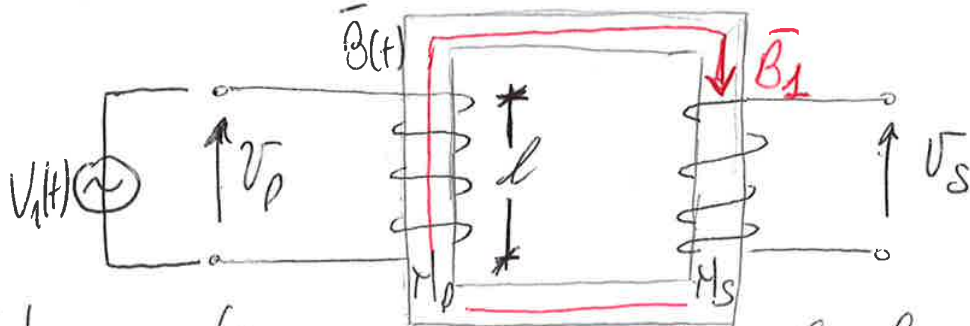
Si può dimostrare che i due circuiti sono legati da una proporzionalità lineare, la quale lega il flusso concatenato $\Phi_2(\vec{B})$ del circuito (2) con la corrente I_1 mediante un coefficiente $M_{1,2}$, chiamato coeff. di mutua induzione. Allora avremo:

$$\Phi_2(\vec{B}) = M_{1,2} I_1 \quad \text{e, in maniera analogo} \Rightarrow \Phi_1(\vec{B}) = M_{2,1} I_2$$

$$\text{N.B.: } M_{1,2} = M_{2,1} = M \quad \longrightarrow \quad M = \text{W A}^{-1} = \text{Henry} = \text{H}$$

Il coeff. di mutua induzione (o mutua induttanza) dipende dalla geometria dei circuiti (1) e (2), dalla distanza tra i due circuiti, dalla disposizione e dall'eventuale presenza di materia tra un circuito e un altro.

Sfrutta il principio di mutua induzione il trasformatore:



Solenoidi affiancati, l'uno rispetto l'altro.
 $N_p \neq N_s$

Tale sistema è in grado di far variare l'ampiezza di una tensione elettrica, e quindi di un'eventuale corrente su un carico, da un circuito primario ad un circuito secondario, facendo variare il numero di spire del primario rispetto al secondario. Questo si traduce in un fenomeno di mutua induzione!!!

Le spire generano un campo magnetico, le cui linee di campo sono confinate all'interno del volume racchiuso tra i due solenoidi. Connettendo i due solenoidi attraverso un oggetto ferromagnetico, che funge da guida del campo magnetico, faccio in modo che le linee del campo magnetico generato dal primario, confluiscono nel secondario. Facendo variare il campo B_1 , vario il campo B_2 e, mediante il fenomeno di mutua induzione, genero una f.e.m. ind nel secondo circuito. Analiticamente:

$$L_1 = \frac{\mu (N_p)^2 S'}{l}$$

$$M = \frac{\mu N_p N_s S'}{l}$$

il trasformatore NON funziona in continua!!!

$$\left(\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \right)_p = \left(\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \right)_s \Rightarrow \frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s \left(\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \right)_s}{N_p \left(\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \right)_p} \Rightarrow \frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

Ragionamento analogo vale per il campo B_2 nei confronti del primario.

Suppongo di prendere una superficie S che ha (12) come contorno la curva chiusa (L) , restringiamo L fino a che rappresenti un punto (dL) , allora la circolazione di \vec{B} tende a zero e quindi, dalla legge di Ampere:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Allora, di norma, $\vec{I} = 0$. Ma dal principio di equivalenza della carica sappiamo che $\vec{I} = 0$ solo nel caso di campi $\vec{E} = \text{cost}$, per cui:

$$\vec{I}_0 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}' = 0$$

NON è verificata per campi $\vec{E}(t)$ variabili nel tempo!!!

\vec{I} = corrente generalizzata

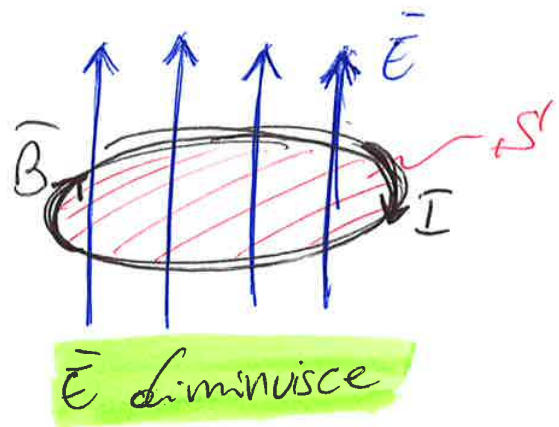
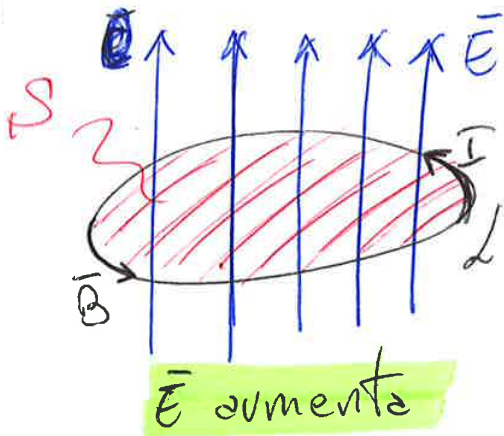
Se sostituisco il termine di corrente generalizzata nell'eq. di Ampere, ottengo:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\vec{I} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}' \right]$$

IV. eq. di Maxwell:
legge di Ampere-Maxwell

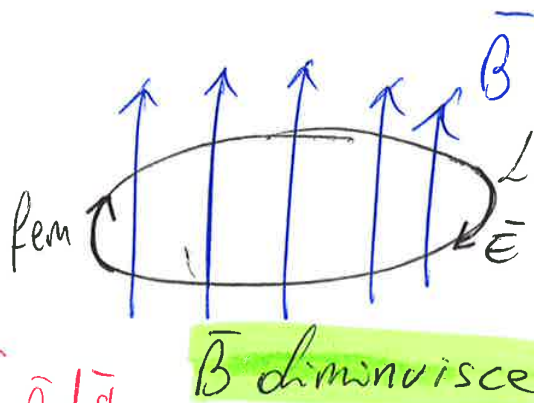
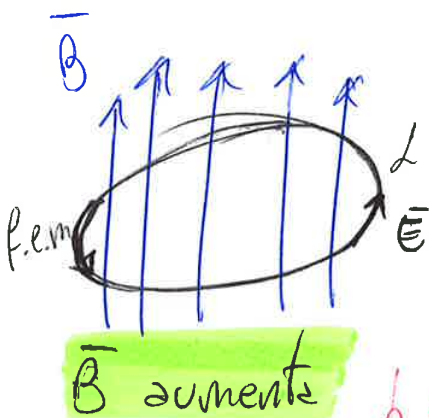
il termine $\epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}'$, nonostante rappresenti una corrente dal punto di vista dimensionale, rappresenta una variazione del flusso di campo elettrico! Tale termine è detto corrente di spostamento.
La legge di Ampere-Maxwell lega la circolazione di \vec{B} lungo una curva chiusa L al flusso di cariche (corrente) attraverso una superficie S' , che ha L come ~~contorno~~ contorno e alla variazione del flusso del campo elettrico attraverso la stessa superficie.

In conclusione (nel vuoto in una regione di spazio priva di cariche):
 Un campo elettrico variabile nel tempo comporta l'esistenza, nella stessa regione dello spazio, di un campo magnetico tale che la circolazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso arbitrario, sia proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico attraverso una superficie delimitata dal percorso stesso.



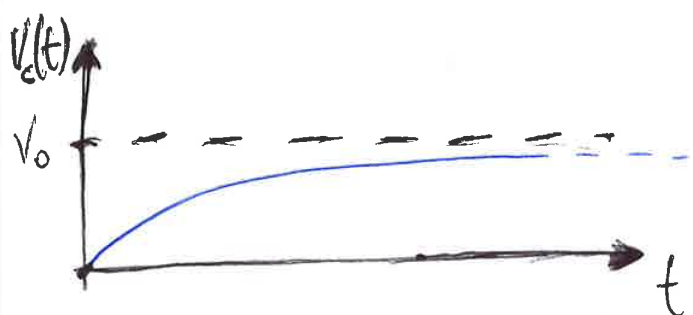
$$\oint_L \vec{B}_{ind} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\cancel{I} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]$$

Da notare l'analogia con la legge di Faraday-Henry

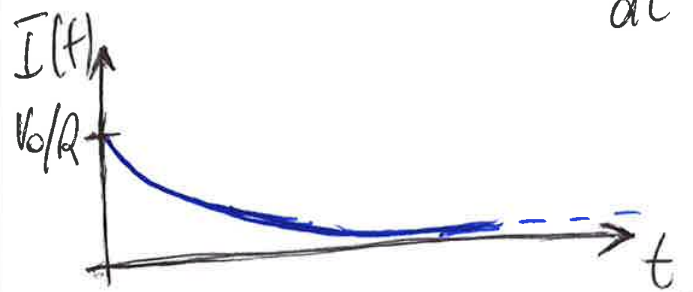


$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

~~Vc(t) = (V0 + const.) e^{-t/RC}~~
 $V_c(t) = (V_0 + \text{const.}) e^{-t/RC}$
 $\Rightarrow V_c(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC})$



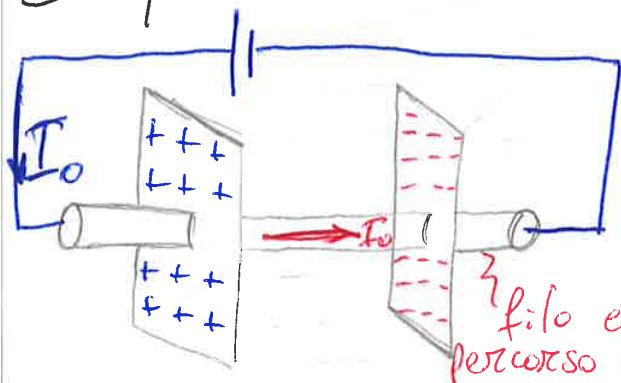
Otengo: $I(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$



Definendo $\tau = RC$ il tempo che impiega il condensatore ad arrivare in condizione di stazionarietà, $V_c(t) = V_0$ ottengo, in definitiva:

$V_c(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$
 $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$

Dato un circuito in cui, in mezzo al tratto di carica considero un condensatore, vediamo cosa succede ai campi dentro le armature, servendoci della IV eq. di Maxwell. Allora dato il circuito:



Il filo carico funge da sorgente di campo magnetico.

Ricordo la IV equazione:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_0 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{SW} \vec{E} \cdot d\vec{S})$

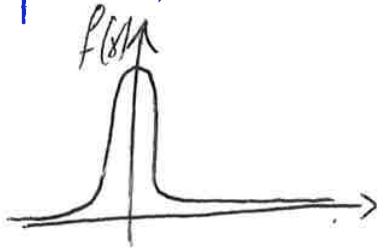
LE ONDE E LA LORO EQUAZIONE

(134)

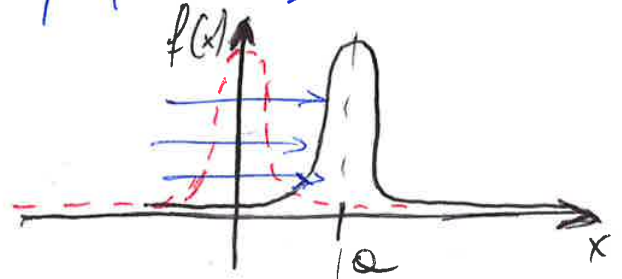
Un'onda è ~~l'evoluzione~~ l'evoluzione spazio-temporale da un determinato stato-fisico.

Data una funzione $y=f(x)$, consideriamo la sua traslazione verso la direzione positiva dell'asse x per una quantità a , otteniamo una nuova funzione $y=f(x-a)$. Prendiamo la Gaussiana, ad esempio:

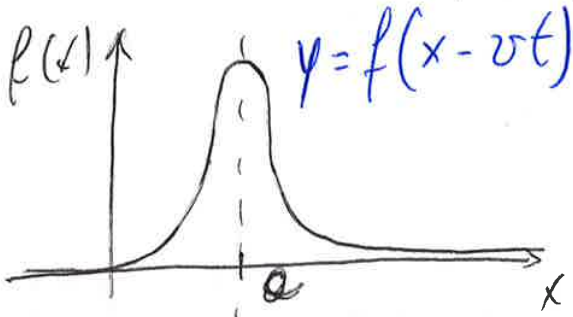
$$y=f(x)$$



$$y=f(x-a)$$



Supponiamo ~~che~~ che $a=vt$, dove $v=velocità$, $t=tempo$.



ottengo, così, la traslazione rispetto allo spazio del grafico di partenza, con la funzione che evolve come $a=vt$. Allora parliamo di evoluzione spazio-tempo.

La funzione $y=f(x \pm vt)$ rappresenta la curva y che si muove con velocità v detta velocità di fase.

Distinguiamo 2 casi:

$y=f(x-vt)$ è detta ONDA PROPAGANTE
 $y=f(x+vt)$ è detta ONDA ANTI-PROPAGANTE

Quindi l'espressione matematica:

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

propagazione caratteristica delle onde.

è in grado di descrivere uno stato fisico che si propaga senza deformazioni lungo le x , detta PROPAGAZIONE ONDOSA.

Dalla legge di Faraday-Henry ottengo:

$$-\frac{d}{dt} \Phi_B = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad \textcircled{1} \Phi_B = \int_{S=RSPQ} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(dx dy)$$

area rettangolo (136)

$$\textcircled{2} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E'dy - E'dy$$

$L = SPQR$

N.B: $dx \cdot dy$ rappresenta l'area del rettangolo

Sostituendo la $\textcircled{1}$ e la $\textcircled{2}$ nella legge di Faraday:

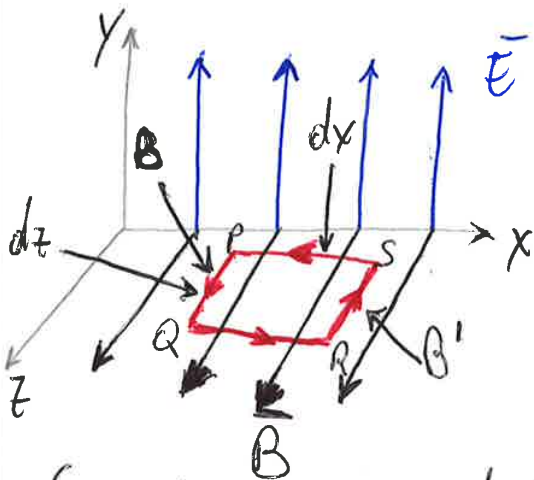
$$-\frac{d}{dt} (B(dx dy)) = E'dy - E'dy$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt} B dx dy = (E' - E) dy$$

variazione infinitesima di campo:
 $E' - E = dE$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt} B = \frac{dE}{dx}$$

PASSO 2:



Prendiamo adesso il rettangolo di vertici $RSPQ$ nel piano xz e applichiamo la LEGGE di AMPERE-MAXWELL con percorrenza in senso anti-orario. (considerando nulle le correnti)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \Phi_E \quad ; \quad \textcircled{1} \Phi_E = \int_{S=RSPQ} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(dx dz)$$

$$\textcircled{2} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dz - B' dz$$

Ripetendo i passaggi all'inverso, cioè derivando
 la (1) rispetto a x e la (2) rispetto al tempo, ottengo: (138)

$$+ \frac{d}{dx} \left(- \frac{dB}{dt} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dE}{dx} \right) ; \quad \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \right) = + \frac{d}{dt} \left(- \frac{dB}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 E}{dx^2} = - \frac{d^2 B}{dx dt} ; \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2} = - \frac{d^2 B}{dx dt}$$

sostituendo

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2}$$

Ho dimostrato che sia campo magnetico che elettrico
 soddisfano l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}$$

C'è da notare che, i campi \vec{B} ed \vec{E} a cui ci siamo riferiti, sono entrambi variabili nel tempo ($\vec{B}(t), \vec{E}(t)$).
 Per cui i due campi possono variare nello spazio-tempo
 a patto che $\vec{B}(t) \perp \vec{E}(t), \forall x, t$

Notiamo che la costante v^2 che compare nell'eq. è data da:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

da cui otteniamo che la vel. di fase di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto è una costante che vale:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Se: } t=0 \Rightarrow \bar{E}(x, t=0) = \bar{E}_0 \sin(kx)$$

$$x=0 \Rightarrow \bar{E}(x=0, t) = \bar{E}_0 \sin(-kct)$$

Valuto, ora, i valori λ, T :

$$\bar{E}_0(x, t) = \bar{E}_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

N.B.: \bar{E}_0 è l'ampiezza max del campo elettrico

$$\Rightarrow \bar{E}(x, t=0) = \bar{E}_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

se $x \rightarrow x \pm m\lambda$, generalizzo, ottenendo:

$$\bar{E}(x \rightarrow x \pm m\lambda) = \bar{E}_0 \sin\left(2\pi \cdot \frac{x \pm m\lambda}{\lambda}\right) = \bar{E}_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} \pm 2\pi m\right)$$

$$\Rightarrow \bar{E}(x=0, t) = \bar{E}_0 \sin\left(-2\pi \frac{t}{T}\right)$$

se $t \rightarrow t \pm mT$

$$\bar{E}(t \rightarrow t \pm mT) = \bar{E}_0 \sin\left(-2\pi \frac{t \pm mT}{T}\right) = \bar{E}_0 \sin\left(-\frac{2\pi t}{T} \pm 2\pi m\right)$$

N.B.: λ è detto parametro di periodicità spaziale.
 T è detto parametro di periodicità temporale

$$\text{Da } kc = \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow c = \frac{\lambda}{T}$$

Allora $\bar{B}_{\max} \Rightarrow \bar{E}_{\max}$, per cui posso concludere che \bar{B} ed \bar{E} nel vuoto, sono perpendicolari e in fase tra di loro.

La relazione tra \bar{B} ed \bar{E} è detta **proporzione diretta nei campi elettromagnetici** ed è data da:

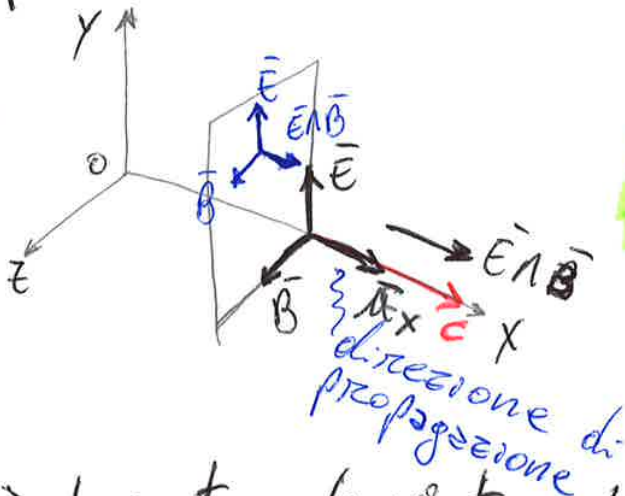
$$\bar{E}(P, t) = c\bar{B}(P, t)$$

dalla quale vediamo che i campi \bar{E}, \bar{B} sono in fase, cioè raggiungono gli zeri e il massimo allo stesso istante.

Introduciamo il concetto di superficie d'onda, anche detta fronte d'onda. (142)

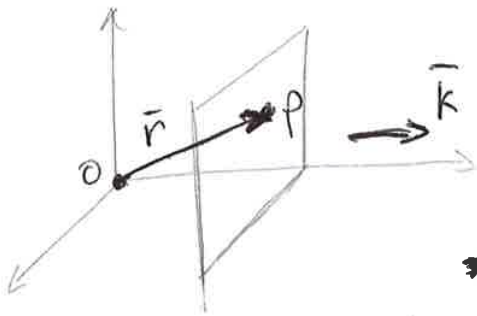
Un fronte d'onda è una superficie rispetto alla quale, ad un certo tempo (t), se osservo le linee di campo elettromagnetico che si propagano spazio-temporalmente, ~~non~~ i campi elettrico e magnetico sono costanti in modulo.

Il fronte d'onda più semplice è il fronte d'onda piano nel quale trovo che, punto per punto, i campi \vec{B} ed \vec{E} presentano una costanza in modulo e vettorialemente.



N.B: $\vec{B}, \vec{E} = \text{cost.}$ significa che su tutto il fronte d'onda ho la presenza di campi elettromagnetici che si propagano con velocità di fase: $c = \lambda / T$

Dal punto di vista matematico:



Per il fronte d'onda piano
Analizzo il sistema in 3 dimensioni: ~~...~~

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Quello analizzato è un caso semplificato e impossibile da realizzare, di un'onda piana e monocromatica, cioè con un campo caratterizzato da una ed una sola lunghezza d'onda (λ), un solo periodo di oscillazione (T) ed un fronte d'onda perfettamente piano. Come detto, tale situazione è sperimentalmente impossibile!!!

Maggiore è la distanza tra l'osservatore e l'origine del campo magnetico, maggiore sarà la superficie della sfera e di conseguenza minore sarà l'intensità del campo elettromagnetico. (144)

$$\underline{I} \propto \frac{1}{r^2}$$

\propto = proporzionale

IL VETTORE S: POYNTING

Si descrive il modulo e la direzione del flusso di energia, trasportato dal campo \vec{E} e \vec{B} che si propaga, attraverso un vettore detto VETTORE S: POYNTING definito come:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto

il quale definisce:

1. come direzione e verso la direzione e verso del flusso di energia;
2. come modulo l'energia per unità di tempo e superficie attraverso un'area posta ortogonale alla direzione di propagazione.

Dim:

$$\vec{I} = \frac{E}{t \cdot S} = \frac{P}{S}, \quad W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad W_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

nel caso statico, mentre, nel caso dinamico, trova la compartecipazione di campo \vec{E} e \vec{B} . Allora:

$$W_{EM} = W_E + W_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

So che, perché i due campi possano propagarsi accoppiati, l'uno rispetto all'altro, deve valere la relazione:

zione:

$$E = cB$$

CONTINUA \rightarrow

SPETTRO DELLE ONDE MONOCROMATICHE

(146)

Se consideriamo le onde elettromagnetiche sinusoidali piane di forma:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \sin(kx - \omega t)$$

abbiamo un'onda monocromatica con $A=E$ o $A=B$ e x la direzione di propagazione.

Tali tipi di onde possono coprire un grande campo di frequenze:

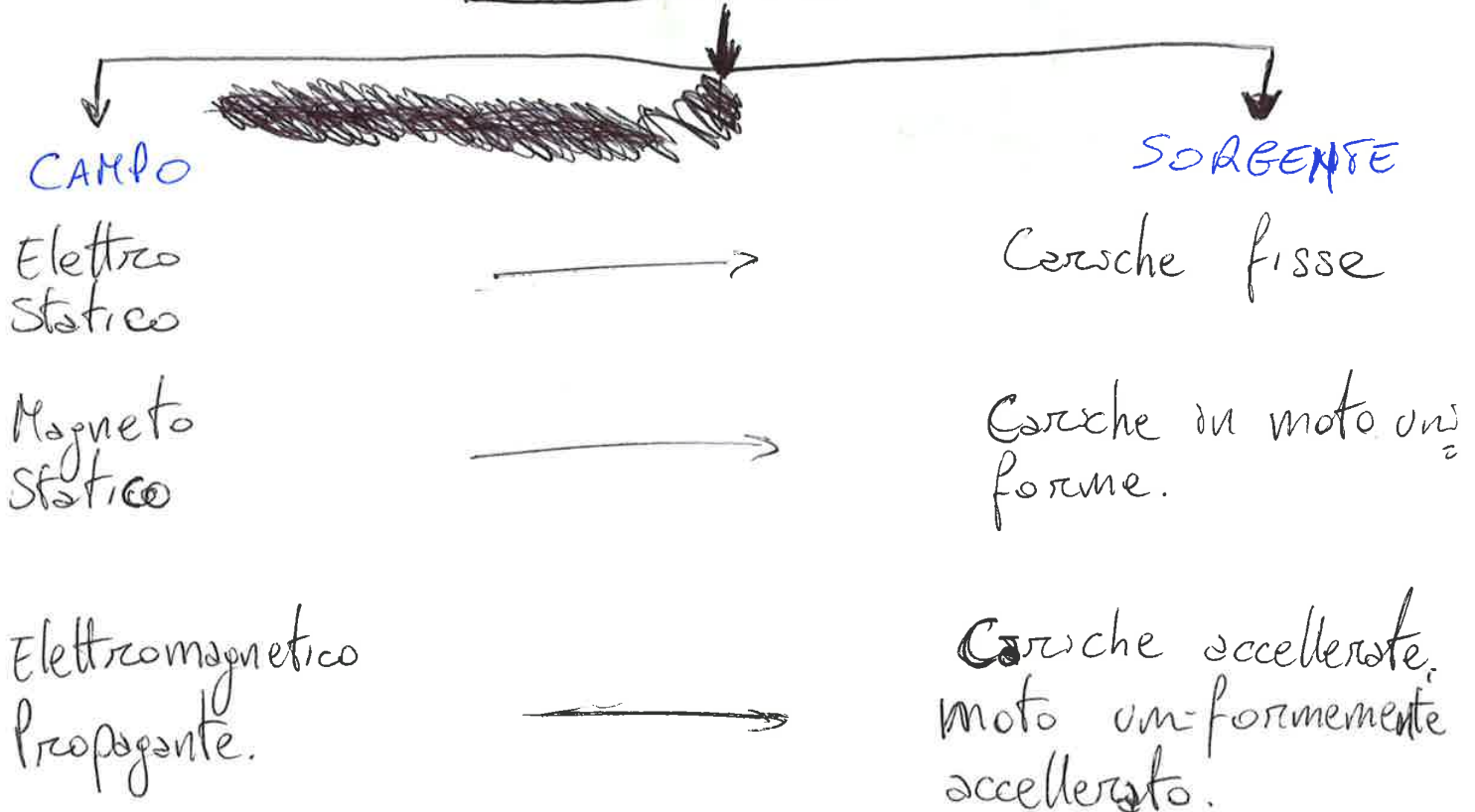
$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v}$$

$v = \text{frequenza}$

M.B: $c = \lambda \cdot v = \frac{\omega}{k}$ e
sempre costante, di valore
 $c = 3.8 \cdot 10^8 \text{ m/s} !!!$

SORGENTI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Le EQ. DI MAXWELL
ci PERMETTONO DI
CONCLUDERE CHE



Esempio (colore del sole):

A causa di fenomeni quali la rifrazione e la diffu-⁽¹⁴⁰⁾sione della luce del sole nell'atmosfera, di giorno il cielo appare di ~~colore~~ colore azzurro, con sfumature rosse o gialle all'alba e al tramonto.

Il sole emette luce perdendo energia e si comporta da campo e.m. primario, che si sovrappone al secondario generato dalle particelle ~~di~~ disposte nell'atmosfera.

La bontà di oscillazione (Ampiezza dell'oscillazione) dipende dalla frequenza con la quale il primario colpisce il secondario, secondo una legge!

I (intensità) $\propto \omega^4$

Allora l'atmosfera irradia la superficie terrestre con frequenza elevata:

piccole oscillazioni \Rightarrow radiazione blu

Il processo di interazione del campo \vec{E} e dell'onda con gli elettroni della materia, e quindi la quantità di energia diffusa, dipende dalla frequenza dell'onda e.m. incidente.

Ovviamente il fascio primario è impoverito di energia.

Come detto, con questo modello, giustifico:

1. Il colore blu del cielo durante il giorno;
2. Il colore rosso dell'alba e del tramonto; il primario si impoverisce di energia, i ~~blu~~ blu del secondario hanno ampiezza elevata, allora arriva meno irradiazione all'occhio umano;
3. Gli effetti di polarizzazione delle onde e.m. diffuse in direzione perpendicolare al fascio primario in soluzione ~~in~~ con particelle sospese.

COMPORIAMO DELL' ONDA E.M. NEL MEZZO

Reimposto le eq. di Maxwell nel mezzo:

$$\textcircled{1} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}' = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}; \quad \textcircled{2} \oint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}' = \phi$$

$$\textcircled{3} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(d)} \vec{B} \cdot d\vec{s}' ; \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \oint_R \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r \left[\mathbf{I} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d}{dt} \phi_E \right]$$

Le eq. sono tutte analoghe al caso di propagazione nel vuoto, al più di un ϵ_r, μ_r

Nel mezzo, varia la vel. di propagazione dell'onda:

• Nel vuoto:

$$v_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

• Nel mezzo:

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Infatti, l'onda incidente (con i campi \vec{E}_i, \vec{B}_i) mette in oscillazione i dipoli macroscopici che iniziano ad irradiare creando un'onda secondaria con campi \vec{E}_s, \vec{B}_s che si sovrappone all'onda incidente. L'effetto complessivo è la somma dei vettori \vec{E}, \vec{B} per il principio di sovrapposizione:

onda incidente + onda secondaria

da origine ad un'onda con velocità

$$v_r = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}, \mu_r = 1$$

Definiamo l'indice di rifrazione: $n = \frac{c}{v_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$

Come conseguenza della dispersione, cioè della dipendenza della velocità di propagazione di onde e.m. plane sinusoidali in un mezzo dalla frequenza dell'onda, ho che: (152)

$$v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}$$

possiamo sperimentare il seguente fenomeno nel vuoto, creato un segnale e.m. di forma $f(x)$ non sinusoidale lungo la direzione x . Allora:

$f(x,t)$ = integrale di Fourier (k, ω)

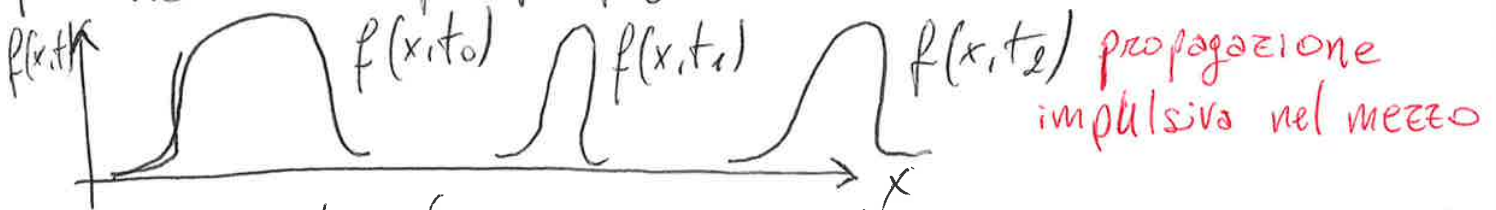
$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \sin [k \cdot x - \omega(k) \cdot t] dk$$

Con Fourier, approssimo un'onda reale, ~~con~~ come una sovrapposizione di molte onde monocromatiche, con ampiezza pesata rispetto alla frequenza, una per una.

NOTA! l'onda monocromatica non è reale, ma dal suo studio, con Fourier, approssimo onde reali complesse, approssimandole con ~~con~~ onde monocromatiche.

Se $f(x,t)$ si propaga, avendo tutte le componenti k, ω della stessa velocità, la forma del segnale non varia. ↑ vel. di propagazione

In un mezzo, tutte le componenti diverse da k, ω si propagano con velocità diversa. Il segnale cambia forma nel tempo propagandosi.



c'è da ~~notare~~ notare che, nel vuoto, un'onda monocromatica si propaga con velocità $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, per cui tutte le componenti di un'onda fisica si muovono con tale velocità. e anche l'onda fisica risultante, nel vuoto, si propaga con $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Nel caso in cui la velocità di propagazione sia indipendente dalla frequenza (NON c'è dispersione), tutte le componenti dell'impulso viaggiano con la stessa velocità, e la velocità dell'impulso, ossia quella del suo baricentro, è uguale alla velocità di fase dell'onda. In un mezzo dispersivo, ogni componente dell'impulso ha una propria velocità di propagazione e la vel. dell'impulso non è uguale alla vel. di fase. Supponiamo che un moto ondulatorio sia scomponibile in due sole onde armoniche con ampiezze uguali A e frequenze ω, ω' molto vicine tra loro. Posso sovrapporre le due onde monocromatiche, rappresentabile con un'onda reale, un pacchetto d'onda:

$$\begin{aligned}
 f(x,t) &= A \sin \left[\underbrace{kx - \omega t}_{\alpha} \right] + A \sin \left[\underbrace{k'x - \omega' t}_{\beta} \right] = \\
 f(x,t) &= 2A \cos \left(\frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \right) \sin \left[\frac{(k' + k)x + (\omega' + \omega)t}{2} \right] = \\
 \Rightarrow f(x,t) &= 2A \cos \left(\frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \right) \sin (kx - \omega t)
 \end{aligned}$$

Modulazione di ampiezza

A tale risultato arrivo ricordando le formule di prostaferesi:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Inoltre, poiché $k \approx k'$; $\omega \approx \omega'$, Allora:

$$\sin \left[\frac{(k' + k)x}{2} - \frac{(\omega' + \omega)t}{2} \right] = \sin (kx - \omega t)$$

OTTICA - Geometrica
 \ Ondolotoria

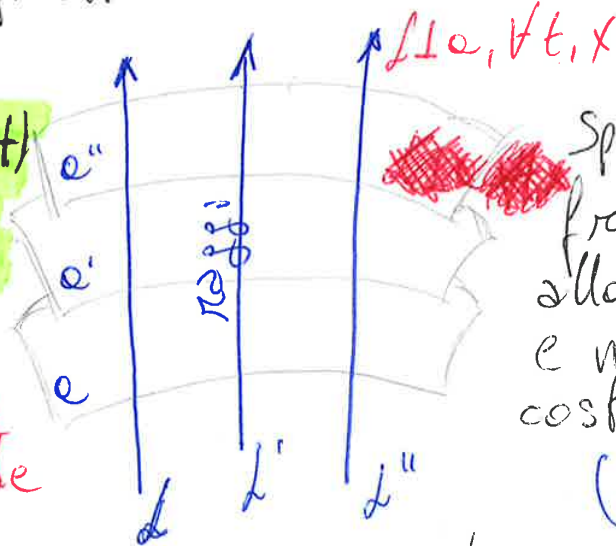
OTTICA GEOMETRICA

Traetta di propagazione di campi elettrico e magnetico definendo un fronte d'onda.

$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}x - \omega t)$

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$

↑
 Considero onde monocromatiche



Spostandoci da un fronte d'onda all'altro, allora campo elettrico e magnetico risultano costanti. Allora:

$(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \text{cost}$

Ricordo che, se la superf. è piana, il campo \vec{E} , ~~è~~ costante nello spazio e nel tempo, ~~mentre se il fronte d'onda è curvilineo sarà sempre costante in modulo, direzione e verso, mentre se il fronte d'onda è curvilineo, il campo sarà cost. in modulo, ma varia in direzione e verso, poiché l'onda sarà sempre tangente alla superficie.~~

Faccendo alcune ipotesi:

- Se le proprietà del mezzo sono omogenee ($v = \text{cost.}$) i raggi sono retti.
- Se le proprietà del mezzo ~~non~~ sono isotrope (cioè ~~omogenee~~ ^{non} dipendono dalla direzione) i fronti d'onda si ripetono identici e paralleli:

piani ---> piani cilindri ---> cilindri sferi ---> sferi

- Se le prop. del mezzo sono anisotrope (v diverso in diverse direzioni) i fronti d'onda si deformano anche in modo complicato.

Se $\theta_i = \theta_r$ allora ho completa simmetria tra l'onda incidente e la componente riflessa, mentre l'inclinazione della componente rifratta varia a seconda dell'indice di rifrazione dei due mezzi.

Il valore di θ_r viene determinato dalla legge di Snell, e si verifica sperimentalmente che:

1) Le direzioni di incidenza e di riflessione stanno sullo stesso piano, che contiene anche la normale alla superficie di separazione dei due mezzi.

2) l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione $\theta_i = \theta_r$.

3) l'angolo di incidenza e di rifrazione sono legati dalla relazione:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

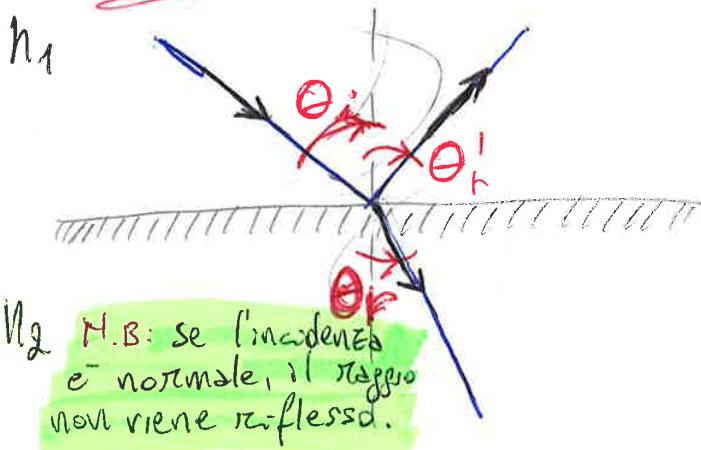
$$n \sin \theta = \text{cost.}$$

legge di Snell
(cardine dell'ottica geometrica).

Dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi, legati alla velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica dalle relazioni:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad ; \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Es: $n_1 < n_2$



n_2 H.B: se l'incidenza è normale, il raggio non viene riflesso.

H.B: l'indice di rifrazione è funzione delle caratteristiche del mezzo e, a parità di queste, varia con la densità di materiale.

Per Snell: $n \sin \theta = \text{cost.}$

$\Rightarrow n_1 < n_2 \quad ; \quad \sin \theta_i > \sin \theta_r$

$\Rightarrow \theta_i > \theta_r$

$\Rightarrow n_1 = n_2 \quad ; \quad \theta_i = \theta_r$

$\Rightarrow n_1 > n_2 \quad ; \quad \theta_i < \theta_r$

considerando il triangolo rettangolo $AA'B'$:

(158)

$$\sin \theta_r = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'}$$

ipotenusa

Ricavo l'angolo ~~la~~ legge di Snell facendo il rapporto fra l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\frac{v_1 t}{AB'}}{\frac{v_2 t}{AB'}} = \frac{v_1}{v_2} \quad ; \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad , \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} \quad ; \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_2}{n_1}$$

si ottengono, allora, la legge di Snell:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad \text{C.V.D.}$$

Poiché $n = \frac{c}{v}$, sto dimostrando che l'angolo ~~si~~ varia al variare della v di propagazione dell'onda, per cui $v_1 = v_2 \Rightarrow \theta_i = \theta_r$ e non variano i fronti d'onda del campo elettromagnetico.

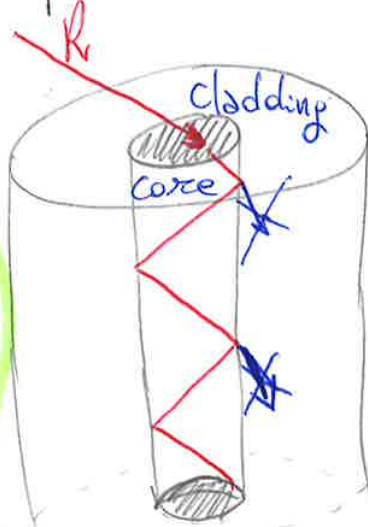
ANGOLO LIMITE

Nel caso in cui un raggio di luce passi da un mezzo ① ad un mezzo ② con $n_1 > n_2$, se il raggio viene fatto incidere oltre un certo angolo (limite) rispetto alla ~~se~~ normale all'interfaccia tra i due mezzi, esso viene totalmente riflesso. (È il principio con cui funzionano le fibre ottiche).

Tale principio è utilizzato nelle fibre ottiche. (160)
 Infatti, se inietto dei raggi luminosi nella fibra ottica, in maniera tale che $\theta_i > \theta_{limite}$, Allora manpo-
 lo al fascio di luce in maniera tale da poterlo utilizzare ~~in~~ ~~maniera~~ ~~completamente~~ ~~la~~ ~~senza~~ ~~aver~~ ~~vincoli~~.

N.B:

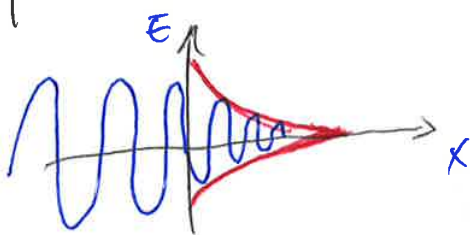
$R_{ingresso} \approx R_{uscita}$
 con adeguata
 iniezione di luce



Minimizzato del tutto la fuoruscita di fascio di luce, che risulta confinato del tutto all'interno del core, per cui, se $\theta_i > \theta_{limite}$ non ho perdita di luce all'interno del cladding. grazie al fenomeno di **TOTAL INTERNAL REFLECTION**

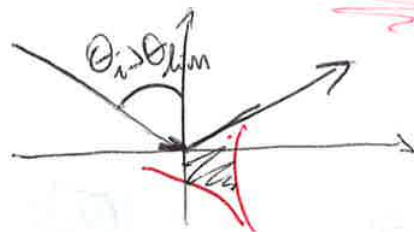
Tale fenomeno è applicabile per ogni tipologia di fenomeno oscillatorio.

Ad esempio, se sono in condizione di TIR, e considero la propagazione di un campo e.m. che si propaga dal mezzo (1) al mezzo (2) ($n_1 > n_2, \theta_i > \theta_{lim}$) la propagazione avviene attraverso un processo chiamato di **prop. di onda evanescente**, perché questa si annulla su lunghezze estremamente esge.



CAMPO EVANESCENTE

Allora $E_{ing.} \approx E_{uscita}$



Da quanto ~~è~~ detto prima, ottengo che il campo 162 e.m. ~~è~~ risultante nel punto P , poiché le onde hanno stessa lunghezza d'onda e stessa frequenza, sarà dato dalla sovrapposizione dei due effetti:

$$\sum_{i=1}^n E_i = E_{0,i} \sin(kr_i - \omega t), \quad i=1,2 \Rightarrow n=2$$

N.B.: le distanze $d(S_1, P)$, $d(S_2, P)$ sono differenti tra loro!!!
 $\Rightarrow d(S_1, P) \neq d(S_2, P)$

nel caso considerato

distanza
tra il punto di osservazione e la sorgente del campo.

Allora, quando le onde si incontrano in P , si sommano, e nel caso specifico considerato, avrò:

$$E(P, t) = E_1(P, t) + E_2(P, t)$$

$$\Rightarrow E(P, t) = E_{0,1} \sin(kr_1 - \omega t) + E_{0,2} \sin(kr_2 - \omega t)$$

Calcolo questa somma col metodo dei fasori (o dei vettori rotanti).

L'ampiezza istantanea in un punto preso come origine di un'onda e.m. del tipo $E_1(P, t) = E_0 \sin(kr - \omega t)$

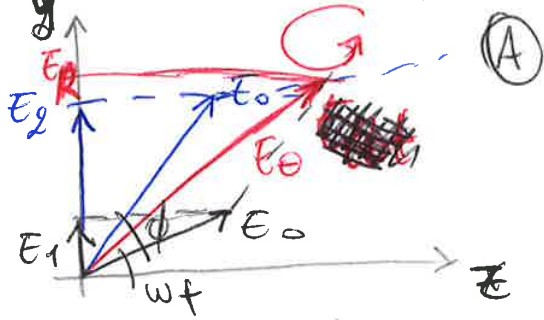
può essere vista come la proiezione sull'asse delle ordinate del vettore E_0 che ruota con velocità angolare ω intorno all'origine su cui è applicato:

$$E_y(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

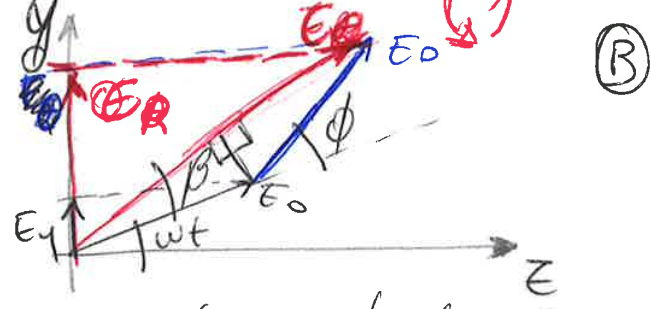
kr = cost. per cui studio solo l'evoluzione temporale del campo e.m.

Prendendo quanto detto a pag 163

164



≈



se $\beta = \phi/2$, giustifico, con due metodi diversi, il valore del campo risultante $E_R = E_1 + E_2$. Considerando che $E_0 \cos(\beta) = E_0/2$ (com'è chiaro nel disegno (B)),

otengo: $E_0 = 2 E_0 \cos(\beta) = 2 E_0 \cos(\phi/2)$, Allora proiettando E_0 sull'asse y, ottengo il valore cercato del campo (E_R) risultante:

$$E_R = E_1 + E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi/2)$$

sostituendo $E_R = (2 E_0 \cos \phi/2) \sin(\omega t + \phi/2)$ volendo calcolare il valore dell'intensità del campo e.m. risulta essere:

$$I = c \epsilon_0 E_R^2(t); \quad E = cB$$

$$\Rightarrow I(t) \propto (E_1 + E_2)^2 = (2 E_0 \cos \phi/2)^2 \sin^2(\omega t + \phi/2)$$



Posso calcolare il valore medio della funzione $I(t)$:

$$I_{\text{M}} = \frac{1}{T} \int_0^{T=2\pi/\omega} I(t) dt \propto (2 E_0 \cos \phi/2)^2$$

Avremo due valori ~~o due~~ limite di brillantezza, (166) rappresentati da
$$\bar{I}_M = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt :$$

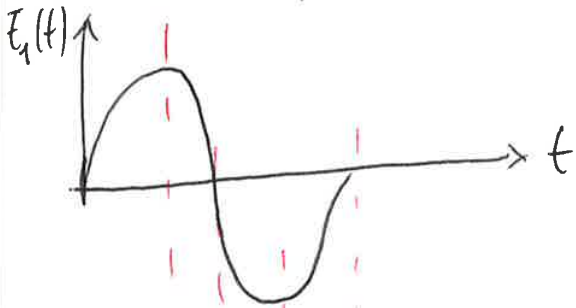
(interferenza costruttiva)

① $I_M = \max \Rightarrow \phi = 2m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(interferenza distruttiva)

② $I_M = \min = 0 \Rightarrow \phi = (2m+1)\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

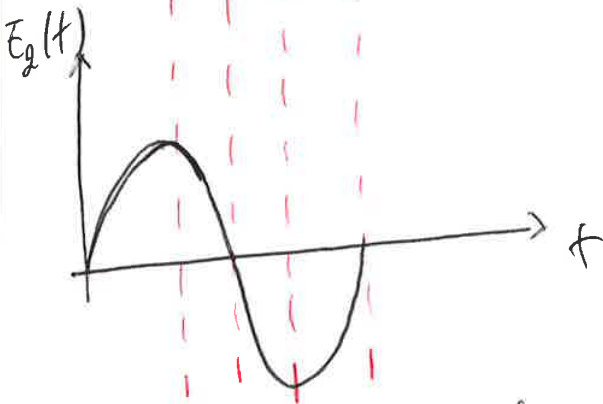
Nel caso ① le due onde arrivano in P in fase, e cioè sfasate di un multiplo di 2π :



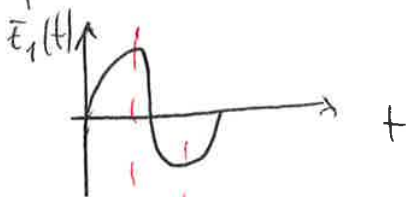
in fase:

$$E_1 = \text{Max} = E_2 = \text{Max}$$

$$E_1 = \text{Min} = E_2 = \text{Min}$$



Nel caso ② le onde arrivano in P sfasate di un multiplo dispari di π , per cui sono in opposizione di fase:



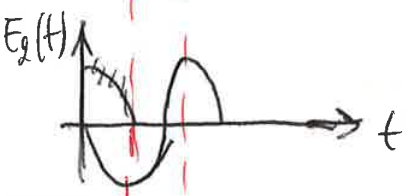
opposizione di fase:

$$E_1 = \text{min} \Rightarrow E_2 = \text{Max}$$

$$E_2 = \text{Max} \Rightarrow E_1 = \text{min}$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = 0$$

$$I(t) = 0$$



L'intensità-media, cioè la quantità media di energia in P , vale:

168

$$\overline{I_M} d \left(2E_0 \cos \frac{\phi}{2} \right)^2 = \left(2E_0 \cos \frac{k(r_1 - r_2)}{2} \right)^2$$

se lo schermo è a distanza D , la quale è molto elevata rispetto alla mutua distanza tra le due sorgenti ($D \gg d$), Allora:

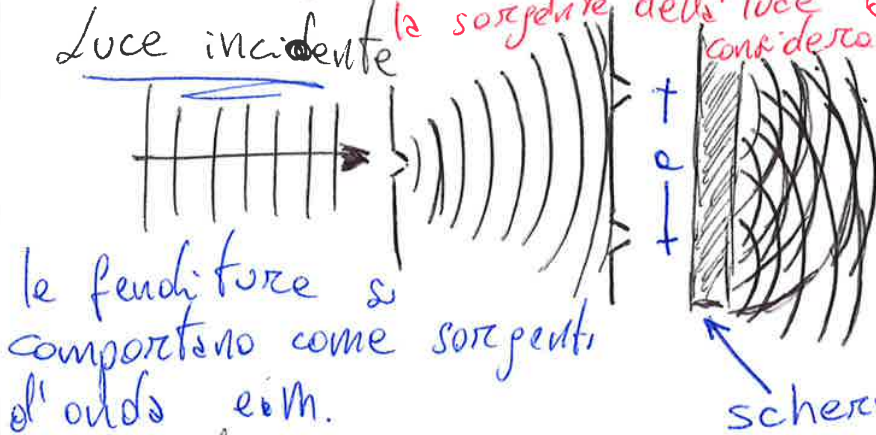
$$\phi = k(r_1 - r_2) \approx k(d \sin \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} (d \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \overline{I_M} d \left(2E_0 \cos \frac{k d \sin \theta}{2} \right)^2 = \left(2E_0 \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)^2$$

Es:

Luce incidente

la dist. tra il primo piano e la sorgente della luce è considerata elevata!!! (fronte d'onda piano).



le fenditure si comportano come sorgenti d'onda em.

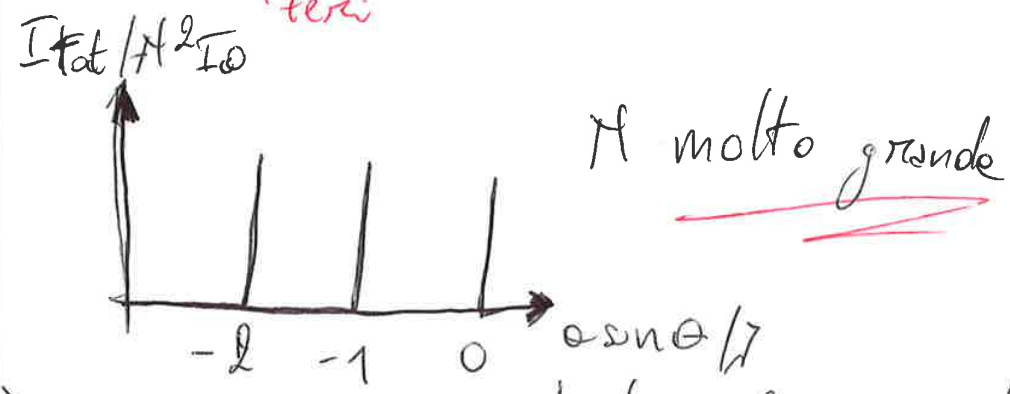
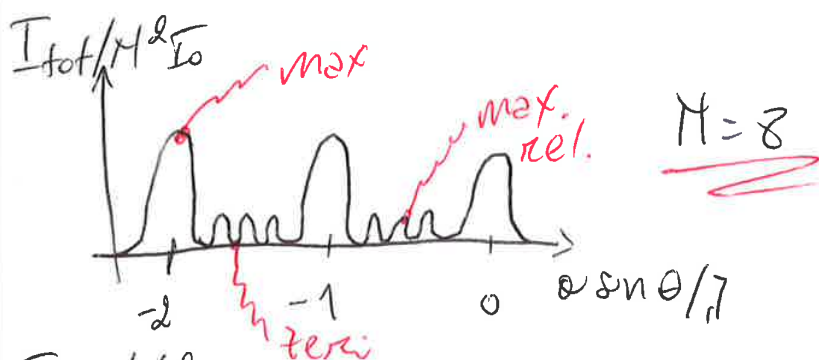
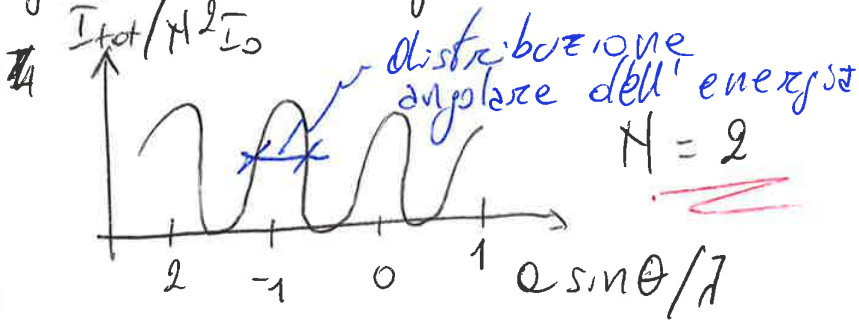
schermo opaco

proiettati sullo schermo opaco ottengo delle bande chiare e ~~scure~~ scure, alternate periodicamente, che rappresentano rispettivamente, un'interferenza costruttiva e una distruttiva. Poiché c'è questa alternanza di tipo di interferenza, avrò zone ~~di~~ in cui l'intensità è massima altre dov'è nulla e altre dove assume valori compresi tra zero e il massimo.

• $\overline{I_M} = \max \Rightarrow \phi = 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \rightarrow r_1 - r_2 \approx d \sin \theta = m\lambda$

• $\overline{I_M} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = (2m+1)\pi \rightarrow r_1 - r_2 \approx d \sin \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$

graficamente significa:



Da notare come al crescere di N , la distribuzione angolare dell'energia diminuisce, fino ad assottigliarsi del tutto se N è molto grande!!

Descriviamo un particolare fenomeno di interferenza, che è quello della diffrazione, dovuto al fatto che un campo e.m. può interferire con un ostacolo, ad esempio un foro posto in uno schermo opaco, dove il foro è di dimensioni dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda. Allora il fronte d'onda, passando nell'ostacolo, risulta fortemente distorto, per cui faccio propagare un'onda deformata dall'ostacolo, che risulterà molto differente dall'onda prima di interferire con il foro. Allora, ponendo uno schermo ad una certa distanza, se il foro ha dimensioni macroscopiche, l'onda si propaga uniformemente, mentre se il foro ha dimensioni egue, sullo schermo saranno proiettati una serie di cerchi concentrici.

MODULO DI MECCANICA QUANTISTICA

Le particelle hanno una ben ~~prec~~ definita posizione, si muovono con velocità arbitraria in linea retta, in assenza di forze, si urtano tra di loro, soddisfano le tre leggi di Newton.

Le onde sono estese, si muovono a una determinata velocità, non si urtano ma interferiscono.

Le "cose" o sono onde o sono particelle.

Furono verificate 3 classi di problemi:

- 1) Alcuni fenomeni termodinamici;
- 2) L'invarianza della formulazione delle leggi fisiche nei sistemi di riferimento inerziali;
- 3) Fenomeni connessi con il microcosmo (atomico e subatomico).

Si rese ~~non~~ necessario sviluppare modelli adeguati con l'avvertenza che comprendessero i fenomeni della fisica classica, sufficiente a spiegare gli usuali fenomeni che accadono sotto i nostri sensi.

- 1) la relatività ristretta;
- 2) la meccanica statistica;
- 3) la **meccanica quantistica**. (Anche cosa accade nel microcosmo. Effetti e fenomeni del microcosmo sono strettamente correlati con fenomeni ~~del macrocosmo~~ del macrocosmo).

IL CORPO NERO

ESPERIENZA: un corpo solido freddo non produce alcuna emissione, ma al crescere della temperatura comincia a diventare luminoso, emettendo radiazione elettromagnetica, e a cambiare colore. Il colore percepito di un corpo è dato dalla frequenza della luce visibile che esso riflette.

ESEMPIO: un metallo che diventa incandescente cambia il suo colore e diventa prima rosso, poi arancione, e infine di un giallo-bianco abbagliante.

l'emissione della luce è caratterizzata dal così detto **potere emissivo** che è una funzione!

$$e(\nu, T)$$

Tale **potere emissivo** è l'energia emessa da un corpo per unità di tempo e volume ad una certa **frequenza** e temperatura.

Il **POTERE ASSORBENTE** è una funz. definita come:

$$a(\nu, T)$$

Tale funzione è la **frazione di energia assorbita**.
Rapportando le funzioni $e(\nu, T)$, $a(\nu, T)$ ottengo una nuova ~~gr~~ grandezza, totalmente indipendente dalle caratteristiche dell'oggetto, definita come:

$$\epsilon(\nu, T) = \frac{e}{a}$$

Legge di Kirchhoff

Se considerassimo il corpo nero, questo ha **potere assorbente**: ~~0,000~~ ~~0,000~~ ~~0,000~~

$$a = 1 \text{ (Max.)}$$

Considerando un oggetto qualunque, vale la legge di Kirchhoff, e posso analizzare il comportamento di un oggetto a partire dallo studio del **corpo nero**.

Le leggi precedenti non danno l'interpretazione completa del fenomeno.
 Rayleigh & Jeans trovarono una legge tale da soddisfare la pretesa di interpretare completamente il fenomeno da legge e:

$$B(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \epsilon$$

← energia media

$B(f, T)$ = densità di energia elettromagnetica

↑ densità di modi di emissione (oscillatore)

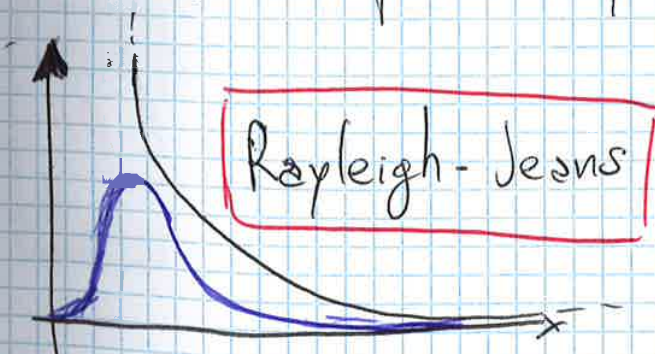
ϵ è l'energia media associata alla radiazione elettromagnetica di frequenza f improporzionale nella cavità ~~della~~ ~~angolo~~ relativa al singolo oscillatore.

$$\epsilon = kT$$

$$\Rightarrow B(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

cost. di Boltzmann

Il risultato fu la funzione:



Tale curva presenta alcune imprecisioni.

CATASTROFE ULTRAVIOLETTA

GIUSTIFICAZIONE DI PLANCK

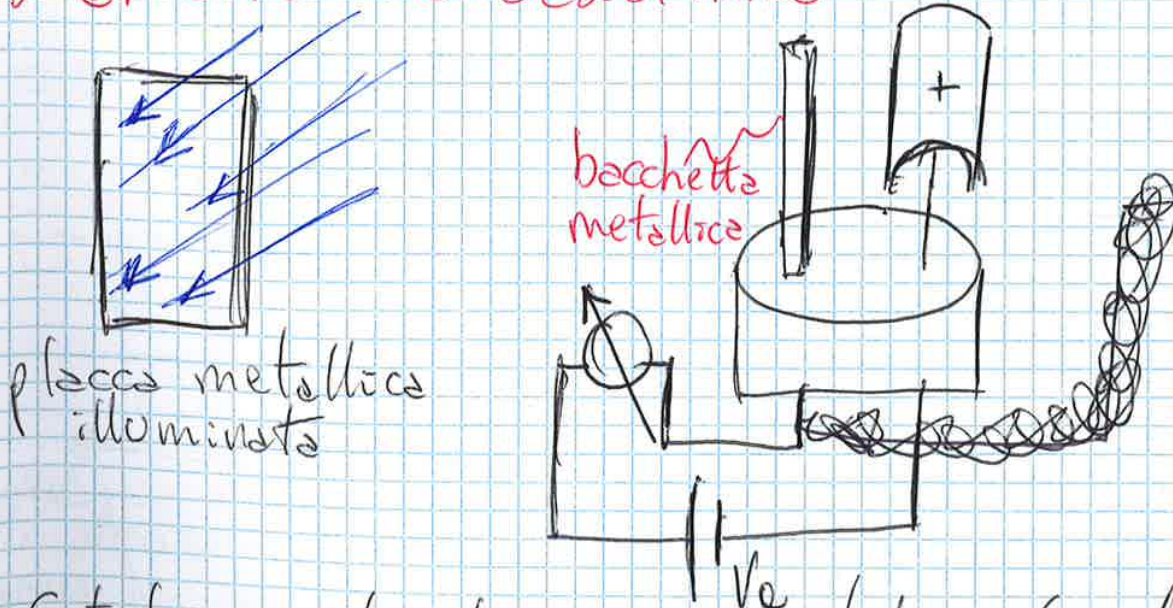
Le particelle emettono en. nel momento in cui iniziano ad oscillare e l'energia emessa non può essere qualunque, ma viene emessa in "pacchetti".
 Spostandoci ad alte frequenze, i "pacchetti" i quali sono uguali a $E = h\nu$, viene emessa energia in zone a più alta energia, in quantità discrete, i "pacchetti".

L'introduzione di questo ~~quanta~~ quanto di azione, cambia il calcolo trasformando integrali (nel continuo) in sommatorie (nel discreto).

Questo genera delle difficoltà, in quanto le onde si muovono in continuo, non sono discrete, per cui ~~emettono energia~~ non emettono energia in quanti, a diff. delle ~~onde~~ particelle.

Associando quantità discrete (particelle) a onde, otteniamo ~~che~~ un fenomeno chiamato effetto fotoelettrico.

L'EFFETTO FOTOELETTRICO



Catodo e anodo chiusi in un tubo di vetro sottovuoto. Nel vuoto ~~posso~~ gli elettroni possono passare dal catodo all'anodo senza collidere le molecole. Il catodo è illuminato da luce monocromatica.

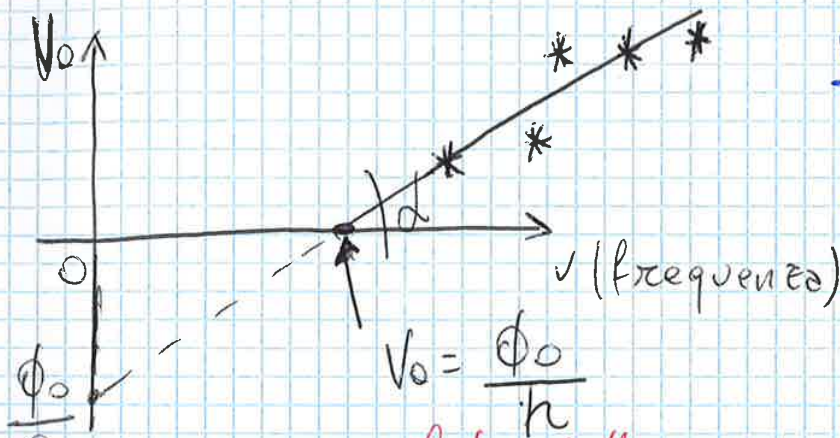
Fu osservato che l'emissione fotoelettrica, avviene quando la frequenza dell'onda e.m. incidente ha valore elevato.

Se $\nu < \nu_{soglia} \Rightarrow$ No fotocorrente;

Se $\nu > \nu_{soglia} \Rightarrow$ Si fotocorrente $\nu_{soglia} = \frac{W}{h}$

l'energia cinetica degli elettroni emessi e^- prop. alla frequenza, secondo: $E_k = hf$

Einstein, dimostrò il corretto funzionamento del sistema e^- :



$\frac{\phi_0}{e}$ = intercetta, e def. e unita come energia di lavoro, e rappresenta la quantità minima di energia da fornire ad un elettrone perche' fuoriesca dal reticolo (lavoro di estrazione)

Emissione fotoelettrica da un metallo

~~$E_k = h\nu - W$~~

$$\Rightarrow E_k = h\nu - W$$

$$\Rightarrow eV_0 = h\nu - \frac{\phi_0}{e}$$

Dall'esperimento di Einstein si verifica che le onde hanno degli aspetti corpuscolari, per cui sono associabili a delle particelle e composte da esse.

la condizione sotto la quale si osserva estrazione di elettroni, ovvero si misura corrente nel circuito, risulta:

$$h\nu > W$$

W = lavoro di estrazione

DESCRIZIONE MECCANICO-QUANTISTICA DELLA RELAZIONE ONDA-PARTICELLA

- Il campo e.m. appare (in alcuni casi) composto da quanti di energia;

$$E = h\nu$$

- Un flusso di particelle elementari mostra comportamenti simili a quelli di un'onda (diffrazione di elettroni);

- Per un elettrone (e^-) $\rightarrow p = m\vec{v}$ ← quantità di moto
 $\lambda = h/p$ ← lunghezza d'onda

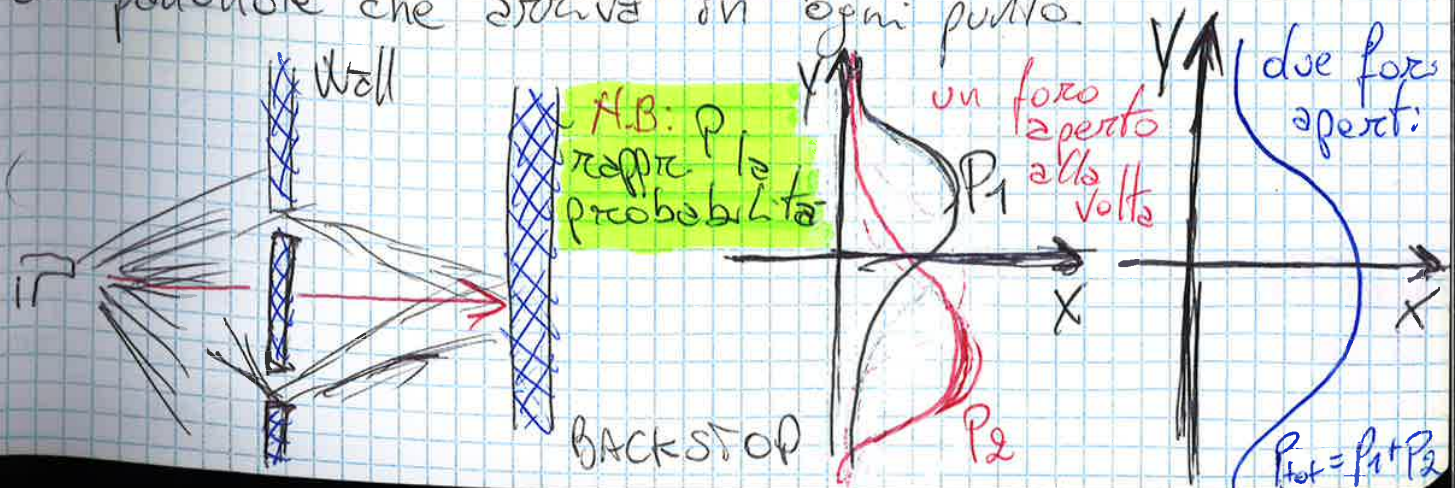
Con De Broglie associato ad un'onda, e la sua lunghezza d'onda, una particella (es. elettrone) definita dalla sua quantità di moto, secondo la relazione:

$$\lambda = h/p$$

ANALISI SPERIMENTALE

- 1) Pallottole sparate attraverso due fenditure.

Una pistola spara pallottole con una certa apertura angolare (casuale) verso due fenditure. Oltre le fenditure si trova uno schermo per misurare il numero di pallottole che arriva in ogni punto.



Perché non posso determinare punto per punto, con certezza, la posizione di una particella ad un certo tempo t , perdo il concetto di traiettoria del moto della particella, in meccanica quantistica.

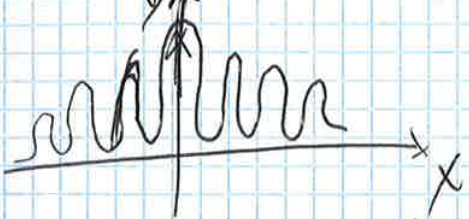
Quello che posso fare è ~~calcolare~~ calcolare la probabilità di trovare una particella in un certo dx al tempo dt .

Ricordo: • Per le onde:

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad ; \quad I \propto |E|^2$$

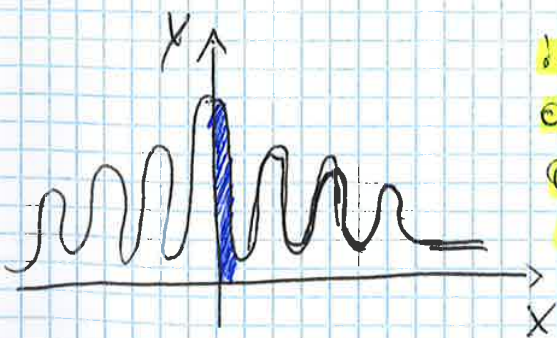
↑
numero d'onde: $\frac{2\pi}{\lambda}$

Def. due campi: $E_{tot} = E_1 + E_2$



$\Rightarrow I \propto |E_1 + E_2|^2$

• Per gli elettroni:



integrando ~~la~~ la funz. di ~~onde~~ densità di probabilità, ottengo ~~il~~ il numero totale di elettroni o particelle nello spazio dx considerato.

$$\int p(x) dx$$

$$p \propto |\phi_1 + \phi_2|^2$$

↑
probabilità-

ampiezza di probabilità $\Rightarrow \phi_{tot} = \phi_1 + \phi_2$

Quindi, tutte le particelle quantistiche possono essere descritte da un campo d'onda.

Questa è l'idea che è alla base della formulazione di Schrodinger della meccanica quantistica. L'ampiezza di questo campo d'onda deve essere una funzione del posto \vec{r} e del tempo t . Tale ampiezza è detta **FUNZIONE D'ONDA** (Ψ).

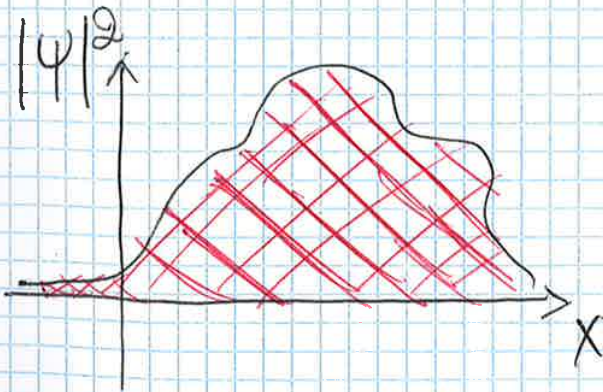
$$\Psi(\vec{r}, t)$$

Nella funzione Ψ sono celate tutte le info necessarie a caratterizzare un sistema fisico.

SIGNIFICATO DELLA FUNZIONE D'ONDA

La funzione d'onda $\Psi(\vec{r}, t)$ di un sistema quantistico è tale per cui:

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r}$ a prop. di trovare la particella nell'intervallo di un punto nel volume $d\vec{r}$ intorno ad \vec{r}



$$\int_{Vol} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$$

se $\Psi(\vec{r}, t)$ è normalizzato equivale ad una densità di probabilità.

PROPRIETÀ DELLA FUNE. D'ONDA

La funzione $\Psi(\vec{r}, t)$ potrà essere un funzione a valore complessi.

se il sistema quantistico è contenuto nel volume Ω :

$$\Psi(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{r} \notin \Omega$$

$$\Psi(\vec{r}, t) \text{ continua e finita se } \vec{r} \in \Omega$$

La funzione d'onda deve essere una fune. a quadrato sommabile nel suo dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\Psi(\vec{r}, t) \in L^2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = \phi$$

Una funzione d'onda definisce uno spazio vettoriale con tutte le sue componenti.

Deve valere il principio di sovrapposizione:

se Ψ_1, Ψ_2 sono due funzioni che descrivono un sistema quantistico, il sistema è anche descritto da una qualsiasi comb. line:

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

In conclusione la funzione Ψ , che descrive un sistema quantistico, costituisce uno spazio vettoriale lineare, definito dalle proprietà di somma e prodotto:

Somma \rightarrow

$$\begin{cases} \Psi_1, \Psi_2 \in L^2(\Omega), \quad a, b \in \mathbb{C} \\ \Psi = (a\Psi_1 + b\Psi_2) \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

prodotto scalare:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\Omega} \Psi_1 \Psi_2 d\vec{r} \in \mathbb{C}$$

se $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$ forma il concetto di probabilità

Consideriamo di avere una particella quantistica di massa m , la sua eq. sarà data dalla somma tra l'en. cinetica più l'en. potenziale:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

per De-Broglie $\Rightarrow E = \hbar\omega$; $p = \hbar k$, Allora:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V$$

ma per descrivere una particella quantistica libera, devo anche considerare l'eq. ~~di De-Broglie~~ d'onda. Allora:

$$\hbar\omega \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi + V \psi$$

Ricordando che: $E(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$, ma per rappresentare un complesso, ricordo la formula di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\Rightarrow E(x,t) = \text{Re} \left\{ E_0 e^{i(kx - \omega t)} \right\}$$

Reale

da cui otteniamo la risoluzione dell'eq. di ~~Schrodinger~~ Schrodinger:

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

tale risultato è ~~il più~~ il più semplice che si possa essere.

Per studiare, suppongo l'osservabile fisico ~~come~~ come se fosse una posizione, ~~allora~~ allora:

1) $X \longrightarrow \tilde{X} = X$
 osservabile classico } regole fisiche

2) $\tilde{p} \longrightarrow \tilde{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ in caso unidimensionale
 quant. di moto

~~In generale dato un osservabile fisico, quest...~~

$\Rightarrow F \longrightarrow \tilde{F}$

~~Quasi~~

INFORMAZIONI FISICHE DELLA FUNZ. D'ONDA

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ è la funz. statistica densità di probabilità di trovare il sistema in \vec{r} all'istante t .

~~...~~

$\langle \vec{r} \rangle = \int_{\Omega} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \vec{r} d\vec{r} = \langle \Psi | \vec{r} \cdot \Psi \rangle =$
 $= \int_{\Omega} \Psi(\vec{r}, t) [\vec{r} \cdot \Psi(\vec{r}, t)] d\vec{r}$

$\langle \vec{r} \rangle =$ valor medio del vettore posizione

Ricordando la def. di ~~prodotto~~ ~~scalare~~ ~~complesso~~ ~~reale~~ prodotto scalare:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\Omega} \Psi_1^* \Psi_2 d\vec{r} = \mathcal{N} \in \mathbb{C}, \text{ Allora,}$$

ritornando all'eq. precedente:

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle \Psi^* | \vec{r} \cdot \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^* \cdot \vec{r} \Psi d\vec{r}$$

Nel caso unidimensionale:

$$\langle x \rangle = \langle \Psi^* | \hat{x} \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^* \hat{x} \Psi dx$$

$$= \int_{\Omega} \Psi^* x \Psi dx$$

operatore matematico

operatore matematico

$$\hat{x} = x$$

~~Attenzione~~

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \int_{\Omega} x \Psi^* \Psi dx = \int_{\Omega} x |\Psi|^2 dx$$

Ricordando che ad ogni osservabile fisico, posso associare un operatore matematico allora, mediante tale operatore cerco di quantificare tutta una serie di grandezze che caratterizzano il sistema fisico.

Allora, in generale, il valore medio associato alla grandezza fisica $\langle F \rangle$, è dato:

def. generale

$$\langle F \rangle = \langle \Psi^* | \hat{F} \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^* \hat{F} \Psi dx$$

Se \hat{F} è autoaggiunto, allora:

$$\langle F \rangle = \langle \Psi^* | \hat{F} \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^* (\hat{F} \Psi) d\bar{r} \in \mathbb{R}$$

AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI DI UN OPERATORE QUANTISTICO

Dato un generico stato fisico di un sistema quantistico descritto dalla fune. d'onda:

$$\Psi(\bar{r}, t) \in L^2(\Omega), \quad \bar{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

sol. dell' eq. di Schrödinger

e dato una grandezza fisica F del sistema a cui è associato l'operatore autoaggiunto (\hat{F}), sappiamo che il valore medio è:

$$\langle F \rangle = \langle \Psi^* | \hat{F} \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\bar{r}, t) [\hat{F} \Psi(\bar{r}, t)] d\bar{r}$$

Da un punto di vista sperimentale, il valore della grandezza fisica F si ottiene attraverso la media su un grande numero di misure, e corrisponde a:



Un'equazione, del tipo

$$\bar{F} \psi_i = f_i \psi_i$$

è detta equazione agli autovalori di \bar{F} , con ψ_i e f_i per $i = 1, 2, \dots, n$, $\psi_i \in L^2(\Omega)$, $f_i \in \mathbb{R}$

La risoluzione di tale eq. differenziale permette di trovare $\psi_i(\bar{r}, t)$ delle autofunzioni ~~o~~ f_i a valore f_i , detti autovalori.

Si può dimostrare che:

i) qualsiasi funzione $\psi(\bar{r}, t) \in L^2(\Omega)$, può essere scritta come sviluppo in serie delle soluzioni $\psi_i(\bar{r}, t)$ autofunzioni dell'equazione agli autovalori dell'operatore \bar{F} .

$$\psi(\bar{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(\bar{r}, t)$$

ii) le autofunzioni $\psi_i(\bar{r}, t)$ sono ortonormali. Allora:

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \int_{\Omega} \psi_i^*(\bar{r}, t) \psi_j(\bar{r}, t) d\bar{r} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{DELTA DI KRONECKER}$$

ident. come è quanto accade nella meccanica classica

$$\Rightarrow a_i = \int_{\Omega} \psi_i^*(\bar{r}, t) \psi(\bar{r}, t) d\bar{r}$$

SIGNIFICATO FISICO DEGLI AUTOVALORI

Quando si effettua una singola misura di una grandezza fisica F su un sistema quantistico descritto dalla funzione d'onda ψ , soluzione dell'equazione di Schrödinger caratteristica del sistema in questione, si ottiene come risultato degli ~~autostati~~ autovalori f_i dell'operatore F .

Potremo quindi dire con certezza che dopo la misura il sistema si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda ψ_i .

Ossia l'autostato i -esimo dell'eq. degli autovalori

$$\hat{F} \psi_i = f_i \psi_i$$

ESEMPI DI ALCUNI OPERATORI QUANTISTICI:

• OPERATORI:

- i) posizione: $\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \bar{r}$
- ii) impulso: $\hat{p} \Rightarrow \hat{p} = -i\hbar \nabla$
- iii) vettore d'onda: $\hat{k} = \frac{\hat{p}}{\hbar} \Rightarrow \hat{k} = -i\nabla$

iv) ~~energia~~ energia cinetica:

$$T = \frac{p^2}{m} \Rightarrow \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \cdot \nabla]$$

v) Hamiltoniano (o energia totale):

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(\bar{r})$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hat{T} + V = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\bar{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\bar{r})$$

ESEMPLI (Operatore Impulso):

$$\hat{p} \psi(\vec{r}) = \vec{p} \psi(\vec{r})$$

$$\hat{p}_x \psi(x) = p_x \psi(x) \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = p_x \psi(x)$$

~~$$\frac{d\psi}{\psi} = i \frac{p_x}{\hbar} dx \Rightarrow \psi(x) = A e^{i \frac{p_x}{\hbar} x}$$~~

La costante A è determinata dalle condizioni di normalizzazione di ψ nel suo dominio. $\Rightarrow \psi(x) = A e^{ikx}, \quad p = \hbar k$

Esercizio Aggiuntivo:

$$\hat{F} \psi = f \psi$$

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V, \quad \text{in } \mathbb{1D}$$

Allora:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

$$\psi(x,t) = R(x) T(t)$$

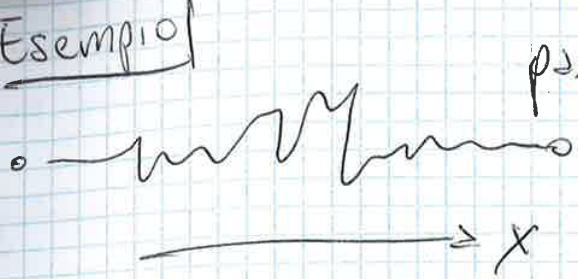
Se siamo in un campo conservativo

← Riscrittura della fune. d'onda come prodotto di due funzioni complesse

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial (R(x) T(t))}{\partial t} = i\hbar R(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = [\hat{H} R(x)] T(t)$$

Esempio

particella libera (caso 1D)



$$H = \frac{p^2}{2m} + V, \quad \Psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \tilde{H} \psi(x) = E \psi(x), \quad \tilde{H} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

in 1D le espressioni sono analoghe

poiché:

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \tilde{H} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE\psi}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{= k^2} \psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0, \quad \psi = A \sin(kx) e^{iEt}$$

PARTICELLA LIBERA QUANTISTICA

Una particella di massa m e impulso p è soggetta a potenziale nullo $\Rightarrow V(\vec{r})=0$

La particella ha Hamiltoniana: $H = \frac{p^2}{2m}$; $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

L'eq. di Schrödinger stazionaria per un problema mono dimensionale è:

$$\hat{H} \psi = E \psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

La soluzione sarà:

$$\psi(x) = A e^{ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

D'ora in poi il metodo da utilizzare è:

- 1) Trovare energia (E) e fune. d'onda;
- 2) Usare l'eq. di Schrödinger stazionaria;
- 3) Se possibile rappresentazione grafica;
- 4) Scrivere espressione classica Hamiltoniana;
- 5) " " operatore \hat{H} ;
- 6) Risolvere eq. di Schrödinger stazionaria;
- 7) Verifica delle soluzioni e eventuale applicazione delle condizioni al contorno.

Nella regione I, III il pot $V(x) = \infty$, allora ho probabilità nulla di trovare una particella in quella zona.

Nella zona II $V(x) = 0$, allora la particella può esistere solo all'interno di quella regione, e ~~ovvero~~ avremo:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad ; \quad H = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E \psi \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2E\psi m}{\hbar^2} = 0$$

il termine $\frac{2mE}{\hbar^2} = \alpha^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha^2 \psi = 0, \text{ allora la soluzione:}$$

$\psi(x) = C e^{\beta x}$, ~~sostituendo nella eq differenziale~~

$$\Rightarrow C \beta^2 e^{\beta x} + \alpha^2 C e^{\beta x} = 0$$

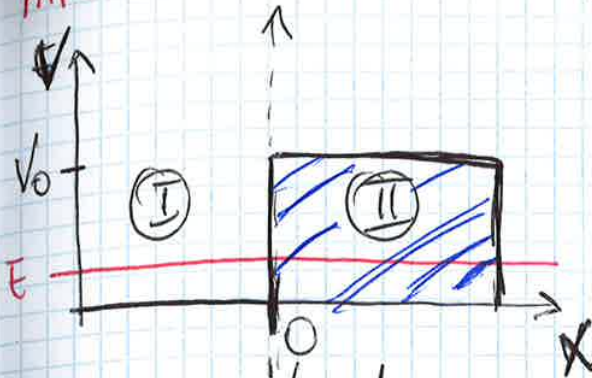
$\Rightarrow \beta^2 + \alpha^2 = 0$ eq. di II grado associata alla differenziale di partenza.

$\Rightarrow \beta = \pm i\alpha \Rightarrow \psi(x) = A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x}$

onda progressiva (pointing to $A e^{i\alpha x}$)
onda regressiva (pointing to $B e^{-i\alpha x}$)

dim. della soluzione dell'eq. differenziale

PARTICELLA SOGGETTA AD UN GRADINO DI POTENZIALE



Consideriamo una particella di massa m che si propaga nella direzione positiva dell'asse x e incontra una barriera di pot. di altezza V_0 .

Possiamo dividere l'asse x in due regioni (I, II) e scriviamo l'operatore hamiltoniano per le due regioni:

- $\tilde{H}_I = \frac{\tilde{p}^2}{2m}, \quad x < 0$

H.B.: E è l'ev. cin. associata alla particella

- $\tilde{H}_{II} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + V_0, \quad x > 0$

$$\Rightarrow \tilde{H}_I = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}, \quad x < 0$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_{II} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad x > 0$$

Ⓘ

$$\tilde{H}_I \psi = E \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

$$\Rightarrow \frac{d^2(\psi)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E \psi = 0$$

Ⓢ

$$\tilde{H}_{II} \psi = E \psi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 \right) \psi = E \psi$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \psi \left[\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \right] = 0$$

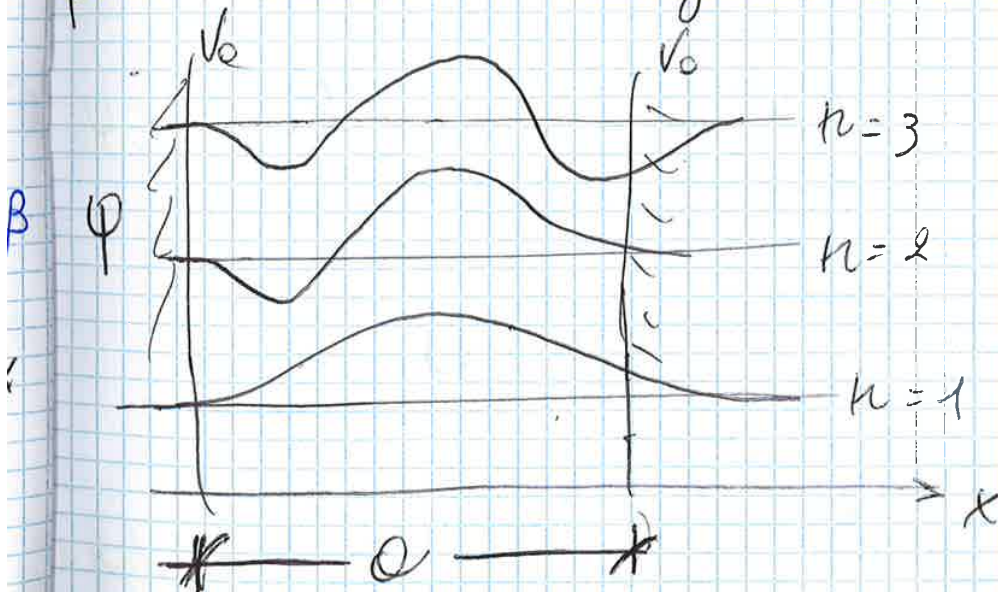
La funz. d'onda deve essere NORMALIZZATA

$$\Rightarrow \int_{\text{Dom}(\psi)} |\psi|^2 = 1$$

BUCHE DI POTENZIALE A PARETI FINITE

Come conseguenza dell'effetto tunnel, una particella confinata in una buca di potenziale rettangolare a pareti finite può avere probabilità finite di uscire dalla buca, anche se la sua energia totale E è minore dell'altezza V_0 della barriera.

In figura sono mostrate le funz. d'onda ψ_n , ottenute risolvendo l'eq. di Schrödinger stazionaria, per alcuni livelli energetici con la condizione $\psi = 0$



In conclusione, ogni stato quantistico di un oscillatore armonico è determinato dall'autofunzione:

$$\psi_n(x) \text{ e dal n. quantico } n.$$

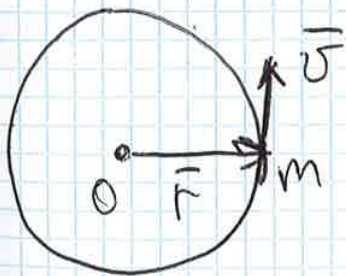
L'ener. non può variare nel continuo, ma può solo avere valori discreti dipendenti da un indice intero n .

Tra due livelli energetici adiacenti, ammessi, dipendenti degli indici interi $n, n+1$ abbiamo un salto energetico:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar \omega$$

Quindi l'oscillatore armonico può cambiare stato solo assorbendo o emettendo quanti di energia pari a: $\hbar \omega$

ROTORE RIGIDO



~~ω~~ $\omega, v = \omega r$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$L = \hbar m v = m r^2 \omega$$

$$\Rightarrow \underline{L = I \omega}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$

CONTINUA →

Dati $F, G \longrightarrow \hat{F}, \hat{G}$, Allora se

$$[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = 0$$

Allora i due operatori F, G **COMMUTANO** e posso determinare con max. precisione e contemporaneamente i due osservabili fisici.

Se $[\hat{F}, \hat{G}] \neq 0$

Non è possibile determinare con imprecisione nulla (precisione infinita) e contemporaneamente i due osservabili fisici.

H.B: $[\hat{F}, \hat{G}]$ è detta **questione** **COMMUTAZIONE**

~~questione~~

L'eq. di Schrödinger stazionaria agli autovalori di H è:

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{I} \psi = E\psi$$

Abbiamo visto questo problema come esempio di ~~problema~~ problema agli autovalori di operatori quantistici ottenendo che i valori ammessi dell'energia dipendono da un numero quantico:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

CENNI ALL'EQ. DI SCHRÖDINGER STAZIONARIA ~~DISPETTO~~ PER L'ATOMO DI IDROGENO

Consideriamo un elettrone in un campo ~~colombiano~~ coulombiano generato da un nucleo avente Z protoni. Il pot. dell'elettrone vale:

$$V(r) = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'Hamiltoniana del sistema elettrone-nucleo e^- :

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$$

con: $\mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$ dove m è la massa

ridotta del sistema, m è la massa dell'elettrone e M quella del nucleo.

L'eq. di Schrödinger stazionaria per l'elettrone è:

$$\hat{H} \psi(r) = E \cdot \psi(r) \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

operatore laplaciano

Avendo il potenziale $V(r)$ a simmetria sferica, scriviamo l'eq. in coordinate polari:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

questa equazione ammette sol. del tipo:

$$\psi(r) = \psi(r, \theta, \varphi) = \phi(r) Y(\theta, \varphi)$$

!!! non da sapere!!!

$$\hat{H} \Psi_{n,l,m}(\vec{r}) = E_n \Psi_{n,l,m}$$

$$\hat{L}^2 \Psi_{n,l,m}(\vec{r}) = l(l+1)\hbar^2 \Psi_{n,l,m}$$

$$\hat{L}_z \Psi_{n,l,m}(\vec{r}) = m\hbar \Psi_{n,l,m}$$

gli stat. $\Psi_{n,l,m}$ sono DEGENERI, cioè allo stesso valore di energia E_n , corrispondono più stat. con quadrato del momento angolare e con terza componente del momento angolare diversa.

$$\Rightarrow \forall E_n, l \in [0, n-1]$$

$$\Rightarrow \forall l, m \in [-l, l]$$

il grado di degenerazione è:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

MOMENTO ANGOLARE INTRINSECO DI UNA PARTICELLA QUANTISTICA: LO SPIN

Se consideriamo una particella, carica classica non puntiforme, per via della sua struttura interna e della conseguente distribuzione di massa e di carica, si ha che se la particella ruota intorno ad un suo asse è dotata di momento angolare intrinseco e un momento magnetico intrinseco, sui quali c'è un effetto quantistico.

L'elettrone, ha anche, come detto, un momento angolare intrinseco, essa sempre presente e indipendente da ogni interazione: lo **SPIN**

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2 m^2}{2me^2} \mu^2$$

Ogni livello energetico, partendo dallo stato energetico più basso ($n=1$) e continuando nell'ordine crescente, può essere occupato da 2 elettroni al massimo, in accordo con quanto detto sui **FERMIONI**.

Per i **bosoni**, la disposizione nei livelli energetici è puramente **casuale**.

BUCA E DOPPIA BUCA



Buche di pot. a pareti infinite

Il problema (risolvere l'eq. di Schrodinger \rightarrow trovare l'eq. d'onda) prelude dall'importante caso di N buche.

Accoppiando due buche uguali fra loro, si ottengono doppietti di autovalori, uno per ogni autovalore della buca singola.

Allora, date N buche uguali alla buca singola, diversa in n livelli energetici, allora il sistema di N buche avrà Nn livelli energetici. Per cui, se $N \rightarrow \infty$, questo meccanismo dà luogo alle **BANDS** DI ~~ENERGIA~~ **ENERGIA**, in cui i livelli energetici sono rappresentati in continuo. Questo è quello che succede nei reticoli.

$$(I) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

$$(II) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi = 0$$

definiamo $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)$

TEO. DI BLOCH

Nel caso di pot. periodico, una soluzione delle due eq. sopra, ~~sono~~ ha la forma:

$$\psi(x + \bar{1}) = e^{ik\bar{1}} \psi(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \mu(x) e^{ikx} \quad \text{funzioni di Bloch}$$

Dove $\mu(x)$ è una f. periodica con periodicità $\bar{1} = (a+b)$ cioè:

$$\mu(x + \bar{1}) = \mu(x)$$

Sostituendo $\psi(x)$ in (I) e (II) otteniamo:

$$(I) \quad \frac{d^2 \mu}{dx^2} + 2ik \frac{d\mu}{dx} - (k^2 - \alpha^2) \mu = 0$$

$$(II) \quad \frac{d^2 \mu}{dx^2} + 2ik \frac{d\mu}{dx} - (k^2 + \gamma^2) \mu = 0$$

Ponendo tali condizioni si ottiene un sistema omogeneo lineare di quattro eq. nelle incognite A, B, C, D

$$a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C + a_{14}D = 0$$

$$a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C + a_{24}D = 0$$

$$a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C + a_{34}D = 0$$

$$a_{41}A + a_{42}B + a_{43}C + a_{44}D = 0$$

Perché le sol. non siano banali, le eq. devono essere lin. indipendenti, tra di loro, allora impongo che il det dei coeff. deve essere nullo

Eseguendo i calcoli otteniamo che:

$$\frac{\gamma^2 - \alpha^2}{2d\gamma} \sinh(\gamma b) \sin(\alpha a) + \cosh(\gamma b) \cos(\alpha a) = \cos[k(a+b)]$$

dove:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

Questa espressione permette di ottenere una relazione tra l'energia totale dell'elettrone e il nucleo quantico definito come k:

$$E = E(k)$$

e vale: $|\cos[k(a+b)]| \leq 1$

Poniamo il caso in cui l'altezza della barriera di pot. V_0 è grande e la sua larghezza b è infinitesima con la condizione $V_0 b = \text{cost.}$, allora:

$$\gamma b = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 b) b} \propto \sqrt{b}$$

cost.

se $b \rightarrow 0 \Rightarrow \cosh(\gamma b) \rightarrow 1$ e $\sinh(\gamma b) \rightarrow \gamma b$
 poiché $a \gg b$, $\alpha^2 \ll \gamma^2$

In conclusione, posso affermare che un elettrone che si muove in un potenziale periodico occupa zone di energia (dette bande) permesse.

Le en. fuori di queste zone sono proibite e la larghezza delle bande dipende da P .

Se P è infinitesimo, allora

$$P \frac{\sin(\Delta a)}{\Delta a} + \cos(\Delta a) = \cos ka$$

$$\Rightarrow \cos \Delta a = \cos ka \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{elettrone} \\ \text{libero} \end{matrix}$$

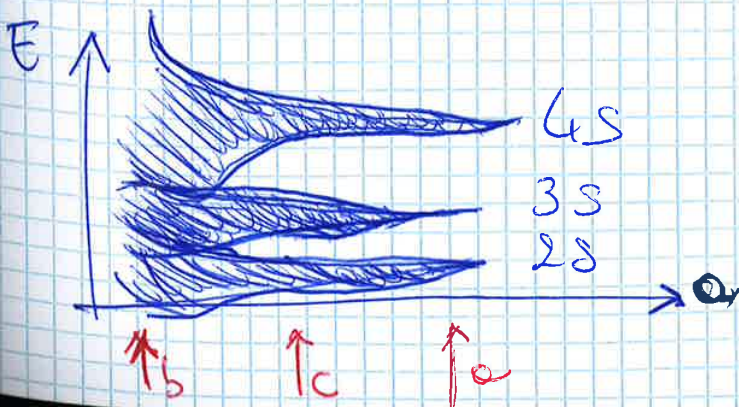
allora l'elettrone può trovare per qualsiasi valore di Δa , significa che l'elettrone è libero.

Riassumendo:

- a) l'elettrone nel pot. di un singolo ione ha livelli di energia a banda strettissima (assimilabili a dei punti);
- b) l'elettrone libero ha un continuo di livelli di energia;
- c) l'elettrone in un pot. periodico ha accesso a bande di energia.

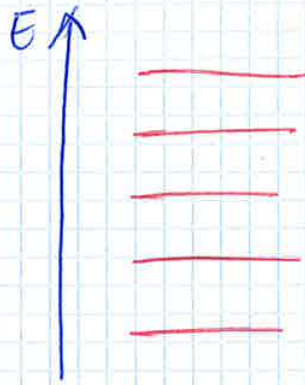
Le tre situazioni soprastanti possono essere ricondotte ai seguenti casi di disposizione degli atomi:

- a) atomi molto lontani e debolmente interagenti;
- b) atomi ^{molto} vicini e fortemente interagenti;
- c) atomi a media distanza e interagenti.

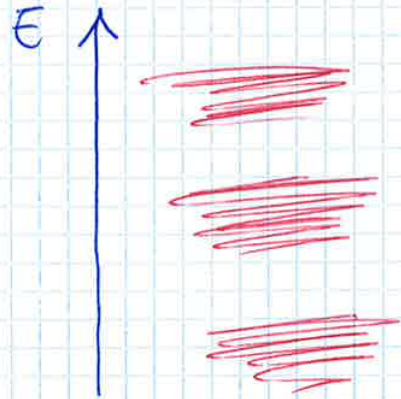




elettrone libero, livelli fitti, sono in continuo



elettrone in una buca di pot. a pareti infinite, livelli singoli di en.



elettrone in un reticolo periodico ha delle bande di energia.

Se schematicizzassimo il riempimento dei livelli energetici elettronici in un cristallo a $T = 0\text{K}$.

gli elettroni occupano tutti gli stati disponibili (obbedendo al principio di Pauli) fino al loro esaurimento.

Indichiamo con livello di Fermi E_f il livello di en. corrispondente all'ultimo stato.

Per un conduttore esso cade dentro una banda permessa e, quindi, l'ultima banda occupata è solo parzialmente riempita.

Per un non conduttore, tale livello cade esattamente alla sommità dell'ultima banda occupata.

Hel primo caso, perturbando il sistema, varia l'en. pot. dello stesso, nel secondo caso no.

I non-conduttori si dividono in semi conduttori (E_g esiguo) e isolanti (E_g elevato).

Posso cambiare questa situazione di equilibrio, aumentando la temperatura o applicando un campo elettrico al sistema.

Il numero di stati occupati nell'intervallo di energia $E, E+dE$, è dato da:

$$n(E)dE = g(E) f(E, T) dE$$

dove:

$$f(E, T) = \frac{1}{A e^{E/KT}}$$

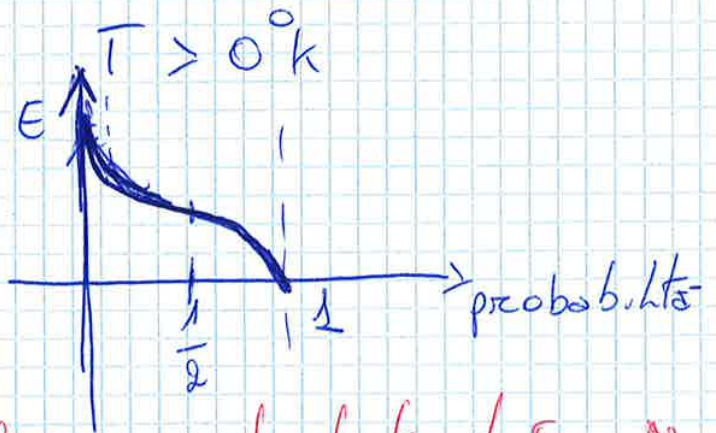
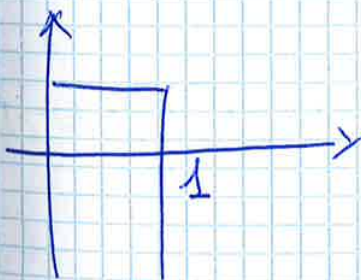
$$\Rightarrow n(E) = g(E) f(E, T) = g(E) \cdot \frac{1}{A e^{E/KT}}$$

Classicamente E è una funz. continua e di conseguenza $n(E)$ è continua.

Tali relazione valgono per le particelle classiche.

MECCANICA STATISTICA: PARTICELLE QUANTISTICHE

$T = 0^{\circ}K$



funzione di distr. di Fermi-Dirac

I grafici rappresentano la probabilità per i fermioni di occupare gli stati occupabili.

La funz. di distr. Fermi-Dirac è data:

$$f(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{KT}\right) + 1}$$

Funzione di Fermi-Dirac

ed obbedisce al principio di esclusione di Pauli