



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1579A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Girardi

MATERIA: Biomeccanica dei Solidi. Prof.Audenino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## DOMANDE TEORIA

- 1) sistema  $m/k/c$ , 1 GdL, sovrasmorzato: soluzione analitica generale +  $x(0)=0$ ,  $\dot{x}(0) \neq 0$  + GRAFICO
- 2) sistema  $m/k/c$ , 1 GdL, con  $F(t)=a \cos t$ ,  $x(0)=0$ ,  $\dot{x}(0)=v_0$
- 3) smorzamento coulombiano
- 4) Determinazione sperimentale  $k/c$
- 5) Forzante NON DETERMINISTICA, randomi: funzioni caratterizzate, soluzione problema, impostazione problema + limiti di applicazione.
- 6) Smorzatore DINAMICO: modello, equazione, grafico FdT
- 7) Smorzamento strutturale: modello, equazione, differenze con viscoso.
- 8) Normative vibrazioni
- 9) Differenza autovettore  $Re - \zeta$  + rappresentazione grafica
- 10) Sistema n GdL SMORZATO e NON SMORZATO, autoproblemi in forma CANONICA e GENERICA
- 11) Trasformazione coordinate MODALI e DISACCOPIAMENTO MOTO.
- 12) Risposta all'impulso e al gradino con e senza Duhamel
- 13) Smorzamento proporzionale
- 14) Smorzamento viscoso con eccitazione del vincolo
- 15) Autoproblemi in forma canonica e generica
- 16) Curve di isodisturbo
- 17) 3 modi per esprimere lo spostamento in un sistema 1 GdL
- 18) Dimostrazione ortogonalità autovettori.

## DINAMICI { rumore, Forze aerodinamiche }

- Forze che variano rapidamente
- anche il sistema può variare nel tempo
- provocano EFE dinamici e vibrazionali
- possono portare a coup a fatica

## STUDIO DEL COMPORTAMENTO DINAMICO

- 1) analisi del sistema NON FORZATO, non soggetto alla forza del problema
- 2) applico la FORZA
- 3) calcolo risposta forzata

Ottengo "mi" Frequenze di risonanza

In passato il caso dinamico si affrontava con un sovradimensionamento del caso STATICO (coeff. di sicurezza)



NON APPLICABILE IN ALCUNI CASI

- elevata velocità di rotazione
- esagerate esigenze di leggerezza e sicurezza
- calcolo dinamico richiesto da normativa (es: valvola cardiaca)

STUDIO DINAMICO

↓  
MODELLI DI CALCOLO

↓  
SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA

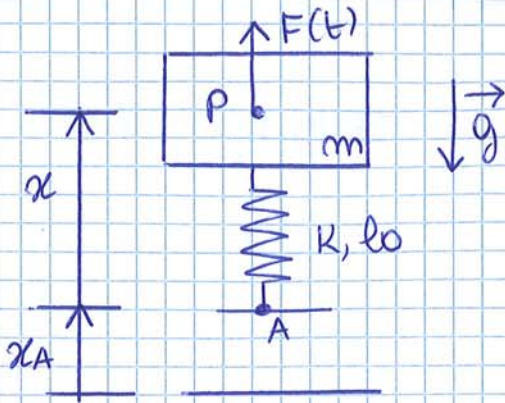
↓  
modelli elem.  
analitici lineari 1o + 1° Ord

↓  
sistemi lineari continui

↓  
F.E.M  
(Metodi Elementi Finiti)

↓  
concentrati  
(ma + semplici, derivare parziali)

↓  
distribuiti



## SISTEMA DI RIFERIM. NON INERZIALE

(esprimo il movimento di P con riferimento al movimento di A).  
 ↓  
 devo aggiungere l'accelerazione  $\ddot{x}_A$  a  $\ddot{x}$ ,  $xK$  non è + inerziale.

• Eq. DINAMICO del sistema:

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_A) = -K(x - l_0) + F(t) - mg$$

$$[\text{Forze d'inerzia}] = [\text{Forze agenti sul sistema}]$$

$$m\ddot{x} + Kx = -m\ddot{x}_A + F(t) - \underbrace{mg + Kl_0}$$

• POSSO trascurare i termini costanti:

$$m\ddot{x} + Kx = -m\ddot{x}_A + F(t)$$

uguali alle  
 (1) cambia (2)  
 solo il modo  
 in cui considero lo  
 spostamento del vincolo

**NB:** • se il vincolo si muove con  $v = \text{cost} \rightarrow \ddot{x}_A = 0$ , diventa un sistema libero.

• sperimentalmente conosco solo  $x_A$  } serve a capire quale  
 analiticamente conosco  $\dot{x}_A, \ddot{x}_A$  } formula usare.

• CON LO SMORZAMENTO È MEGLIO IL SISTEMA NON INERZIALE.

## RISOLUZIONE EQ. DIFFERENZIALE

- soluzione OMOGENEA ASSOCIATA = esprime il comportamento del sistema LIBERO ( $F(t) = 0$ )

+

- soluzione INTEGRALE PARTICOLARE = dipende dalla forzante, è ciò che rimane dopo che si è esaurito il transitorio.

SOLUZIONE COMPLETA = esprime il moto causato da un'azione eccitatrice esterna

3° soluz:

$$x = x_0^* e^{\lambda t} \quad , \quad x_0^* \in \text{Complessi}$$

$$x = x_0^* e^{i\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda x_0^* e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 x_0^* e^{\lambda t}$$

- sostituendo nella (3):

$$(m\lambda^2 + k) x_0^* = 0$$

- oltre a  $x_0^* = 0$ , deve essere anche:

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (4)$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

numero  
puramente  
immaginario

- La (4) ha 2 soluzioni quindi la soluzione della (3) è:

$$x = x_{01}^* e^{i\sqrt{k/m}t} + x_{02}^* e^{-i\sqrt{k/m}t} \quad (5)$$

- Dalle Formule di Eulero:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

- Quindi la (5) diventa:

$$x = x_{01}^* \left[ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right] + x_{02}^* \left[ \cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t) \right]$$

$$x = (x_{01}^* + x_{02}^*) \cos(\lambda t) + (x_{01}^* - x_{02}^*) i \sin(\lambda t)$$

- $x \in \mathbb{R}$ , quindi  $x_{01}^*$  e  $x_{02}^*$  devono essere 2 numeri  $\mathbb{R}$  ed è possibile COMPLESSI e CONIUGATI (stessa  $\mathbb{R}$  e  $\neq 0$ )

$$x_{01}^* = x_{02}^*$$

$$x = 2\mathbb{R}(x_{01}^*) \cos(\lambda t) - 2\mathbb{I}(x_{01}^*) \sin(\lambda t)$$

• Se il vincolo si muove di moto armonico:

$$x'_A = x'_{A_0} \cos(\lambda t) \rightarrow m\ddot{x} + kx = kx'_{A_0} \cos(\lambda t)$$

• La soluzione dell'integrale PARTICOLARE è ancora:

$$x = x_0 \cos(\lambda t) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda x_0 \sin(\lambda t) \\ \ddot{x}(t) = -\lambda^2 x_0 \cos(\lambda t) \end{cases} \quad K$$

$$x_0 = x'_{A_0} \frac{K}{(K - m\lambda^2)} = \frac{x'_{A_0}}{1 - \left(\frac{m}{K}\right)\lambda^2}$$

Essendoci delle funzioni complesse non se ne può avere una rappresentazione diretta sul piano cartesiano. Si usa rappresentare MODULO, FASE (Bode) o con il diagramma di Nyquist.

• Facendo il rapporto tra la soluzione particolare e la soluzione omogenea:

$$H(\lambda) = \frac{x_0}{x'_{A_0}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2} \Rightarrow \frac{\text{spostam. MASSA}}{\text{spostam. VINCOLO}}$$

•  $H(\lambda)$  = RAPPORTO DI AMPLIFICAZIONE o RISPOSTA IN FREQUENZA, è una funzione della  $\lambda$ , spesso espresso in dB

• La stessa espressione si può usare anche nel caso in cui l'eccitazione sia dovuta ad una forzante esterna.

$$H(\lambda) \frac{F_0}{K} = x_0$$

La FUNZIONE DI TRASFERIMENTO permette di capire quale sarà l'ampiezza dello spostamento e la sua fase rispetto alle Forzante

è lo spostamento STATICO, che si avrebbe se  $F_0$  fosse applicata staticamente e non fosse una forzante armonica.

L'ampiezza del moto dipende dal rapporto tra la pulsazione della FORZANTE ( $\lambda$ ) e la pulsazione propria del sistema meccanico ( $\lambda_n$ )

- $\lambda_n \ll \lambda \rightarrow$  RIGIDA
- $\lambda_n = \lambda \rightarrow$  RISONANZA
- $\lambda_n \gg \lambda \rightarrow$  INERZIA

- Quando segue la curva ② allora è dominato dall'INERZIA:
  - F. elastiche trascurabili
  - F(t) equilibrata dalle F. d'INERZIA

- Quando  $\frac{\lambda}{\lambda_n} \sim 1$  allora è dominato dallo SMORZAMENTO:
  - $H \rightarrow \infty$
  - F. elastiche in equilibrio con quelle d'inerzia
  - F(t) equilibrata dalle F. di smorzamento.

• Un altro modo per scrivere la F(t) è:

2° soluz :

$$F = f_0 e^{st}$$

oppure

$$F = f_0 e^{i\lambda t}$$

→ vettore rotante sul piano che descrive una circonferenza, quindi dovrei scrivere, quindi

$$F = \mathcal{R}(f_0 e^{st})$$

perché  $s \in \mathbb{C}$

• La soluzione dell'integrale particolare è:

$$x = x_0 e^{st} \quad \text{o} \quad x = x_0 e^{i\lambda t}$$

• è un numero complesso e rappresenta un vettore rotante esattamente come la forzante. Quindi devo considerare solo:

$$x = \mathcal{R}(x_0 e^{st}) \quad \text{o} \quad x = \mathcal{R}(x_0 e^{i\lambda t})$$

$$x_0 = \frac{f_0}{K} H(\lambda)$$

### SOLUZIONE COMPLETA SIST. FORZATO:

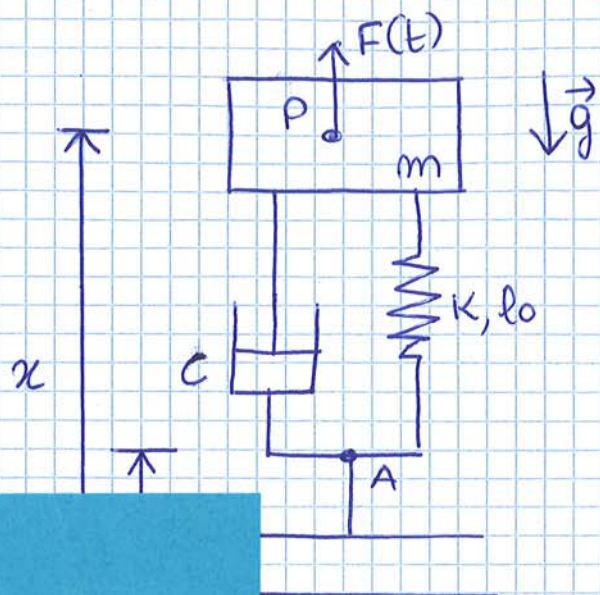
omogenea + particolare

$$x(t) = C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t) + \mathcal{R}\left[H(\lambda) \frac{f_0}{K} e^{i\lambda t}\right]$$

- $C_1$  e  $C_2$  si determinano a partire dalla velocità e dalla posizione all'istante iniziale, solo quando si ha la soluzione completa.
- Le AMPIEZZE di tutti i termini non variano perché il sistema NON è SMORZATO.



# SISTEMI CON SMORZAMENTO VISCOSO LIBERO



Lo smorzamento introduce una forza proporzionale alla velocità, ma con direzione opposta.

18/01

- Scrivendo l'eq. del moto si ha:

$$m\ddot{x} = -K(x - x_A - l_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_A) + F(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\dot{x}_A + Kx_A + F(t) + Kl_0$$

- Facendo un cambio di variabili:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\dot{x}'_A + Kx'_A + F(t)$$

- Eq. omogenea da risolvere:  $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$  (1)

- Scelgo di usare come soluzione omogenea:

$$x = x_0^* e^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda x_0^* e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 x_0^* e^{\lambda t}$$

- La (1) diventa:

$$x_0^* (m\lambda^2 + c\lambda + K) e^{\lambda t} = 0$$

- Oltre a  $x_0^* = 0$ , ho:

$$m\lambda^2 + c\lambda + K = 0 \quad (2)$$

- Questa eq. ha come soluzioni:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

# DECREMENTO LOGARITMICO

- Serve per conoscere gli smorzamenti, per ricavare  $\zeta$  a livello sperimentale. Si ricava partendo dal rapporto tra le ampiezze di 2 picchi successivi

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{e^{-\zeta \lambda n t_i}}{e^{-\zeta \lambda n t_{i+1}}} = e^{-\zeta \lambda n (t_i - t_{i+1})} = e^{\frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

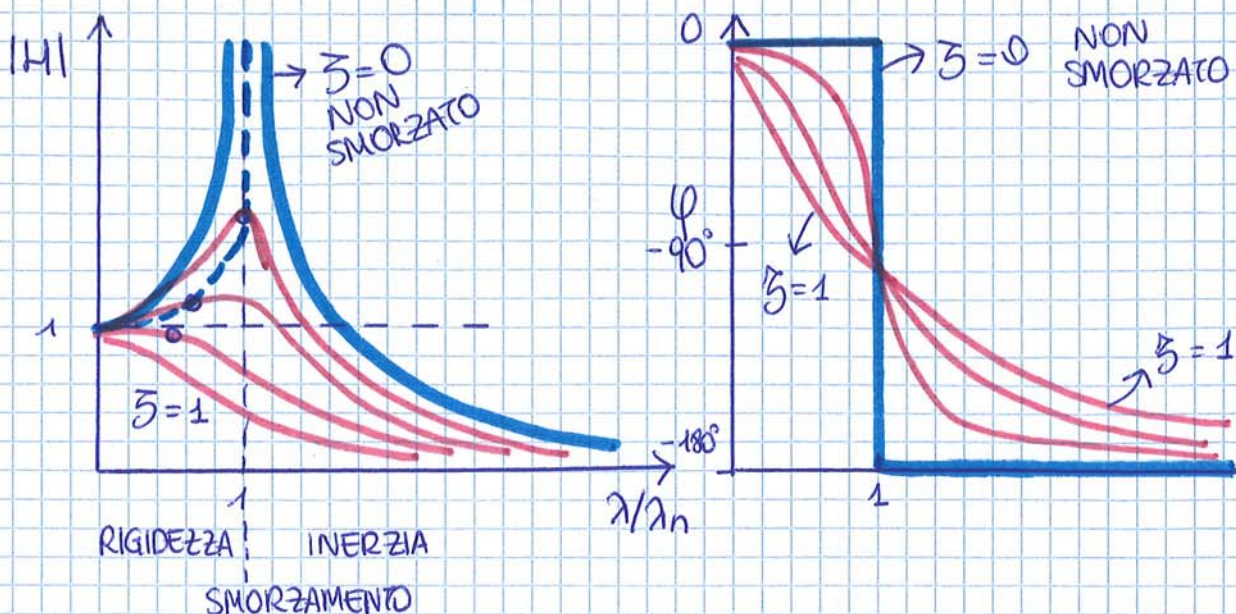
- essendo  $t_i - t_{i+1} = \text{PERIODO} = \frac{2\pi}{\lambda p} = \frac{2\pi}{\lambda n \sqrt{1-\zeta^2}}$

- Facendo il logaritmo:

$$\delta = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- se  $\zeta \rightarrow 0$  allora:

$$\delta = 2\pi \zeta$$



- $\zeta$  influenza il punto di MASSIMO
- $\zeta$  = Fattore di smorzamento serve per attenuare le vibrazioni,
- se  $\uparrow \zeta$  allora la risonanza e le vibrazioni sono attenuate

• Per individuare a quale valore dell'asse  $x$  ( $\lambda/\lambda_n$ ) si colloca il picco di RISONANZA:

$$\lambda(HI)_{MAX} = \lambda_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \neq \lambda_n, \neq \lambda_p$$

da cui si vede che all'aumentare del Fattore di smorzamento  $\zeta$ , esso si sposta sempre di più verso il basso.

• Il valore massimo del Fattore di amplificazione è:

$$Q = |H|_{MAX} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \frac{1}{2\zeta}, \text{ se } \zeta \rightarrow 0$$

valido solo se  $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\approx 0,707$ )

• Se  $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la curva NON presenta picco

• In generale:  $|H|_{MAX} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = Q \rightarrow$  FATTORE DI QUALITÀ

Volevamo rappresentare lo spostamento sul diagramma di Nyquist, si vede che le curve sono tanto + ampie quanto  $\zeta \rightarrow 0$  e partono tutte dal punto  $(1; 0)$ . Se  $\zeta = 0$  allora la curva è una retta // all'asse immaginario.

## SOLUZIONE COMPLETA smorzato forzato ( $\zeta < 1$ )

$$x = e^{-\sigma t} \left[ x_{01} \cos(\lambda t) + x_{02} \sin(\lambda t) \right] + \mathcal{R} \left[ H(\lambda) \frac{f_0}{K} e^{i\lambda t} \right]$$

$\xrightarrow{\zeta \rightarrow 0}$   
 $x_{01}, x_{02} \rightarrow$  dalle C.I. costante

IL PRIMO TERMINE È TRASCURABILE,  $x_R$  tende a zero.  
 2 armoniche e 2 frequenze  $\neq$ . Dopo il transitorio rimane solo  $\lambda$ .  
**ECCITAZIONE SPOSTAMENTO VINCOLO**

• L'eq. del moto diventa:

$$\ddot{x} + 2\zeta\lambda_n \dot{x} + \lambda_n^2 x = x'_{A0} (\lambda_n^2 + 2i\lambda\lambda_n\zeta) e^{i\lambda t} \quad (1)$$

• da cui si ricava la risposta in frequenza:

$$H(\lambda) = \frac{x_0}{x'_{A0}} = \frac{1 - 2i\zeta \frac{\lambda}{\lambda_n}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2 + 2i\zeta \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)} \Rightarrow \frac{\text{SPOST. MASSA}}{\text{SPOST. VINCOLO}}$$

Dai grafici del  $|H|$  e della  $\varphi$  si vede che a differenza del caso precedente in cui un  $\uparrow$  della  $\zeta$  comportava anche una diminuzione del  $|H|$ , ora questo è vero solamente per le BASSE FREQUENZE. Ad alti valori di frequenza, un  $\uparrow$  della  $\zeta$  comporta anche un aumento di  $|H|$ , chiamato appunto TRAMISSIBILITÀ!

• Lo stesso si può scrivere ricorrendo alla notazione  $\epsilon$ :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 e^{i\lambda t} \\ \epsilon = \epsilon_0 e^{i\lambda t} e^{-i\phi} \end{cases} \rightarrow \lambda, \text{ frequenza a cui il ciclo} \\ \text{e' percorso}$$

• Dato che  $\frac{\sigma}{\epsilon} = E \rightarrow$  modulo di Young del materiale allora:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\cos\phi + i\sin\phi)$$

• che diventa

$$(2) \quad \frac{\sigma}{\epsilon} = E' + iE''$$

$E =$  modulo di Young COMPLESSO

$\Re\{E\} = E' =$  en. IMMAGAZZINATA, in fase

$\Im\{E\} = E'' =$  en. DISSIPATA in quadratura  
SMORZAMENTO DEL MATERIALE

• Dato che  $E'' \rightarrow 0$  nei mat. ingegneristici perché è molto piccolo lo smorzamento e quindi è trascurabile, allora:

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi \sim \phi = \eta \rightarrow \text{FATTORE DI PERDITA } (\sim 5)$$

• La (2) diventa

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = E(1 + i\eta)$$

$E$  complesso

$K^*$  rappresenta il comportamento viscoso-elastico del materiale

• Allo stesso modo si definisce la RIGIDEZZA COMPLESSA:

$$K^* = K' + iK'' = K(1 + i\eta)$$

$K^* =$  rigidità COMPLESSA



• Posso definire lo SMORZAMENTO RELATIVO  $\psi$  come rapporto tra l'en. dissipata in un ciclo dallo smorzamento e l'en. elastica accumulata nella posizione di max ampiezza:

$$\psi = \frac{\text{area ciclo isteresi}}{\text{area triangolo}}$$

$$\psi = 2\pi \sin\phi \sim 2\pi\phi$$

$$\psi = 2\pi\eta$$

SMORZ. RELATIVO

Lo smorzamento STRUTTURALE può essere assimilato ad uno smorzamento VISCOSO con un coefficiente di SMORZAMENTO EQUIVALENTE pari a:

$$c_{eq} = \frac{\eta K}{\lambda}$$

COEFF. di smorzamento equivalente  
STRUTTURALE → VISCOSO

## SISTEMI CON SMORZAMENTO STRUTTURALE FORZATI

• L'eq. caratteristica del moto è:

$$m\ddot{x} + K(1+i\eta)x = F(t)$$

• che può essere scritta come

$$\ddot{x} + \lambda_n^2 (1+i\eta)x = \lambda_n^2 \frac{f_0}{K} e^{i\lambda t}$$

• Nei sistemi con smorzamento strutturale, a differenza di quelli con smorzamento viscoso

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

$$\phi(\omega) = \arct(-\eta) \sim \eta$$

• A differenza di quello viscoso, nello STRUTTURALE

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

$$\text{e } \phi(\omega) = -\eta$$

STRUTTURALE

$$H(\omega) = 1$$

$$\text{e } \phi(\omega) = 0$$

VISCOSO

•  $|H|_{MAX} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow$  Frequenza propria del sistema STRUTTURALE

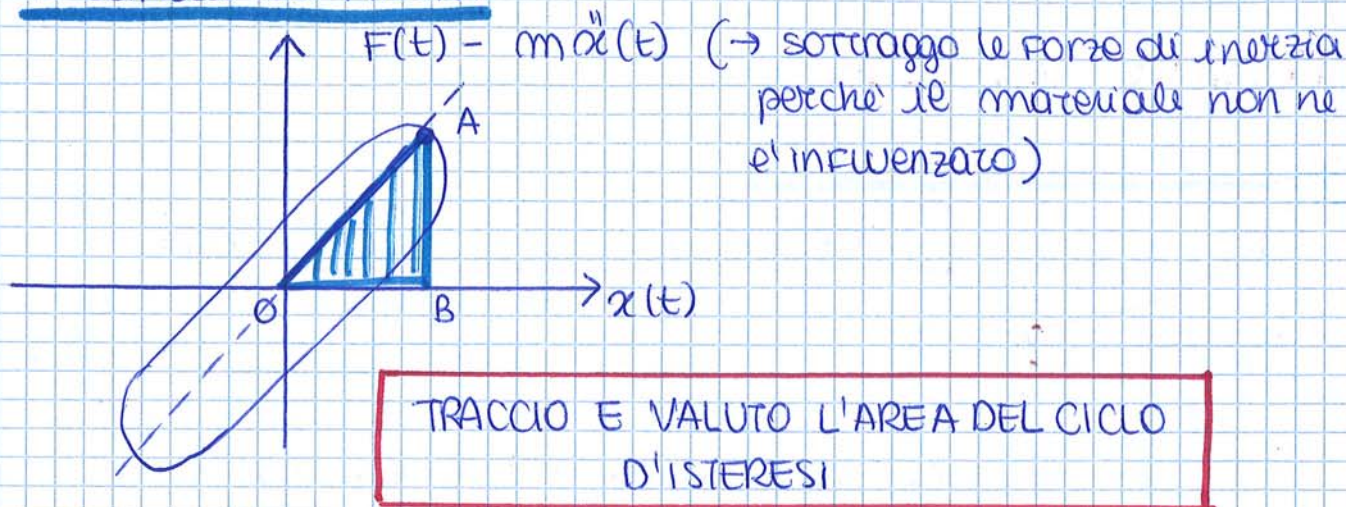
$\parallel$

⊙ → Fattore di qualità

• Nel caso di smorzamento piccolo, il comportamento dello STRUTTURALE è molto simile al comportamento del viscoso.

**GdL** Nel caso di + GdL avrei tanti picchi quanti sono i GdL del sistema, e di conseguenza tanti  $\frac{1}{2}$  quanti sono i GdL  $\rightarrow$  + comodo calcolabili che nel dominio del tempo.

• 2 canali di MISURA



Calcolo lo smorzamento relativo  $\psi$  come rapporto tra l'energia dissipata nel ciclo (area del ciclo di isteresi) e l'energia immagazzinata nel ciclo (area del triangolo OAB).

$$\psi = \frac{\text{area ellisse}}{\text{area triangolo}} = 2\pi \sin(\phi) \approx 2\pi \phi$$

Dato che  $\phi$  è dato da:

$$\phi = \frac{E''}{E'} = \eta \rightarrow \text{FATTORE DI PERDITA}$$

allora

$$\eta 2\pi = \psi$$

$$\rightarrow \eta = \frac{\psi}{2\pi}$$

2 canali di misura: Si impone una vibrazione forzata al sistema e si calcola il rapporto tra forza d'inerzia  $\times k$  non ne è influenzata. Trasmessa e spostamento

$$F(t) - m \ddot{x}(t) = kx + i c \dot{x}, \quad F(t) = f_0 e^{i\lambda t}$$

$$f_0 e^{i\lambda t} = k x_0 e^{i\lambda t} + i c \lambda x_0 e^{i\lambda t}$$

$$\frac{f_0}{x_0} = \text{Re} \left( (k + i c \lambda) \right) \frac{1}{m}$$

# POTENZA DISSIPATA = area di 1 ciclo

Considero solo la F. dovuta allo smorzamento c.  $x\dot{x}$  è l'unica dissipativa, le altre su un ciclo valgono 0.

$$\frac{dW}{dt} = F \cdot v = -c \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \underbrace{-c\dot{x}}_{F(t)} \cdot \underbrace{\dot{x}}_v$$

Se il moto è armonico posso calcolare l'energia dissipata in un ciclo come: (in un  $T = \frac{2\pi}{\lambda_d}$ )

$$\Delta W = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\lambda_d}} c \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} c X_0^2 \lambda_d \cos^2(\lambda_d t) d(\lambda_d t)$$



$$\Delta W = \pi c \lambda_d X_0^2$$

cambio variabile

$$dt = d(\lambda_d t)$$

**VISCOSO**

prova di linearità

- dipende dal quadrato dell'ampiezza
- dipende dalla  $\lambda_d$  (dalla frequenza) → non è costante anche se  $c = \text{cost.}$



la potenza dipende da

$$x(t) = x_0 \sin(\lambda_d t)$$

$$\dot{x}(t) = + \lambda_d x_0 \cos(\lambda_d t)$$

$$\int_0^{2\pi} c \cdot \dot{x} \cdot \dot{x} \cdot dt =$$

$$\int_0^{2\pi} c \cdot \lambda_d x_0^2 \cos^2(\lambda_d t) d(\lambda_d t) =$$

$$\boxed{\pi \cdot c \cdot \lambda_d \cdot x_0^2 = \Delta W}$$

Per ricavare lo smorzamento per tecnica: fare il rapporto tra l'energia del sistema:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi \cdot c \cdot \lambda_d \cdot X_0^2}{\frac{1}{2} m \lambda_d^2 X_0^2} = 2\delta$$



$$\delta = 2\pi\zeta$$

Nel caso di sistema smorzato, il moto armonico può esistere solo se viene fornito da una forzante a frequenza  $\lambda_d$ . La perdita di energia causata dallo smorzatore non potrebbe esserci se non venisse fornita l'eccitazione da una forzante



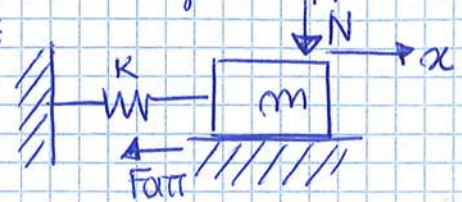
# SMORZAMENTO COULOMBIANO

19/01

chiamato anche "all'attrito secco" perché si usa l'attrito per dissipare energia. Secondo la legge di Coulomb, la  $F_{att}$  dipende solo dalla forza normale al contatto ed è indipendente dalla velocità e dallo spostamento. È costante in modulo e si oppone sempre al moto ( $\rightarrow$  a segno opposto).

$$F_{att} = \mu N = \text{cost}$$

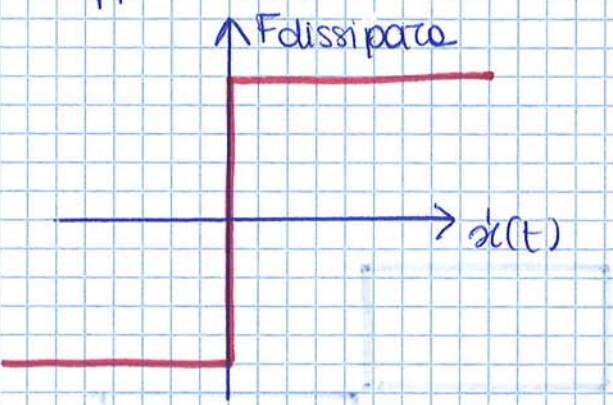
COEFF. di ATTRITO



sostituendo:

$$m \ddot{x}(t) + \mu N \operatorname{sgn}[\dot{x}(t)] + K x(t) = 0$$

È approssimabile ad una forza impulsiva o a gradino



$$m \ddot{x}(t) + K x(t) = \underbrace{\mu N \operatorname{sgn}[\dot{x}(t)]}_{\pm \text{ COSTANTE}}$$

OMOGENEA

$\pm$  COSTANTE

Si tratta di una forza dissipativa con eccitazione costante,  $\neq$  dalle forzanti armoniche.

Eq. da risolvere diventa:

$$m \ddot{x}(t) + K x(t) = D \quad (1)$$

$\hookrightarrow$  da risolvere con l'INTEGRALE PARTICOLARE

uso l'omogenea del sistema non smorzato anche se il mio sistema ha uno smorzamento coulombiano

• Le 2 eq. indicano che in ognuna delle 2 metà del ciclo otteniamo un moto armonico con posizione di equilibrio NON NULLA

• Al termine di ogni ciclo lo spostamento si riduce di

$$x_m = x_{m-1} - \frac{4\mu N}{K}$$

• L'area  $\neq$  cost, ma varia con l'ampiezza

• C varia per ogni tratto delle armoniche e  $\rightarrow \infty$ , posso calcolare il  $\zeta$ .

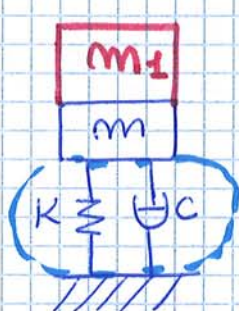
28 ottobre 2014

La presenza di un inviluppo esponenziale  $x = e^{-\sigma t}$  non mi permette di distinguere tra uno smorzamento strutturale o viscoso. L'unico modo che mi permette di distinguerli è cambiare la frequenza:

- S.S. VISCOSO  $\rightarrow$  varia al variare delle frequenze

- S.S. STRUTTURALE  $\rightarrow$  non varia al variare delle frequenze

Per cambiare la frequenza devo modificare il sistema e far variare la massa:



$$\rightarrow \lambda_n = \sqrt{\frac{K}{m+m_1}}$$

diminuisco la  $\lambda_n$  del sistema

$\rightarrow$  considerati nel  $K^*$  nel caso di uno SMORZAMENTO STRUTTURALE

$$K^* = K(1 + i\eta)$$

Il materiale del sistema ha un comportamento viscoso - elastico che racchiudo nel  $K^*$

Cambiando:

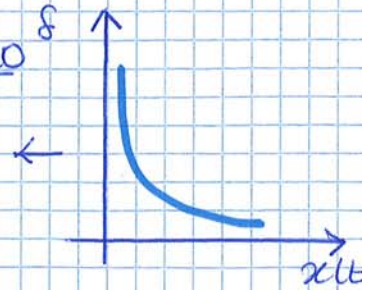
$$\lambda_n = \sqrt{\frac{K}{m+m_1}}$$

cambiano anche

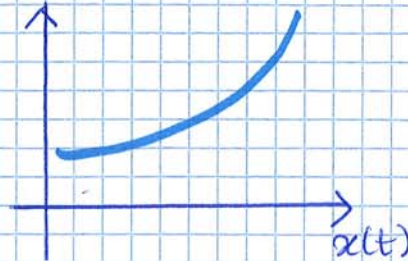
$$c_{crit} = 2\sqrt{K(m+m_1)} \quad e \quad \zeta = \frac{c}{c_{critico}}$$

## GRAFICO $\delta$ x uno smorzamento coulombiano

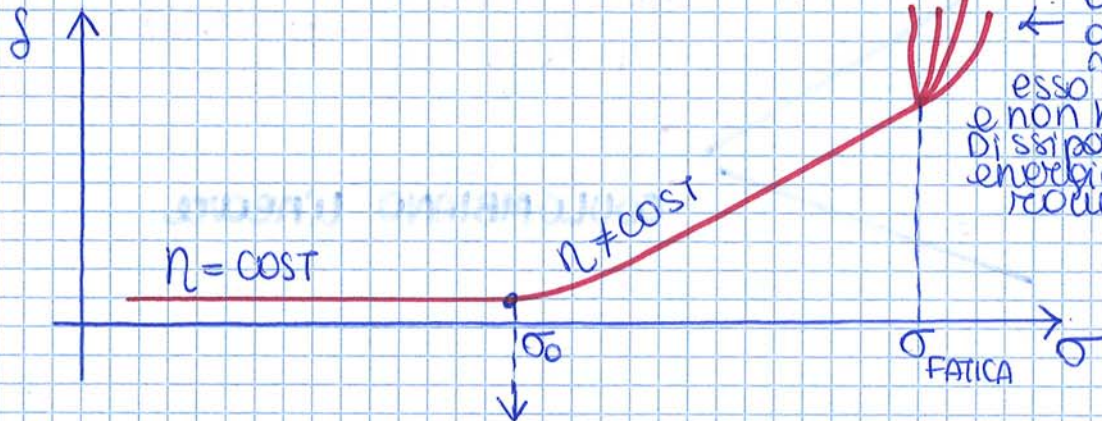
il valore di  $\delta$  aumenta al diminuire dell'ampiezza  $x_i$  di vibrazione



Nel CASO REALE si ha una  $\downarrow$  del  $\delta$  al diminuire dell'ampiezza di vibrazione  $x_i$ .



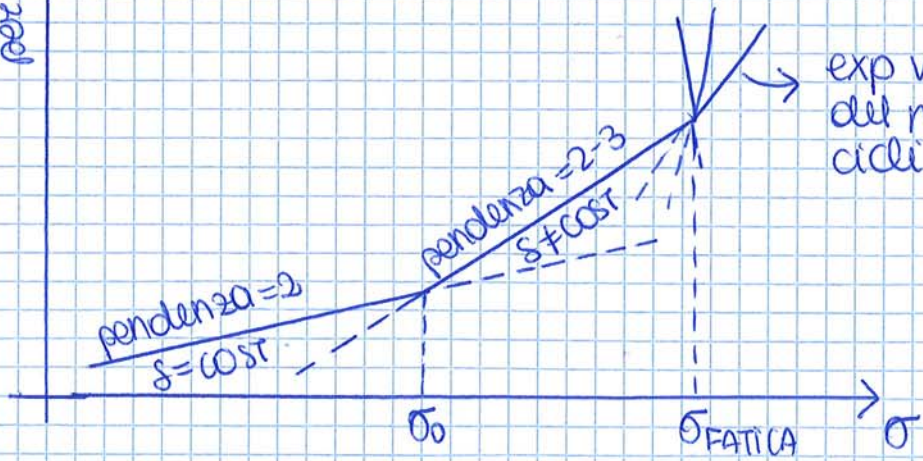
Questo significa che il materiale, in condizioni di carico + elevate (vicine allo snervamento) dissipa + energia di quanto faccia ai carichi + bassi.



← Oltre al limite di fatica del materiale, esso si danneggia e non ha + vita. Dissipa sempre + energia finché si recupera.

Energia dissipata per ciclo/volume

oltre ad un certo valore di tensione lo smorzamento aumenta ma non danneggia il materiale che ha ancora vita  $\infty$ , inizia a dissipare + energia



exp varia a seconda del numero dei cicli.

L' ECCITAZIONE IMPULSIVA è data dall' IMPULSO UNITARIO moltiplicato per un fattore  $I_0$  che ne determina l'ampiezza

$$F(t) = I_0 \delta(t)$$

**ECCITAZIONE  
IMPULSIVA**

$$[N] = [N_0] \left[ \frac{1}{s} \right]$$

Per ricavare la soluzione del sistema così sollecitato si può semplificare il problema pensando che se la  $F(t)$  è un' eccitazione impulsiva, il tempo in cui essa agisce è talmente breve che è possibile trascurare i contributi di tutte le altre forze agenti sulla massa (non considero né la massa né lo smorzatore).

Quindi la variazione della qdii corrisponde all'impulso di tutte le forze agenti sul sistema:

$$\frac{dq}{dt} = \vec{F}(t)$$

$$m v_2 - m v_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

↓  
impulso della forza

Se il sistema parte da fermo  $\rightarrow v_1 = 0$

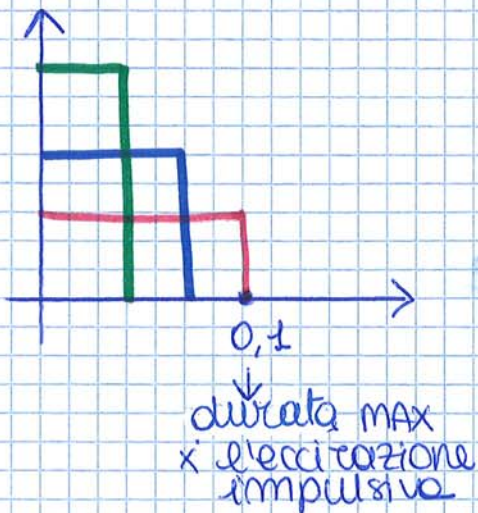
$$m v_2 = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

$$m \dot{x} = \int_{t_1}^{t_2} I_0 \delta(t) dt$$

$$m \dot{x} = I_0 \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt$$

$$m \dot{x} = I_0$$

L'eccitazione impulsiva non permette di conoscere ciò che succede durante l'eccitazione, ma solo ciò che succede nel sistema dal momento in cui riceve l'eccitazione in poi. Ciò che conta è l'integrale della forza  $\int_0^t f(t) dt$ , cioè l'impulso. Esso potrebbe corrispondere ad un'area qualunque che non è possibile conoscere.



→ sono tutti casi equivalenti il cui integrale mi dà lo stesso valore di  $I_0$ , ma corrispondono ad aree diverse

$$\int = \int = \int = I_0$$

SISTEMA CON ECCITAZIONE IMPULSIVA SOTTOSMORZATO

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\underbrace{\lambda_n \sqrt{1-\zeta^2}}_{\lambda_D} t)$$

SISTEMA CON ECCITAZIONE IMPULSIVA SOVRASMORZATO

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ -e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\lambda_n t} + e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\lambda_n t} \right\}$$

SISTEMA CON ECCITAZIONE IMPULSIVA SMORZATO CRITICAMENTE

$$h(t) = \lambda_n t e^{-\lambda_n t}$$

**SOLUZIONE COMPLETA SISTEMA CON ECCITAZIONE IMPULSIVA**

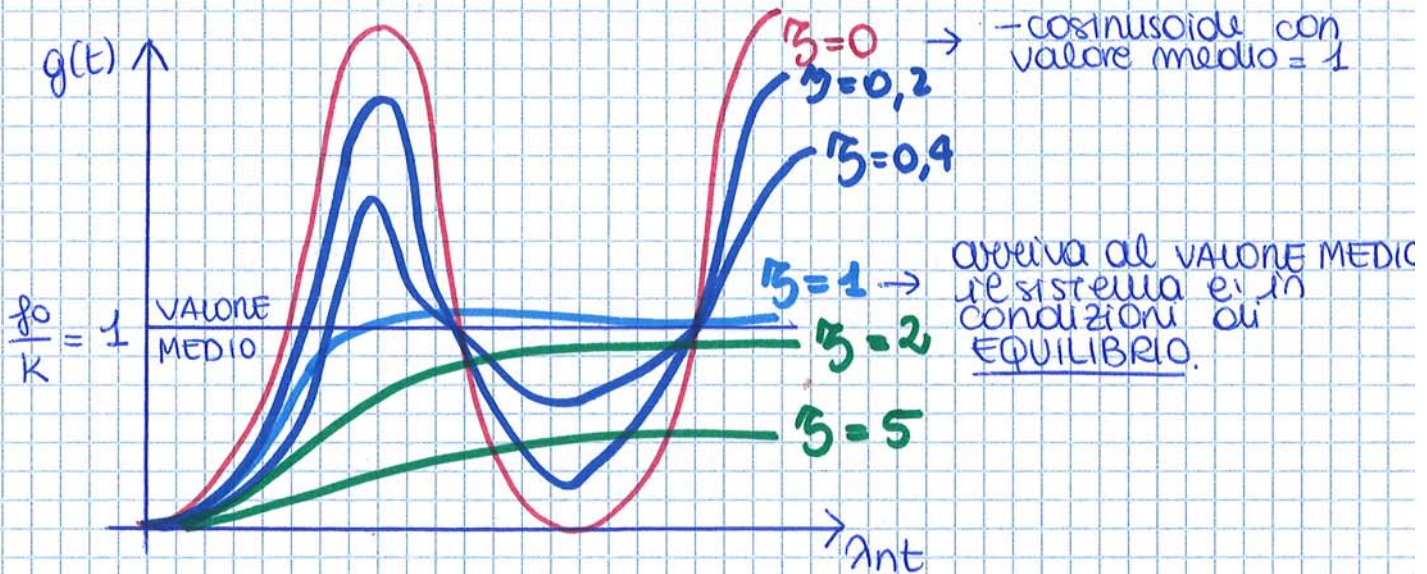
$$x(t) = \frac{I_0}{m\lambda_n} h(t)$$

Imponendo le c.i. e raccogliendo, può essere semplificata

$$\alpha(t) = \frac{f_0}{K} g(t)$$

**SOLUZIONE COMPLETA**  
CONTENENTE LA RISPOSTA  
ALL'ECITAZIONE A GRADINO

RISPOSTA ALL'ECITAZIONE  
A GRADINO



SISTEMA CON ECITAZIONE A GRADINO SOTTOSMORZATO

$$g(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left[ \cos(\lambda_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\lambda_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right]$$

SISTEMA CON ECITAZIONE A GRADINO SOVRASMORZATO

$$g(t) = 1 - \frac{1}{2} \left[ e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \lambda_n t} + e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \lambda_n t} \right]$$

SISTEMA CON ECITAZIONE A GRADINO SMORZATO CRITICAMENTE

$$g(t) = 1 - (1 + \lambda_n t) e^{-\lambda_n t}$$

**⚠ Osservazione:**

l'applicazione di una forza, anche statica, come in questo caso, ad un sistema in quiete, fa sì che le sollecitazioni si duplichino, e raddoppia → questo effetto è particolarmente evidente per  $\zeta=0$ .

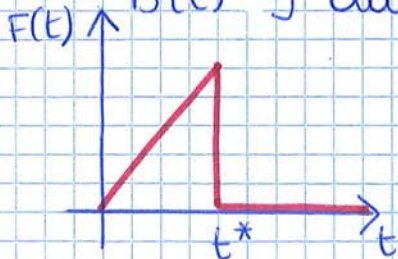
Nel caso di sistema sottosmorzato la risposta del sistema è

$$x(t) = A(t) \sin(\lambda_p t) - B(t) \cos(\lambda_p t)$$

$$A(t) = \frac{1}{m\lambda_p e^{\sigma t}} \int_0^t F(\tau) e^{\sigma \tau} d\tau$$

$$B(t) = \frac{1}{m\lambda_p e^{\sigma t}} \int_0^t F(\tau) e^{\sigma \tau} \sin(\lambda_p \tau) d\tau$$

$A(t)$  } sono 2 coefficienti che dipendono  
 $B(t)$  } dal tempo.



$t > t^* \rightarrow A = \text{cost} = A(t^*)$  }  $x(t)$  è dato da  
 $B = \text{cost} = B(t^*)$  } contributo di  
 un'unica armonica.

$t < t^* \rightarrow A(t) \neq \text{cost}$  }  $x(t)$  è dato da  
 $B(t) \neq \text{cost}$  } contributo di +  
 armoniche

## TRASFORMATE DI LAPLACE E FdT

Per studiare una  $F(t)$  generica posso passare dal dominio del tempo a quello di Laplace e lavorare quindi nel dominio della FREQUENZA  $\rightarrow F(s)$ . Così facendo si rimuove la periodicità della funzione, e' come se avesse periodo  $\infty$ . L'eq. differenziale diventa un'eq. algebrica con  $s = i\lambda$ .

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

,  $s =$  variabile complessa  $= i\lambda$

↑  
 trasformata di  
 Laplace

È possibile riscrivere l'eq. del moto del sistema lineare ad 1 GdL nel dominio di Laplace, ma anche le funzioni  $f(t)$  + comuni, perché sono tabulate. Una volta trovata la risposta del sistema nel dominio della frequenza è necessario riconvertirla nel dominio del tempo. SI PUÒ RICORRERE A LAPLACE SOLO PER EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

- FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE → serve per verificare che sia veramente RANDOM:  $F(t) \neq F(t+\tau)$

$$\Psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) F(t+\tau) dt$$

esprime quanto il valore in  $F(t)$  è correlato con il valore  $F(t+\tau)$ . Nel caso di un fenomeno IDEALE:

$$\Psi(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ F_{rms}^2, & \tau = 0 \end{cases}$$

La Trasformata di Fourier della  $\Psi(\tau)$  è la DENSITA'

- SPETTRALE DI POTENZA

$$\mathcal{F}\{\Psi(\tau)\} = S(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\tau) e^{i\lambda\tau} d\tau$$

$$\int_0^{\infty} S(\lambda) d\lambda = F_{rms}^2$$

La  $S(\lambda)$  è la funzione che serve per capire la RAPIDITA' con cui varia la FORZA, fondamentale per ricavare le frequenze delle vibrazioni che produce.

La DENSITA' di PROBABILITA' delle ampiezze serve per capire come sono distribuiti i valori di forza.



### FUNZIONI PER CONOSCERE L'ECITAZIONE DELLE VIBRAZIONI RANDOM

Devo avere 2 FUNZIONI perché, per ottenere un segnale nel dominio del tempo a partire da un segnale nel dominio della frequenza devo fare l'antitrasformata.

Tuttavia Fourier è un NUMERO COMPLESSO, con una Re e una Im, per cui devo avere 2 funzioni, per poter definire il segnale nel dominio del tempo in maniera univoca.

$S(\lambda)$  mi permette di ricavare la parte Re.

Si misura in  $\left[ \frac{N^2}{Hz} \right]$  o in  $\left[ \frac{g^2}{Hz} \right]$

↑  
FORZA ECITATRICE

↑  
MOTO VINCOLO



Se l'eccitazione casuale è:

- stazionaria
- ergodica
- gaussiana

allora il sistema è completamente caratterizzato e, a partire dalle sue FdF, posso ricavare la risposta del sistema che ha le stesse caratteristiche di stazionarietà, ergodicità e distribuzione normale della causa eccitatrice.

La  $S_x(\lambda)$  si calcola ricorrendo alle FdF del sistema  $H(\lambda)$

$$S_x(\lambda) = S_F(\lambda) |H(\lambda)|^2$$

$x(t)$  è un sistema  
FORZATO da una  
eccitazione random

Da cui il valore  $x_{RMS}$ :

$$x_{RMS} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_x(\lambda) d\lambda}$$

Un sistema lineare ad 1 GdL può essere approssimato, per il proprio comportamento, ad una specie di filtro passa-banda, con banda: passante tanto + stretta quanto è smorzato. Esso tende a concentrare la sua risposta in frequenza intorno alla propria frequenza di risonanza, il segnale in uscita, cioè la risposta del sistema, infatti, è sempre molto diverso dal segnale in ingresso, cioè la causa eccitatrice.

Per lo studio delle oscillazioni libere, dato che le eq. OMOGENEE sono identiche, si può usare sia il riferimento INERZIALE che quello NON-INERZIALE

## OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = 0$$

{ sistema di eq. differenziali omogenee del 2° ordine

Dato che almeno una delle 2 matrici non è diagonale, allora le soluzioni sono ACCOPPIATE. Per disaccoppiare le soluzioni dovrei avere tutte matrici diagonali.

La soluzione è del tipo:

$$\{x\} = \{x_0\} e^{i\lambda t} = \{q_i\}$$

da cui derivando:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= \lambda \{x_0\} e^{i\lambda t} \\ \{\ddot{x}\} &= -\lambda^2 \{x_0\} e^{i\lambda t} \end{aligned}$$

sostituisco:

$$\lambda^2 [M] \{x_0\} e^{i\lambda t} + [K] \{x_0\} e^{i\lambda t} = 0$$

$$\{x_0\} (-[M] \lambda^2 + [K]) = 0$$

oltre alla soluzione banale  $\{x_0\} = 0$ , per trovare le soluzioni, devo pre moltiplicare per  $[K]^{-1}$  e otterrò:

$$\{x_0\} [K^{-1}] (-\lambda^2 [M] + [K]) = 0$$

divido per  $\lambda^2$ :

$$\{x_0\} \left( [M] [K^{-1}] + \frac{1}{\lambda^2} \frac{[K]}{[K^{-1}]} \right) = 0$$

$$\{x_0\} \left( [M] [K^{-1}] + \frac{1}{\lambda^2} [I] \right) = 0$$

↑ matrice identità  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

Gli AUTOVALORI sono i quadrati delle pulsazioni proprie del sistema  $\lambda^2$  e dei loro reciproci  $\frac{1}{\lambda^2}$ .

Risolve l'autoproblema in forma canonica per trovare gli autovalori.

Dall'autoproblema ricavo  $n$  autovalori, che sono le  $n$  frequenze naturali del sistema, ne ho tante quanti i GdI

AUTOVALORI =  $\lambda_n$  = frequenze naturali del sistema

Sostituendo gli autovalori ( $\lambda_n$ ) trovati in:

$$\{x_0\}(-\lambda^2[M] + [K]) = 0$$

Trovo i corrispondenti valori di  $\{x_0\}$

$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \cdot \{x_0\} \\ \lambda_2 \cdot \{x_0\} \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot \{x_0\} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{FORME MODALI} = \text{ampiezze delle oscillazioni del sistema}$   
 $\rightarrow \text{AUTOVETTORI} = \lambda \cdot \{x_0\}$   
 $\downarrow$   
 il moto dei punti del sistema è vincolato dal moto di un punto che si muove ad una cotta  $\lambda_n$ . RAPPRESENTANO LE  $n$  FORME MODALI DEL SISTEMA

Gli autovalori sono numeri  $\mathbb{R}$  e  $\oplus$ , quindi anche tutte le frequenze naturali sono numeri  $\mathbb{R}$ .

ES:

$\lambda_1 = 5 \text{ rad/s} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ -x_1 \end{Bmatrix} e^{i\lambda t} \rightarrow$  i 3 punti si muovono in fase e oscillano tutti a  $\lambda_1$   
 $\uparrow$   
 $\{x_0\}$

2 dicembre 2014

Dato che si è ipotizzata una soluzione del tipo

$$\{x\} = \{x_0\} e^{i\lambda t} = \{q_i\}$$

allora il sistema si muoverà di moto armonico non SMORZATO.

# DISACCOPPIAMENTO DELLE EQ. DEL MOTO

2/10/17

Lo  $[\phi]$  non è univoca, definisce la forma della deformazione, ma ne  $\exists$  di  $\infty$ , quindi  $\times$  definire la deformazione c'è bisogno di una costante,  $\times$  ricavare l'ampiezza della deformazione. Con il disaccoppiamento delle eq. del moto si cerca una trasf. di coordinate  $\times$  trasformare le  $n$ -eq. accoppiate in  $n$ -eq. disaccoppiate  $\rightarrow$   $\times$  farlo devo rendere **DIAGONALI** tutte le matrici che compaiono nel moto. Ho bisogno degli **AUTOVALORI** e degli **AUTOVETTORI**. In questo modo, cioè con il disaccoppiamento, riduco il n° di GdL del sistema  $\times$  dopo avere disaccoppiato scelgo un certo n° di GdL, gli altri non li considero.

Una proprietà degli **AUTOVETTORI** è quella di essere **ORTOGONALI** non tra di loro ma rispetto a  $[K]$  e a  $[M]$

## DIMOSTRAZIONE ORTOGONALITÀ VETTORI

Partendo da:

$$(-\lambda^2 [M] + [K]) \{x_0\} = 0$$

$\rightarrow$  soluzione scritta per l' $i$ -esimo modo

$$[K] \{x_0\} = +\lambda^2 [M] \{x_0\}$$

$$[K] \{q_i\} = [M] \lambda_i^2 \{q_i\}$$

, con  $q_i = x_0 \cdot e^{i\lambda t}$

$\downarrow$   
un autovalore vincola tutti gli autovettori

Premoltiplico per  $\{q_j\}^T =$  trasposta del  $j$ -esimo autovettore

$$\{q_j\}^T [K] \{q_i\} = \{q_j\}^T [M] \lambda_i^2 \{q_i\}$$

So che  $[K]$  è simmetrica, quindi potrei anche partire dal  $j$ -esimo autovettore  $\{q_j\}$  e premoltiplicare per l' $i$ -esimo autovettore trasposto  $\{q_i\}^T$  e avrei:

$$\{q_i\}^T [K] \{q_j\} = \{q_i\}^T [M] \lambda_j^2 \{q_j\}$$

La matrice  $[\bar{K}]$  delle rigidità modali si ottiene da:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\bar{K}] \rightarrow \text{contiene le } i\text{-esime rigidità modali, e' una matrice diagonale}$$

A questo punto posso effettuare il cambio di coordinate per semplificare il mio modello a + GdL, usando la matrice degli autovettori

$$\{x\} = [\Phi] \{\eta\}$$

$$\{\eta\} = [\Phi]^{-1} \{x\}$$

In questo modo cambio la base dello spazio delle configurazioni,  $\{\eta\}$  = è la combinazione lineare dei modi propri della deformazione.

In questo modo posso esprimere il vettore  $\{x\}$  di n-dimensioni che esprime la deformazione del sistema come una sovrapposizione dei vari modi ( $\rightarrow$  autovettori contenuti nella  $[\Phi]$ ) che si combinano linearmente e che sono moltiplicati per n-coefficienti di proporzionalità  $\{\eta\}$

Da sola  $[\Phi]$  esprime la deformazione del sistema, ma non è univoca, deve essere definita a meno di una costante  $\{\eta\}$  = vettore dei coeff. degli elementi del vettore  $\{x\}$ .

Gli autovettori sono n-vettori che possono essere usati come sistema di riferimento.

$\{\eta\}$  contiene le coordinate del punto che rappresenta la configurazione del sistema espresse nel sistema di riferimento degli autovettori

$\rightarrow$  **COORDINATE principali o modali o normali**

Sostituendo le coordinate modali  $\{x\} = [\Phi] \{\eta\}$ , l'eq. del moto diventa:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = 0$$

$\downarrow$

$$[M] [\Phi] \{\ddot{\eta}\} + [K] [\Phi] \{\eta\} = 0$$

Ogni autovettore è un insieme di n vettori nello spazio delle configurazioni. Di ogni autovettore si conosce la DIREZIONE, ma non la LUNGHEZZA → devo definire delle scale con le quali NORMALIZZARLI, e poterli visualizzare

## SCALE DI NORMALIZZAZIONE

dell'autovettore

1° SCALA → impongo che un certo elemento  $V$  assuma valore unitario, pongo una componente = 1.

→ impongo uguale all'unità il massimo valore dell'autovettore

2° SCALA → normalizzo ciascun elemento dell'autovettore dividendolo per la radice quadrata della somma dei suoi elementi al quadrato

$$\propto \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} \right)$$



DEFINISCO I VERSORI DEGLI ASSI

3° scala → normalizzo gli autovettori in modo da ottenere  $\bar{M}_i$  unitarie:

$$\{q_i\}^T [M] \{q_i\} = 1$$



ORTONORMALIZZAZIONE

Con l'ortonormalizzazione ogni  $\bar{M}_i$  diventa = 1, pertanto la  $[M]$  diventa la matrice identità  $[I]$  poiché ogni suo elemento è stato posto a 1.

Se  $\bar{M}_i = 1$ , dato che  $\lambda_i = \sqrt{\frac{R_i}{\bar{M}_i}}$ , allora risulta che

$$\begin{cases} \bar{M}_i = 1 \\ R_i = \lambda_i^2 \end{cases}$$

Ogni eq. è della forma:

$$\bar{M}_i \ddot{\eta}_i + \bar{K}_i \eta_i = \underbrace{\{q_i\}^T \{F(t)\}}_{\bar{F}_i(t)}$$

$\bar{F}_i(t) \rightarrow$  FORZA MODALE

Se orthonormalizzo gli autovettori  $\begin{cases} \bar{M}_i = 1 \\ \bar{K}_i = \lambda_i^2 \end{cases}$

$$\ddot{\eta}_i + \lambda_i^2 \eta_i = \bar{F}_i(t)$$

### APPROCCIO A UN SISTEMA NON SMORZATO

- 1) risoluzione autoproblema calcolando  $[\lambda^2]$  e  $[\Phi]$
- 2) calcolo  $\bar{F}_i$
- 3) risoluzione n-equazioni  $(\ddot{\eta}_i + \lambda_i^2 \eta_i = \bar{F}_i(t))$  a 1 GdL in coordinate MODALI
- 4) combinazione delle n-soluzioni ottenute, sostituendo

$$\{x\} = [\Phi] \{\eta\}$$

in coordinate CARTESIANE

Questo approccio, non solo permette di risolvere il problema passando a n-eq. disaccoppiate tra di loro, ma soprattutto di semplificarlo, poiché riduce il n° di GdL considerati. Solo i modi propri con una frequenza bassa sono rilevanti al fine del calcolo, gli altri possono essere eliminati. Considero solo i primi m-modi, calcolo solo i primi m-autovalori e m-autovettori. La risposta sarà data dalla combinazione dei primi m-modi.

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^m \eta_i(t) \{q_i(t)\}$$

$[\Phi]^*$   $\rightarrow$  matrice degli autovettori RIDOTTA  
n x m

# OSCILLAZIONI LIBERE CON SMORZAMENTO VISCOSO

22/10/1

L'eq. del sistema è:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

con  $\{x\} = \{x_0\} e^{i\lambda t}$  come soluzione ( $\{x_0\}$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ )

Sostituendo si ottiene che:

$$(-\lambda^2 [M] + i\lambda [C] + [K]) \{x_0\} = \{0\}$$

L'eq. di stato semplificata è:

$$\{\dot{z}\} - [A] \{z\} = 0$$

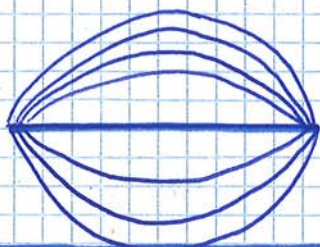
Assumendo come soluzioni  $\{z\} = \{z_0\} e^{st}$  e sostituendole:

$$([A] - s[I]) \{z_0\} = 0$$

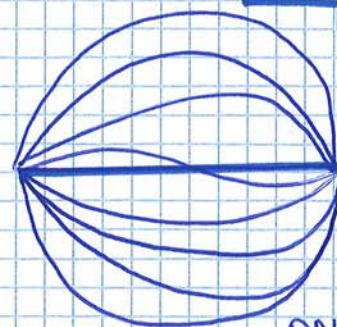
dalle quale si possono esprimere gli autovalori  $s$ ,  $2a$   $z$  coniugati, e le forme modali  $\phi \{z\}$

Essendo un sist. SMORZATO gli autovalori sono COMPLESSI. Dopo aver definito le velocità di decadimento e le frequenze delle oscillazioni libere si osserva che essendo COMPLESSE la massima ampiezza non si raggiunge contemporaneamente in tutti i punti. Il moto non è definibile come un'ONDA STAZIONARIA e non possiede FORME MODALI, la deformata che descrive il moto cambia.

onda STAZIONARIA



autovettore  $Re \rightarrow$  rappresentatore di una curva PIANA che non cambia



autovettore  $\phi$

rappresentatore di una curva SGHEMBA di RUOTE

onda NON STAZIONARIA



# OSCILLAZIONI LIBERE CON SMORZAMENTO STRUTTURALE

L'eq. del moto di un sistema con smorzamento strutturale è

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([K'] + [K'']i)\{x\} = \{0\}$$

dove  $[K']$  e  $[K'']$  sono la Re e la  $i$  della  $[K^*]$ .  
Il loro rapporto è pari al Fattore di perdita  $\eta$

$\eta = \frac{[E'']}{[E']}$ . Ipotesizzando una soluzione del tipo  $\{x\} = \{x_0\}e^{i\lambda t}$ , si ottiene

$$(-\lambda^2 [M] + i[K''] + [K'])\{x_0\} = \{0\}$$

Se  $\eta = \text{cost}$ , allora  $[E''] = \eta [E']$  e le 2 matrici sono PROPORZIONALI. Per questo posso scrivere:

$$[M]\{\ddot{x}\} + (1+i\eta)[K]\{x\} = 0$$

Questa eq. può essere disaccoppiata ricorrendo alle matrici modali e coincide con l'eq. di un sistema a 1 GdL con smorzamento strutturale.

# OSCILLAZIONI FORZATE CON SMORZAMENTO PROPORZIONALE

A differenza dei sistemi NON SMORZATI, nonostante la presenza di una forzante armonica in fase, la risposta del sistema non è FASATA, pertanto la deformata è la proiezione sul piano Re di una curva sghemba che ruota ad una velocità  $\lambda$ . Non è possibile identificare dei nodi o dei ventri in maniera univoca, perché la curva non è stazionaria e varia di continuo.

Posso riscrivere l'eq. del moto

$$[\bar{M}] \{\ddot{\eta}\} + [\bar{C}]_p \{\dot{\eta}\} + [\bar{C}]_{np} \{\dot{\eta}\} - [\bar{K}] \{\eta\} = \{F(t)\}$$

$$[\bar{M}] \{\ddot{\eta}\} + [\bar{C}]_p \{\dot{\eta}\} + [\bar{K}] \{\eta\} = \{F(t)\} - [\bar{C}]_{np} \{\dot{\eta}\}$$

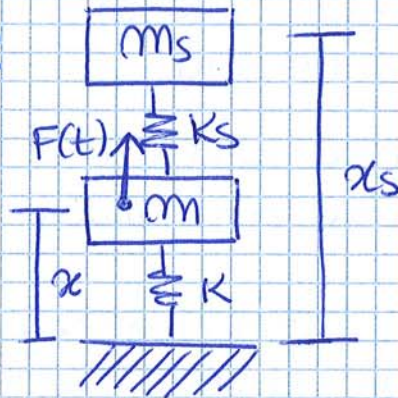
che si risolve in maniera iterativa:

- 1) trascuro  $[\bar{C}]_{np}$  e trovo la soluzione  $\{\eta(t)\}^{(0)}$
- 2) sostituisco  $\{\eta(t)\}^{(0)}$  a 2° membro e ricalcolo la soluzione
- 3) procedo fino a quando la differenza tra le soluzioni non è minore di un valore prefissato.

## SMORZATORE DINAMICO

È un sistema massa/molla o massa/molla/smorzatore appiuntiti al sistema a ridurre le vibrazioni.

### • NON SMORZATO



L'eq. del moto diventano:

$$m_s \ddot{x}_s + K_s (x_s - x) = 0$$

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_s + K_s (x - x_s) + Kx &= f_0 \\ \rightarrow m \ddot{x}_s + (K_s + K)x - K_s x_s &= f_0 \end{aligned}$$

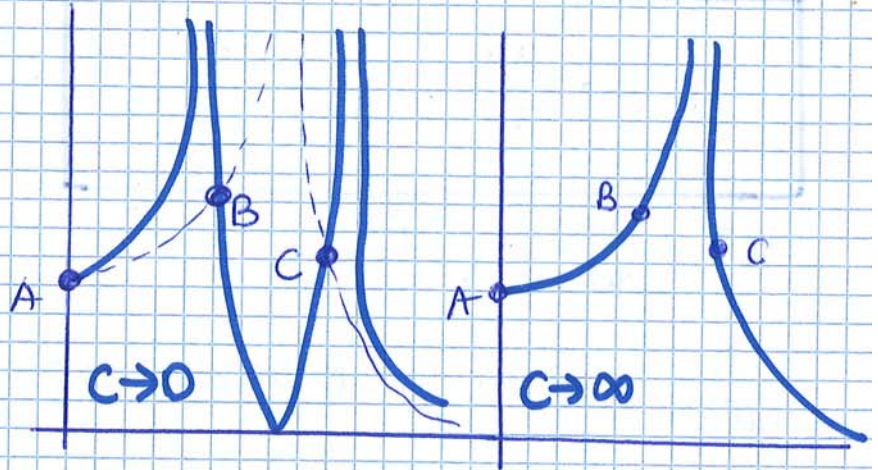
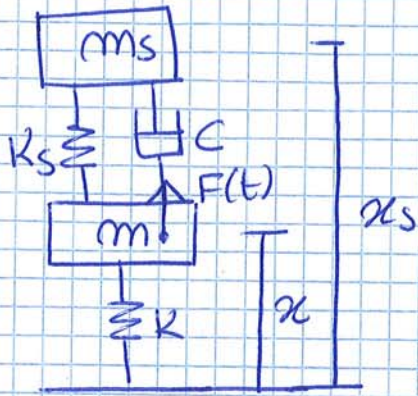
$$\left[ -\lambda^2 \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & -K_s \\ -K_s & K_s + K \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} x_s \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 \end{Bmatrix}$$

Pongo  $\mu = \frac{m_s}{m}$

RAPPORTO MASSE

e  $\chi = \frac{K_s}{K}$

RAPPORTO RIGIDEZZE



se  $c \rightarrow 0$ , si ricade nel caso precedente

se  $c \rightarrow \infty$ , si ricade nel caso di un sistema non smorzato o 1 GdL, con massa =  $m+m_s$  e rigidità  $k$ .

Le curve passano sempre da A, B, C

Nel caso di  $c \uparrow$ , ho un solo massimo

$c \downarrow$ , ho 2 massimi, uno a dx di C, uno a sx di B.



di solito il sistema si sintonizza, abel si sceglie  $k_s$  in modo da far cadere i massimi in B e C.