centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1578A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Girardi

MATERIA: Biomeccanica dei Fluidi + temi + Eserc. Prof.Gallo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 346

IDROSTATICA

BIOMECCANICA FLUIDI
Prof. GALLO
Eleonora Girardi

ESAME: 2 esercizi (8 punti) (Bilanci e Bernoulli)
2 ORE 2 domande teoria (8 punti)
con correzione alla fine

26 NOVEMBRE } Laboratori
3 DICEMBRE }

14 GENNAIO simulazione d'esame

LIBRO: "Fenomeni di trasporto" Bird, Lightfoot

DOMANDE:

1- Enunciare la legge Newtoniana della viscosità e indicare le ud.m ✓
2- Sforzo viscoso di taglio, definire i termini tensoriali ✓
3- Descrivere almeno un modello di fluido non Newtoniano ✓
4- Bilancio di strato per un fluido cadente ✓
5- Pressione, temperatura e viscosità ridotta?
6- Derivate euleriane e lagrangiane. ✓
7- Eq. continuità x fluidi comprimibili e incomprimibili ✓
8- Eq. della qdm. ✓

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 346

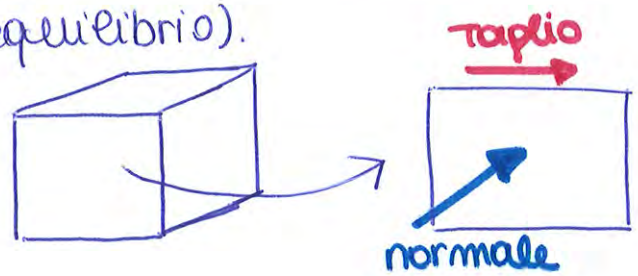
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 346

Generalità sui fluidi:definizione

- Una delle caratteristiche di un corpo solido è di avere forma propria, mentre una sostanza liquida o gassosa assume la forma del recipiente che la contiene
- A una tale sostanza ci si riferisce con il nome di **FLUIDO**
- I liquidi sono limitati da una superficie definita, che racchiude un volume definito, sia essa la superficie di contatto con il recipiente o sia una superficie libera che separi il liquido in questione da un gas o un altro liquido.
- I gas tendono ad occupare tutto lo spazio consentito dal recipiente, adottando come superficie limite quella del recipiente stesso.

I fluidi non hanno un volume proprio
solidi e fluidi hanno risposte alle forze esterne diverse:
I solidi hanno legami e una struttura in grado di opporsi e dare resistenza, i fluidi non riescono ad opporsi

*Definiamo FLUIDO un mezzo continuo (> della scala molecolare) nel quale in equilibrio (= in condizioni statiche) gli sforzi siano sempre normali alle rispettive superfici, ovvero che non possa sopportare sforzi di taglio senza deformarsi x scorrimento (= perdere l'equilibrio).



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 346

Generalità sui fluidi:peso specifico

- Nel campo gravitazionale terrestre, possiamo considerare il **peso specifico** che è direttamente dipendente dalla densità , definito come il rapporto tra il peso di un corpo ed il suo volume. Esso è:

$$\gamma = \rho g = \frac{mg}{V}\left[\frac{N}{m^3}\right] = \frac{\text{peso di un corpo}}{\text{volume}}$$

S.I.

$$\frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$

cgs $\left[\frac{dyn}{cm^3}\right] = 10\frac{N}{m^3}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 346

Generalità sui fluidi: Comprimibilità

- In alcuni casi viene usato l'inverso di E che è chiamato **coefficiente di comprimibilità** o di compressibilità

$$\beta = \frac{1}{E}$$

- Nel caso dei liquidi ~~E~~ β assume dei valori estremamente elevati, ($E = 2.15 \cdot 10^9$Pa per l'acqua) indicando che per variazioni di pressione limitate si hanno variazioni di volume praticamente trascurabili, da cui la considerazione dei liquidi come incomprimibili.

$\beta\uparrow$ per i liquidi = se $p\uparrow$ molto, il volume varia poco

$\beta\downarrow$ per i gas

I valori di E giustificano l'ipotesi di <u>fluidi INCOMPRIMIBILI</u>.

COEFFICIENTE DI DILATAZIONE DI VOLUME

$$\boxed{\alpha_V = \frac{\Delta V / V}{\Delta T}}$$

→ i liquidi si dilatano con l'aumento della temperatura, tranne che per l'acqua.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 346

Generalità sui fluidi

- Sino ad ora abbiamo passato in rassegna alcune proprietà evidenziando le diversità tra liquidi e gas.
- Tali differenze sono dovute alla diversa forza dei legami tra atomi e molecole nella fase liquida e quella gassosa.
- Tuttavia è possibile trattare in modo unificato le proprietà meccaniche di liquidi e gas

Forze intermolecolari deboli ≠ tra liquidi e gas (ponte H nell' H_2O e Van der Wals nei gas)

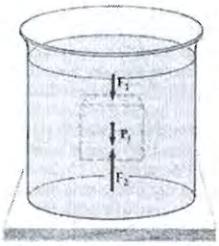
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 346

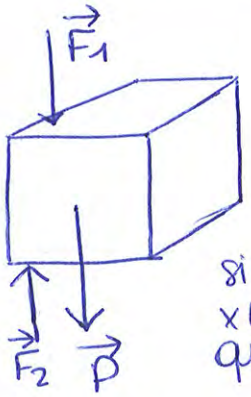
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 346

Generalità sui fluidi

- Non si può parlare di forza applicata in un punto: per ciascun elemento di massa dm si considerano le forze di volume e forze di superficie

forza peso — pressioni





si equilibrano xk e' in quiete

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{P}$$

11

La forza che un fluido esercita sull'elemento di superficie $\vec{S}$ e':

$$\boxed{\vec{F} = p\vec{S}}$$

$\vec{S}$ = vettore normale alla superficie, con $|S|$ = area della superficie

p = scalare, coeff. di proporzionalita' tra $\vec{F}$ e $\vec{S}$, pressione, quindi $\vec{F}$ e $\vec{S}$ hanno la stessa direzione, quindi $\vec{F}$ agisce $\perp$ alla superficie.

$$\boxed{p = \frac{F}{S}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 346

Pressione (unità di misura)

- L'unità di misura della pressione è il pascal (Pa), pari a $1 N/m^2$.

S.I. $1Pa = 1\frac{N}{m^2}$ C.g.s $= 1\frac{dyn}{cm^3} = 0,1\ Pa$

- Un multiplo importante è il bar, il cui valore è molto vicino a quello della pressione atmosferica.

$$1bar = 10^5 Pa$$

$$p_{atm} = 1.01325 \cdot 10^5 Pa = 1.01325\ bar$$

1 mmHg = 1 Torr = 133,22 Pa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 346

Pressione

L'equilibrio lungo gli assi orizzontale e verticale richiede

$$F_c = p_c ch = F_a cos\theta = p_a ahcos\theta$$

$$F_b = p_b bh = F_a sen\theta = p_a ahsen\theta$$

Essendo c = a cosθ e b = a senθ, si vede che

$$p_a = p_b = p_c$$

indipendentemente dal valore delle aree e dell'angolo.

$c = a \cdot \cos\theta$

$b = a \cdot sen\theta$

Sostituendo nell' equilibrio:

↑ $p_c \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{\cos\theta} \cdot \cancel{h} = p_a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{\cos\theta} \cdot \cancel{h}$

$$\boxed{p_c = p_a}$$

→ $p_b \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{sen\theta} \cdot \cancel{h} = p_a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{sen\theta} \cdot \cancel{h}$

$$\boxed{p_b = p_a}$$

$$p_b = p_c = p_a$$

La p non dipende dall'orientazione delle superfici.
Si può parlare di pressione sul generico punto P senza specificare la superficie su cui la pressione agisce.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 346

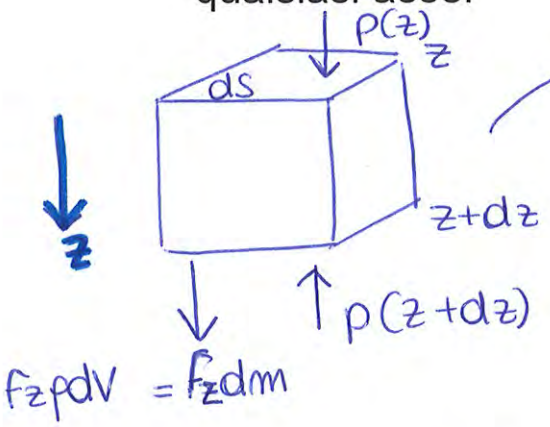
Equilibrio statico di un fluido

- Domanda: come varia la pressione all'interno di un fluido in quiete in funzione della posizione?

- DEFINIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO: in un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale → le forze agenti devono avere risultante uguale a zero
- Sull'elemento dm di fluido agiscono forze di pressione $\mathbf{F_p}$ e forze di volume $\mathbf{F_v}$ per cui deve essere

$$\mathbf{F_p} + \mathbf{F_v} = 0$$ → siamo all'equilibrio

e ovviamente è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse.



→ consideriamo le F_p e le F_v

17

eqe ↑ $\quad p(z)ds - p(z+dz)ds + f_z \rho dV = 0$

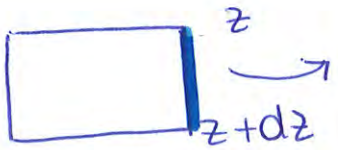
↓ Taylor

$$* \; ds\left[\cancel{p(z)} - \left(\cancel{p(z)} + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right)\right] + f_z \rho dV = 0$$

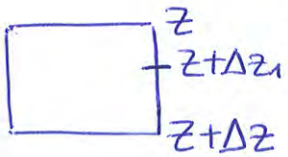
$$-\frac{\partial p}{\partial z} \underbrace{dz\,\cancel{ds}}_{dV} + f_z \rho \cancel{dV} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + f_z \rho = 0$$

---

* 

$\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz$



Ex: $p(z) = 0$ Pa

$\frac{\Delta p}{\Delta z_1} = 10$ Pa

$\frac{\Delta p}{\Delta z_1} \cdot 5z_1 = 50$ Pa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 346

Equilibrio statico di un fluido

La condizione di equilibrio si scrive

$$-\frac{\partial p}{\partial z}dV + f_z \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \rho$$

Relazioni analoghe si ottengono lungo gli assi x e y per cui la condizione di equilibrio statico di un elemento di fluido è dato da

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \rho \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \rho \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \rho}$$

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO DI UN FLUIDO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 346

Equilibrio statico di un fluido

Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa, possiamo scrivere dividendo per la massa considerando come forza di volume l'energia potenziale:

$$\mathbf{f} = -\nabla E_{p,m}$$

dove $E_{p,m}$ rappresenta l'energia potenziale per unità di massa. In condizioni di equilibrio statico vale, sostituendo:

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} = -\rho \nabla E_{p,m}$$

Il gradiente di pressione ha la stessa direzione e verso opposto del gradiente dell'energia potenziale. Le superficie equipotenziali coincidono con le superficie isobariche

La ↓ dell' Ep corrisponde ad un ↑ della pressione

21

FLUIDO IN EQ. STATICO

$$\nabla p = \rho F$$

se F_v e' conservativa

$$\nabla p = -\rho \nabla E_{pot.}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 346

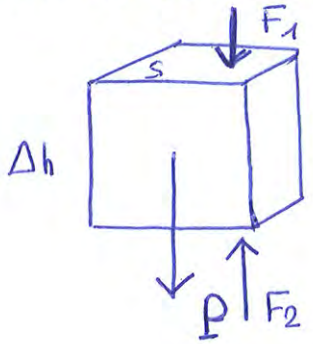
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 346

Legge di Stevino

- Consideriamo in particolare un liquido in un contenitore e sia p_0 la pressione sulla superficie limite del liquido, dove $z_2=0$ e $p_2=p_0$.
- Alla profondità $z_1=-h$ ($h>0$) in base alla legge di variazione della pressione
- Questa relazione si chiama **legge di Stevino** e mostra che in un liquido con densità costante la pressione cresce linearmente con la profondità

In un fluido pesante (= soggetto a F_V e F_S) la differenza di pressione tra 2 punti del fluido è direttamente proporzionale al dislivello tra i 2 punti, cioè alla differenza di quota tra i 2 punti.

23



eql ↑ $F_2 = F_1 + P$ (1)

essendo:

$F_1 = p_1 S$

$F_2 = p_2 S$

$P = \rho V g$

(1) diventa: $p_2 S = p_1 S + \rho V g$, con $\begin{cases} S = \Delta h^2 \\ V = \Delta h^3 \end{cases}$

$p_2 \cancel{\Delta h^2} = p_1 \cancel{\Delta h^2} + \rho \Delta h^{\cancel{3}} g$

$p_2 = p_1 + \rho \Delta h g \rightarrow \boxed{p_2 - p_1 = \rho \Delta h g} \downarrow z \boxed{p_2 = p_1 + \rho \Delta h g}$

→ la pressione varia proporzionalmente alla profondità e alla densità

→ se considero l'asse z ↑, allora diventa $\boxed{p_2 = p_1 - \rho g}$

xk la z cresce verso l'alto e la pressione verso il basso

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 346

"Paradosso idrostatico"

Una conseguenza della legge di Stevino è che la **pressione dipende solo dalla profondità** e dalla densità ρ alla quale essa viene misurata e **non dalla forma del recipiente che contiene il fluido**. In tubi stretti ma sufficientemente alti è possibile produrre pressioni notevoli anche con una piccola quantità di liquido se l'altezza della colonna liquida è molto elevata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 346

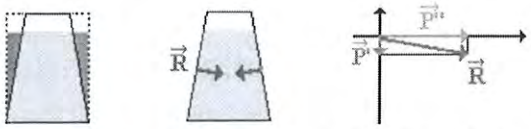
"Paradosso idrostatico"

Il paradosso idrostatico consiste proprio in questo: pur essendo il peso del liquido contenuto nei vari recipienti diverso a seconda dei casi, la forza esercitata sul fondo (nelle condizioni sopra indicate) è uguale per tutti e tre i casi e pari al peso del liquido contenuto nel recipiente (1).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 346

"Paradosso idrostatico"



Per lo stesso principio nel caso del recipiente (3) la forza di reazione delle pareti del recipiente avrà una componente P' verso il basso che andrà a sommarsi al peso del liquido a quella quota e darà comunque come risultato una forza F di intensità equivalente al peso del liquido contenuto in (1) (in questo caso il peso del liquido contenuto in (3) è minore di quello contenuto in (1)).

Le pareti esercitano una $\vec{R}$ rivolta verso il basso che si esercita sul fluido oltre al peso dello stesso → stessa pressione del contenitore con V↑ perche' $\vec{R}$ si va a sommare al peso del liquido.

APPLICAZIONE STEVINO → acquedotti

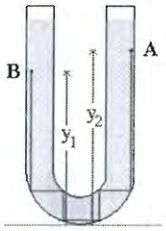
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 346

x misurare le pressioni

Manometro a U

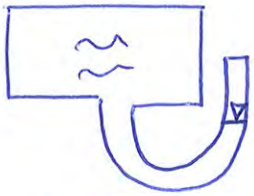
Abbiamo un tubo a forma di U, riempito con un liquido. Se le pressioni agenti sulle superficie libere sono le stesse, le superficie in base al principio dei vasi comunicanti si trovano allo stesso livello. Se però i due rami comunicano con ambienti a diverse pressioni, con $p_1>p_2$, si produce un dislivello tra le due superficie libere dato da in accordo con la legge di Stevino. Dalla misura di $h=y_2-y_1$ si ottiene il valore della pressione in un ambiente rispetto, per esempio, a quella atmosferica.



31

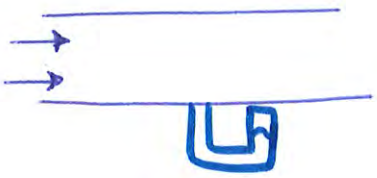
$$p_B + \rho g y_1 = p_A + \rho g y_2$$

$$p_A - p_B = \rho g (y_1 - y_2)$$



Collego il manometro a U ad un contenitore di cui voglio conoscere la pressione, a seconda del livello a cui si colloca il liquido posso ricavare la pressione incognita

MANOMETRO DIFFERENZIALE



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 346

Pressione atmosferica e sue variazioni

La pressione atmosferica è originata dall'attrazione gravitazionale da parte della terra sulla massa di gas che la circonda. Si raggiunge un equilibrio statico che determina una compressione contro la superficie della terra. La pressione atmosferica diminuisce con l'altezza: basta pensare che è minore il peso della colonna d'aria sovrastante. La decrescita non è lineare con l'altezza poiché la densità dell'aria non è costante.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 346

Pressione atmosferica e sue variazioni

con a uguale a

$$a = \frac{p_0}{g\rho_0}$$

Integrando

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a}\int_0^z dz \Rightarrow ln\frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a} \Rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-z/a}}$$

Nell'atmosfera isoterma la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 346

Principio di Archimede

- Se ora sostituiamo al volume V_0 di un fluido un identico volume di qualsiasi altra sostanza, con massa $m'=\rho' V_0$, la risultante F_p delle forze di pressione esercitate dal fluido sulla superficie rimane la stessa, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione. Pertanto **non** sussiste **più** una condizione di **equilibrio** e la forza risultante agente su V_0 vale F'_V+F_p, cioè

$$(m' - m)\,\mathbf{g} = (\rho' - \rho)V_0\mathbf{g}$$

- Se $\rho' > \rho$ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di **g** e quindi il corpo introdotto al posto del volume V_0 di fluido scende nel fluido; se invece $\rho' < \rho$ il corpo sale.
- **In ambedue i casi il corpo riceve una spinta verso l'alto, $F_A = -\rho V_0 \mathbf{g}$, pari al peso del volume di fluido spostato**.

se non c'è equilibrio avrò una risultante $R = P' - S$

$$R = (m' - m)g = (\rho' - \rho)Vg$$

se $\rho = \rho'$ → il corpo rimane in equilibrio e non si muove

se $\rho \neq \rho'$ → si genera una R verso l'alto o verso il basso a seconda della ρ maggiore

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 346

Galleggiamento e stabilità

Nella sezione precedente abbiamo visto come calcolare la risultante delle pressioni esercitate da un fluido in cui è immerso un corpo.
Tale risultante prende il nome di spinta di Archimede e si calcola in modo identico anche nel caso in cui il corpo sia solo parzialmente immerso nel fluido.
In quest'ultimo caso, nascono questioni di stabilità visto che il peso del corpo è applicato nel suo baricentro (ed è quindi indipendente dall'immersione del corpo) mentre la spinta di galleggiamento è applicata nel baricentro della regione di fluido spostata (detto centro di spinta) ed è quindi funzione della posizione del corpo rispetto alla superficie libera del fluido.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 346

Galleggiamento e stabilità

E' utile osservare che mentre la spinta ed il suo punto di applicazione dipendono unicamente dall'immersione del corpo, la posizione del baricentro dipende dalla dislocazione delle masse con la conseguenza che la stabilità può essere aumentata o diminuita spostando dei pesi all'interno del corpo.

.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 346

Prevalenza

La **prevalenza gH** è l'incremento di energia meccanica che subisce il fluido per kg di massa nell'attraversare la macchina

$$\boxed{\mathrm{gH} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2)}$$

La prevalenza rappresenta quindi il ***lavoro ideale scambiato tra fluido e macchina.*** Si è anche visto come spesso, in idraulica, si preferisca esprimere tutti i termini dell' equazione precedente in metri

$$\mathrm{H} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}({v_2}^2 - {v_1}^2)$$

dove **H** prende il nome di **salto** ed è espresso in [m]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 346

Circuito idraulico: perdite

Si supponga di voler valutare **le caratteristiche di tale impianto.**

Scopo: stimare l'energia che la pompa che va installata deve in via ideale cedere al fluido (acqua), perché questo venga pompato dal bacino di valle a quello di monte.

Indicando con il pedice 2 le grandezze (quota, velocità e pressione) relative al bacino di monte e con il pedice 1 quelle relative al bacino di valle, l'applicazione dell'equazione di Bernoulli tra queste due sezioni fornisce:

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{{v_1}^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{{v_2}^2}{2g} + \Delta p_f$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 346

Circuito idraulico: perdite

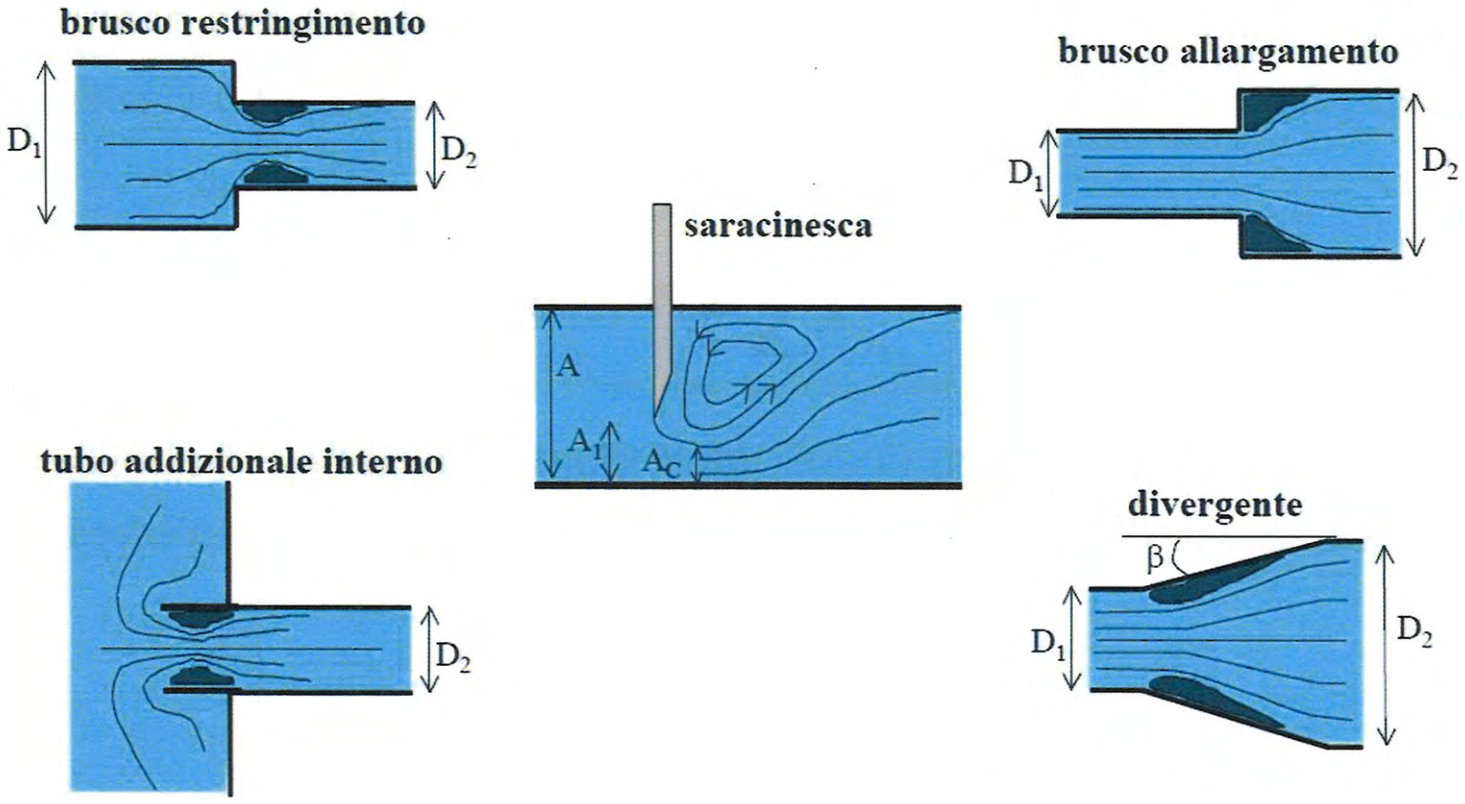
Le perdite che il fluido subisce nell'attraversamento dell'impianto (non nella macchina) anche in questo caso sono di due tipi:

- Perdite concentrate
- Perdite distribuite

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 346

Perdite concentrate



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 346

Perdite distribuite

Le **perdite distribuite**, dipendono dalle modalità con le quali avviene il movimento del fluido. Queste modalità dipendono in generale:

- caratteristiche fisiche del fluido
- superficie di contorno
- velocità del fluido

Si definiscono tre modalità di movimento o REGIMI DI MOTO:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 346

Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds (Re) è un numero adimensionale usato in fluidodinamica, proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscose

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

- Re<2000 (moto laminare)
- 2000<Re<10000 (moto di transizione)
- Re>10000 (moto puramente turbolento)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 346

Perdite distribuite

Per valori elevati del numero di Reynolds, non esiste un legame analitico che permetta il calcolo del coefficiente d'attrito , e le informazioni disponibili sono di origine sperimentale.
Tali informazioni sono raccolte in forma grafica nell'**Abaco di Moody** che Fornisce il valore del coefficiente d'attrito in funzione del numero di Reynolds e della scabrezza relativa.

Qualunque sia il regime di flusso (laminare, transizionale o turbolento completamente sviluppato), l'Abaco di Moody permette di valutare il coefficiente d'attrito che, a sua volta, permette di calcolare le perdite distribuite lungo i condotti.

Per valori elevati del numero di Reynolds, la dipendenza delle perdite dal numero di Reynolds diventa trascurabile, mentre resta la dipendenza dalla scabrezza relativa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 346
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 346

Perdite

Sommando le espressioni delle perdite concentrate e distribuite si ottiene Δp_f e quindi si ricava che:

$$\boxed{\mathrm{H} = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{v^2}{2g}}$$

D'altra parte, dall'espressione della portata è possibile esprimere la velocità dell'acqua nei condotti in funzione di quest'ultima:

$$v = \frac{Q}{A}$$

essendo A la sezione di passaggio del tubo. Sostituendo la relazione della velocità in funzione della portata nell'equazione precedente si ricava infine **la curva di funzionamento dell'impianto**, cioè la legge di variazione della prevalenza con la portata:

$$\boxed{\mathrm{H} = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{Q^2}{2A^2 g}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 346

ESAME!

Perdite

Si ricorda che l'equazione è stata ricavata per un circuito in cui i due serbatoi, o bacini di monte e di valle, si trovano entrambi alla pressione atmosferica.

Se uno, o entrambi, <u>i serbatoi risultano in pressione</u>, al salto geodetico e alle perdite andrà <u>sommata la differenza di pressione esistente tra i due serbatoi:</u>

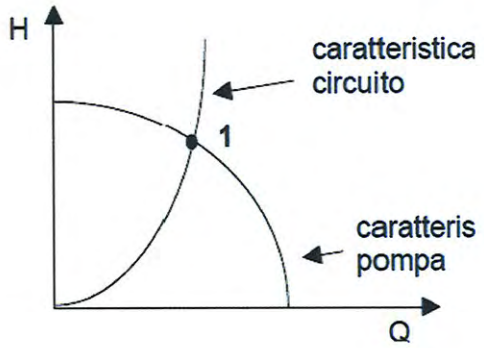
$$\mathrm{H} = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{Q^2}{2A^2 g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 346

Accoppiamento macchina impianto

Il **punto di funzionamento** reale dell'impianto risulterà all'intersezione tra la curva caratteristica dell'impianto e quella della macchina, così come schematicamente rappresentato dal punto 1 in figura.
Nel punto 1 si ha il raggiungimento dell'equilibrio dinamico tra ciò che l'impianto richiede e ciò che la macchina fornisce.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 346

Accoppiamento macchina impianto

Parallelo

- ogni macchina fornirà tutta la prevalenza richiesta dall'impianto
- ognuna elaborerà solo una parte della portata.

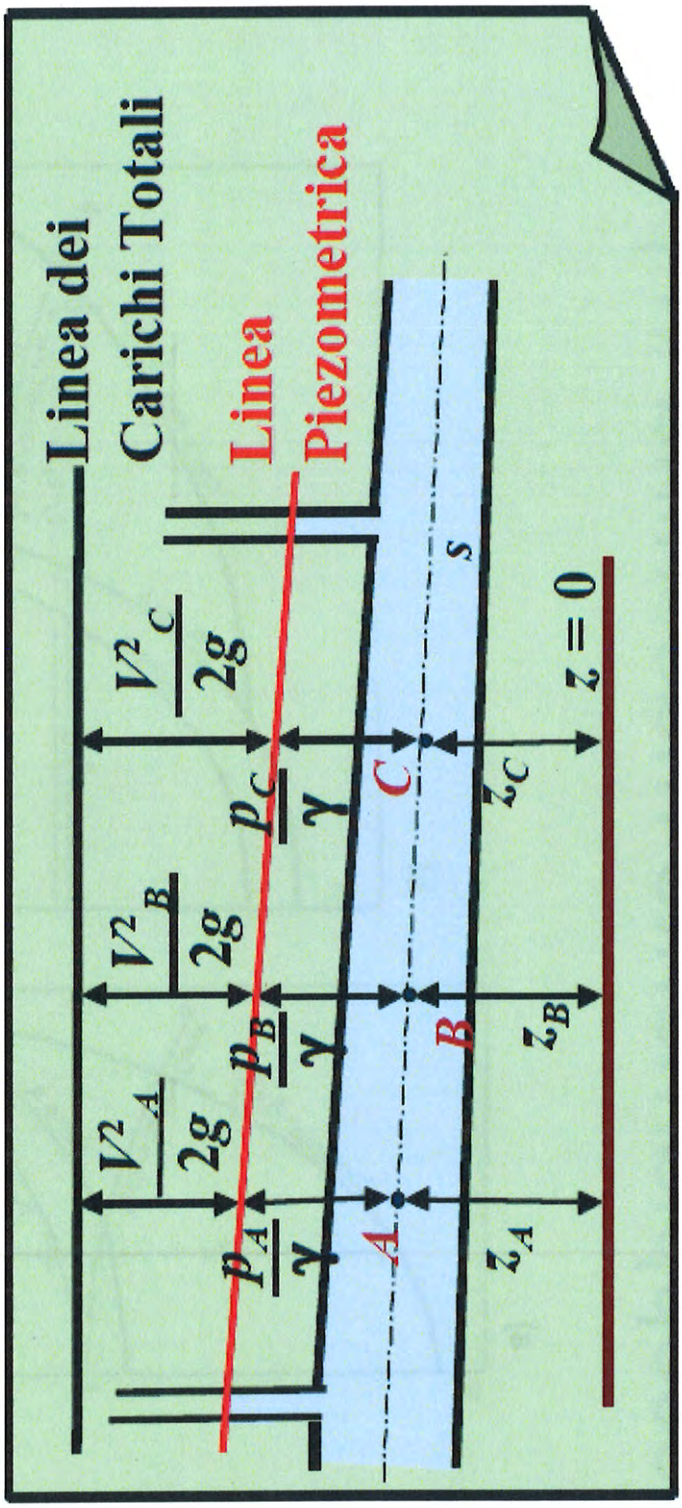
Anche in questo caso, il punto di funzionamento risulterà dall'intersezione tra la curva dell'impianto e quella risultante dalla messa in parallelo delle macchine.

Per ottenere tale **curva basta ora sommare, a parità di prevalenza, le portate delle due macchine Qa e Qb**

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 346

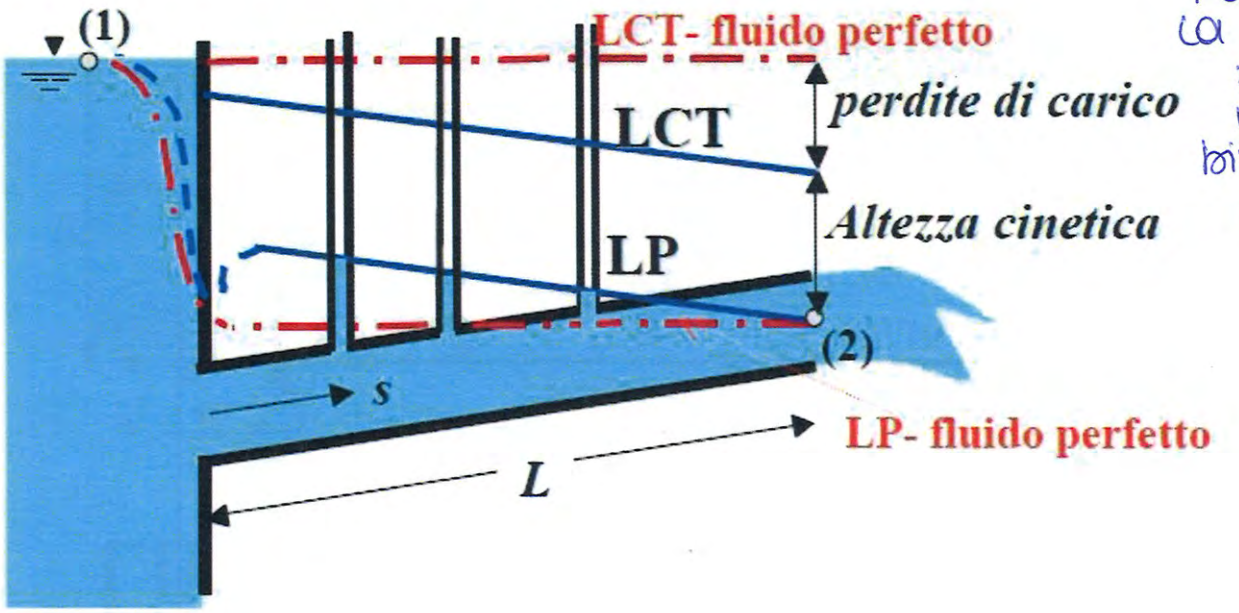
Linea dei carichi totali



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 346

Linea dei carichi totali con perdite



Nel caso di fluido reale la LCT e la LP non sono + rettilinee perché bisogna tenere conto delle perdite

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 346

Esercizio 1

Un impianto solleva acqua (ρ=1000 kg/m^3, μ=0.001 Pa·s) da un serbatoio più basso ad uno più alto.
La tubazione in acciaio galvanizzato ha un diametro di 50 mm e una rugosità di ε=150 μm e la portata di acqua (a 20 °C) è Q=3 kg/s.

Determinare la <u>prevalenza</u> necessaria per la pompa e la <u>potenza</u> resa al fluido.
Coefficienti di perdita localizzata: $\xi_{imb} = \xi_{sb} = 1$, $\xi_{gomiti} = 0.5$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 346

Esercizio 2

Si consideri un impianto di circolazione di acqua per riscaldamento. Si adotta per la velocità un valore massimo di v=0.75 m/s. La tubazione ha una rugosità di ε=10 μm. Se la portata di acqua è Q=0.06 kg/s e la sua temperatura è 66 °C (ρ=979 kg/m^3, μ=0.000434 Pa·s) , determinare il <u>diametro della tubazione</u>, la <u>prevalenza</u> della pompa e la <u>potenza</u> resa al fluido.

Coefficienti di perdita localizzata:

ξ_{valv}= 2, ξ_{gomiti}=0.5, ξ_{term} =6

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 346

Sistemi chiusi e sistemi aperti per lo studio dei fluidi

Introduciamo ora alcune dizioni utili per la scrittura del principio di conservazione dell'energia, dizioni che sono direttamente legate alle modalità di analisi lagrangiana e euleriana appena illustrate.
Chiamiamo volume di controllo (V) un volume assegnato nello spazio e superficie di controllo ($\mathcal{S}$) la superficie che contorna questo volume.
Definiamo ora:

- **sistema chiuso**: un sistema costituito dall'insieme degli elementi di fluido compresi all'interno di un volume di controllo V che nel tempo può variare di forma e/o di posizione nello spazio; la corrispettiva superficie di controllo $\mathcal{S}$ analogamente può variare di forma e/o di posizione nello spazio e, poiché è "chiusa" nel senso di non consentire trasporto di massa, mantiene invariato il valore del volume di controllo V (ma non necessariamente la sua forma) quando il fluido contenuto è incomprimibile;
- **sistema aperto**: un sistema costituito dall'insieme degli elementi di fluido presenti in un assegnato istante all'interno di un volume di controllo V la cui superficie di controllo $\mathcal{S}$ è permeabile al trasporto di massa; tipicamente in un sistema aperto si valutano le differenze tra le grandezze che caratterizzano il fluido nella sezione in cui la portata di fluido entra nel volume di controllo e le grandezze che, nello stesso istante, caratterizzano il fluido nella sezione in cui la portata esce dal volume di controllo.

Osserviamo che questa definizione di sistemi aperti e chiusi non va confusa con la definizione matematica di insiemi aperti e chiusi, i quali si differenziano nel comprendere o no la superficie di controllo; siamo in un ambito disciplinare diverso che ha sviluppato definizioni diverse e indipendenti.
Il sistema chiuso è permeabile al trasporto di energia sotto forma di calore e di lavoro; il sistema aperto oltre che al calore e al lavoro è permeabile anche a scambi di energia di cui la massa in transito è l'elemento portatore.

Principio di conservazione dell'energia per i sistemi chiusi

Assegnato un sistema chiuso, il principio di conservazione dell'energia stabilisce che il suo contenuto energetico varia nel tempo in funzione dell'energia in transito attraverso la sua superficie (vedi Fig. 1) dove indichiamo con $\dot{L}^{\searrow}$ e $\dot{Q}^{\searrow}$ le potenze entranti rispettivamente meccaniche (lavoro) e termiche (calore), con θ il tempo e ρ la densità; si ha quindi:

$$\dot{L}^{\searrow} + \dot{Q}^{\searrow} = \int_V \frac{\partial}{\partial \theta} \rho U \, dV$$

dove l'integrale è esteso al volume di controllo V e U è il contenuto energetico dell'unità di massa che vale:

$$U = u + \frac{w^2}{2} + \sum \varphi_i$$

dove u è l'energia interna, w la velocità e $\sum \varphi_i$ è la sommatoria dell'energie potenziali possedute dall'unità di massa considerata.
Integrando la relazione tra i tempi 1 e 2 si ottiene:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 346

E' chiaro che coerentemente con le equazioni proposte si potrebbe analizzare il sistema chiuso definendo una superficie di separazione S'' per quanto riguarda l'esterno e S' per quanto riguarda il confine tra fluido considerato e organo meccanico.
Appare però complesso valutare la potenza meccanica $\dot{L}^{\searrow'}$ scambiata attraverso il solo organo meccanico; per essa infatti l'integrale:

$$(\dot{L}^{\searrow})_{S'} = \int_{S'} p\bar{n} \times \bar{w} dS + \int_{S'} r\bar{\tau} \times \bar{w} dS$$

si presenta di valutazione assai laboriosa variando probabilmente da punto a punto su S' i valori di pressione p e di sforzo tangenziale r, nonché i valori delle velocità.
E' conveniente in questo caso utilizzare un accorgimento che semplifica notevolmente i calcoli; basta osservare che se la velocità di rotazione dell'organo meccanico è costante nel tempo e così pure la sua posizione e la sua energia posizionale, l'integrale di conservazione esteso al volume compreso tra le superfici $-S'$ e $\sum$ (superficie su cui le convenzioni di normale sono le stesse che su S'', vedi fig. 2) fornisce:

$$(\dot{L}^{\searrow})_{\Sigma} + (\dot{L}^{\searrow})_{-S'} = (\dot{L}^{\searrow})_{\Sigma} - (\dot{L}^{\searrow})_{S'} = 0$$

$$(\dot{L}^{\searrow})_{\Sigma} = (\dot{L}^{\searrow})_{S'} = \int_{S'} (p\bar{n} + r\bar{\tau}) \times \bar{v} dS$$

E' pertanto conveniente spostare la valutazione della potenza meccanica in transito dalla superficie S' alla superficie $\sum$. Ciò equivale a considerare un sistema chiuso generato alla somma dei sistemi (S', S'') e (-S', $\sum$) che risulta essere definito dalla superficie di controllo (S'', $\sum$).
Per esso la valutazione della potenza meccanica scambiata è espressa da:

$$(\dot{L}^{\searrow})_{S} = (\dot{L}^{\searrow})_{S'} + (\dot{L}^{\searrow})_{S''} = (\dot{L}^{\searrow'})_{\Sigma} + \int_{S''} (p\bar{n} + r\bar{\tau}) \times \bar{w} d$$

Per quanto riguarda invece accorgimenti relativi alla valutazione della potenza termica scambiata $\dot{Q}^{\searrow}$ attraverso le superfici di controllo a causa dei numerosi criteri di valutazione dipendenti dalle diverse modalità di scambio termico, si rimanda alla letteratura specializzata.

Principio di conservazione dell'energia per i sistemi aperti

Assegnato un sistema aperto (vedi Fig. 3) definito dal volume di controllo V e dalla relativa superficie di controllo S, che per la definizione assunta di sistema aperto, sono fissi nello spazio, il principio di conservazione dell'energia stabilisce che il suo contenuto energetico varia nel tempo in funzione dell'energia in transito (potenza scambiata) attraverso la sua superficie:

$$\boxed{(\dot{L}^{\searrow})_{S} + (\dot{Q}^{\searrow})_{S} + \int_{S} \rho U \bar{w} \times \bar{n} dS = \int_{V} \frac{\partial}{\partial \theta} \rho U \, dV}$$

dove $\bar{n}$ è il versore normale alla superficie di controllo S inteso come positivo se rivolto all'interno del volume di controllo V.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 346

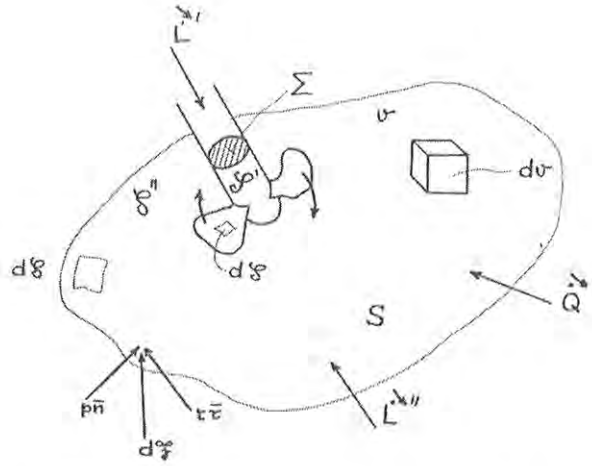


Fig. 4 Sistema aperto con una superficie di controllo mobile.

Purtroppo le formulazioni relative alla conservazione dell'energia qui proposte non sono adatte all'analisi di sistemi quali quello schematizzato in Fig. 4 che rappresenta un sistema sostanzialmente aperto in cui però vi è una presenza di superficie di controllo mobile.
Applicando però gli stessi criteri introdotti al paragrafo precedente relativo ai sistemi chiusi è possibile nelle stesse ipotesi smistare la valutazione della potenza meccanica scambiata dalla superficie $\mathcal{S}'$ alla superficie $\sum$ ottenendo per la potenza meccanica la valutazione:

$$(\dot{L}^{\searrow})_{\mathcal{S}} = (\dot{L}^{\searrow})_{\mathcal{S}'} + (\dot{L}^{\searrow})_{\mathcal{S}''} = (\dot{L}^{\searrow\prime})_{\Sigma} + \int_{\mathcal{S}''} d\overline{\mathfrak{F}} \times \overline{w} d\mathcal{S}$$

il che comporta nella formulazione completa relativa alla conservazione dell'energia per sistemi aperti:

$$(\dot{L}^{\searrow\prime})_{\Sigma} + \dot{Q}^{\searrow} + \int_{\mathcal{S}''} r\overline{\tau} \times \overline{w} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}_{in}} \rho\left(\frac{p}{\rho} + U\right)\overline{n} \times \overline{w} d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}_{out}} \rho\left(\frac{p}{\rho} + U\right)(-\overline{n}) \times \overline{w} d\mathcal{S}$$
$$= \int_{V} \frac{\partial}{\partial \theta} \rho U \, dV$$

Per quanto riguarda formulazioni più dettagliate sulla potenza termica scambiata $\dot{Q}^{\searrow}$ valgono le stesse osservazioni riportate al termine del paragrafo precedente.

Mettiamo ancora in evidenza che il termine che esprime una porzione del lavoro scambiato per un sistema aperto può essere conglobato nei termini di trasporto di energia mediante massa in transito generando il termine di entalpia all'interno della formulazione:

$$\int_{\mathcal{S}} \rho\left(h + \frac{w^2}{2} + \sum \varphi_i\right)\overline{n} \times \overline{w} d\mathcal{S}$$

Teniamo a precisare che tale metodo di formulazione per chi dimenticasse da dove proviene potrebbe far pensare che l'entalpia sia una forma di energia di cui la massa in transito è il portatore; ciò non è vero: l'energia in transito di cui la massa è il portatore è la sua agitazione termica u, la sua energia cinetica $\frac{w^2}{2}$ e la somma delle sue energie potenziali $\sum \varphi_i$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 346

sistema aperto se il contorno (superficie di controllo) può essere attraversato dalla massa (Fig. 6) e la sua superficie o contorno può essere stazionaria oppure mobile.

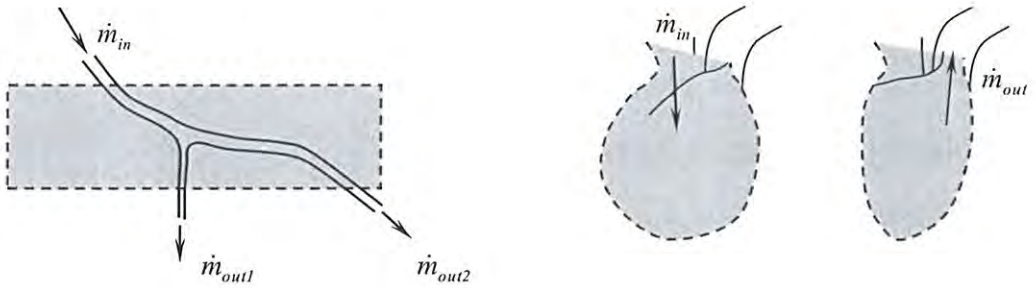


Fig. 6 Sistema aperto con contorno stazionario(a sinistra): porzione di tessuto perfuso da vasi sanguigni. Sistema aperto con contorno mobile (a destra): un ventricolo cardiaco durante le fasi di riempimento e quella di eiezione.

In un sistema aperto si definisce la portata in massa (espressa in kg/s nel SI):

$$\dot{m} = \rho \overline{w} A$$

dove ρ è la massa volumica del fluido, $\overline{w}$ la velocità media sulla sezione considerata e A l'area della sezione di passaggio in esame. La velocità media, che tiene conto dell'esistenza sulla sezione considerata di un profilo di velocità non uniforme è definita come:

$$\overline{w} = \frac{\int_A w dA}{A}$$

Bilancio di massa macroscopico

La formulazione della conservazione della massa per un sistema chiuso è semplice: la massa si conserva.

La formulazione della conservazione della massa per un sistema definito da un volume di controllo V con più ingressi (*in*) e più uscite (*out*) è:

$$\frac{dm_V}{d\theta} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out}$$

In condizioni stazionarie la massa nel volume di controllo (m_V) non cambia nel tempo, quindi la sua derivata è nulla, e ne segue:

$$\sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out}$$

se, inoltre, il sistema aperto dispone di un solo ingresso e di una sola uscita, risulta (in condizioni stazionarie):

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 346

$$\frac{\dot{m}_{in}}{\dot{m}_{in}}\rho\int w_{in}^3 dA = \dot{m}_{in}\frac{\rho\int w_{in}^3 dA}{\overline{w}_{in}\rho A} = \dot{m}_{in}\frac{\int w_{in}^3 dA}{\overline{w}_{in}A} = \dot{m}_{in}\hat{w}_{in}^2$$

da cui:

$$\hat{w}_{in}^2 = \frac{\int_{A_{in}} w_{in}^3 dA_{in}}{\overline{w}_{in}A_{in}};$$

si osservi che nella pratica si assume spesso $\overline{w}_{in} = \hat{w}_{in} = w_{in}$; questa uguaglianza sarà sempre considerata valida nel seguito.

Il calore scambiato nell'unità di tempo (potenza termica) $\dot{Q}$ dipende dalla eventuale presenza di serbatoi termici esterni al sistema che si trovino a temperatura diversa da quella del sistema o da altre modalità di scambio (irraggiamento, radiazioni, ecc,).

Il lavoro scambiato nell'unità di tempo (potenza meccanica) $\dot{L}$, a sua volta, è in generale costituito da più termini.

Sempre considerando trascurabili per le applicazioni in esame i contributi di natura elettrica, magnetica o nucleare, e trascurando il lavoro di deformazione scambiato attraverso la parete del condotto con l'ambiente esterno (considerando cioè rigida tale parete), si possono individuare due contributi differenti: uno associato alla potenza meccanica scambiata tramite eventuali superfici mobili poste all'interno del volume di controllo (in genere organi rotanti dotati di opportune palettature, "turbomacchine"), indicato nel seguito con il simbolo $\dot{L}_m$, e uno associato alle sezioni di comunicazione con l'ambiente, chiamato lavoro di pulsione e indicato con il simbolo $\dot{L}_p$ nel seguito.

Considerando la generica interfaccia i-esima il termine di potenza di pulsione può essere quantificato come:

$$\dot{L}_{p,i} = p_i \cdot A_i \cdot w_i = p_i \cdot \dot{V}_i = \dot{m}_i p_i v_i$$

essendo v_i il volume specifico del fluido sulla sezione i-esima e p_i la corrispondente pressione.

Occorre ben osservare che in questa scrittura è stata eliminata la enunciazione dettagliata della proiezione sul versore normale alla superficie $\overline{n}$ si intende che questa informazione è comunque espressa dal segno associato ai termini che esprimono la portata.

Se la sezione considerata è di ingresso nel sistema, questo termine di lavoro nell'unità di tempo è entrante nel sistema per effetto dell'azione del flusso di massa entrante. Analoghi termini si possono scrivere per i flussi di massa uscenti.

Vi sono poi altre ipotesi semplificative già accennate nei paragrafi precedenti che non verranno discusse in dettaglio e che riguardano il ruolo degli sforzi di taglio giacenti sulle sezioni di ingresso e di uscita.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 346

Questo bilancio vale solo in condizioni stazionarie e per esso si può affermare che ogni kg di massa che transita nel sistema subisce le variazioni di entalpia, di energia posizionale e di energia cinetica indicate.

Bilancio di energia e secondo principio della Termodinamica

L'utilizzo del secondo principio della Termodinamica all'interno dei bilanci della energia offre utili possibilità per formularli in forme convenienti per svariate applicazioni.

Si utilizza la definizione di entropia in assenza di cambiamenti di fase o allotropici:

$$ds = \frac{du+pdv}{t}$$

e, utilizzando la equazione di Clausius, e introducendo il lavoro delle resistenze passive LW, ovvero l'incremento di entropia dovuto ai fenomeni irreversibili si ottengono le relazioni:

$$\int_1^2 tds = u_2 - u_1 + \int_1^2 pdv = h_2 - h_1 - \int_1^2 vdp = Q_{12} + LW_{12}$$

dove Q_{12} e LW_{12} sono rispettivamente le energie termiche relative al calore esterno e al lavoro delle resistenze passive nella convenzione di valori positivi se entranti tra i tempi 1 e 2; le resistenze passive LW_{12}sono sempre grandezze entranti e, solo nel caso reversibile ideale sono nulle; Q_{12} può invece presentare valori positivi o negativi.

Nel caso di fluidi incomprimibili v è costante e le relazioni divengono:

$$\int_1^2 tds = u_2 - u_1 = h_2 - h_1 - v[p_2 - p_1] = Q_{12} + LW_{12}$$

e quindi sostituendo nella relazione per i sistemi chiusi:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + L_{12}$$

si ha:

$$\left\{g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\left(w_2^2 - w_1^2\right)\right\} = L_{12} - LW_{12}$$

e sostituendo nella relazione per i sistemi aperti in regime stazionario:

$$\left\{h_1 - h_2 + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\left(w_1^2 - w_2^2\right)\right\} + Q + L_m = 0$$

si ha:

$$\left\{v(p_1 - p_2) + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\left(w_1^2 - w_2^2\right)\right\} + L_m - LW_{12} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 346

(z = altezza geodetica) + (z_p = altezza piezometrica) + (z_c = altezza cinetica)

con:

$z = z$

$z_p = p/\rho g$

$z_c = w^2/2g$

L'inconsistenza concettuale si paga con il fatto che questa formulazione vale solo nel campo gravitazionale terrestre con valore della accelerazione gravitazionale g costante; questa limitazione ovviamente non influisce sull'utilizzo della equazione di Bernoulli per problemi di idraulica tradizionali.

Macchine con un ingresso e una uscita.

E' possibile introdurre a questo punto un poco di terminologia relativa alle macchine con un ingresso e una uscita distinguendo tra:

- **scambiatori di calore** se non vi è scambio di potenza meccanica ($\dot{L}_m = 0$), ma solo scambio di calore ($\dot{Q} \neq 0$);
- **turbine** se non vi è scambio di potenza termica ($\dot{Q} = 0$ o comunque trascurabile) e la potenza meccanica è uscente ($\dot{L}_m$ negativo), sia per fluidi comprimibili (turbine a vapore e turbine a gas) sia per fluidi incomprimibili (turbine idrauliche); la differenza di energia potenziale non è trascurabile nelle macchine che sfruttano un salto geodetico per produrre energia, come nelle turbine delle centrali idroelettriche;
- **pompe** se non vi è scambio di potenza termica ($\dot{Q} = 0$ o comunque trascurabile), la potenza meccanica è entrante ($\dot{L}_m$ positivo), e il fluido è incomprimibile (acqua, olio, sangue);
- **compressori** se non vi è scambio di potenza termica ($\dot{Q} = 0$ o comunque trascurabile), la potenza meccanica è entrante ($\dot{L}_m$ positivo), e il fluido è comprimibile (aria, gas, vapore).
- **ugelli** (utilizzati nei propulsori aerospaziali) e **diffusori;** la differenza di energia cinetica non è trascurabile in questa categoria di macchine per le quali è con buona approssimazione $\dot{Q} = 0$ e non vi è scambio di potenza meccanica ($\dot{L}_m = 0$); per essa si ha:

$$\left\{h_1 - h_2 + \frac{1}{2}\left(w_1^2 - w_2^2\right)\right\} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 346

$$\sum \dot{m}_{IN} = \sum \dot{m}_{OUT}$$

se $\rho = cost$, essendo $\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho}$

$$\sum \dot{V}_{IN} = \sum \dot{V}_{OUT}$$

ESAME!

Bilancio di ENERGIA

$e = COST.$

$$\boxed{e = e_{INTERNA} + e_{CINETICA} + e_{POTENZ.} + e_{ALTRE}}$$

derivanti da un CM, reazioni chimiche, ...

Il principio di CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA stabilisce che il contenuto energetico di un sistema varia nel tempo in funzione dell'energia in transito attraverso la sua superficie.

(POTENZA SCAMBIATA)

(stessa def. x la CONSERVAZIONE della massa)

SIST. APERTI:

$$\boxed{\frac{dU_V}{dt} = \sum_i \dot{m}_{IN,i} U_{IN_i} - \sum_j \dot{m}_{OUT,j} U_{OUT,j} + \dot{Q} + \dot{L}}$$

$\dot{L}$, $\dot{Q}$ → potenze entranti meccaniche (lavoro) e termiche (calore)

U → contenuto energetico dell'unita' di massa, e' pesato rispetto alla portata.

$$U = u + \frac{1}{2} w^2 + \sum_i \varphi_i$$

u ↑ energia interna; $\frac{1}{2} w^2$ ↑ energia cinetica; $\sum_i \varphi_i$ ↑ altre energie potenziali

$$U = u + \frac{1}{2} w^2 + gz + \cancel{\sum_i \varphi_i}$$

gz ↓ en. potenziale dovuta al campo gravitazionale

$\cancel{\sum_i \varphi_i}$ ↙ trascurabili

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 346

Se il FLUIDO è INCOMPRIMIBILE allora $\rho = cost \rightarrow v = \frac{1}{\rho} = cost$

$v_1 = v_2 = v$

* Q_{12} in base al 2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (ENTROPIA)

INCOMPRIMIBILE, $v = cost$

$$ds = \frac{du + \cancel{pdv}}{t} = \frac{du}{t}$$

$$ds = \frac{du}{t}$$

Integrando:

$$tds = du$$

$$\int_1^2 tds = \int_1^2 du$$

$$\int_1^2 tds = u_2 - u_1 = Q_{12} + LW$$

CALORE

lavoro resistenze passive X ESPRIMERE LE DISSIPAZIONI

CALORE E DISSIPAZIONI fanno variare l'entropia del sist.

$$Q_{12} = u_2 - u_1 - LW$$

Sostituendo:

$$(\cancel{u_1} + gz_1 + p_1 v + \frac{1}{2}w_1^2) - (\cancel{u_2} + gz_2 + p_2 v + \frac{1}{2}w_2^2) + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} - LW_{12} + \cancel{L_{M_{12}}} = 0$$

$= 0$ se non ho organi meccanici in movimento

$$(p_1 v + gz_1 + \frac{1}{2}w_1^2) - (p_2 v + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2) - LW_{12} = 0$$

Moltiplico per ρ ($\rightarrow$ divido per v) $\left[\rho = \frac{1}{v}\right]$ diventa la pressione delle resistenze

$$(p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2) - (p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho w_2^2) - \Delta P_R = 0$$

$$(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}\rho(w_2^2 - w_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + \Delta P_R = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 346

Es 1 Uso Bernoulli x determinare dei gradienti di pressione in ambiente cardiovascolare.

$$\Delta p = \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho (w_2^2 - w_1^2)$$

Nella pratica clinica posso misurare le velocita' e non le pressioni, con gli US

Si assume che:
- $(z_2 - z_1)\rho g = 0$, trascurabile x je vaso e' alla stessa altezza nel braccio (ad esempio)
- $w_2^2 = 0$, velocita' dei capillari $\ll$ velocita' arteria
- si assume $\rho_{sangue} = 1060\ Kg/m^3$

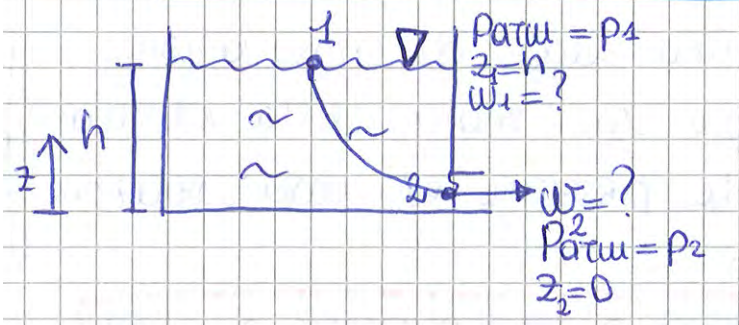
$$\Delta p_{Pa} = \frac{1}{2} \cdot 1060\, w_1^2 = 530\, w_1^2 \quad [Pa]$$

Dato che si usano i mmHg:

$$\boxed{\Delta p_{mmHg} = \frac{530}{133} w_1^2 \simeq 4 w_1^2}$$

se $w_1 = 1\ m/s \rightarrow \Delta p_{mmHg} \simeq 4\ mmHg$

2 serbatoio in cui si vuole det. la velocita' di uscita.



Scelgo due punti → uscita, → pelo libero

$w_2 = ?$

$$\underbrace{(p_2 - p_1)}_{0} + \frac{1}{2}\rho (w_2^2 - w_1^2) + \rho g (\underbrace{z_2}_{0} - z_1) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho (w_2^2 - \underbrace{w_1^2}_{0}) - \rho g h = 0$$

0 = velocita' abbassamento pelo libero

$$w_2^2 = \frac{2 \cancel{\rho} g h}{\cancel{\rho}} \rightarrow \boxed{w_2 = \sqrt{2gh}}$$

Legge TORRICELLI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 346

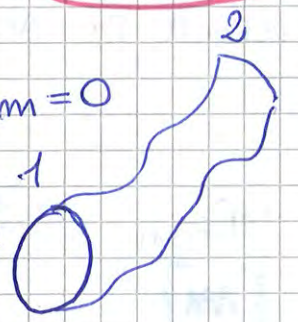
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 346

CIRCUITI IDRAULICI → dimensionati con Bernoulli

ESAME!

Considero $L_W = 0$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) + L_m = 0$$



Per capire la potenza che la pompa deve fornire x spostare il fluido da 1→2

$$\boxed{L_M = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2)}$$

↓

PREVALENZA DELLA POMPA (e' una specifica) $= gH$

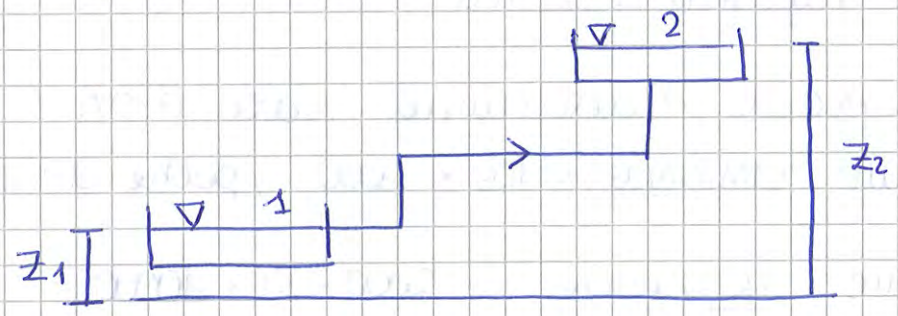
↓

salto [m]

$$gH = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2)$$

↳ lavoro scambiato tra macchina e fluido

• Es:



caratterizzare la pompa x spostare il fluido:

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + (z_2 - z_1)$$

CONDIZIONI IDEALI ($L_W = 0$)

CONDIZIONI REALI:

Δp_f → ingloba tutti i tipi di perdite e/o dissipazioni

$$H = \cancel{\frac{p_2 - p_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2)} + (z_2 - z_1) + \Delta p_f$$

$p_2 = p_1 = p_{atm}$ $\quad w_2 = w_1 = 0$ → velocita' ↑↓ ∇, xk i serbatoi sono uguali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 346

Abaco di Moody → vale solo per $Re \to \infty$

Ho bisogno di:

$\frac{\varepsilon}{D}$ = scabrezza relativa o rugosita' relativa

Re

} dall'intersezione si trova a sx il valore di λ.

Quindi la PREVALENZA diventa

$$H = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{w^2}{2g}$$

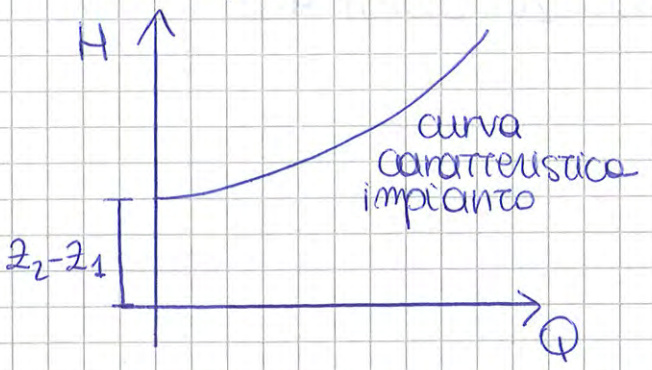
sostituendo $w = \frac{Q}{A}$, Q = portata volumica.

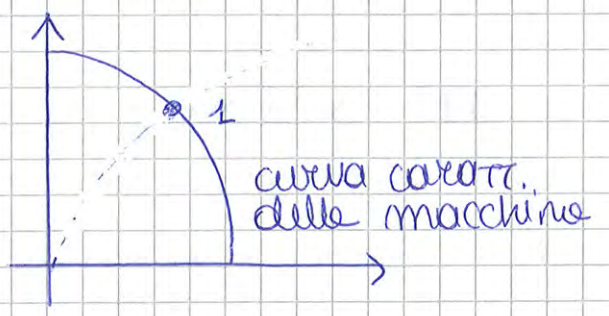
$$\boxed{H = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{Q^2}{2A^2 g}}$$

|| La curva di FUNZIONAMENTO dell'impianto e' una PARABOLA. ||

↓

- serve x dimensionare una pompa adatta al circuito.
- All'aumentare della portata ↓ l'eff. della pompa, aumentano le perdite.
- la pompa funziona bene solo se la curva-pompa sta sopra alla richiesta del circuito.



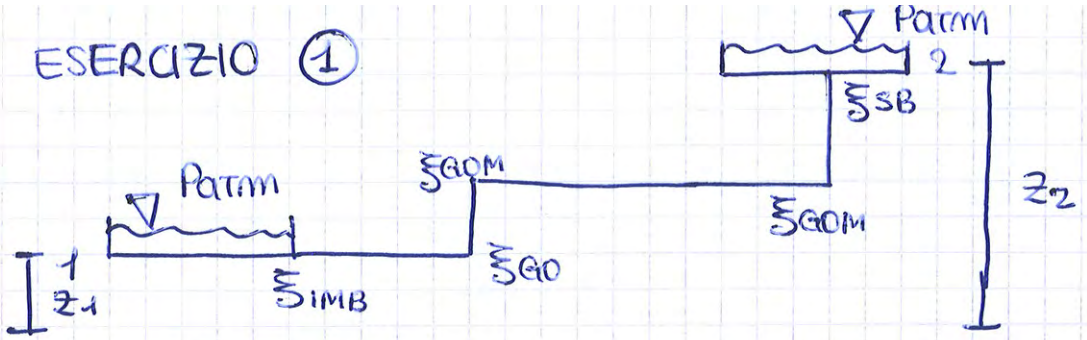


Il PUNTO DI FUNZIONAMENTO DELL'IMPIANTO risulta dall'intersezione della curva della macchina e quella caratteristica dell'impianto. Nel pto (1) ciò che la macchina chiede e' = a ciò che la pompa fornisce.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 99 di 346

ESERCIZIO 1



$H = ?$

$\rho = 1000 \ Kg/m^3$

$L = 5m$

$\mu = 0{,}001 \ Pa \cdot s$

$z_2 - z_1 = 32 - 2 = 30m$

$\phi = 0{,}05m$

$\varepsilon = 150 \ \mu m$

$\dot{m} \leftarrow Q = 3 \ Kg/s \rightarrow \dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho}$

$\xi_{IMB} = \xi_{SB} = 1$

$\xi_{GOM} = 0{,}5$

$$\lambda = ? \rightarrow f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{1000 \cdot w \cdot 0{,}05}{0{,}001} = 76'500$$

$$w = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{QA}{\rho} = \frac{3 \cdot \pi \cdot 0{,}025}{1000} = 1{,}53 \ m/s$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{150 \cdot 10^{-6}}{0{,}05} = 0{,}003$$

$Re, \frac{\varepsilon}{D} \rightarrow$ ABACO DI MOODY $\rightarrow \lambda = 0{,}028$

$$H = (z_2 - z_1) + \left(\sum_i \xi_i + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{\dot{V}^2}{2A^2 g}$$

$$H = (z_2 - z_1) + \left(1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 1 + 0{,}028 \cdot \frac{5}{0{,}05}\right) \cdot \frac{\left(\frac{3}{1000}\right)^2}{2(\pi \cdot 0{,}025)^2 \cdot 9{,}81} =$$

$$\boxed{H = 30{,}8 \ m}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 99 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 101 di 346

$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 16'918 \rightarrow$ regime turbolento $\rightarrow$ Abaco Moody

$\downarrow$

$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{10\,\mu m}{10 \cdot 10^{-3}\,\mu m} = 0{,}001 \longrightarrow \lambda =$

$\Delta p_c = \Sigma \xi \cdot \frac{Q^2}{2A^2 g} = \Sigma \xi \cdot \frac{v^2}{2g^2} = 0{,}287\,m$

$\Delta p_d = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 6{,}65\,m$ $\qquad L = 10 + 10 + 30 + 30\,m$

$H = 6{,}937\,m$

$W_R = \overset{(Q)}{m} \cdot gH = 0{,}06\,\frac{kg}{s} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 6{,}937\,m = 4{,}08\,W$

APPLICAZIONI EQUAZIONI DI BERNOULLI

<u>TUBO DI PITOT</u> = tubo investito da una corrente. Un punto deve essere investito dalla corrente, l'altro deve essere di ristagno, non colpito dalla corrente

Scrivo Bernoulli tra i punti 1 e 2:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

posso trascurare h_2 e h_1 ~ simili

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

E' sufficiente un manometro per misurare $(p_1 - p_2)$ e quindi ricavare v_2 oppure una membrana.

- Deve essere allineato con il flusso, se ne usano molti e si sceglie quello con $(p_1 - p_2)$ maggiore.
- IL PUNTO DI RISTAGNO può anche essere posizionato dietro, non deve sentire il flusso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 101 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 103 di 346

ESERCIZIO 1

$Q = ?$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g \cancel{(z_2 - z_1)} + p_2 - p_1 = 0 \\ \dot{V} = A_1 v_1 = A_2 v_2 \\ p_1 - p_2 = \rho_M g h \end{cases}$$

trascurabile

$\dot{V} = A_1 v_1 = A_2 v_2$ → con. volumica

$p_1 - p_2 = \rho_M g h$ → misura manometro diff.

dai passaggi prima

liquido manometrico $= H_2O$

$$\dot{V} = A_2 \sqrt{\frac{2 \rho_M g h}{\rho_0 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}} = 0{,}898 \ m^3/s$$

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho_0 = 0{,}898 \ \frac{m^3}{s} \cdot 800 \ \frac{kg}{m^3} = 718{,}76 \ \frac{kg}{s}$$

ESERCIZIO 2

$$\dot{V} = \underbrace{l_1 \cdot l_2}_{A} \cdot U = 0{,}3 m \cdot 0{,}4 m \cdot 28 m/s = 3{,}36 \ m^3/s$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho_L U^2 + p_2 = p_1 \\ p_2 - p_1 = \rho_M g h \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2}\rho_L U^2 = \rho_M g h$$

$$\rho_M = \frac{\frac{1}{2}\rho_L U^2}{gh} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}632 \ kg/m^3 \cdot (28)^2 \left(\frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81 \ m/s^2 \cdot 0{,}036 \ m}$$

$$\rho_M = 701{,}5 \ kg/m^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 103 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 105 di 346

STUDIO DEI FENOMENI DI TRASPORTO

I fenomeni di trasporto sono fenomeni di spostamento di quantità fisiche, materiali e immateriali.
→ sottendono la presenza di un attore = qualcosa che guida il trasporto (es: Δ concentrazione).
I FdT servono x il mantenimento dell'OMEOSTASI all'interno dei sistemi fisiologici.
Gli spostamenti di entità fisiche possono avvenire x:

- CONVEZIONE → trasmissione di massa in un mezzo mediante movimento del mezzo stesso, grazie ad un motore o una forza esterna
- DIFFUSIONE
  ↓
  trasmissione di massa in un mezzo lungo il gradiente di concentrazione (da ↑ a ↓), quando la convezione non può più intervenire

$\boxed{\text{Il limite tra C e D è l'EFFICIENZA DI TRASPORTO}}$

Cosa si intende x una condizione ottimale dei meccanismi di trasporto?

- A seconda dei livelli di scala, ci sono ≠ metodi ing. estrumenti per descriverli. I Bilanci di energia sono usati x i tessuti.
- La VELOCITÀ DI CONVEZIONE + o − alta indica se la convezione è + o − efficiente x quei tessuti.
  Dove la CONVEZIONE è ↑, la DIFFUSIONE è ↓.
  Dalle cellule in ↓ la diffusione diventa il sist. di trasporto + efficiente.
  ~ 300 ÷ 500 μm → DIFFUSIONE = CONVEZIONE

C. e D. sono i 2 FdT principali per i sistemi biologici, che si fanno carico di mantenere l'omeostasi (= condizioni ottimali x la sopravvivenza delle cellule). Ciascun meccanismo agisce x la sua parte di competenza, cioè là dove le dimensioni delle porzioni biologiche interessate sono grandi (> 500 μm) → CONVEZIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 105 di 346

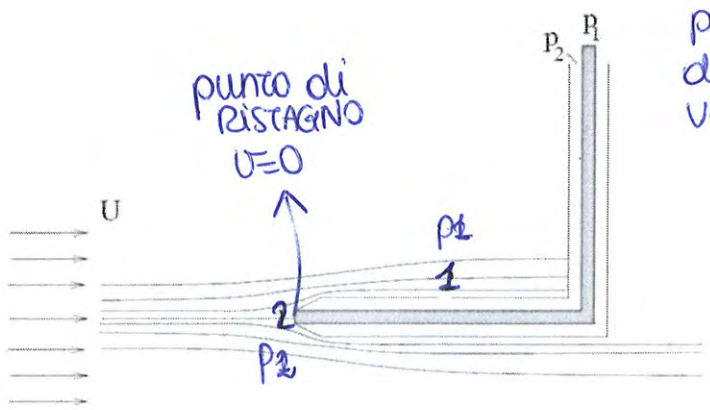
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 107 di 346

Applicazioni Equazioni Bernoulli

Tubo di Pitot

Un'applicazione importante dell'equazione di Bernoulli si ha nelle misure di velocità alle quali si può risalire da differenze di pressione.
Consideriamo il dispositivo in figura investito da una corrente uniforme a velocità U

A partire dalla pressione permette di ricavare le velocita'



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 107 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 109 di 346

Tubo di Pitot

Applicando quindi l'equazione di Bernoulli tra i punti 1 e 2 si ha

$$\boxed{\frac{U_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{U_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho}}$$

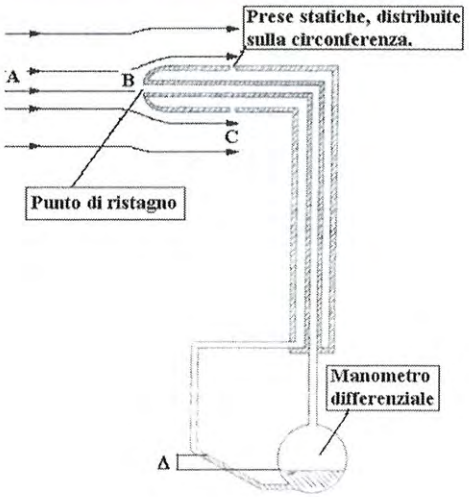
essendo $U_2 = U$, $U_1 = 0$ ed trascurando la variazione di quota $h_1 - h_2$ in quanto piccola, si ha

$$\boxed{U = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}}$$

posso ricavare la velocita' a partire dalle pressioni

Tubo di Pitot

Dalla relazione ottenuta si vede quindi che pur non conoscendo il valore assoluto di pressione è **sufficiente misurare la differenza di pressione tra 1 e 2 per risalire al valore della velocità U**. La misura di pressione può essere effettuata tramite un manometro differenziale applicato alle estremità dei due tubi concentrici disegnati



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 109 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 111 di 346

Tubo di Venturi

Dall'equazione di Bernoulli segue che deve prodursi una differenza di pressione tra le sezioni 1 e 2 in modo da compensare la variazione di velocità ossia, in formule, si ottiene

$$\frac{U_2^2}{2} + \cancel{gh_2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{U_1^2}{2} + \cancel{gh_1} + \frac{p_1}{\rho}$$

trascurabili

e dovendo essere $U_1A_1 = U_2A_2$

$$Q = U_2A_2 = A_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1-(A_2/A_1)^2]}}$$

che permette di misurare la portata nota la geometria del condotto e la differenza di pressione tra le sezioni 1 e 2

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}, \quad p_2 + \frac{1}{2}v_2^2\rho = p_1 + \frac{1}{2}v_1^2\rho$$

Tubo di Venturi

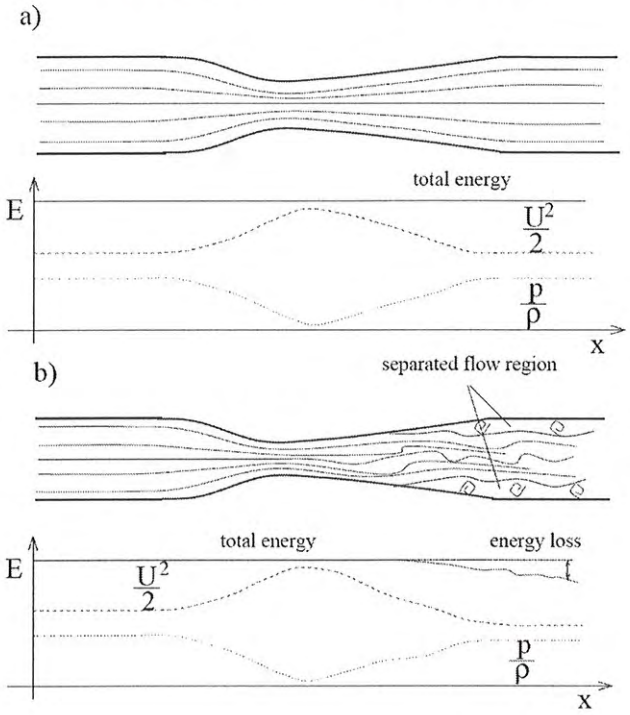
Se per esempio si misura la variazione di pressione con un tubo ad U, detta ρ_m la densità del fluido manometrico ed h la differenza di quota tra i due menischi risulta $p1 - p2 = \rho_m gh$ da cui leggendo la quota h si risale alla portata.

Molti dispositivi di uso quotidiano utilizzano un tubo di Venturi anche se questo non viene utilizzato per misure di portata ma per generare differenze di pressione all'interno di un condotto.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 111 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 113 di 346

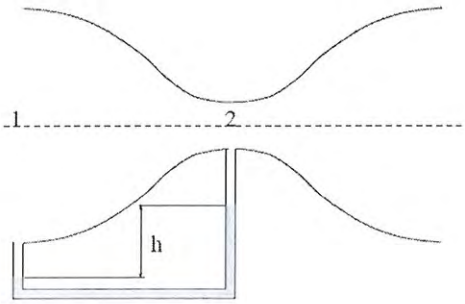
Tubo di Venturi



Esercizi 1

Calcolare la portata in massa sapendo che nel condotto scorre del petrolio (ρ_o = 800 Kg/m^3) e che nel tubo ad U c'è acqua. ρ_M

- h = 4 cm
- A_1 = 0.8 m^2
- A_2 = 0.6 m^2



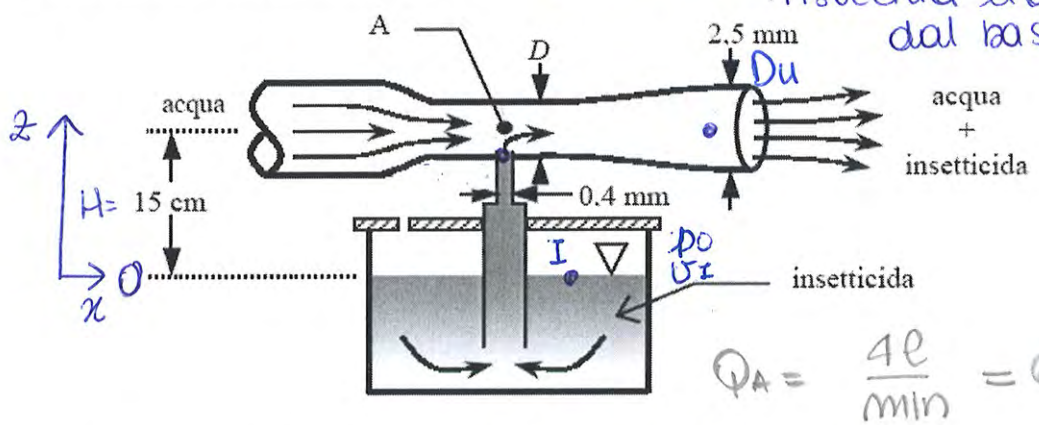
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 113 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 115 di 346

Esercizi 4

Il dispositivo rappresentato in figura deve disperdere una miscela d'acqua e di insetticida. La portata di insetticida deve essere pari a Qi = 75 ml/min mentre la portata d'acqua è Qa = 4 l/min.
Calcolare, in tali condizioni, il valore della pressione nel punto A e il diametro D del dispositivo.

La strizione diminuisce la p e risucchia liquido dal basso



$$Q_A = \frac{4\,l}{min} = 6{,}67 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}$$

$$Q = \frac{m^3}{s} \qquad 4\,l = 4\,dm^3 = 0{,}004\,m^3$$

$$75\,\frac{ml}{min}$$

$$75\,ml = 0{,}075\,l = 0{,}075\,dm^3$$
$$1\,l = 1\,dm^3$$
$$1\,dm^3 = 0{,}001\,m^3$$
$$75\,ml = 75 \cdot 10^{-6}\,m^3$$

$$\downarrow$$

$$1{,}25 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^3}{s}$$

$$Q_i = U_{AI} \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \qquad d = 0{,}4\,mm = 0{,}0004\,m$$

$$\frac{m^3}{s} = \frac{m}{s} \cdot \pi \cdot m^2$$

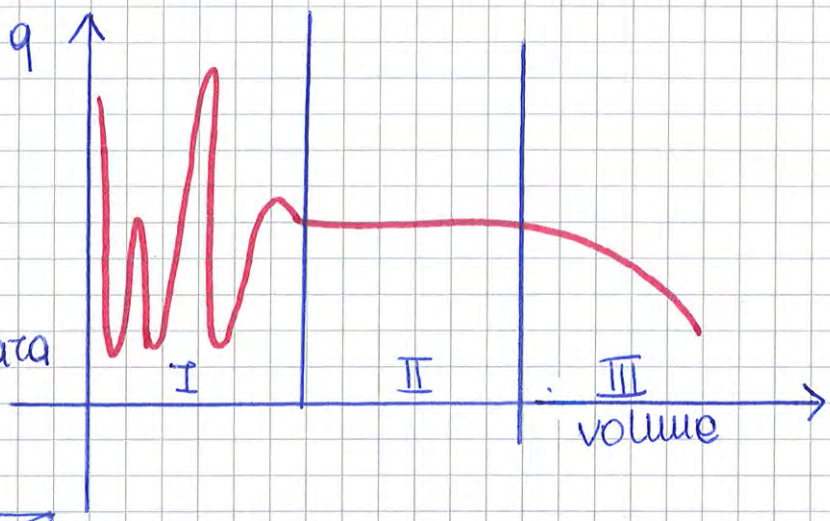
$$U_{AI} = \frac{4\,Q_i}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6}}{3{,}14 \cdot (0{,}0004)^2} = 9{,}95\,m/s$$

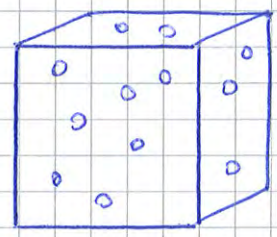
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 115 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 117 di 346

comportamento medio.

q = generica grandezza fisica che dipende dall'estensione del volume su cui viene misurata





I) a volume PICCOLO → q è molto VARIABILE, xK la materia è discreta

II) q è + STABILE, perché il volume che considero è + grande

III) a volume GRANDE → potrei avere + incertezze xK q varia anche in FUNZIONE dello spazio.

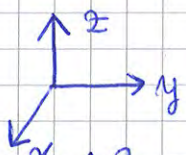
Devo mettermi in condizioni in cui il parametro q è abbastanza stabile → II → POSSO MANTENERE VALIDE LE IPOTESI DI CONTINUO SU QUESTO V.

NUMERO DI KNUDSEN → x capire in quale regione mi trovo. vale l'ipotesi di CONTINUO se Kn → 0

RIFERIMENTI SPAZIALI (x muoverci nella materia)

ESAME!

- CARTESIANO



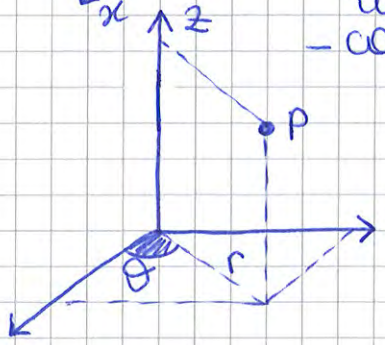
- coordinate OLONOMICHE xK non hanno punti di singolarità sono tutti equivalenti
- coord. INDIPENDENTI

- CILINDRICO

$0 < r < +\infty$

$0 < \theta < 360°$

$-\infty < z < +\infty$



$\begin{cases} r = \text{raggio} \\ z = \text{coor. lineare} \\ \theta = \text{coord. angolare} \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 117 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 119 di 346

Definiamo come TRAIETTORIE di 1 particella fluida il luogo geometrico dei punti occupati dalla stessa particella in istanti di tempo successivi → PATHLINE o LINEA DI FLUSSO.

Definiamo come linea di corrente o streamline, la linea tangente in ogni suo punto al vettore velocità

Linea di corrente

$$\frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{v}(\vec{x}) = 0$$

velocità

i 2 vettori sono PARALLELI

↓

CONDIZIONE DI PARALLELISMO

PATHLINE $\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{v}_p(\vec{x}_p, t)$ La traiettoria sta seguendo il pto P.

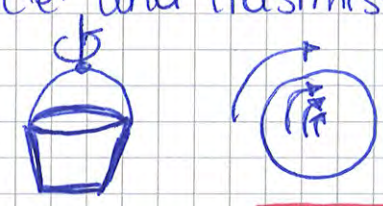
In CONDIZIONI STAZIONARIE $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ → allora le PATHLINE e le STREAMLINE coincidono

se $\frac{\partial v}{\partial t}$ → PATHLINE ≡ STREAMLINE

Le streakline sono ~ alle PATHLINE, ma partono tutte dallo stesso punto iniziale. ("linee di fumo) sono transitate tutte da uno stesso punto in un istante precedente.

VISCOSITÀ → indica la facilità con cui si modifica lo stato di quiete del FLUIDO.

Newton scopre che c'è una trasmissione del moto anche nel FLUIDO.



μ → COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ = difficoltà di uno strato di fluido reale a scorrere con una $v \neq$ dallo strato di liquido adiacente

$\mu \uparrow$ si trasmette difficilmente $\mu \downarrow$ si trasmette lentamente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 119 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 121 di 346

- raggio: coordinata R (raggio r) sulla quale sono leggibili i valori r delle lunghezze dei raggi dei punti
- angolo:coordinata Θ (angolo θ) sulla quale sono leggibili i valori θ degli angoli dei punti
- quota: coordinata Z (asse z) sulla quale sono leggibili i valori z delle quote dei punti

Il raggio r giace su un piano perpendicolare alla quota z, l'angolo θ individua la posizione del raggio su detto piano a partire da un a posizione angolare di riferimento che si trova ripetuta per semplice traslazione su tutti i piani perpendicolari alla quota z.

I valori r del raggio sono accettati e definiti nell'intervallo tra 0 e +∞.

I valori θ dell'angolo sono accettati e definiti nell'intervallo tra 0 e +2π (non compreso).

I valori z della quota sono accettati e definiti nell'intervallo tra - ∞ e + ∞.

I punti caratterizzati dalla coordinata r = 0, cioè i punti giacenti sull'asse delle z nell'origine degli assi sono punti singolari in quanto non è necessario assegnare l'angolo θ per individuarli, ma è sufficiente assegnare oltre a r = 0 il valore della quota z.

Per questi punti il sistema di riferimento non è più tridimensionale, ma collassa a sistema bidimensionale; in ragione di questo fatto diverse equazioni scritte con questo sistema di riferimento (quelle in cui alcuni termini presentano una r a denominatore) non sono valide per r = 0 e i valori dei parametri ricercati per r = 0 devono essere trovati come soluzione al limite per r tendente a 0.

2.9 Coordinate sferiche: r, θ, ~~z~~ φ

Il sistema di riferimento è costituito da tre coordinate denominate:

- raggio: coordinata R (raggio r) sulla quale sono leggibili i valori r dei raggi dei punti
- declinazione: coordinata Φ (declinazione φ) sulla quale sono leggibili i valori φ dei punti lungo i paralleli.
- azimut: coordinata Θ (angolo θ) sulla quale sono leggibili i valori θ degli angoli dei punti lungo i paralleli

I valori r del raggio sono accettati e definiti nell'intervallo tra 0 e +∞.

I valori φ della declinazione sono accettati e definiti nell'intervallo tra 0 e +2π (non compreso).

I valori θ dell'azimut sono accettati e definiti nell'intervallo tra 0 e +π (non compreso); in alcuni casi può essere preferito il campo di variazione tra –π/2 e +π/2.

Il punto caratterizzato dalla coordinata r = 0, cioè il punto giacente sull'origine, è punto singolare in quanto non è necessario assegnare né la declinazione né l'azimut per individuarlo.

Per questo punto il sistema di riferimento non è più tridimensionale, ma collassa a sistema monodimensionale; in ragione di questo fatto diverse equazioni scritte con questo sistema di riferimento non sono valide per r = 0 e i valori dei parametri ricercati per r = 0 devono essere trovati come soluzione al limite per r tendente a 0.

2.10 Legami tra coordinate ortogonali e cilindriche e sferiche

In coordinate cilindriche le variabili rettangolari sono legate a *x, y, z* come segue (**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right| \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Equazione 2-1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 121 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 123 di 346

un sistema di tre equazioni scalari che rappresentano la proiezione sui tre assi di coordinate di detta equazione vettoriale.

Una scrittura in termini vettoriali, come è possibile in questo caso, può essere scelta per almeno due serie di motivi: il primo riguarda la maggiore concisione e la maggiore significatività, che la scrittura in termini vettoriali comporta, il secondo riguarda la possibilità di eseguire integrazioni di dette equazioni in termini di integrazione di equazioni vettoriali.

E' ovvio che in questo caso, in luogo di eseguire l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, si tratterebbe di eseguire l'integrazione di una unica equazione, dotandola delle necessarie condizioni al contorno espresse in forma vettoriale.

Occorre rimarcare che questa ultima possibilità non appartiene alla usuale pratica delle elaborazioni analitiche delle equazioni, e che i vantaggi della scrittura vettoriale sono, soventemente, sostanzialmente riconducibili alla loro maggiore sintesi descrittiva.

In linea di principio noi ci atterremo al seguente modo di procedere: considereremo le equazioni di bilancio esclusivamente nella loro espressione in forma scalare e, se in alcuni casi proporremo anche scritture vettoriali, lo faremo solo con l'intento di ricondurci a sintesi espositive in grado di confrontare tali risultati con quelle di trattazioni seguite nell'ambito di materie quali la Fisica, la Meccanica Razionale, la Scienza delle Costruzioni e simili.

Per questi stessi motivi eviteremo di addentrarci in tecnicalità e problemi di formalizzazione abbastanza complessi che riguarda l'utilizzo di operatori vettoriali o tensoriali od altro; tali operatori quali il ∇ (generalmente denominato nabla, anche se alcuni autori anglosassoni lo chiamano del) consentono di eseguire ad esempio derivazioni in ambito vettoriale e comportano un agevole e sintetica indicazione, nelle equazioni espresse in forma vettoriale, delle operazioni analitiche eseguite sulle grandezze.

D'altra parte questa materia è per sua necessità complessa e ricca per così dire di trabocchetti; le definizioni di operatori vettoriali sono dipendenti dal sistema di coordinate prescelto e inoltre esistono, in funzione del tipo di coordinate, numerose particolarità e difficoltà specifiche.

Si ricorda ad esempio che esistono alcune definizioni del Laplaciano in coordinate rettangolari non estendibili a coordinate ortogonali non rettangolari e inoltre diverse operazioni implicanti l'uso di operatori sono riportate nella letteratura con formulazioni valide soltanto per tensori simmetrici, ecc.

L'approfondimento di questa materia, secondo questo schema, rappresenta pertanto una difficoltà di tecnica e di strumenti non sostanzialmente giustificabile in vista dei risultati che vogliamo ottenere.

Si preferirà pertanto ricondurre tutte le analisi che condurremo alla formulazione e alla elaborazione di espressioni espresse in forma scalare.

Riferirsi alla scrittura scalare delle equazioni di bilancio non significa non introdurre all'interno di esse vettori o tensori; il fatto che i termini contenenti vettori o tensori siano degli scalari è semplicemente legato al fatto che tali vettori o tensori sono soggetti ad operatori o ad operazioni che ne decalano il livello di grandezza sino alla grandezza scalare.

Ad esempio il prodotto $\tau:\nabla v$ rappresenta un prodotto doppio scalare tra due tensori e conduce ad una grandezza scalare, in particolare alla velocità di aumento irreversibile dell'energia interna per unità di volume dovuta alla dissipazione viscosa; è ovvio che tale prodotto potrebbe anche essere espresso come sommatoria di grandezze scalari, ma è altrettanto evidente che in tale caso la sua formulazione richiederebbe almeno due linee di testo in luogo dei pochi caratteri così utilizzati.

2.17 Approccio lagrangiano ed euleriano

Analizziamo il fatto che esistono in un continuo delle grandezze che sono attribuite ad una posizione, nel riferimento x, y, z, e ad un certo tempo t.

Chiamiamo c genericamente questa grandezza questa grandezza che può essere scalare, vettore o tensore:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 123 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 125 di 346

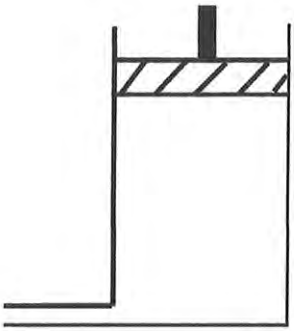


Figura 5:Modello dotato di pistone per variare l'altezza della colonna di fluido.

Questa esigenza può presentarsi quando studiamo il moto di un pistone (**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**) e ci chiediamo che cosa succede sulla superficie del pistone, senza con questo ritenere che le stesse particelle di fluido restino aderenti al pistone.

Quando gli spostamenti lungo *x, y, z* sono quelli appartenenti al moto della materia e quando quindi la derivata segue, non tanto una variazione generica nello spazio, ma quello che succede su una particella materiale che si sposta, questo valore viene scritto come:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \qquad \textit{Equazione 2-15}$$

e questa derivata è chiamata derivata sostanziale, derivata seguendo il movimento, derivata lagrangiana o derivata materiale.

2.18 Traiettorie, linee di corrente e streaklines

Fino ad ora non abbiamo dato una definizione rigorosa di traiettoria di una particella materiale; ciò è importante in quanto vedremo che in un flusso si possono definire diverse 'linee', in generale non coincidenti, ognuna delle quali con un diverso significato.

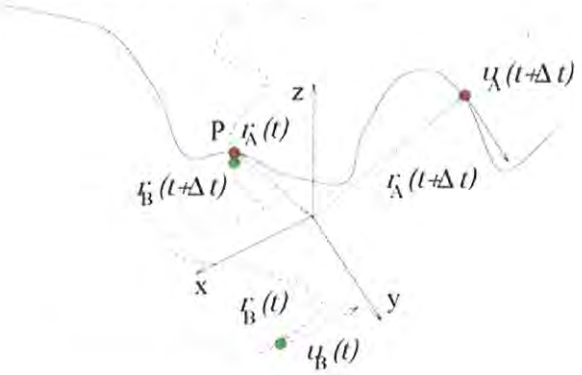


Figura 6: Traiettorie lagrangiane per due particelle fluide A e B

Possiamo definire la **traiettoria di una particella** fluida come il luogo geometrico dei punti occupati dalla stessa particella in istanti di tempo successivi. Riferendoci alla figura 4-6 si ha quindi che le linee solida e tratteggiata sono rispettivamente le traiettorie delle particelle fluide A e B. È evidente come il concetto di traiettoria sia lagrangiano in quanto legato all'identificazione ed al tracciamento di particelle singole. Definiamo invece **linea di corrente** una linea che sia in ogni punto tangente al vettore locale di velocità. Se quest'ultima avrà un'evoluzione non stazionaria, le linee di corrente saranno evidentemente diverse da istante ad istante. Un esempio di linee di

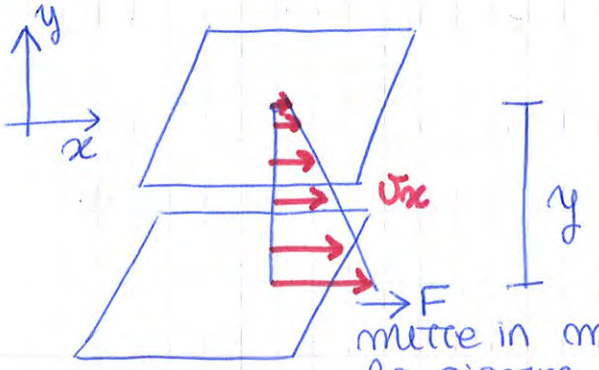
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 125 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 127 di 346

ESAME!

29 ottobre 2014

VISCOSITÀ = difficoltà di uno strato di fluido reale a scorrere con una velocità diversa dallo strato di fluido adiacente. (Le velocità tendono ad uniformarsi nell'olio e a diversificarsi nell' H_2O).



mette in moto la piastra inferiore. Il moto si trasmette con un profilo di velocità alla piastra superiore

Legge di Newton = esiste uno scambio di forze adiacenti, che permettono la trasmissione del moto dalla piastra inferiore a quella superiore.

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad [Pa] = \frac{N}{m^2} = \boxed{\text{Forza su una superficie}}$$

↓ PRESSIONE

$$\tau \rightarrow \frac{N}{m^2} = \underbrace{Kg \cdot \frac{m}{s^2}}_{N} \cdot \frac{1}{m^2} = \underbrace{\underbrace{\left[\underbrace{\left(Kg \cdot \frac{m}{s}\right)}_{qdm} \frac{1}{s}\right]}_{\text{Flusso di qdm}} \cdot \frac{1}{m^2}}_{\boxed{\text{Flusso di qdm relativo all'unità di superficie}}}$$

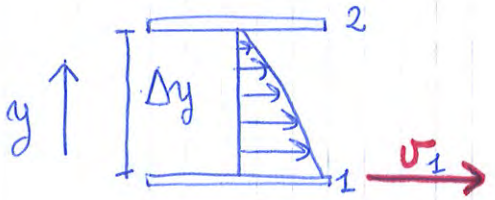
Dall'analisi dimensionale, posso interpretare la τ come:

- Forza su una superficie = Pressione
- Flusso di qdm relativo all'unità di superficie

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 127 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 129 di 346

Es: calcolo flusso qdm



$\tau = ?$

$v = 0{,}3\ m/s$

$\Delta y = 0{,}3\ mm$

$\mu = 0{,}7\ cP$

$\Delta W = \cancel{v_2} - v_1$

0, è fermo

$\mu \Rightarrow 0{,}7\ cP = 0{,}0007\ Pa \cdot s$

Profilo velocità → LINEARE

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta W}{\Delta y} = \frac{0{,}3\ m/s}{0{,}03\ m} = 1000\ s^{-1}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = 0{,}0007\ Pa \cdot \cancel{s} \cdot 1000\ \frac{1}{\cancel{s}} = 0{,}7\ Pa$$

↓ positivo perché y entra nella superficie e quindi è concorde con x.

$$\boxed{\tau_{yx} = 0{,}7\ Pa}$$

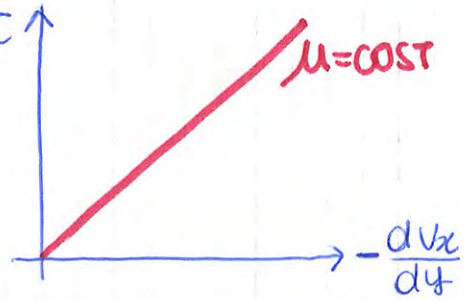
Flusso di qdm relativo all'unità di superficie

EQ. COSTITUTIVA DI UN FLUIDO = relazione che esprime il legame tra il tensore degli sforzi e tensore delle deformazioni (⇒ relazione tra τ (sforzi) e le deformazioni ($\frac{dv}{dy}$ = gradiente velocità)).

$$\boxed{\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}}$$

se $\boxed{\mu = COST}$ = LIQUIDO NEWTONIANO

↓ coefficiente angolare della retta



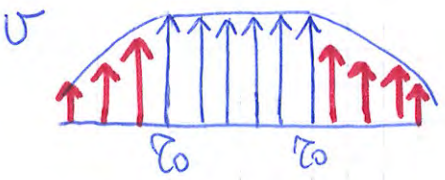
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 129 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 131 di 346

Essendo un fluido alla Bingham, avrò moto solo se $\tau > \tau_0$

zona in cui il gradiente di velocità è nullo → $\int \frac{dv}{dy}$ = RETTA = costante

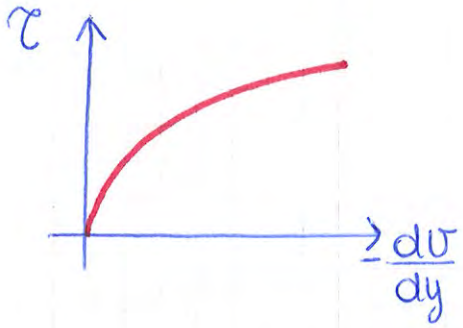
zone in cui il gradiente di velocità è lineare, è una retta → $\int \frac{dv}{dy}$ = PARABOLA



- **FLUIDI PSEUDOPLASTICI** $(n<1)$ (ketchup, sangue)

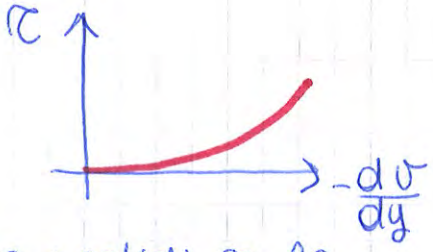
$$\tau_{yx} = -\mu \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy}$$

se ↑ $\frac{dv_x}{dy}$ allora la μ↓ (= la velocità di deformazione regola la viscosità del fluido)



SHEAR THINNING (+scorrevole) $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ ↓ FLUIDI PSEUDOPLASTICI

- **FLUIDI DILATANTI** $(n>1)$ (H_2O + amido di mais)



se ↓ $\frac{dv_x}{dy}$ allora μ↓ (= diventano + solidi se la velocità aumenta)

SHEAR THICKENING → FLUIDI DILATANTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 131 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 346

In regime stazionario non ci sono variazioni del patrimonio di qdm dell'interno del V di controllo → quindi il bilancio diventa flusso di qdm entranti − uscenti + Σ forze esterne = 0

$\boxed{\text{Regime STAZIONARIO}}$ $\left\{\begin{matrix}\text{Flusso}\\ \text{qdm}\\ \text{entrante}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Flusso}\\ \text{qdm}\\ \text{uscente}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma\ \text{forze}\\ \text{esterne}\\ \text{agenti}\end{matrix}\right\} = 0$

APPROCCIO MECCANICO

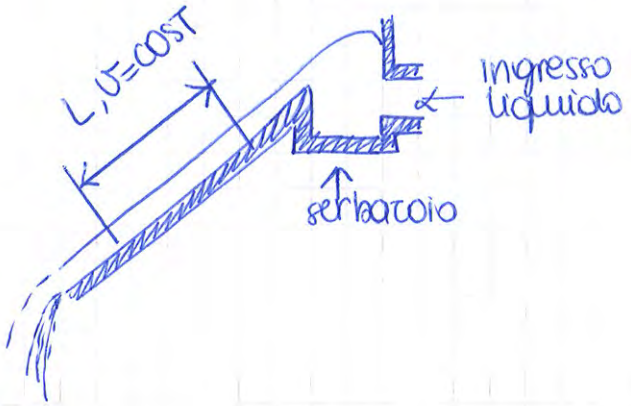
ESAME!

Approccio MECCANICO → si ricava il bilancio di qdm applicando il 2° principio della dinamica, cioè da un bilancio di forze.

Nella 1° zona del piano inclinato il fluido è accelerato (xk gli attriti sono bassi)

Poi F. attrito = F. gravità (ad una certa v e ad una certa L)

Poi v = cost., solo all'uscita sarà di nuovo accelerato a causa di perturbazioni

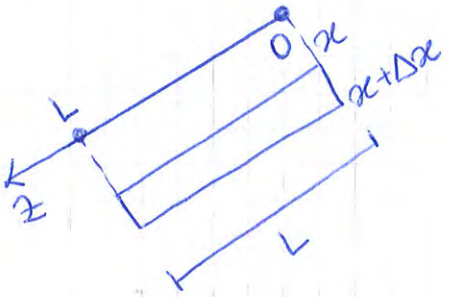


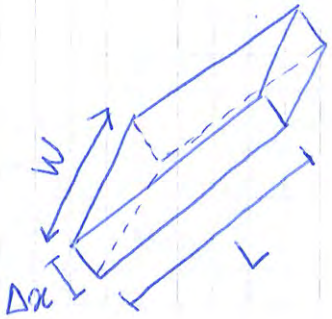
- Sul tratto L in cui v=cost, posso fare il bilancio della qdm (→ guardo dove ho eql. tra gravità e attriti)

BILANCIO SUL TRATTO L:

$\left\{\begin{matrix}v_{ing}\\ \text{qdm}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}v_{uscita}\\ \text{qdm}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma\ \text{forze}\\ \text{agenti}\end{matrix}\right\} = 0$

(1) • Considero uno strato di fluido Δx, di lunghezza L e profondità W: su cui faccio il bilancio qdm:





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 135 di 346

$$LW\tau_{xz}|_x - LW\tau_{xz}|_{x+\Delta z} + LW\Delta x(\rho g\cos\beta) = 0$$

divido per $LW\Delta x$

$$\frac{\tau_{xz}|_x - \tau_{xz}|_{x+\Delta}}{\Delta x} + \rho g\cos\beta = 0$$

$$\rho g\cos\beta = \frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x}$$

(2) $$\lim_{\Delta x\to 0} \rho g\cos\beta = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x}\right]}_{\text{definizione di derivata}}$$

(3) $$\boxed{\rho g\cos\beta = \frac{d(\tau_{xz})}{dx}}$$

EQZ. DIFFERENZIALE
X IL FLUSSO DI QDM
(X τ)

Per ricavare τ: $\rightarrow \int dx$ (, integro lungo x)

(4) $$\tau_{xz} = x\rho g\cos\beta + C_1$$

$\downarrow$

da determinare dalle B.C. = C.I.

BC 1 $\rightarrow$ $x=0$, $\tau_{xz}=0$ non c'è flusso di qdm tra aria e H_2O, il liquido non accelera l'aria

$\downarrow$

ricavo $\boxed{C_1 = 0}$

(5) $$\boxed{\tau_{xz} = x\rho g\cos\beta}$$

PROFILO DELLE τ nel fluido

$\downarrow$

eq. x ricavare gli sforzi τ nel fluido

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 135 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 137 di 346

ANDAMENTO PARABOLICO

MAX → $x=0$ = interfaccia liquido-aria

* $v_{MAX} \Rightarrow v_z(x=0) = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta$ $\boxed{\text{VELOCITA' MASSIMA}}$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^W\int_0^\delta v_z\,dx\,dy}{\int_0^W\int_0^\delta dx\,dy} = \frac{W\int_0^\delta v_z\,dx}{W\delta}$$

$\downarrow$ $\frac{v_z}{A}$

↑ integrali definito

↗ funzione di $x \to v_z(x)$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta v_z\,dx = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta\left[x - \frac{1}{3\delta^2}x^3\right]_0^\delta =$$

* $\bar{v}_z = \frac{1}{\delta}\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta\cdot\frac{2}{3}\delta = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2\cos\beta$ $\boxed{\text{VELOCITA' MEDIA}}$

* $\dot{V} = \int_0^W\int_0^\delta v_z\,dx\,dy\cdot A = \bar{v}_z\cdot A = \frac{\rho g}{3\mu}W\delta^3\cos\beta$ $\boxed{\text{PORTATA VOLUMICA}}$

$\dot{M} = \rho\dot{V}$ * $\delta = \sqrt{\frac{3\mu\bar{v}_z}{\rho g\cos\beta}}$

Approccio meccanico

1 - Bilancio qdm x uno strato finito (bilancio forze)

2 → facendo $\lim_{\Delta x\to 0}$

3 - eq. differenziale del flusso di qdm τ

4 → integrando $\int dx$ + BC1

5 - eq. del profilo delle τ

6 → introduco l'eq. costitutiva (x fluido N. $\tau = -\mu\frac{dv}{dx}$)

7 - eq. differenziale x le velocita'

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 137 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 139 di 346

Facendo lo stesso per gli altri componenti

$\rho V_y|_y \, dx dz$ portata in massa entrante attraverso

$-\rho V_y|_{y+dy} dx dz$ portata in massa uscente

$\rho V_z|_z \, dx dy$ portata in massa entrante

$-\rho V_z|_{z+dz} dx dy$ portata in massa uscente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = dy dz \left(\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}\right) + dx dz \left(\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}\right) + dx dy \left(\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}\right)$$

- semplifico per $dV = dx dy dz$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\left(\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}\right)}{dx} + \frac{\left(\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}\right)}{dy} + \frac{\left(\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}\right)}{dz}$$

- $\lim_{dV \to 0} = \lim_{dx \to 0} = \lim_{dy \to 0} = \lim_{dz \to 0}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{\lim_{dx \to 0} \frac{\quad}{dx} + \lim_{dy \to 0} \frac{\quad}{dy} + \lim_{dz \to 0} \frac{\quad}{dz}}_{\text{definizione di derivata con segno invertito}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho V_z}{\partial z}$$

- calcolo le DERIVATE:

$$d(fg) = df \cdot g + dg \cdot f$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{0} + \underbrace{\cancel{V_x \frac{\partial \rho}{\partial x}}}_{0} + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \underbrace{\cancel{V_y \frac{\partial \rho}{\partial y}}}_{0} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} + \underbrace{\cancel{V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}}}_{0} + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

FLUIDO INCOMPRIMIBILE $\rightarrow$ $\rho = \text{cost}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 139 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 141 di 346

Accumulo di qdm nel tempo $\rightarrow \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{volume}} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho V}{\partial t}\right)}_{\text{qdm x unità di volume}}$

1) CONVEZIONE (dovuto al moto del fluido)

considero solo la componente x (analogo x le altre)

$$\underbrace{\dot{m}}_{\text{PORTATA MASSICA}} v_x = \underbrace{\dot{V}}_{\text{P. VOLUMICA}} \rho v_x = dy\,dz\, v_x \rho v_x = dy\,dz\, \rho v_x v_x|_x$$

velocità · superficie

qdm entrante in x

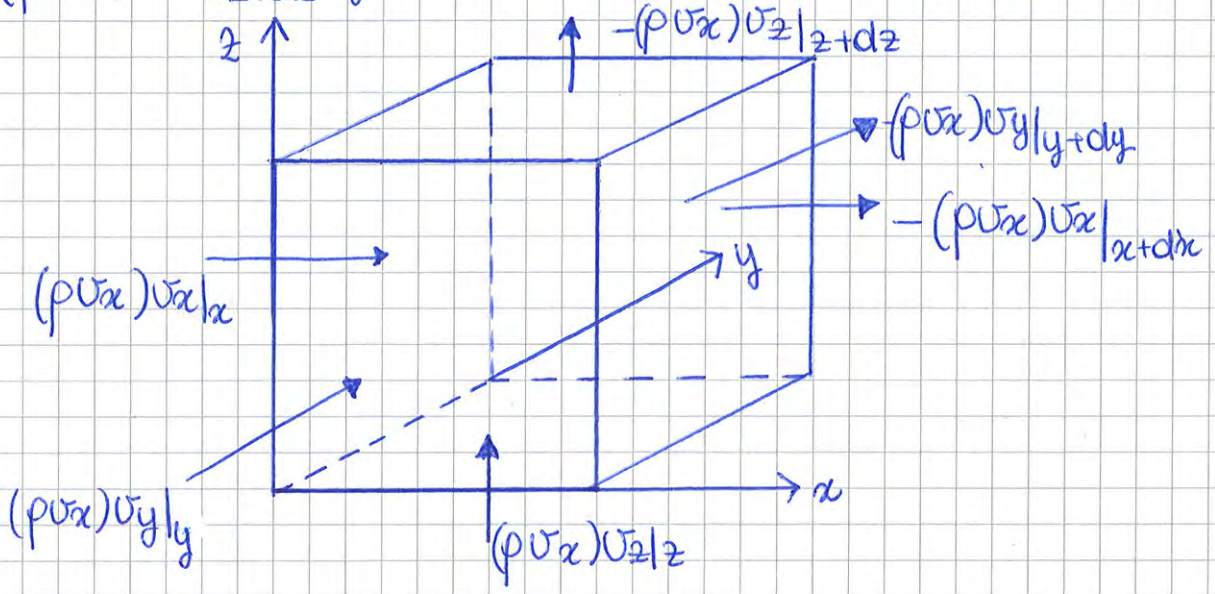
$-dy\,dz\,\rho v_x v_x|_{x+dx}$ qdm uscente in x

$(\rho v_x) v_y|_y dx\,dz$ Flusso di qdm entrante in dV attraverso la superficie in y.

$-(\rho v_x) v_y|_{y+dy} dx\,dz$ Flusso di qdm uscente da $y+dy$

$(\rho v_x) v_z|_z dx\,dy$ Flusso di qdm entrante in z

$-(\rho v_x) v_z|_{z+dz} dy\,dx$ Flusso di qdm uscente in $z+dz$

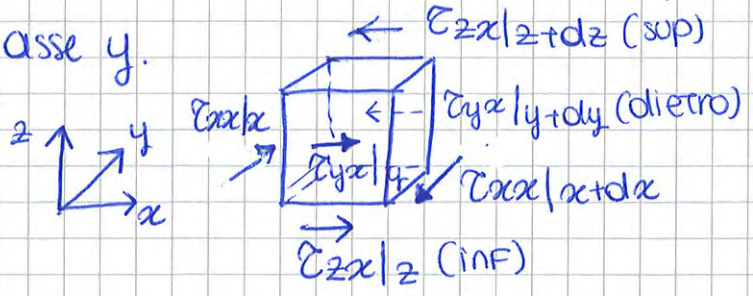


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 141 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 346

2) TRASPORTO MOLECOLARE (dovuto alla presenza delle τ)

Si ricorda che τ_{yx} è il flusso della componente della qdm nella direzione x attraverso una superficie perpendicolare all'asse y.



$$\begin{cases} dx\,dz\ \tau_{yx}|_y & \text{entrante in } y \\ -dx\,dz\ \tau_{yx}|_{y+dy} & \text{uscente in } y+dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx\,dy\ \tau_{zx}|_z \\ -dx\,dy\ \tau_{zx}|_{z+dz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy\,dz\ \tau_{xx}|_x \\ -dy\,dz\ \tau_{xx}|_{x+dx} \end{cases}$$

$$dy\,dz\left(\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+dx}\right) + dx\,dz\left(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+dx}\right) +$$
$$+\ dx\,dy\left(\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+dz}\right)$$

- divido per dV e $\lim_{dV\to 0}$

$$\boxed{-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}$$

APPORTO DI QDM NELLA DIREZIONE x PER TRASPORTO MOLECOLARE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 145 di 346

(c) Forza viscosa sull'elemento per unità di volume

(D) Forza peso sull'elemento per unità di volume

↓

Il fluido è accelerato dalle forze che agiscono e che hanno natura diversa.

L'eq. del moto dice che un elemento di volume in moto con il fluido viene accelerato a causa delle forze che agiscono su di esso. In altri termini si ritrova la 2ª legge di Newton della dinamica nella forma

(massa) x (accelerazione) = (Σ forze)

Si rileva che il bilancio di qdm è perfettamente equivalente alla 2ª legge di Newton

Per semplificare l'eq. di qdm devo sostituire all'espressione della τ l'eq. costitutiva del moto

↓

introduco l'ipotesi di FLUIDO NEWTONIANO oltre ad avere già ipotizzato il fluido INCOMPRIMIBILE

Inoltre abbiamo dimostrato l'eq. di continuità, per cui $\nabla \vec{v} = 0$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

(vedi pag. 14)

- sostituisco $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ per un FLUIDO NEWTONIANO

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right)\right.}$$
$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

- raccolgo μ (perché è cost, FLUIDO NEWTONIANO)

$$\underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}_{2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}$$

$2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ → scritto così, xk è + comodo per il passaggio dopo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 145 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 147 di 346

COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALI

COORDINATA x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x$$

COORDINATA y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y$$

COORDINATA z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z$$

COORDINATE CILINDRICHE

COORDINATA r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right)+\rho g_r$$

COMPONENTE θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right)+\rho g_\theta$$

COMPONENTE z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 147 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 149 di 346

COMPONENTE z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z$$

$$+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

* → FORZA CENTRIFUGA $=\rho\frac{v_\theta^2}{r}$

* → FORZA DI CORIOLIS $\rho\frac{v_r v_\theta}{r}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 149 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 151 di 346

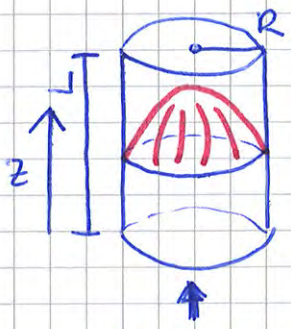
ESERCIZIO 1

APPROCCIO FLUIDO-DINAMICO

1° modo: parto dall'eq. generale ed elimino i termini nulli → risolvo l'eq. diff. delle velocità → integro e risolvo.

EQ. GENERALE del moto → scelgo componente e sist. di riferimento.

PROFILO VELOCITÀ = ?



SdR: CILINDRICHE

componente: z, $v_z = ?$

Considero un moto sviluppato, v_z è indipendente dalla z a cui guardo le velocità.

$v_z \neq v_z(z)$: moto sviluppato

$v_z \neq v_z(\theta)$: è ASSIALSIMMETRICO

$v_z = v_z(r)$ $\qquad$ $v(z) \neq v_z(t)$: è STAZIONARIO

$v_\theta = 0$ → no v. angolarmente

$v_r = 0$ → no v. radialmente

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}^{\text{staz.}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}}^{v_r=0} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{r}}^{v_\theta=0} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}^{\text{m. sviluppato}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}\right)}^{=0 \text{ simmetrico}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}^{0 \text{ sviluppato}}\right) + \rho g_z$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \rho g_z$$

Sostituisco $P = p + \rho g_z$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)$$

Integro $\int_0^L$

$$0 = \int_0^L \left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) dz$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 151 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 346

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L)R^2$$

$$v_z = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L)r^2 + \frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L)R^2$$

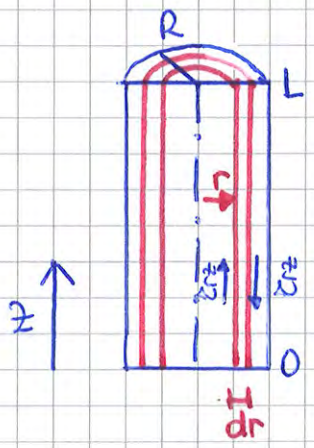
$$v_z = +\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L)(-r^2 + R^2)$$

$$\boxed{v_z = +\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L)R^2\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]}$$

equaz. del profilo delle velocita'

6 novembre 2014

<u>2° modo:</u> approccio MECCANICO → bilancio qdm e' dato da un bilancio di forze.



Mezza' condotto e considero un volume elementare

r = sup. interna corona circolare

$V_z = V_z(r)$

considero la corona circolare dr e' il mio volume elementare infinitesimo

BILANCIO DI FORZE SUL VOLUMETTO: (τ, pressione e volume)

- Flusso di qdm sulla parete laterale r (interna c. circolare) → $\underbrace{2\pi r L}_{\text{area}}\ \underbrace{\tau_{rz}|_r}_{\text{qdm x unita' di superficie}}$
- Flusso di qdm sulla parete laterale r+dr (esterna c. circolare → $-2\pi(r+dr)L\,\tau_{rz}|_{r+dr}$
- Forza di pressione $z=0$ → $2\pi r\,dr\,P_0$ *
- Forza di pressione $z=L$ → $-2\pi r\,dr\,P_L$

N.B:

* $\pi(r+dr)^2 - \pi(r^2)$ = area corona circolare $\approx 2\pi r dr$

$\cancel{\pi r^2} + \underbrace{\cancel{\pi dr^2}}_{\approx 0} + 2\pi r dr - \cancel{\pi r^2}$

inf. di ordine superiore

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 155 di 346

- Introduco l'EQ. COSTITUTIVA DI UN FLUIDO NEWTONIANO

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

$\downarrow$

posso ricavare il PROFILO delle VELOCITA'

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2L\mu}\right) r$$

- integro $\int dr$

$$v_z(r) = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 + C_2$$

- $BC_2 \rightarrow \quad v_z(r=R) = 0$

$$0 = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 + C_2$$

$$C_2 = +\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2$$

$$v_z(r) = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 + \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2$$

$$\boxed{v_z(r) = +\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}$$

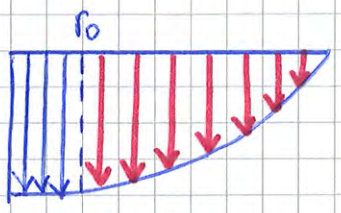
EQ. PROFILO DI VELOCITA'

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 155 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 157 di 346

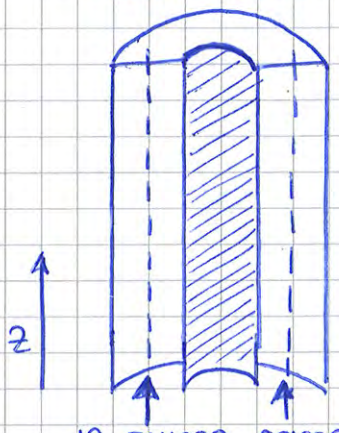
$r < r_0, \quad \tau < \tau_0$

$$\boxed{v_z(r) = \frac{p_0 - p_L}{4\mu_0 L} R^2 \left(1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right) - \frac{\tau_0}{\mu} R \left[1 - \frac{r_0}{R}\right] \rightarrow v_z(r) = \text{cost}}$$



ESERCIZIO 2 — CONDOTTO ANULARE

≠ viscosimetro di Couette, lì il fluido ruota (2 cilindri concentrici)



il flusso passa in una corona circolare

MOTO STAZIONARIO $v_z \neq v_z(t)$

$v_z \neq v_z(z)$

$v_z(r) = v_z$, $kR \leq r \leq R$ RAGGIO DELLA CORONA CIRCOLARE

$v_\theta = 0$

$v_r = 0$

SdF: coordinate sferiche

componente: z

→ • APPROCCIO MECCANICO: Bilancio di forze già calcolato, cambiano solo i limiti di esistenza

• Approccio FLUIDODINAMICO

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}}_{\text{staz}} + \underbrace{\cancel{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}}}_{v_r = 0} + \underbrace{\cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}}_{v_\theta = 0} + \underbrace{\cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}}_{v_z(z) = 0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})\right.$$

$$\left. + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta}}}_{\text{no gdu in queste direz.}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}}\right) + \rho g_z$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz} r) + \rho g_z$$

• $\int dz$ e sostituisco $P = p + \rho g_z$

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \frac{p_0 - p_L}{L} r$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 157 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 159 di 346

EQ. DI NAVIER - STOKES

20 novembre 2014

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial v_x}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

$\rho \frac{DV_x}{Dt}$ → F. INERZIALI transitorie + convettive

ρg_x → F. GRAVITA'

$\frac{\partial p}{\partial x}$ → F. PRESSIONE

$\mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial v_x}{\partial z^2} \right]$ → F. VISCOSE

- Adimensionalizzo sostituendo le variabile dell'eq. con delle variabili adimensionali

- $x' = \frac{x}{L}$ → $x \to [m]$ → $x = x'L$
  L → lunghezza caratteristica $[m]$ (ϕ → se il condotto è cilindrico)
  ↓ ADIMENSIONATO

- $y' = \frac{y}{L} \to y = y'L$

- $v'_x = \frac{v_x}{|V|}$ → $v_x = |V| \cdot v'_x$
  → valor medio di velocità sulla sezione

- $z' = \frac{z}{L} \to z = z'L$

- $p' = \frac{p}{\rho |V|^2}$ → $p = p' \rho |V|^2$
  → pressione DINAMICA (da Bernoulli)

- $t' = t \cdot \omega \to t = \frac{t'}{\omega}$
  ω → frequenza angolare $\Rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
  con T = durata del moto

- $\rho g_x \cong 0$ → nella direzione x, $g_x = 0$

Sostituendo in (1):

$$\rho \frac{D v'_x |V|}{Dt'} \omega = \underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{0} - \frac{\partial p' \rho |V|^2}{\partial x' L} + \mu \left[\frac{\partial^2 v'_x |V|}{\partial x'^2 L^2} + \frac{|V|}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 v'^2_x}{\partial y'^2} + \frac{|V|}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right]$$

$$\rho |V| \omega \cdot \frac{D v'_x}{Dt'} = -\frac{\rho |V|^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu \frac{|V|}{L^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right]$$

divido per $\frac{\rho |V|^2}{L}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 159 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 161 di 346

$\boxed{\alpha^2 = \text{NUMERO DI WOMERSLEY} \Rightarrow}$ $\dfrac{\omega \rho L^2}{\mu} = \alpha^2$

$\boxed{Re = \text{NUMERO DI REYNOLD}}$

dovute alla non stazionarietà del moto

$$\alpha^2 = \frac{\omega \rho L^2}{\mu} = \frac{\text{F. INERZIALI TRANSITORIE}}{\text{F. VISCOSE}}$$

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\text{F. INERZIALI CONVETTIVE}}{\text{F. VISCOSE}}$$

<u>come cambia il moto al variare di Re?</u>

* Re esprime la transizione da regime di moto laminare a regime di moto turbolento.

$Re < 2000$	Laminare	→ F. VISCOSE ≫ F. CONVETTIVE
$2000 < Re < 10000$	Transizione	
$Re > 10000$	Turbolento	→ F. VISCOSE ≪ F. CONVETTIVE

F. VISCOSE ≫ F. CONVETTIVE → il fluido tende a mantenere il suo stato, moto organizzato, filetti fluidi paralleli.

* α^2 → consideriamo il moto in un condotto cilindrico.

In condizioni stazionarie vale: (vedi ESERCIZIO 1)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dw}{dr}\right) + \frac{P_1 - P_2}{\mu l} = 0$$

w = velocità

l = lunghezza condotto ≠ da quella caratteristica

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 161 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 163 di 346

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{A}{\mu} e^{int}$$

eq. DIFF. del 2° ordine non omog.

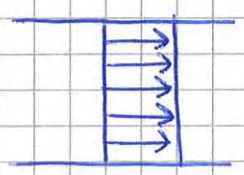
soluzione → int. omogeneo + int. particolare
(caso stazionario)

La soluzione è la sovrapposizione di una <u>componente media</u> data dalla sol. omogenea + una <u>componente pulsatile</u> data dalla sol. integrale

il profilo delle velocità è modificato da α^2.

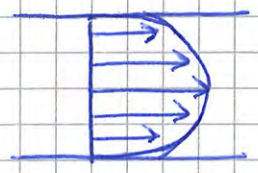
- se $\alpha^2 \downarrow$ (raggio piccolo) [F. VISCOSE ≫ F. TRANSITORIE INERZIALI
  profilo molto modificato dalle F. viscose
  ∿ STAZIONARIO
- se $\alpha^2 \uparrow$ (raggio grande) [F. TRANSITORIE ≫ F. VISCOSE
  profilo poco modificato dalle F. viscose

NO F. VISCOSE

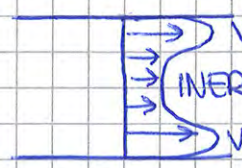


INERZIALE

F. VISCOSE



VISCOSO + INERZIALE



<u>VISCOSO + INERZIALE</u> → sulla parete predominano gli sforzi viscosi, quindi il comportamento è in fase con il Δp.
Al centro le F. inerziali predominano e sono sfasate con il Δp. Vi è una <u>distanza dalla parete alla quale F. viscose e F. inerziali sono in equilibrio</u>.

$$\rho \omega \nu = \frac{\mu \nu}{\delta^2}$$ → DISTANZA alla quale sono in eq.

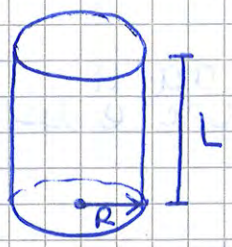
$$\delta = \sqrt{\frac{\mu \nu}{\rho \omega \nu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \omega}} = \sqrt{\frac{R^2}{\alpha^2}} \left(\frac{\text{raggio}}{\text{womersley}}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 163 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 165 di 346

27 novembre 2014

Moto di un fluido (newtoniano) in un condotto cilindrico



$$\frac{\Delta P}{L} = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \qquad (\rightarrow v_z(r) = v_z)$$

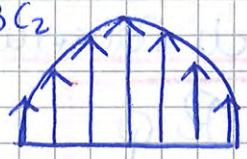
$$\frac{\Delta P}{L\mu} r = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\Delta P}{2\mu L} r^{\cancel{2}} + \underset{0}{\cancel{C_1}} = \cancel{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \rightarrow 1^\circ \text{ Integrazione} \qquad v_{MAX} = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2$$

BC1

$$\frac{\Delta P}{4\mu L} r^2 + C_2 = v_z(r) \rightarrow 2^\circ \text{ Integrazione} + BC_2$$

$$v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right]$$



Profilo parabolico con max per $r=0$

PORTATA VOLUMICA $\rightarrow Q \rightarrow$ Integro in coord. cilindriche

$$Q = \int_0^R 2\pi r\, v_z(r)\, dr = \int_0^R 2\pi \cdot r \cdot \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right] dr$$

$$= 2\pi \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr =$$

$$= 2\pi \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\cdot\frac{1}{R^2}\right]_0^R =$$

$$= 2\pi \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{R^2}}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi}{{}_2\,\cancel{4}\mu L} \Delta P R^2 \cdot \frac{R^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi R^4}{8\mu L} \cdot \Delta P$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 165 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 167 di 346

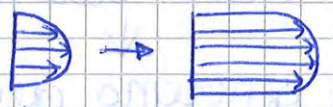
aumenta → cuore si sovraccarica → infarto o dilatazione del ventricolo

ASSUNZIONI Legge di Poiseuille

La legge di Pouseille è limitata al seguente ambito di validità: (per scriverla sono state fatte delle ipotesi)

1 – STAZIONARIETÀ
2 – FLUIDO NEWTONIANO
3 – REGIME DI MOTO LAMINARE
4 – CONDOTTO CILINDRICO, ASSIALSIMMETRICO, A SEZIONE COSTANTE RETTILINEO
5 – $U=0$ alla parete (→BC. x risolvere l'eq. differenziale)
6 – MOTO SVILUPPATO
7 – PARETE RIGIDA, NON DEFORMABILE

FLUSSO NON ASSIALSIMMETRICO

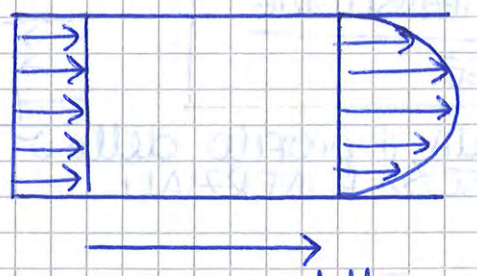


(4) Si perde il profilo parabolico delle velocità e si perde la simmetria. La simmetria si perde anche nel caso di moto turbolento, inoltre U_{MAX} può essere in un punto ≠ dall'asse del condotto. → può non valere la legge di Pouseuille.

FLUSSO NON SVILUPPATO

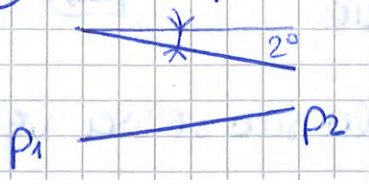
(6) Si generano effetti di ingresso

Di solito:



x effetto delle forze viscose

(4) Se il Ø si riduce, la sezione non è + costante



TAPERING = RASTREMAZIONE

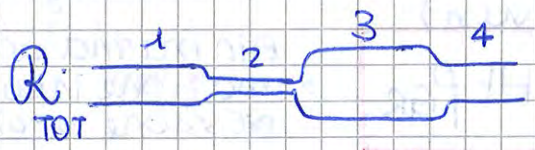
le velocità aumentano nel restringi-

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 167 di 346

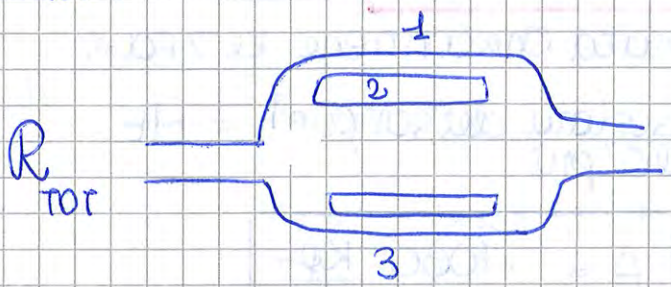
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 169 di 346

perchè la parete è deformabile.

Valendo la legge di Ohm, vale anche la legge di resistenze / vasi poste in serie o in parallelo.



$$R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$



$$\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

FLUIDI BIOLOGICI

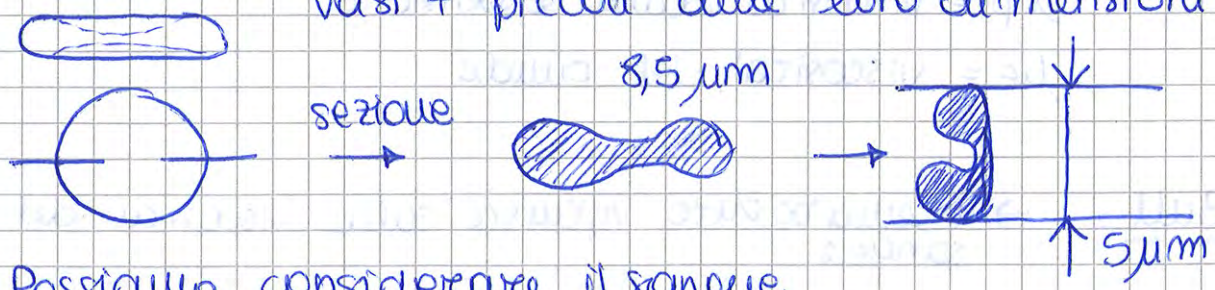
Il sangue è una sospensione in soluzione acquosa (=plasma) in cui sono presenti soprattutto proteine.

In condizioni normali, la densità del plasma è

$$\rho_{PLASMA} = 1035 \ \frac{Kg}{m^3}$$

dovuto alla presenza di proteine, soprattutto ALBUMINE (molto presenti) e GLOBULINE (molto grandi)

I GR hanno una forma discoidale biconcava, per permettere loro di deformarsi x passare anche in vasi + piccoli delle loro dimensioni



Possiamo considerare il sangue come un fluido omogeno, trascurando la parete corpuscolare, per vasi grandi con $\phi \sim 0{,}3\,mm$, c'è un ordine di grandezza di differenza

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 169 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 171 di 346

$$\frac{1}{1-2{,}5c} \rightarrow \frac{1}{1-2{,}5\cdot c}\,\frac{(1+2{,}5c)}{(1+2{,}5c)} =$$

$$= \frac{1+2{,}5c}{1^2-(2{,}5c)^2} = \frac{1+2{,}5c}{1-6{,}25c^2} = \frac{1+2{,}5c}{1-6{,}25\cdot 0{,}05^2}$$

$$\sim \frac{1+2{,}5c}{1{,}1} \sim 1+2{,}5c \rightarrow 1+2{,}5Ht$$

trascuro il 10%

è molto approssimato

$$\begin{cases} Ht \sim 45\% \\ c \sim 5\% \end{cases}$$

ma veniva applicato nella pratica clinica

- Taylor

$$\boxed{\mu_s = \mu_p \left(1 + 2{,}5 \underbrace{\frac{\frac{\mu_r}{\mu_p}+0{,}4}{\frac{\mu_r}{\mu_p}+1}}_{\text{fattore correttivo alla formula di Bull}}\right)\cdot c}$$

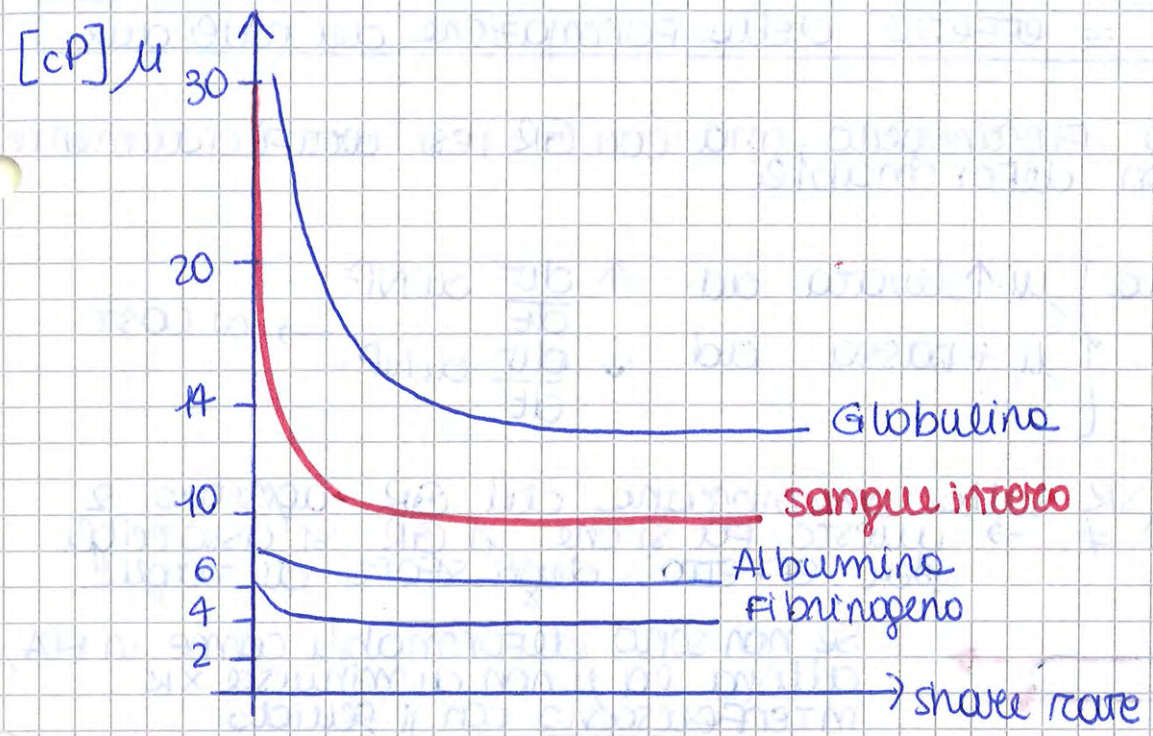
si tiene conto della tendenza dei GR a formare ROULEAUX

- Jeffrey tiene conto del fattore di forma → i GR non sono sferici ma biconcavi. → introduco b, perché nella relazione di Einstein i GR venivano considerati perfettamente sferici.

$$\boxed{\mu_s = \mu_p \frac{1+c}{1-bc}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 171 di 346

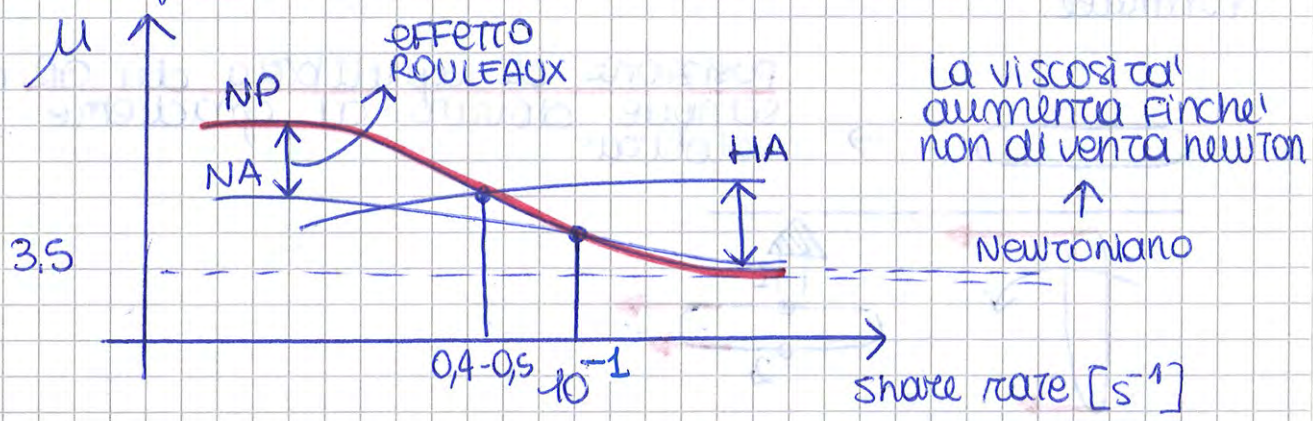
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 173 di 346



- L'albumina ha un'elevata concentrazione nel sangue, ma non influisce sulla variazione di viscosita' del sangue.
- GLOBULINA e' poco presente, ma ↑ la viscosita' xk ha dimensioni maggiori rispetto all'albumina.

  Le dimensioni maggiori interferiscono di + con i gradienti di velocita'.

- Il fibrinogeno influisce sulla formazione dei rouleaux.



- NP = sangue intero con Ht = 45%
  Al ↓ $\frac{dv}{dt}$ si formano rouleaux e la μ↑
- NA = sangue senza rouleaux

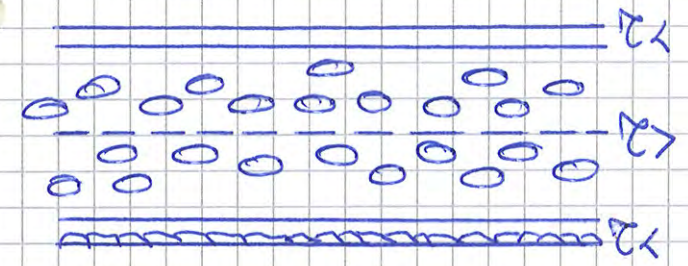
  se $\frac{dv}{dt} < 10^{-1}$ NA e NP si discostano perche'

  senza fibrinogeno non ci sono rouleaux e la μ non aumenta troppo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 173 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 175 di 346

Questa forza ha l'effetto di far concentrare i GR verso l'asse del condotto. → vicino alla parete ci sarà uno strato di solo plasma.



↓

il plasma ha μ ↓ quindi gli sforzi τ tangenziali saranno minori sulla parete
Le cellule endoteliali del vaso sono meno sollecitate.

APPLICAZIONI ALLA PRATICA CLINICA

CFD → considera un volumetto con il quale si schematizza il dominio. Il volume viene discretizzato in tanti volumetti + piccoli, sui quali si risolvono le eq. di conservazione.

Alla fine ottengo il profilo di velocità su tutto il dominio.

CFD + Imaging → il medico può ricavare + informazioni

Queste tecniche possono servire x studiare le patologie cardiovascolari. Si capisce che il flusso del sangue influisce sulla comparsa di patologie in determinati punti piuttosto che altri.

Cellule epiteliali non orientate permettono l'infiltrazione di LDL → placca sclerotica.

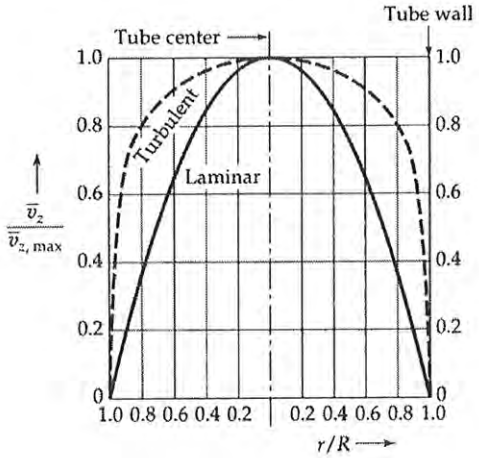
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 175 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 177 di 346

Flusso non assialsimmetrico

- Condotto non perfettamente cilindrico
- Si può perdere la simmetria nel caso di moto turbolento

Reynolds number!



Flusso non sviluppato

- "Entrance effects": vedi esercitazione 1!
- "Tapering": riduzione della sezione trasversale lungo il condotto.
- "Compliance" della parete: variazioni di pressione comportano variazioni della sezione trasversale, ossia non si ha uniformità della sezione lungo il condotto.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 177 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 179 di 346

Franco Maria Montevecchi

BIOMECCANICA DEI FLUIDI
Parte II
Bilanci di strato e nei continui

1. Bilancio di strato della quantità di moto

1.1 Studio di un film cadente in regime stazionario

Introduciamo un esempio di calcolo fluidodinamico che utilizza l'approccio dell'esame di uno strato. Con questo approccio è possibile analizzare agevolmente flussi in cui le variabili sono soggette a variazioni secondo una sola direzione; ponendo opportunamente il sistema di riferimento le variabili dipenderanno da una sola coordinata, per questo motivo questi flussi sono chiamati monodimensionali. Se il fluido è incomprimibile e il moto è stazionario, è possibile individuare facilmente fenomeni di flusso che rispondono a questa definizione.

Studiamo un sistema così caratterizzato: in un serbatoio viene immesso liquido che fuoriesce e si immette su un piano inclinato come mostrato nella figura seguente.

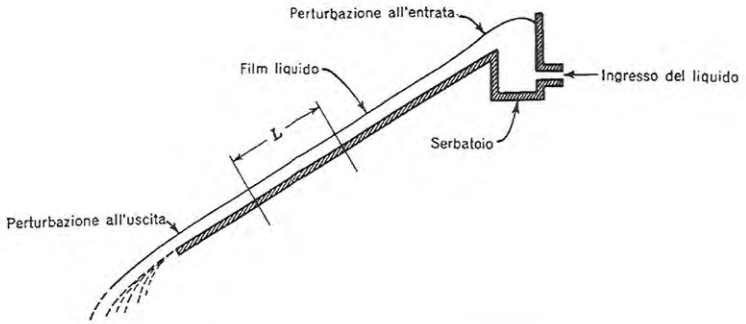


Figura 1-1: Film cadente di fluido in regime stazionario.

La porzione delimitata da tratti perpendicolari al piano inclinato e di lunghezza L nella porzione centrale del piano inclinato stesso, corrisponde alle nostre esigenze.

Il fluido nel momento in cui abbandona il serbatoio è dotato di una bassa velocità e, nel tratto seguente, a causa dell'incremento della velocità lo spessore dello strato limite diminuirà sino a che non si raggiunge un equilibrio dinamico.

Nel primo tratto, infatti, essendo bassa la velocità del fluido anche in prossimità della parete la resistenza all'avanzamento offerta dalle forze viscose esercitate dalla parete sul fluido sarà modesta mentre la componente attiva della forza di gravità dovuta all'inclinazione del piano agirà comunque e quindi accelererà il fluido.

Quando le velocità raggiungeranno i valori di regime e presso la parete sarà presente il gradiente di velocità che porterà le resistenze viscose a essere pari e opposte alla componente attiva della forza di gravità, il fluido non dovrà più accelerare e lo spessore del film risulterà costante.

Assumiamo che ciò si sia realizzato in un tratto di lunghezza L, come rappresentato in Fig. 1-1; di conseguenza il moto del fluido sarà per filetti paralleli al piano inclinato e in quel tratto potremo scrivere una equazione di bilancio di quantità di moto per uno strato come quello rappresentato ombreggiato in Fig. 1-2.

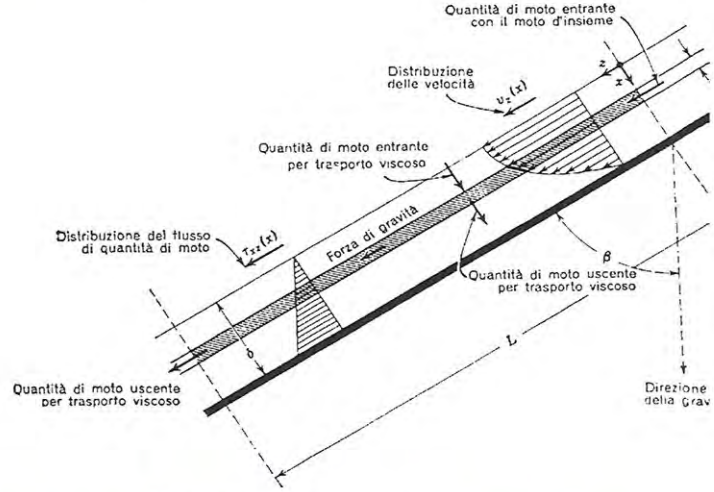


Figura 1-2:Scambi di forze e quantità di moto nel sistema in esame.

Le forze che la parete scambia con il fluido, le τ che la parete oppone al moto del fluido dipendono dalla velocità con cui si muove il fluido stesso, quindi man mano che il fluido accelera queste τ cresceranno, la forza che fa scendere il fluido è la forza di gravità che resta costante, ad un certo punto le forze sulla parete raggiungeranno il valore delle forze sul fluido e quindi non potrà più accelerare.

Se i filetti sono paralleli nessuna particella di fluido si sposta trasversalmente rispetto alla direzione di scorrimento del film liquido, se sono paralleli sono tutti paralleli alla superficie, quindi nessuna velocità all'ingresso della parete o fuori della parete viene influenzata, se questo succede significa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 179 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 346

poiché all'interfaccia liquido-gas si ha che per $x = 0 \rightarrow \tau_{xz} = 0$ la costante di integrazione vale $C_1 = 0$ pertanto l'equazione integrale della quantità di moto è:

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta \qquad \text{Equazione 1-6}$$

Abbiamo determinato la τ senza dovere ipotizzare una particolare equazione costitutiva del fluido: ciò significa che gli sforzi interni del fluido non dipendono dal modello costitutivo del fluido.

In un materiale solido si può affermare che lo stato di sollecitazione non dipende dalla equazione costitutiva, ma lo stato di deformazione sì; in questo caso, per un fluido, possiamo affermare che lo stato di sollecitazione non dipende dalla equazione costitutiva, ma ne dipende la rapidità di deformazione (ovvero i gradienti di velocità e, conseguentemente i profili di velocità del fluido).

Introduciamo ora la equazione costitutiva e ipotizziamo che il fluido sia un fluido newtoniano la cui equazione costitutiva in flusso monodimensionale è:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \qquad \text{Equazione 1-7}$$

sostituendo questo valore di τ_{xz} nell'equazione integrale della quantità di moto si ricava la seguente equazione differenziale per la distribuzione di velocità:

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos\beta}{\mu}\right) x \qquad \text{Equazione 1-8}$$

che integrata diventa:

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos\beta}{2\mu}\right) x^2 + C_2 \qquad \text{Equazione 1-9}$$

tenendo conto della condizione ai limiti che per $x = \delta$ è $v_z = 0$ si ricava il valore della costante d'integrazione:

$$C_2 = \left(\frac{\rho g \cos\beta}{2\mu}\right) \delta^2 \qquad \text{Equazione 1-10}$$

perciò la distribuzione della velocità è:

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \qquad \text{Equazione 1-11}$$

il profilo delle velocità ha andamento parabolico.

A questo punto è possibile calcolare altri parametri di interesse:

1) la velocità massima $v_{z\,max}$ è la velocità per $x = 0$, cioè:

$$v_{z\,\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu} \qquad \text{Equazione 1-12}$$

2) la velocità media $\langle v_z \rangle$ in una sezione del film :

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z\, dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta v_z\, dx = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] d\left(\frac{x}{\delta}\right) = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{3\mu} \qquad \text{Equazione 1-13}$$

3) la portata volumetrica Q si ottiene dalla velocità media o integrando la distribuzione delle velocità:

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_z\, dx dy = W \langle v_z \rangle = \frac{\rho g W \delta^3 \cos\beta}{3\mu} \qquad \text{Equazione 1-14}$$

4) lo spessore del film δ può ricavarsi dalla velocità media, dalla portata volumetrica o dalla portata per unità di lunghezza della parete ($\Gamma = \rho\delta\langle v_z \rangle$):

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu \langle v_z \rangle}{\rho g \cos\beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho g W \cos\beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu\Gamma}{\rho^2 g \cos\beta}} \qquad \text{Equazione 1-15}$$

5) la componente nella direzione z della forza F del fluido sulla superficie si ottiene integrando il flusso di quantità di moto sulla interfaccia fluido-solido:

$$F_z = \int_0^L \int_0^W \tau_{xz}\big|_{x=\delta} dy dz = \int_0^L \int_0^W -\mu \frac{dv_z}{dx}\bigg|_{x=\delta} dy dz = (LW)(-\mu)\left(-\frac{\rho g \delta \cos\beta}{\mu}\right) = \rho g \delta L W \cos\beta \qquad \text{Equazione 1-16}$$

tale quantità è ovviamente la componente nella direzione z del peso del fluido che costituisce il film liquido.

La trattazione vista può essere applicata nello studio di un ossigenatore a disco.

Sottolineiamo gli aspetti salienti del procedimento adottato: si scrive un bilancio di quantità di moto per uno strato di spessore finito, si fa tendere a zero tale spessore e si fa uso della definizione di derivata per ricavare la corrispondente equazione differenziale che descrive la distribuzione del flusso di quantità di moto; a questo punto si integra questa equazione e si ottiene il profilo delle τ.

Introducendo poi, in luogo delle τ, la equazione costitutiva, si ottiene una scrittura differenziale che consente un ulteriore livello di integrazione al procedimento: con questa integrazione si ottiene il profilo delle velocità.

Questo procedimento si applica facilmente se le linee di flusso sono rettilinee, in quanto, in questo caso, le condizioni al contorno possono essere imposte facilmente, ovvero un valore costante di condizione al contorno in corrispondenza di un valore anche esso costante di una coordinata.

Esempio: Calcolo della velocità del film

Un olio ha una viscosità cinematica di $2 \cdot 10^{-4}\ m^2 s^{-1}$ e densità di $0{,}8 \cdot 10^3\ kg\ m^{-3}$. Quale deve essere la portata di questo olio in un film cadente lungo una superficie verticale, affinché lo spessore di esso sia di 2,5mm?

La portata per unità di larghezza della parete vale (tutti i valori numerici sono dati in unità mks):

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 346

Trattandosi di infinitesimi, nell'ipotesi di continuo, si può passare ai limiti, per calcolare la massa accumulata nel volume infinitesimo per effetto delle portate in direzione *x*.

Assegnando il segno positivo alla portata entrante e quello negativo alla portata uscente; dalla (2-2) e dalla (2-3) si ottiene che la derivata (rate di incremento) della massa compresa nel volume infinitesimo, dovuta al flusso attraverso le superfici in x e x+dx, divisa per il volume del cubetto, vale:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\rho v_x\big|_x dydz-\rho v_x\big|_{x+dx}dydz}{dxdydz}=-\frac{\rho v_x\big|_{x+dx}-\rho v_x\big|_x}{dx}=-\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}$$

Equazione 2-8

Analogamente si può operare rispetto alle altre coordinate.

La derivata complessiva (rate di incremento) della massa compresa nel volume infinitesimo è dovuta alla somma delle derivate (rate di incremento) dovute al flusso attraverso le superfici in x e x+dx, y e y+dy, z e z+dz.

Utilizzando le scritture di questi termini in cui si è diviso il tutto per il volume infinitesimo (dxdydz) si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}-\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}-\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}}$$

Equazione 2-9

che può essere scritta anche come:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_y}{\partial y}+\rho\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Equazione 2-10

e introducendo la notazione di derivata totale:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_y}{\partial y}+\rho\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Equazione 2-11

Considerando il fluido incomprimibile queste relazioni si semplificano poichè $\rho = \rho\ (t,x,y,z)$ è costante e le equazioni 2-9, 2-10 e 2-11 si riducono a $\rho div\mathbf{v}=0$

Se esaminiamo le dimensioni delle equazioni 2-9, 2-10 e 2-11 possiamo riconoscere che esse sono bilanci di massa per sistemi aperti, specifici al volume ovvero espresse in kg/(m^{3}s).

Nel caso di problemi di statica e per fluidi incomprimibili le equazioni (2-9; 2-10; 2-11) sono identicamente soddisfatte.

2.2 Bilancio di quantità di moto euleriano (sistemi aperti)

Il bilancio della quantità di moto è una equazione vettoriale che tratteremo scomposta nelle sue componenti scalari secondo gli assi di riferimento x,y,z.

Essa stabilisce che, la derivata (rate di incremento) nel tempo della quantità di moto (qdm) presente all'interno del volume infinitesimo in esame (espressa in kg m/s^2=N), è dovuta alle seguenti cause:

- sbilanciamento tra le portate di quantità di moto entranti e uscenti (kg m/s)/s=N
- forze esterne agenti sulle superfici del volume infinitesimo esaminato (N/m^2)m^2=N
- forze interne di volume (esempio forza dovuta al campo gravitazionale terrestre ρ g dx dy dz con le dimensioni (kg/m^3)(m/s^2)m^3= kg m/s^2=N)

Nel caso poi di scrittura specifica al volume le unità di misura risulteranno N/m^3

Dato un volume infinitesimo dV la quantità di moto è $\rho v_i\, dV$.

La derivata (rate di incremento) nel tempo della quantità di moto nel volume infinitesimo, **valutata nella direzione x, è:**

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)_x}{\partial t}dxdydz}$$

variazione della qdm nel tempo — Equazione 2-12

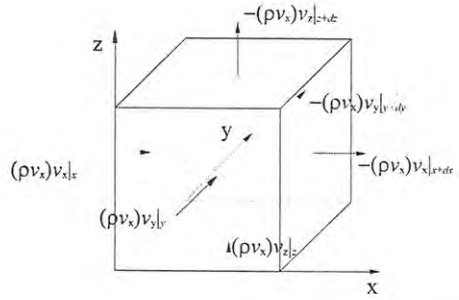


Fig. 2.2 - Volume infinitesimo considerato. In figura sono evidenziati i sei termini convettivi che determinano la variazione della componente della quantità di moto in direzione x. (ρv_x) può infatti entrare dalle superfici di contorno parallele alla direzione x per effetto delle componenti di velocità normali a queste superfici.

Con riferimento alla Fig. 2.2, definiamo i termini convettivi di portata di qdm:

$(\rho v_x)v_x|_x dydz$ — portata di qdm entrante in dV attraverso la superficie in x — Equazione 2-13

$(\rho v_x)v_x|_{x+dx} dydz$ — portata di qdm uscente da dV attraverso la superficie in x+dx — Equazione 2-14

$(\rho v_x)v_y|_y dxdz$ — portata di qdm entrante in dV attraverso la superficie in y — Equazione 2-15

$(\rho v_x)v_y|_{y+dy} dxdz$ — portata di qdm uscente da dV attraverso la superficie in y+dy — Equazione 2-16

$(\rho v_x)v_z|_z dxdy$ — portata di qdm entrante in dV attraverso la superficie in z — Equazione 2-17

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 185 di 346

Si può notare che il primo termine coincide con il bilancio di massa (anche chiamato equazione di continuità) ed è identicamente nullo per cui si ha:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x \qquad \text{Equazione 2-27}$$

che può essere espressa utilizzando la notazione di derivata sostanziale

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt}=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x \qquad \text{Equazione 2-28}$$

Anche in questo caso, le tre equazioni scalari in x,y e z possono essere accorpate in un'unica equazione vettoriale, utilizzando gli operatori che riassumono le operazioni che abbiamo scritto nelle equazioni precedenti (abbiamo visto solo quella per x):

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p-\left[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right]+\rho\mathbf{g}$$

Questa scrittura lagrangiana esprime una relazione assai nota: la massa accelera in quanto vi sono forze esterne che la fanno accelerare; la scrittura coincide con F = ma.

2.3 Equazione costitutiva di un fluido viscoso newtoniano

Un fluido viscoso newtoniano è caratterizzato dalla presenza di sforzi viscosi legati ai gradienti di velocità.

Ricordiamo che, precedentemente abbiamo esaminato una formulazione assai semplice di relazione tra sforzi viscosi e gradienti di velocità nel caso già studiato da Newton, in cui nel fluido era presente un solo gradiente di velocità.

Nel caso generale, in presenza di gradienti di velocità per tutte le direzioni, la relazione tra sforzi viscosi τ e i gradienti di velocità assume una formulazione più complicata e che è stata esposta in dettaglio da Lamb nel 1945, per fluidi newtoniani vale:

$$\tau_{xx}=-2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{2}{3}(\mu-\kappa)\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) \qquad \text{Equazione 2-29}$$

$$\tau_{yy}=-2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{2}{3}(\mu-\kappa)\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) \qquad \text{Equazione 2-30}$$

$$\tau_{zz}=-2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{2}{3}(\mu-\kappa)\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) \qquad \text{Equazione 2-31}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad \text{Equazione 2-32}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=-\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \qquad \text{Equazione 2-33}$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=-\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \qquad \text{Equazione 2-34}$$

dove κ è la *viscosità di massa.* Questa costante possiede un valore relativamente piccolo per i gas monoatomici e a bassa densità, ed è bassa anche per i liquidi.

La viscosità di massa esprime il legame tra sforzi viscosi (intesi nei termini di flusso di quantità di moto) e deformazione volumica analogamente a quanto fa la viscosità μ tra scorrimento e sforzi viscosi (o scambi di quantità di moto). La viscosità di massa è importante solo nei fenomeni di onda d'urto o comunque quando si hanno forze che variano molto rapidamente come nelle vibrazioni ultrasoniche.

Nel caso di fluidi incomprimibili queste relazioni si semplificano essendo nulla la divergenza delle velocità:

$$\tau_{xx}=-2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad \text{Equazione 2-35}$$

$$\tau_{yy}=-2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} \qquad \text{Equazione 2-36}$$

$$\tau_{zz}=-2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{Equazione 2-37}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad \text{Equazione 2-38}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=-\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \qquad \text{Equazione 2-39}$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=-\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \qquad \text{Equazione 2-40}$$

2.4 Altre formulazioni del bilancio della quatità di moto

La introduzione delle equazioni costitutive nei bilanci di qdm è in generale una operazione non molto semplice. Il problema fortunatamente è semplificato per i liquidi newtoniani a ρ costante ove comunque è $(\nabla\cdot\mathbf{v})=0$.

per ρ e μ costanti, $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}+\rho\mathbf{g} \qquad \textit{(equazione di Navier-Stokes)}$$

per un fluido inviscido, $\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}=0$:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p+\rho\mathbf{g} \qquad \textit{(equazione di Eulero)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 185 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 346

$$c_x - \frac{1}{2}\delta_{c_x} \le c \le c_x + \frac{1}{2}\delta_{c_x} \qquad \text{Equazione 3-2}$$

costituiscano una famiglia caratterizzata da molecole che possiedono valori di velocità in questo ambito nell'intorno del valore c_x, è chiaro che se noi fissassimo il valore c_x come esatto valore di velocità espresso con infinite cifre significative non potremmo riconoscere neppure una molecola caratterizzata da quella velocità.

Infatti se le molecole sono in numero finito, hanno un numero finito di valori di velocità; quindi se ho un intervallo di infiniti numeri tra questi valori di velocità il rapporto è a sfavore del fatto che in corrispondenza di un valore di velocità si possa trovare una molecola dotata appunto di quel valore.
Il numero di molecole in avvicinamento alla superficie A e comprese in un antistante volume di spessore δx è uguale a:

$$\frac{1}{2} n \cdot A \cdot \delta x \qquad \text{Equazione 3-3}$$

dove δx è quella distanza per la quale in un tempo δt si raggiunge la superficie.

La variazione di quantità di moto nel tempo δt, tempo in cui tutte le molecole in avvicinamento che occupano il volume $A \cdot \delta x$ sono andate a colpire la superficie A è:

$$2M \cdot c_x \left(\frac{1}{2} n \cdot A \cdot \delta x \right) = n \cdot M \cdot c_x^2 \cdot A \cdot \delta t \qquad \text{Equazione 3-4}$$

a questo punto semplificando la scrittura:

$$n \cdot M \cdot c_x^2 \cdot A = F_x \qquad \text{Equazione 3-5}$$

se noi chiamiamo pressione, la somma della forza F_x diviso l'area A per tutte le famiglie di molecole n, quindi non soltanto per molecole che avevano la velocità c_x ma, per tutti i valori di velocità, otteniamo:

$$p_x = \sum \frac{F_x}{A} = \sum_n n \cdot M \cdot c_x^2 = M \sum_n n \cdot c_x^2 = M \cdot N \cdot \bar{c}_x^2 \qquad \text{Equazione 3-6}$$

semplificando opportunamente, ricordando che:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$
$$\bar{c} = \sqrt{\bar{c}_x^2 + \bar{c}_y^2 + \bar{c}_z^2} = \sqrt{3} \cdot \bar{c}_x$$

risulta:

$$p_x = p_y = p_z = p = M \cdot N \cdot \frac{1}{3} \cdot \bar{c}$$
$$p = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{3} \cdot \bar{c}^2 \qquad \text{Equazione 3-7}$$
$$p \cdot v = \frac{2}{3} k \cdot E = R \cdot T$$

dove v è il volume specifico.

Questa trattazione illustra l'origine molecolare della pressione; la pressione non è quindi una forza scambiata ma è quell'equivalente, in termini di forza, che consente di considerare in un volume complessivo occupato da gas, un sottovolume isolato da una superficie.

L'introduzione in questo volume di una superficie per separare il sottovolume o la eliminazione di questa superficie non devono infatti mutare le condizioni fisiche del sistema.

Se prendiamo in esame un volume composto da due sottovolumi occupati da gas e separati da una superficie fisica, osserviamo che su questa superficie le molecole rimbalzano e siamo in presenza del fenomeno fisico della pressione.

Nel caso di una situazione di equilibrio del gas, il fatto che la superficie ci sia o meno non muta le condizioni del gas, ma è solo la presenza di una superficie di separazione che consente di individuare la presenza della pressione.

La pressione è una grandezza fisica che si deve introdurre quando si considera isolato un sottovolume per mezzo di una superficie di separazione; infatti le molecole che rimbalzano a causa della presenza della superficie di separazione, in assenza di questa proverrebbero semplicemente dalla contigua zona di spazio e in questa zona contigua entrerebbero le molecole che rimbalzano a causa della presenza della superficie.

Allo stesso modo per cui è necessario introdurre la pressione per introdurre una superficie di separazione in un volume occupato da gas occorre introdurre sforzi τ quando i patrimoni di quantità di moto posseduti dalle molecole che sono presenti nei due sottovolumi separati dalla superficie non sono identici.

La disuguaglianza della quantità di moto, essendo questa grandezza un vettore, è caratterizzata da tre componenti scalari che corrispondono a tre sforzi τ (τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}) che si aggiungono alla pressione ogniqualvolta si introduce una superficie di separazione tra due sottovolumi.

La pressione descrive pertanto lo scambio diffusivo di quantità di moto attraverso una superficie quando i patrimoni di quantità di moto posseduti dalle molecole presenti nei due sottovolumi sono uguali; quando questi patrimoni sono diversi occorre introdurre anche gli sforzi τ.

Quando attraverso la superficie esaminata sono presenti anche scambi convettivi, alla quantificazione degli scambi diffusivi di patrimonio di quantità di moto occorre aggiungere la quantificazione dello scambio convettivo di patrimonio di quantità di moto dovuto alla portata in transito.

Questi squilibri diffusivi non sono rappresentati dalla pressione ma dalle τ, si definiscono quindi sforzi viscosi in relazione alla presenza di squilibri diffusivi attraverso una alla superficie, questi sforzi viscosi sono caratterizzati da tre componenti scalari associati alla superficie in esame.

Tornando all'esame di un gas in equilirio, è possibile ricavare alcune grandezze caratteristiche come il valore della velocità in funzione della costante di Boltzmann; il cammino libero medio λ, cioè la distanza che una molecola percorre fra due collisioni successive.

Con altri conti statistici si valuta che la caratterizzazione energetica media delle molecole che attraversano la superficie provenienti da un urto può essere calcolata ipotizzando che quest'urto sia avvenuto ad una distanza $(2/3)\lambda$.

Questa valutazione è estremamente importante da un punto di vista concettuale perché consente di affermare che le molecole che attraversano una superficie possono possedere patrimoni di quantità di moto diversi in quanto provengono da zone diverse dello spazio, senza questa valutazione non sarebbe possibile definire squilibri diffusivi di patrimonio di quantità di moto e quindi neppure gli sforzi viscosi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 189 di 346

La formula vale fino a circa 10 bar, quando la densità diventa troppo alta per i gas questa formula non è più tanto attendibile e tiene abbastanza conto della temperatura anche se non in modo perfetto in quanto l'esponente reale della temperatura non è 0,5; in modelli un po' più sofisticati e se vogliamo il comportamento reale dei gas è tale per cui l'esponente è un po' maggiore di 0,5. Però se questo serve a correggere un valore di viscosità attorno a valori di temperatura per i quali è noto il valore della viscosità il modello descritto va già bene.

3.3 La teoria della viscosità dei liquidi

A cavallo della seconda guerra mondiale si era tentato di elaborare delle teorie che spiegassero la viscosità per i liquidi (Eyring 1941), queste teorie hanno fatto più fatica a svilupparsi perché la questione è molto diversa rispetto a quella riferita ai gas.

Le molecole di un liquido sono tutte vicino le une alle altre, e i loro movimenti sono vibrazionali legati alla temperatura per cui si urtano reciprocamente e non è possibile per una molecola migrare in un punto piuttosto che in un altro perché lo spazio è sostanzialmente tutto occupato dalle molecole del liquido. Il liquido ha una densità che varia con la temperatura, quanto è maggiore la temperatura tanto più, generalmente, è alto il volume specifico del liquido.

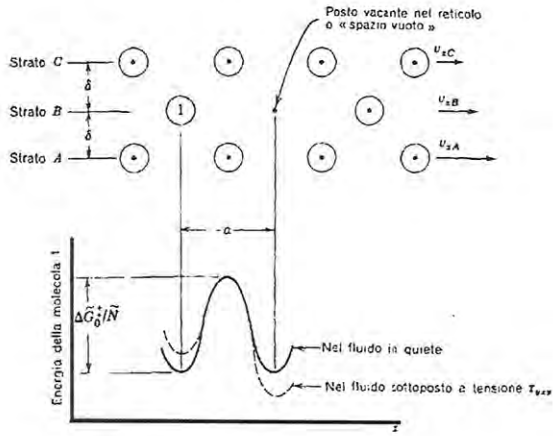
Se noi consideriamo il liquido composto da un assetto di molecole sostanzialmente ordinato, ogni molecola urta le altre perché è dotata di un'energia cinetica di agitazione e nelle combinazioni di urti risulta che all'aumentare dell'energia cinetica media termica delle molecole aumentano i numeri di punti che sono statisticamente vuoti.

Se siamo allo zero assoluto in teoria le molecole sono compattate perché non si muovono, quando queste cominciano ad agitarsi attraverso gli urti generano statisticamente un certo numero di posti vuoti; più questi urti aumentano di intensità più il numero di posti vuoti disponibili è elevato.

Si tratta sempre di numeri molto bassi, per cui la densità non è che cambi molto al variare della temperatura, questi discorsi valgono per molecole abbastanza sferiche o comunque che hanno un confinamento nello spazio, non vale per liquidi composti da molecole molto lunghe.

Partendo da queste considerazioni Eyring ha sviluppato una teoria, che tra l'altro ha portato alla formulazione del modello viscoso visto nei paragrafi precedenti.

Supponiamo di avere degli strati caratterizzati da una velocità v_x diversa a secondo della quota dello strato, gli strati sono distanti δ l'uno dall'altro, distanza che potrebbe essere diversa dal valore a (distanza tra due molecole), in realtà a livello pratico si prende $\delta = a$.



Supponiamo che ci sia un vuoto per effetto dell'agitazione termica, questo buco a che cosa corrisponde da un punto di vista di meccanica del liquido? Corrisponde ad un punto di energia potenziale bassa per il posizionamento di una molecola; se supponiamo che una molecola debba essere forzata da una qualche forza di campo esterna a superare l'ostacolo frapposto al suo movimento da molecole che tendono ad opporsi e se supponiamo che questa stessa molecola sisposti nel punto vuoto, possiamo immaginare la necessità di una forza esterna agente che inizi a sospingere fino a quando la molecola si sposta spontaneamente verso la zona di equilibrio libera.

Questa forza proviene dalla energia termica d'agitazione, se questa energia è elevata può succedere che la molecola la riceva una forza nella giusta direzione e sia in condizione di superare la barriera di potenziale e quindi di spostarsi dalla posizione inizialmente assunta.

L'ipotesi che viene fatta dal modello di Eyring è che questa barriera di potenziale venga ad essere coadiuvata o ostacolata a seconda delle condizioni di moto degli strati; quindi vi è uno squilibrio nella disposizione nello spazio della funzione potenziale di energia, uno squilibrio che si può interpretare come correlato al gradiente di velocità.

Dobbiamo immaginare che comunque queste molecole non sono in grado di trasferirsi sforzi se non legati ai loro urti, quindi in realtà succede che queste molecole si muovono oscillando nello spazio; nell'agitazione termica vengono proposte delle forze che sospingono, modificano, la direzione preferenziale di agitazione termica delle molecole superiori.

La frequenza molecolare $\bar{k}$ di salto a tra due posizioni di equilibrio, vale:

$$\bar{k} = \frac{\kappa \cdot T}{h} \cdot e^{-\Delta \tilde{G}_0^{\ddagger} / \tilde{R} \cdot T}$$

Equazione 3-14

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 189 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 191 di 346

La $\Delta\widetilde{G}_0^{\ddot{+}}$ è in relazione con la capacità di una molecola di spostarsi cioè di liberarsi dalle forze che la vincolano a fianco delle altre nello strato di liquido.

Tale valore di $\Delta\widetilde{G}_0^{\ddot{+}}$ è quindi in relazione con il calore di evaporazione, la relazione approssimativamente vale:

$$\Delta\widetilde{G}_0^{\ddot{+}} \doteq 0{,}408 \cdot \Delta\widetilde{U}_{vap} \qquad \text{Equazione 3-26}$$

da cui:

$$\mu = \frac{\widetilde{N} \cdot h}{\widetilde{V}} \cdot e^{0{,}408 \cdot \Delta\widetilde{U}_{vap} / \widetilde{R} \cdot T} \qquad \text{Equazione 3-27}$$

L'energia di evaporazione può essere valutata sempre approssimativamente con la formula di Trouton:

$$\Delta\widetilde{U}_{vap} \doteq \Delta\widetilde{H}_{vap} - \widetilde{R} \cdot T_b \doteq 9{,}4 \cdot \widetilde{R} \cdot T_b \qquad \text{Equazione 3-28}$$

T_b è la temperatura di ebollizione normale.
Possiamo quindi scrivere:

$$\mu = \frac{\widetilde{N} \cdot h}{\widetilde{V}} \cdot e^{3.8 T_b / T} \qquad \text{Equazione 3-29}$$

questa ci dice che abbiamo una diminuzione esponenziale di μ con la temperatura e quindi comportamento del tutto diverso da quello dei gas.
Le relazioni predette semplificano molto il comportamento dei liquidi e costituiscono una approssimazione del valore di viscosità con errori sino al 30%.
Si applicano per molecole compatte (non a catena) e senza interazioni dovute a cariche.

3.4 La scrittura dei bilanci nei diversi sistemi di riferimento

Nelle prossime trattazioni noi useremo il sistema di riferimento cartesiano ortogonale, il sistema di riferimento cilindrico e il sistema di riferimento sferico.
Quando si vogliono scrivere le equazioni di continuità, quantità di moto ed energia in coordinate diverse da quelle cartesiane ortogonali, si possono scegliere due vie:

- scrittura diretta: applicabile con facilità solo per la continuità, pressoché impossibile per la quantità di moto e proibitiva per l'energia
- scrittura indiretta: si scrivono le equazioni in coordinate cartesiane e si trasformano scalari, vettori, tensori, ecc. nelle altre coordinate che si desiderano; il procedimento è tedioso e assai lungo; per fortuna le principali equazioni sono scritte e reperibili sui testi anche in coordinate cilindriche e sferiche

La scrittura diretta delle equazioni in ciascuno di questi sistemi può essere compiuta a partire dalla definizione del il volume unitario infinitesimo definito da questi sistemi.
Se il sistema da analizzare richiede le coordinate cilindriche o sferiche è opportuno scrivere le equazioni nel sistema cartesiano e poi trasformare l'equazione, sostituendo ai termini ivi scritti che

si riferiscono a grandezze scritte nel sistema di riferimento cartesiano gli stessi valori scritti in funzione del nuovo sistema di riferimento.
La scrittura diretta dell'equazione di conservazione dell'energia assolutamente non percorribile per cui occorre trasformarla a partire dal sistema di riferimento cartesiano.
Poiché anche la procedura indiretta risulta per un utente non esperto, ma non solo, assai lunga, complicata ed esposta ad errori, si possono trovare in diversi libri di testo le scritture dei bilanci nei vari sistemi di riferimento completi di tutti i termini.
Trovando la equazione già formulata nel riferimento desiderato è semplicemente necessario solo definire le assunzioni semplificative che si traducono poi, di fatto nella cancellazione dei rispettivi termini nelle equazioni per ottenere formulazioni più maneggevoli confidando che esse siano risolubili analiticamente.
In caso contrario sarà necessario ricorrere ai metodi della fluidodinamica computazionale.

3.5 Equazione di continuità

coordinate rettangolari:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \text{Equazione 3-30}$$

coordinate cilindriche:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \text{Equazione 3-31}$$

coordinate sferiche:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \qquad \text{Equazione 3-32}$$

3.6 Equazione di quantità di moto

3.6.1 In coordinate cartesiane ortogonali

In termini di τ, ρ = cost, fluido incomprimibile

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x \qquad \text{Equazione 3-33}$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + \rho g_y \qquad \text{Equazione 3-34}$$

componente z

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 191 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 193 di 346

$$\tau_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$$

$$\tau_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$$

Equazione 3-45

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right]$$

dove:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

3.7.2 In coordinate cilindriche

Fluido , k = 0

$$\tau_{rr} = -m\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -m\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$$

$$\tau_{zz} = -m\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$$

Equazione 3-46

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]$$

dove:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

3.7.3 In coordinate sferiche

Si procede in modo analogo e si rimanda alla letteratura specifica..

Quanto illustrato costituisce una alternativa alla scrittura di equazioni per strato: è sufficiente prendere la forma generale dell'equazione e annullarne i termini che corrispondono alle ipotesi del sistema in esame.

Con questo procedimento si opera molto correttamente in modo naturale in quanto le ipotesi semplificative sono immediatamente quantificabili nei termini azzerati.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 193 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 195 di 346

La costante C_2 si determina impiegando la condizione al limite per cui $v_z = 0$ per $r = R$; la distribuzione di velocità (profilo di velocità) risulta pertanto:

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{4 \cdot \mu_0 \cdot L} \cdot R^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \cdot R \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right] \qquad per\ r > r_0 \quad \text{Equazione 4-7}$$

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{4 \cdot \mu_0 \cdot L} \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 = \text{cost.} \qquad per\ r \le r_0 . \quad \text{Equazione 4-8}$$

Ricavata l'equazione del profilo di velocità si possono calcolare la velocità massima, la portata, ecc.
In particolare la portata volumetrica vale:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} v_z \big|_{r \le r_0} \cdot r \cdot dr + \int_{r_0}^{R} v_z \big|_{r > r_0} \cdot r \cdot dr \qquad \text{Equazione 4-9}$$

dopo alcuni sviluppi ponendo:

$$\tau_R = \frac{P_0 - P_L}{2 \cdot L} \cdot R$$

se $\tau_R > \tau_0$ si ha:

$$Q = \frac{\pi \cdot (P_0 - P_L)}{8 \cdot \mu_0 \cdot L} \cdot R^4 \cdot \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^4\right] \qquad \text{Equazione 4-10}$$

che è nota come equazione di Buckingham-Reiner; quando $\tau_0 = 0$ il modello di Bingham si riduce al modello e l'equazione precedente all'equazione di Hagen-Poiseuille.

Questi risultati possono riguardare, oltre ad esempio le paste dentifricie, anche il sangue soprattutto in presenza di aggregati e bassi valori di flusso, quando cioè il comportamento del sangue è fortemente influenzato dall'aggregazione dei globuli rossi.

4.3 Moto in un cilindro a sezione anulare

Consideriamo un altro problema di moto viscoso in coordinate cilindriche, avente diverse condizioni ai limiti. Un fluido incomprimibile si muove in regime stazionario nella regione anulare tra due cilindri circolari coassiali di raggio kR e R (Fig. 4.2).

Si effettua anzitutto un bilancio di quantità di moto per uno strato cilindrico sottile, che è identico a quello del tubo cilindrico, pertanto:

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \tau_{rz}\right) = \frac{P_0 - P_L}{L} \cdot r \qquad \text{Equazione 4-11}$$

si osservi che in questo problema

$$P = p + \rho \cdot g \cdot z \qquad \text{Equazione 4-12}$$

in quanto la pressione e le forze di gravità agiscono in direzioni opposte.
Integrando risulta:

$$\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} \cdot r + \frac{C_1}{r} \qquad \text{Equazione 4-13}$$

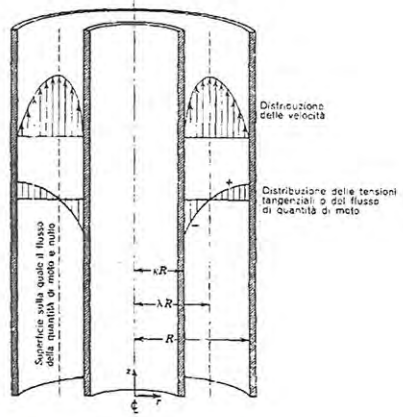


Fig. 4.2 - Flusso in un condotto anulare.

Purtroppo la costante C_1 non può essere determinata immediatamente perché non siamo in grado di valutare il flusso di quantità di moto in una posizione nota; possiamo solo ipotizzare che per un certo raggio λR sia $\tau = 0$, se ne ricava:

$$\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} \cdot R \cdot \left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2 \cdot \left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad \text{Equazione 4-14}$$

dove peraltro λ è sempre un'incognita.
Imponendo le ipotesi di fluido , si ha:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{P_0 - P_L}{2L} \cdot R \cdot \left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2 \cdot \left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad \text{Equazione 4-15}$$

e integrando rispetto a r si ottiene:

$$v_r = -\frac{P_0 - P_L}{4 \cdot \mu \cdot L} \cdot R^2 \cdot \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) + C_2\right] \qquad \text{Equazione 4-16}$$

nel caso delle velocità possediamo due distinte e chiare condizioni ai limiti:

$$v_z(R) = 0$$
$$v_z(kR) = 0$$

sostituendo si ricavano le costanti :

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 195 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 197 di 346

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right)$$

Equazione 5-2

$$0 = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta)\right)$$

che integrata due volte rispetto a r con le opportune condizioni ai limiti:

$$v_\theta(kR) = 0 \qquad v_\theta(R) = \Omega_0 R$$

risulta:

$$v_\theta = \Omega_0 R \frac{\left(\frac{kR}{r} - \frac{r}{kR}\right)}{\left(k - \frac{1}{k}\right)}$$

Equazione 5-3

introducendo la viscosità si può trovare la distribuzione delle tensioni tangenziali:

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = -\mu\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]$$

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = -\mu\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{\Omega_0 R}{r}\frac{\left(\frac{kR}{r} - \frac{r}{kR}\right)}{\left(k - \frac{1}{k}\right)}\right]\right\} = -2\mu\Omega_0 R^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)$$

Equazione 5-4

La coppia M richiesta per la rotazione del cilindro esterno di altezza L si calcola facilmente facendo il prodotto della forza per il braccio:

$$\mathrm{M} = 2\pi RL \cdot (-\tau_{r\theta})\big|_{r=R} \cdot R = 4\pi\mu L\Omega_0 R^2\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)$$

Equazione 5-5

Misurando coppia e velocità angolare si determina la viscosità del fluido.

Prendendo in considerazione le componenti lungo r e z dell'equazione di moto, mediante integrazione, è possibile calcolare le distribuzioni radiale e assiale delle pressioni:

$$-\rho\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{(radiale)}$$

Equazione 5-6

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad \text{(assiale)}$$

Equazione 5-7

è anche possibile calcolare la forma del pelo libero, con implicazioni relative a problemi di estremità.

Il problema del pelo libero è esemplificabile con il seguente esempio: consideriamo un fluido con $k = 0$ e $\rho = cost.$ in moto permanente ().

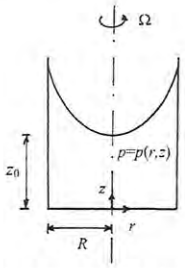


Fig. 5.2 - Comportamento di un fluido contenuto in un recipiente cilindrico e dotato di velocità angolare Ω.

In regime stazionario è $v_z = v_r = 0$. Si ha inoltre che la pressione dipenderà da r a causa della forza centrifuga e da z a causa della forza gravitazionale; l'equazione del moto si riduce a:

componente r $\qquad \rho\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$

componente θ $\qquad 0 = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right)$

componente z $\qquad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$

Come al solito l'equazione in θ è la più importante e supponendo $v_\theta = v_\theta(r)$ può essere integrata:

$$v_\theta = \frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Equazione 5-8

dove $C_2 = 0$ poiché $v_\theta(0) = valore\ finito$ e $C_1 = 2\Omega$ poiché $v_\theta(R) = \Omega R$; quindi:

$$v_0 = \Omega r$$

introducendo tale risultato nelle espressioni delle altre componenti si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\Omega^2 r$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g$$

Equazione 5-9

Poiché p è una funzione della posizione, risulta:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 197 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 199 di 346

mentre per x=-b e x=b non è immediata la deduzione della condizione al contorno, inoltre non è neppure chiaro a quale livello di x sia presente il massimo della velocità e quindi $\tau_{xz} = 0$.

Come nell'esempio del moto in un condotto anulare per riconoscere i valori delle costanti bisognerà passare dalla integrazione dell'equazione differenziale della velocità:

$$-\mu_I \frac{dv_{zI}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} x + C_1 \qquad \text{Equazione 4-22}$$

$$-\mu_{II} \frac{dv_{zII}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} x + C_1 \qquad \text{Equazione 4-23}$$

da cui integrando:

$$v_{zI} = \frac{-(p_0 - p_L)\cdot x^2}{2\cdot \mu_I \cdot L} - \frac{C_1}{\mu_I} x + C_{2I} \qquad \text{Equazione 4-24}$$

$$v_{zII} = \frac{-(p_0 - p_L)\cdot x^2}{2\cdot \mu_{II} \cdot L} - \frac{C_1}{\mu_{II}} x + C_{2II} \qquad \text{Equazione 4-25}$$

Le condizioni ai limiti per le velocità sono molto più chiare:

$$v_{zI}(0) = v_{zII}(0)$$
$$v_{zI}(-b) = 0$$
$$v_{zII}(b) = 0$$

da cui si determinano le costanti d'integrazione:

$$C_{2I} = C_{2II} = C_2$$

e, fatto sistema in C_1 e C_2, si ricava:

$$C_1 = -\frac{p_0 - p_L}{2\cdot L/b}\left(\frac{\mu_I - \mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}}\right) \qquad \text{Equazione 4-26}$$

$$C_2 = \frac{(p_0 - p_L)\cdot b^2}{L\cdot(\mu_I + \mu_{II})} \qquad \text{Equazione 4-27}$$

e sostituendo:

$$\tau_{xz} = \frac{p_0 - p_L}{L/b}\left[\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_I - \mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}}\right)\right] \qquad \text{Equazione 4-28}$$

$$v_{zI} = \frac{(p_0 - p_L)\cdot b^2}{2\cdot \mu_I \cdot L}\left[\left(\frac{2\cdot \mu_I}{\mu_I + \mu_{II}}\right) + \left(\frac{\mu_I - \mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}}\right)\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right] \qquad \text{Equazione 4-29}$$

$$v_{zII} = \frac{(p_0 - p_L)\cdot b^2}{2\cdot \mu_{II} \cdot L}\left[\left(\frac{2\cdot \mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}}\right) + \left(\frac{\mu_I - \mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}}\right)\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right] \qquad \text{Equazione 4-30}$$

Si possono poi calcolare le velocità medie per ogni strato e le portate dei singoli fluidi.

Si può osservare che:

$$\tau_{xz}(-b) \neq \tau_{xz}(b)$$

il che comporta rotazionalità, come d'altronde anche nel caso del moto in condotto anulare.

4.5 Problema di svuotamento di serbatoio

Si vuol determinare quanto liquido rimane aderente alla superficie interna di un grande serbatoio quando viene svuotato (Fig. 4.4).

Svolgiamo questo esercizio considerando il fluido che sta scendendo aderente alla parete e prendendo in esame un trattino di altezza Δz, avendo impostato gli assi di riferimento come in figura, chiamiamo δ lo spessore del film liquido attaccato alla parete e scriviamo questo spessore in funzione della quota e del tempo, perché il fenomeno è dinamico, ed istituiamo per un volumetto di fluido un bilancio. Riteniamo ρ = cost.

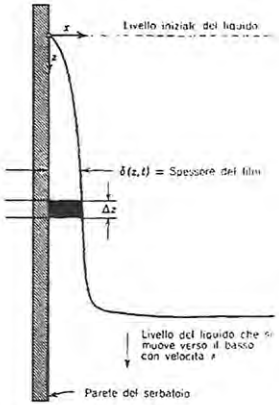


Fig. 4.4 - Svuotamento di un serbatoio.

Scriviamo l'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta \cdot v_{z\,medio}\right) \qquad \text{Equazione 4-31}$$

se sostituiamo a $v_{z\,medio}$, la sua espressione quale è stata ricavata per il film cadente sviluppato risulta:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 199 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 201 di 346

e quindi:

$$\frac{d\tau_{\theta\varphi}}{d\theta} = -2 \cdot \tau_{\theta\varphi} \cdot \cot\theta \qquad \text{Equazione 5-17}$$

da cui:

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\theta} \qquad \text{Equazione 5-18.}$$

La costante è calcolabile in funzione della coppia M trasmessa:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^R \tau_{\theta\varphi}\Big|_{\theta=\pi/2} \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi = 2\pi\frac{R^3}{3}\frac{C_1}{\operatorname{sen}\pi/2} \qquad \text{Equazione 5-19}$$

da cui:

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{3}{2} \cdot M \cdot \frac{1}{\pi \cdot R^3 \cdot \operatorname{sen}^2\theta} \qquad \text{Equazione 5-20}$$

il risultato è molto importante in quanto $\tau_{\theta\varphi}$ è indipendente dalla posizione, ciò è comprensibile in quanto l'altezza del liquido è cresciuta nella stessa proporzione dell'aumento della velocità di scorrimento.

Questo viscosimetro appare assai adatto per misurare la viscosità di fluidi non newtoniani (anche se $\tau_{r\varphi} = 0$ dipende da una ipotesi newtoniana) in quanto nel moto si hanno valori costanti di $\tau_{\theta\varphi}$ e cioè di gradiente di velocità, ciò a differenza del caso precedente a meno di $k \cong 1$.

Per la misura della viscosità del sangue, a causa della sua natura particolata, sorgono molti problemi e che fanno sì che tali strumenti non si prestino ad una valutazione sempre ottimale delle caratteristiche reologiche.

6. Introduzione alla teoria dello strato limite

Quando abbiamo scritto le equazioni generali di moto del fluido nei vari sistemi di coordinate abbiamo detto che, se abbiamo un problema non facciamo altro che prendere l'equazione generale e provare a risolverla, definendo le condizioni al contorno; operando una scelta oculata del sistema di riferimento e quindi della specifica forma di equazione stessa e piazzando tutte le ipotesi che riteniamo necessarie per semplificare l'equazione. Quindi visione più tecnica delle ipotesi semplificative del fenomeno, intesa come non una assunzione di semplificazioni a priori per scrivere un'equazione più semplice ma, valutazione dell'equazione completa alla luce del fatto che alcuni termini possono essere trascurati e quindi diventano ipotesi semplificative.

Nonostante questo fatto esistono diversi tipi di fenomeni in cui è difficile cavarsela, nel senso che non si riesce ad arrivare ad una soluzione analitica del problema. Nel passato sono stati sviluppati dei metodi tesi ad affrontare, sia pure localmente, la conoscenza del moto di un fluido perturbato dalla presenza delle pareti, lo sviluppo di questi metodi è partito dalle applicazioni aeronautiche.

Lo studio dei fenomeni transitori di ogni tipo ha assunto una considerevole importanza in relazione ai problemi di avviamento e controllo degli impianti. Si può utilizzare il *metodo di combinazione delle variabili*, che permette di trasformare una equazione differenziale a derivate parziali in una sola equazione differenziale ordinaria: questo procedimento è applicabile solo quando due delle condizioni ai limiti possono essere combinate insieme in una sola. Si deve osservare che questo sistema non raggiunge mai uno stato stazionario limite.

Un altro metodo è il *metodo di separazione delle variabili* che permette di trasformare un'equazione differenziale a derivate parziali in due equazioni differenziali ordinarie. Il sistema possiede un profilo limite di velocità quando il tempo tende all'infinito: ossia il sistema tende ad uno stato stazionario.

Le soluzioni per la distribuzione delle velocità non soddisfano le condizioni limiti idrodinamiche usuali, secondo le quali il fluido aderisce alle superfici solide del sistema (cioè $v_x=v_y=0$ su tutte le superfici). Per conseguenza le soluzioni relative al fluido ideale non permettono di descrivere i fenomeni di trasporto nelle immediate vicinanze della parete. In particolare non può calcolarsi la resistenza viscosa, ne possono studiarsi accuratamente i processi di trasporto di materia e di calore tra le fasi.

Per ricavare le necessarie informazioni in prossimità della parete, è necessario fare uso del concetto di *strato limite*. Per la descrizione del moto viscoso si possono così ricavare soluzioni approssimate per i profili di velocità in uno strato limite sottile vicino alla parete, tenendo conto della viscosità; pertanto questa soluzione viene collegata a quella relativa al moto ideale che descrive il moto del fluido al di fuori dello strato limite.

6.1 Moto in prossimità di una parete

Una massa semi indefinita di liquido avente ρ e μ costanti è delimitata da un lato da una superficie piana (piano xy). Inizialmente il fluido e la superficie solida stanno in quiete, ma al tempo $t = 0$ la superficie viene posta in movimento nella direzione positiva delle x, con una velocità V (Fig. 6.1). Nella direzione x non c'è gradiente di pressione o forza di gravità e si suppone che il moto sia laminare.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 201 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 203 di 346

$$v_x = V \cdot erfc \frac{y}{\sqrt{4 \cdot \nu \cdot t}}$$ Equazione 6-12

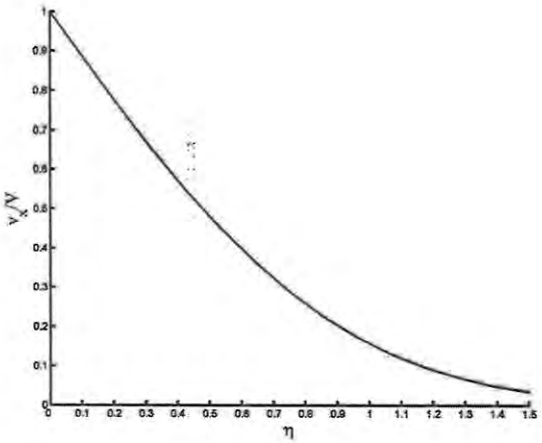


Fig. 6.2 - Andamento di v_x/V in ordinata in funzione di $\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu \cdot t}}$ in ascissa

Il che significa che la stessa velocità si trova a quote diverse a tempi diversi.
Il raddoppio della quota y equivale a quattro volte il tempo:

$$\eta = \text{cost.} \quad \rightarrow \quad t \propto y^2$$

Il fluido è comunque perturbato per $t > 0$ qualunque sia il valore di y purché non infinito; d'altra parte possiamo anche osservare che, fissato un limite, ad esempio:

$$v_x = 0{,}01 \cdot V$$

a quote superiori il fluido è, da un punto di vista pratico, sostanzialmente imperturbato:

$$v_x = 0{,}01 \cdot V \quad \text{se} \quad \text{erfc}\, \eta = 0{,}01$$

a cui corrisponde:

$$\eta \cong 2$$

e ugualmente

$$2 = \frac{y}{\sqrt{4 \cdot \nu \cdot t}} \quad \rightarrow \quad y = 4\sqrt{\nu \cdot t}\,.$$

Questa altezza y, funzione del tempo, separa la zona di fluido perturbato da quello sostanzialmente non perturbato.

Lo spessore perturbato, che possiamo chiamare δ, cresce quindi con la radice quadrata del tempo (Fig. 6.3):

$$\delta = 4 \cdot \sqrt{\nu \cdot t}\,.$$ Equazione 6-13

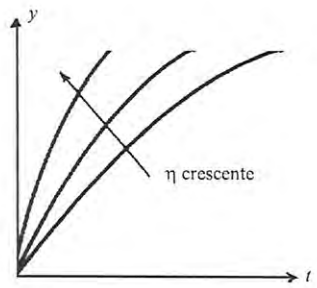


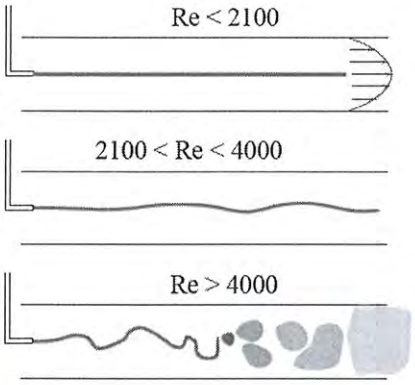
Fig. 6.3 - Andamento nello spazio e nel tempo di una velocità assegnata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 203 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 205 di 346

Per **2100<Re<4000** la linea di colorante perdeva la sua stazionarieta e si propagava lungo una traiettoria ondulata con caratteristiche dipendenti dal tempo.

In questo **regime transizionale**, tuttavia la traccia di colorante preservava la sua coerenza spaziale rimanendo confinata in una linea sottile.



Al contrario, per **Re>4000**, dopo un tratto iniziale con oscillazioni di ampiezza crescente la traccia d'inchiostro veniva diffusa vigorosamente in tutta la sezione trasversale del tubo fino a distribuirsi omogeneamente in tutto il flusso.

Un tale regime è detto turbolento ed è caratterizzato da un moto disordinato, completamente tridimensionale e non stazionario e da delle fluttuazioni di velocità con caratteristiche non deterministiche.

↑
diffusione di un liquido in un altro. La streakline si diffonde nel liquido
↓
TURBOLENZA.

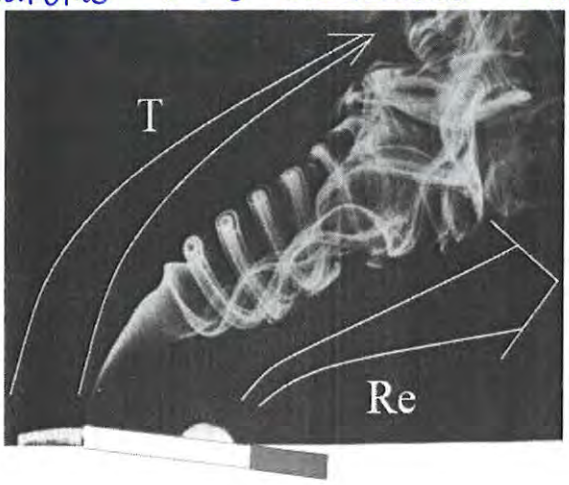
Il miscelamento è dovuto da fluttuazioni nel tempo e nello spazio, di tipo non deterministico di velocità e pressione

Evoluzione del fumo di sigaretta che risulta laminare, transizionale e quindi turbolento con l'aumentare della distanza dal punto di rilascio

$\mu_{ARIA} \gg \mu_{FUMO}$ → Re bassi → il fumo si muove di moto laminare

Con il tempo $\mu_{ARIA} \sim \mu_{FUMO}$ → Re aumenta → moto di transizione con spirali

Poi turbolenza → il fumo satura l'aria



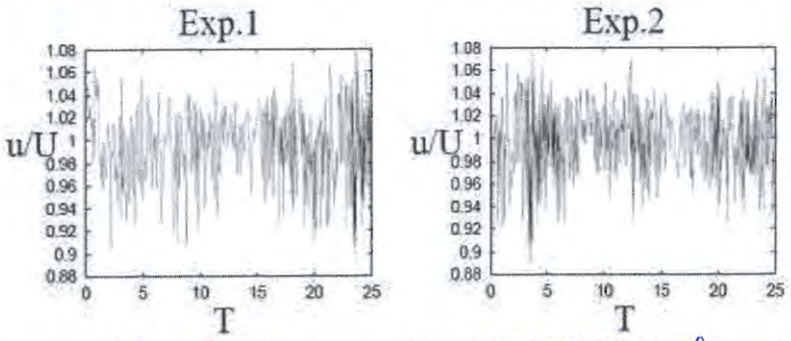
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 205 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 207 di 346

Tipico esempio di segnale turbolento di velocità

la velocità oscilla intorno ad una valore medio senza alcuna frequenza specifica.

Segnali turbolenti di velocità per due realizzazioni successive dello stesso esperimento



istantaneamente sono diverse, ma statisticamente la velocità ha lo stesso valore medio e la stessa varianza.

T deve essere abb. lungo x rappresentare le pr. STATISTICHE del fenomeno.

Caratteristica comune a i flussi turbolenti:
se si ripete lo stesso esperimento e si misura la stessa quantità nello stesso punto per lo stesso intervallo temporale si ottengono segnali notevolmente differenti se confrontati istantaneamente, ma con le stesse caratteristiche statistiche (valore medio, deviazione standard, ecc).

La natura "stocastica" della turbolenza sembra a prima vista inconciliabile con la natura delle equazioni che governano il fenomeno, le equazioni di Navier-Stokes che, essendo di tipo deterministico ed avendo condizioni iniziali ed al contorno definite, ammettono una soluzione che deve essere deterministica nello spazio e nel tempo.

Questo dilemma è stato risolto da Lorentz che nel 1963 mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti.

Parametri iniziali nelle equazioni di Navier-Stokes sicuramente sono e che determinano la soluzione finale

-campo di velocità
-pressione
-geometria del condotto
-distribuzione iniziale di temperatura, che determina la viscosità del fluido
-presenza di impurità e condizioni di finitura superficiale del tubo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 207 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 346

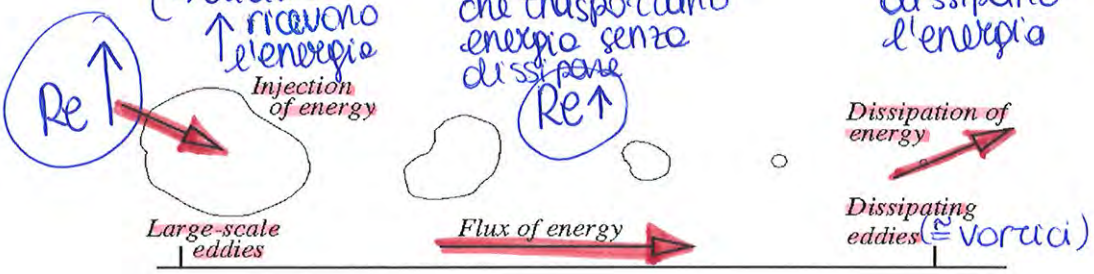
trasferimento di energia dal moto a grande scala fino alle strutture più piccole

CASCATA DI KOLMOGOROV

eddies con dimensioni del moto (→ diametro) ↑ ricavano l'energia

eddie intermedi che trasportano energia senza dissipare

eddie con Re↑ dissipano l'energia



I vortici possono essere anche nel moto laminare. E' una regione in cui la velocita' si inverte e si ha un ricircolo. La ≠ e' che nel m. turbolento le linee di flusso si intersecano, nel m. laminare no.

[I vortici non hanno a che fare con la turbolenza.
La vorticita' ha a che fare con la turbolenza.]

La scala di Kolmogorov

che servono x trasferire energia al fluido

Il concetto della "cascata" di Kolmogorov (1941) viene utilizzato per rappresentare il trasferimento di energia dalla scala macroscopica alla scala microscopica in regime di moto turbolento: l'energia viene fornita al fluido da fenomeni di grande scala, rappresentati dalle condizioni al contorno (gradienti di pressione, agitazione meccanica, forze di volume, ecc.), e si trasferisce in vortici sempre più piccoli, subendo un processo di degradazione In particolare l'energia si trasferisce da pochi vortici grandi (*large-scale eddies*) a molti vortici piccoli (*dissipating eddies*). L'energia viene progressivamente trasferita alle strutture più piccole presenti nel campo di moto fino alla completa degradazione in energia termica, dovuta all'attrito viscoso interno al fluido, macroscopicamente descritto dal termine di dissipazione viscosa nel bilancio di energia.

La fluidodinamica di flussi ad alti numeri di Reynolds è caratterizzata dall'esistenza di diverse scale di lunghezza, alcune delle quali giocano ruoli molto specifici nella descrizione e analisi dei flussi stessi. In particolare, nei flussi turbolenti c'è un intervallo molto ampio di scale di lunghezza, limitato superiormente dalle dimensioni del campo di moto e inferiormente dall'azione diffusiva della viscosità molecolare. → le scale degli eddie + grandi hanno dimensioni ~ al campo di moto e le dimensioni degli eddie + piccoli permettono la dissipazione viscosa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 211 di 346

La scala di Kolmogorov

Alla stima ottenuta della velocità di dissipazione si deve dare assolutamente grande rilievo perché costituisce una pietra angolare tra le ipotesi della teoria della turbolenza. Essa afferma che le eddy grandi perdono una frazione significativa della loro energia cinetica $u^2/2$ nel tempo di un "giro" ℓ/u. Ciò significa che il meccanismo non lineare che ricava le piccole eddy dalle grandi è tanto "dissipativo" quanto il suo tempo caratteristico ℓ/u gli permette. Alcuni ricercatori credono che questa caratteristica possa essere correlata alla produzione di entropia. Dovrebbe inoltre essere tenuto ben a mente che le grandi eddy perdono per dissipazione viscosa **diretta** solo una frazione trascurabile di energia. La scala temporale del loro decadimento è ℓ^2/ν cosicché la perdita viscosa di energia è $\nu \cdot u^2/\ell^2$, che è piccola rispetto alla dissipazione u^3/ℓ per Re grandi. Infine, si richiama ancora una volta che il meccanismo non lineare è dissipativo perché crea eddy sempre più piccole finché non raggiungono una dimensione tale da rendere praticamente immediata la dissipazione viscosa della loro energia cinetica.

La scala di Kolmogorov

Si è visto che le grandezze di microscala sono:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \qquad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \qquad \upsilon = (\nu \cdot \varepsilon)^{1/4},$$

mentre quelle corrispondenti della scale integrale sono:

$$\ell \qquad t = \ell / u \qquad u.$$

Ne consegue i rapporti tra grandezze corrispondenti di microscala/macroscala sono:

$$\frac{\eta}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3}{u^3/\ell} \cdot \frac{1}{\ell^4}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu}{u\ell}\right)^{3/4} = \mathrm{Re}^{-3/4}$$

$$\frac{\tau}{t} = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \cdot \frac{u}{\ell} = \left(\frac{\nu\ell}{u^3} \cdot \frac{u^2}{\ell^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{u\ell}\right)^{1/2} = \mathrm{Re}^{-1/2}$$

$$\frac{\upsilon}{u} = \frac{1}{u} \cdot (\nu\varepsilon)^{1/4} = \left(\nu \cdot \frac{u^3}{\ell} \cdot \frac{1}{u^4}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu}{u\ell}\right)^{1/4} = \mathrm{Re}^{-1/4}.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 211 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 213 di 346

TURBOLENZA in caso di patologie (→ STENOSI) → se restringo il lume, aumenta la velocità, aumenta Re → TURBOLENZA
Il cuore deve lavorare di più → si ipertrofizza → aumenta di volume → si contrae + difficilmente → pompa meno → scompenso cardiaco

Biomacchine il moto turbolento è più frequente in relazione alle eventuali intensità di elaborazioni energetiche che si impongono al sangue.

Anche delle biomacchine la necessità di contenere gli sforzi applicati al sangue, allo scopo di evitare l'emolisi, conduce a dimensionamenti in cui è prevalente la condizione di moto laminare.

Nonostante queste considerazioni, anche in relazione al fatto che le teorie sviluppate per il moto turbolento sono ben assestate e hanno una certa significatività per quanto riguarda le equazioni di conservazione che abbiamo illustrato, è utile affrontare questo argomento.

Riscrittura delle equazioni di variazione

si ricaveranno le equazioni che esprimono la velocità media e la pressione media per un fluido incomprimibile; a tale scopo basta scrivere le equazioni di continuità e del moto sostituendo:

$$\boxed{V_i = \overline{V}_i + V_i'} \qquad \boxed{p = \overline{p} + p'}$$

grandezza = valor medio + fluttuazioni

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 213 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 215 di 346

Riscriviamo la equazione di continuità in un sistema di riferimento cartesiano, sostituendo

$$V_i = \overline{V}_i + V_i' \qquad p = \overline{p} + p'$$

Equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{v}_x + v_x'\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v}_y + v_y'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{v}_z + v_z'\right) = 0$$

Integrando nel tempo ambo i membri, si ottiene

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z} = 0 \longleftarrow$$

$$\overline{v} = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_z\, dt$$

$$\overline{V}_i' = 0$$

Equazione di continuità (lungo la direzione x):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{v}_x + v_x'\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{p} + p'\right)$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\left(\overline{v}_x + v_x'\right)\left(\overline{v}_x + v_x'\right) + \frac{\partial}{\partial y}\rho\left(\overline{v}_y + v_y'\right)\left(\overline{v}_x + v_x'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\rho\left(\overline{v}_z + v_z'\right)\left(\overline{v}_x + v_x'\right)\right)$$
$$+ \mu\nabla^2\left(\overline{v}_x + v_x'\right) + \rho g_x$$

Si è fatto uso dell'equazione del moto con le componenti della tensione di un fluido avente densità costante. Le componenti nella direzione y e x della equazione del moto possono scriversi in modo analogo.

Integrando nel tempo ambo i membri, si ottiene

Termine dipendente dalle fluttuazioni

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{v}_x\overline{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v}_y\overline{v}_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v}_z\overline{v}_x\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{v_x'v_x'} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v_y'v_x'} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v_z'v_x'}\right) + \mu\nabla^2\overline{v}_x + \rho g_x$$

Queste sono le equazioni di continuità e la componente x dell'equazione del moto mediate nel tempo. Nella equazione del moto, v_x, v_y, v_z e p sono parimenti sostituite da $\overline{v}_x$, $\overline{v}_y$, $\overline{v}_z$ e $\overline{p}$ ma inoltre vi compare un termine dipendente dalle fluttuazioni della velocità.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 215 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 217 di 346

A questo punto, però, le equazioni non sono più sufficienti alla chiusura del problema, perché sono comparse sei nuove incognite, le componenti del tensore degli sforzi di Reynolds.
Vi sono due approcci: il primo formula una relazione tra gli sforzi di Reynolds e le grandezze fisiche del problema, sulla base di osservazioni sperimentali, tramite il concetto di viscosità turbolenta (*eddy viscosity models*), mentre il secondo risolve esplicitamente equazioni di trasporto separate per le sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi turbolenti ed eventualmente le tre del vettore flusso termico turbolento (*stress transport models*).

Nel caso di sforzi normali isotropi e di flusso incomprimibile, in analogia con la viscosità molecolare nel moto laminare, si scrive (ipotesi di Boussinesq):

$$\boxed{-\rho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)}$$

dove μ_t è la viscosità turbolenta, che NON è una proprietà termofisica del fluido!
A questo punto occorre introdurre un "modello di turbolenza" che definisca la distribuzione di μ_t nel dominio fluido in funzione di una o più grandezze e/o costanti determinate sperimentalmente.

DEFORMAZIONE = rappresentata da una composizione dei componenti della matrice del tensore dei gradienti di velocita'

$\longrightarrow \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Boussinesq hypothesis

- **Many turbulence models are based upon the Boussinesq hypothesis.**
  - **It was experimentally observed that turbulence decays unless there is shear in isothermal incompressible flows.**
  - **Turbulence was found to increase as the mean rate of deformation increases.**
  - **Boussinesq proposed in 1877 that the Reynolds stresses could be linked to the mean rate of deformation.**
- **Using the suffix notation where i, j, and k denote the x-, y-, and z-directions respectively, viscous stresses are given by:**

gradiente di velocita'

componenti dei gradienti di velocita

$$\tau_{ij} = \mu\, e_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- **Similarly, link Reynolds stresses to the mean rate of deformation:**

SFORZI di Reynolds $\bar{\tau}(t)$ ←

$$\boxed{\tau_{ij} = -\rho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 217 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 219 di 346

Kolmogorov's Theory

→ strutture che si generano in un moto turbolento

Eddy size

- Kolmogorov's theory describes how energy is transferred from larger to smaller eddies; how much energy is contained by eddies of a given size; and how much energy is dissipated by eddies of each size.
- We will derive three main turbulent length scales: the integral scale, the Taylor scale, and the Kolmogorov scale; and corresponding Reynolds numbers.
- We will also discuss the concept of energy and dissipation spectra.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 219 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 221 di 346

Integral scale

- We can derive an estimate of the lengthscale l_0 of the larger eddies based on the following:
  - Eddies of size l_0 have a characteristic velocity u_0 and timescale $\tau_0 \equiv l_0/u_0$
  - Their characteristic velocity $u_0 \equiv u(l_0)$ is on the order of the r.m.s. turbulence intensity $u' \equiv (2k/3)^{1/2}$
  - Assume that energy of eddy with velocity scale u_0 is dissipated in time τ_0
- We can then derive the following equation for this length scale:

$$l_0 \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

- Here, ε(m²/s³) is the energy dissipation rate. The proportionality constant is of the order one. This lengthscale is usually referred to as the ***integral scale*** of turbulence.
- The Reynolds number associated with these large eddies is referred to as the turbulence Reynolds number Re_L, which is defined as:

$$\boxed{\mathrm{Re}_L = \frac{k^{1/2} l_0}{\nu} = \frac{k^2}{\varepsilon \nu}}$$

Energy transfer

- The large eddies are unstable and break up, transferring their energy to somewhat smaller eddies.
- These smaller eddies undergo a similar break-up process and transfer their energy to yet smaller eddies.
- This *energy cascade* – in which energy is transferred to successively smaller and smaller eddies – continues until the Reynolds number $\mathrm{Re}(l) \equiv u(l)l/\nu$ is sufficiently small that the eddy motion is stable, and molecular viscosity is effective in dissipating the kinetic energy.
- At these small scales, the kinetic energy of turbulence is converted into heat.

Rompendosi gli eddie trasferiscono l'energia agli eddie più piccoli e procede finché Re↓ e il moto diventa stabile xk hanno dimensioni + piccole.
Re↓ F. viscose ~ F. inerziali e la viscosità del fluido riesce a dissipare l'energia. → La viscosità non è + trascurabile.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 221 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 223 di 346

Kolmogorov's theory

- Many questions remain unanswered.
  - What is the size of the smallest eddies that are responsible for dissipating the energy?
  - As l decreases, do the characteristic velocity and timescales $u(l)$ and $\tau(l)$ increase, decrease, or stay the same? The assumed decrease of the Reynolds number $u_0 l_0/\nu$ by itself is not sufficient to determine these trends.
- These and others are answered by Kolmogorov's theory of turbulence (1941, see Pope (2000)).
- Kolmogorov's theory is based on three important hypotheses combined with dimensional arguments and experimental observations.

Non si sa come diminuiscano v_0 e τ_0 al diminuire di l_0.
Si sa che Re diminuisce passando da eddie + grandi a eddie + piccoli.

ANISOTROPE ← SCALA GRANDE $u \gg \neq v, w$
ISOTROPE ← SCALA PICCOLA $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$

ISOTROPIA LOCALE

Kolmogorov's hypothesis of local isotropy

k non varia lungo le direzioni

- For homogenous turbulence, the turbulent kinetic energy k is the same everywhere. For isotropic turbulence the eddies also behave the same in all directions: $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ → ISOTROPIA
- Kolmogorov argued that the directional biases of the large scales are lost in the chaotic scale-reduction process as energy is transferred to successively smaller eddies.
- Hence Kolmogorov's hypothesis of local isotropy states that *at sufficiently high Reynolds numbers, the small-scale turbulent motions ($l << l_0$) are statistically isotropic.*
- Here, the term local isotropy means isotropy at small scales. Large scale turbulence may still be anisotropic.
- l_{EI} is the length scale that forms the demarcation between the large scale anisotropic eddies ($l > l_{EI}$) and the small scale isotropic eddies ($l < l_{EI}$). For many high Reynolds number flows l_{EI} can be estimated as $l_{EI} \approx l_0/6$.

Qualunque polarizzazione dovuta dalla direzionalità del moto su larga scala, sulla scala + piccola viene persa. → non c'è una direzione principale sulla scala dissipativa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 223 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 225 di 346

Kolmogorov scales - derivation

$$\tau_\eta = \eta / u_\eta \quad [1]$$

$$\mathrm{Re}_\eta = \frac{\eta\, u_\eta}{\nu} = 1 \quad \Rightarrow \quad u_\eta = \frac{\nu}{\eta} \quad [2]$$

$$\varepsilon = \frac{u_\eta^2}{\tau_\eta} \sim \frac{u_\eta^2 . u_\eta}{\eta} \sim \frac{u_\eta^3}{\eta} \Rightarrow u_\eta \sim (\varepsilon\, \eta)^{1/3} \quad [3]$$

$$[2] \wedge [3] \Rightarrow \eta = \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}\, \eta^{1/3}} \Rightarrow \eta^{4/3} = \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{length scale} \quad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \quad [4]$$

$$\varepsilon \sim \frac{u_\eta^3}{\eta} \wedge \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \Rightarrow \textit{velocity scale}: \; u_\eta = (\varepsilon\nu)^{1/4} \quad [5]$$

$$[1] \wedge [4] \wedge [5] \Rightarrow \textit{time scale}: \; \tau_\eta = (\nu / \varepsilon)^{1/2} \quad [6]$$

Universal equilibrium range

- The size range ($l<l_{EI}$) is referred to as the universal equilibrium range.
- In this range, the timescales $l/u(l)$ are small compared to l_0/u_0 so that the small eddies can adapt quickly to maintain dynamic equilibrium with the energy transfer rate T_{EI} imposed by the large eddies.
- On these scales all high Reynolds number flow fields are statistically identical if the flow fields are scaled by the Kolmogorov scales.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 225 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 227 di 346

Eddy sizes in the inertial subrange

- For eddies in the inertial subrange of size l, using:

$$\varepsilon = u_\eta^3 / \eta = \eta^2 / \tau_\eta^3$$

and the previously shown relationships between the turbulent Reynolds number and various scales, velocity scales and timescales can be formed from ε and l:

$$u(l) = (\varepsilon l)^{1/3} = u_\eta (l/\eta)^{1/3} \sim u_0 (l/l_0)^{1/3}$$
$$\tau(l) = (l^2/\varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta (l/\eta)^{2/3} \sim \tau_0 (l/l_0)^{2/3}$$

- A consequence, then, of the second similarity hypothesis is that in the inertial subrange the velocity scales and timescales $u(l)$ and $\tau(l)$ decrease as l decreases.

17

Taylor microscale

- The energy dissipation rate ε is given by the following equation, which comes from the analytically derived conservation equation for turbulent kinetic energy:

$$\overline{s_{ij}s_{ij}} >> S_{ij}S_{ij}; \quad \varepsilon = 2\nu\overline{s_{ij}s_{ij}}; \quad s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- The lower case indicates the fluctuating components. The dissipation rate depends on the viscosity and velocity gradients ("shear") in the turbulent eddies.
- Working out this equation further for isotropic turbulence (mainly bookkeeping for all the terms) results in:

$$\varepsilon = 15\nu\ \overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}$$

- We can now define the Taylor microscale λ as follows:

$$\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2} \equiv \overline{u_1^2}/\lambda^2 = u'^2/\lambda^2$$

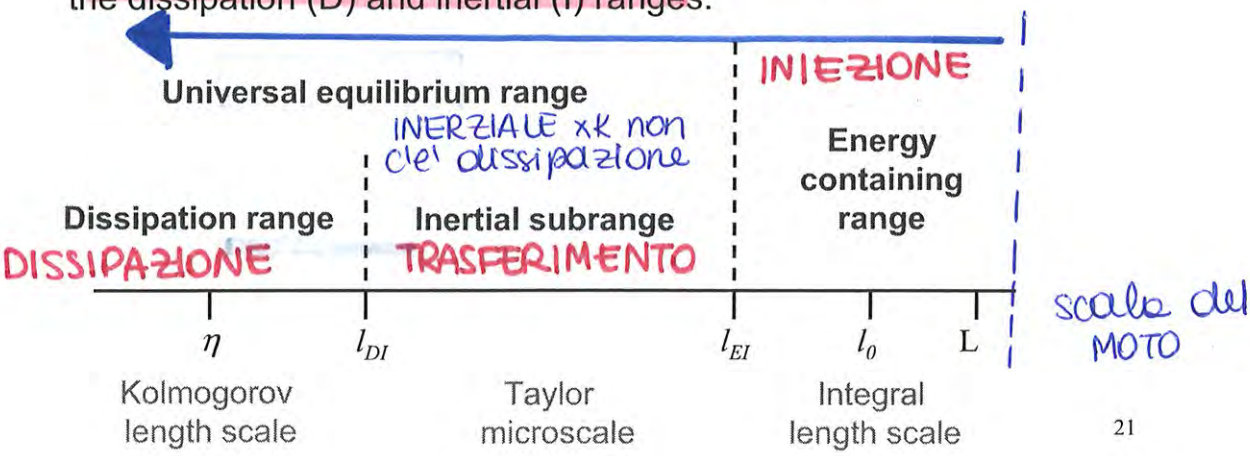
18

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 227 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 229 di 346

Eddy sizes

- The bulk of the energy is contained in the larger eddies in the size range $l_{EI} = l_0/6 < l < 6l_0$, which is therefore called the energy-containing range.
- The suffixes EI and DI indicate that l_{EI} is the demarcation line between energy (E) and inertial (I) ranges, as l_{DI} is that between the dissipation (D) and inertial (I) ranges.



21

Taylor scales

- The eddy size in the inertial subrange is given by the Taylor microscale λ:

$$\lambda \approx (10\nu k/\varepsilon)^{1/2}$$

- A commonly used quantity in the characterization of turbulence is the Taylor-scale Reynolds number R_λ.
- This is based on the length scale λ and the corresponding velocity scale:

$$\boxed{R_\lambda = u'\lambda/\nu}$$

- R_λ can be related to the turbulence Reynolds number as follows:

$$\boxed{R_\lambda = \left(\tfrac{20}{3}\mathrm{Re}_L\right)^{1/2}}$$

22

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 229 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 231 di 346

Come si distribuisce l'E_K nella cascata degli eddie? → osservo lo spettro di energia → $E(K)$ = quanta energia è contenuta nell'eddie di lunghezza $K = \frac{2\pi}{l}$

Energy spectrum

- The turbulent kinetic energy k is given by: $k = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$
- It remains to be determined how the turbulent kinetic energy is distributed among the eddies of different sizes.
- This is usually done by considering the energy spectrum $E(\kappa)$.
- Here $E(\kappa)$ is the energy contained in eddies of size l and wavenumber κ, defined as $\kappa = 2\pi/l$.
- By definition k is the integral of $E(\kappa)$ over all wavenumbers:

$$\boxed{k = \int_0^\infty E(\kappa)\,d\kappa}$$

→ integrale dello spettro dell'energia di tutti i numeri d'onda K

- The energy contained in eddies with wavenumbers between κ_A and κ_B is then:

$$\boxed{k_{(\kappa_A,\kappa_B)} = \int_{\kappa_A}^{\kappa_B} E(\kappa)\,d\kappa}$$

→ integrale dello spettro sul range delle scale INERZIALI, x capire come si distribuisce negli eddie.

25

E(κ) in inertial subrange

- We will develop an equation for $E(\kappa)$ in the inertial subrange.
- According to the second similarity hypothesis $E(\kappa)$ will solely depend on κ and ε. e non da ν
- We can then perform the following dimensional analysis:

$$[k] = m^2 s^{-2}\ ;\ \ [\varepsilon] = m^2 s^{-3}\ ;\ \ [\kappa] = m^{-1}\ ;$$

$$[E(\kappa)] = [k]/[\kappa] = m^3 s^{-2}$$

$$\textit{Dimensional analysis}:\ \ [\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}] = m^3 s^{-2}$$

$$\Rightarrow\ E(\kappa)\ \propto\ \varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ E(\kappa)\ =\ C\,\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}}$$

- The last equation describes the famous Kolmogorov –5/3 spectrum. C is the universal Kolmogorov constant, which experimentally was determined to be C = 1.5.

26

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 231 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 233 di 346

Normalized spectrum

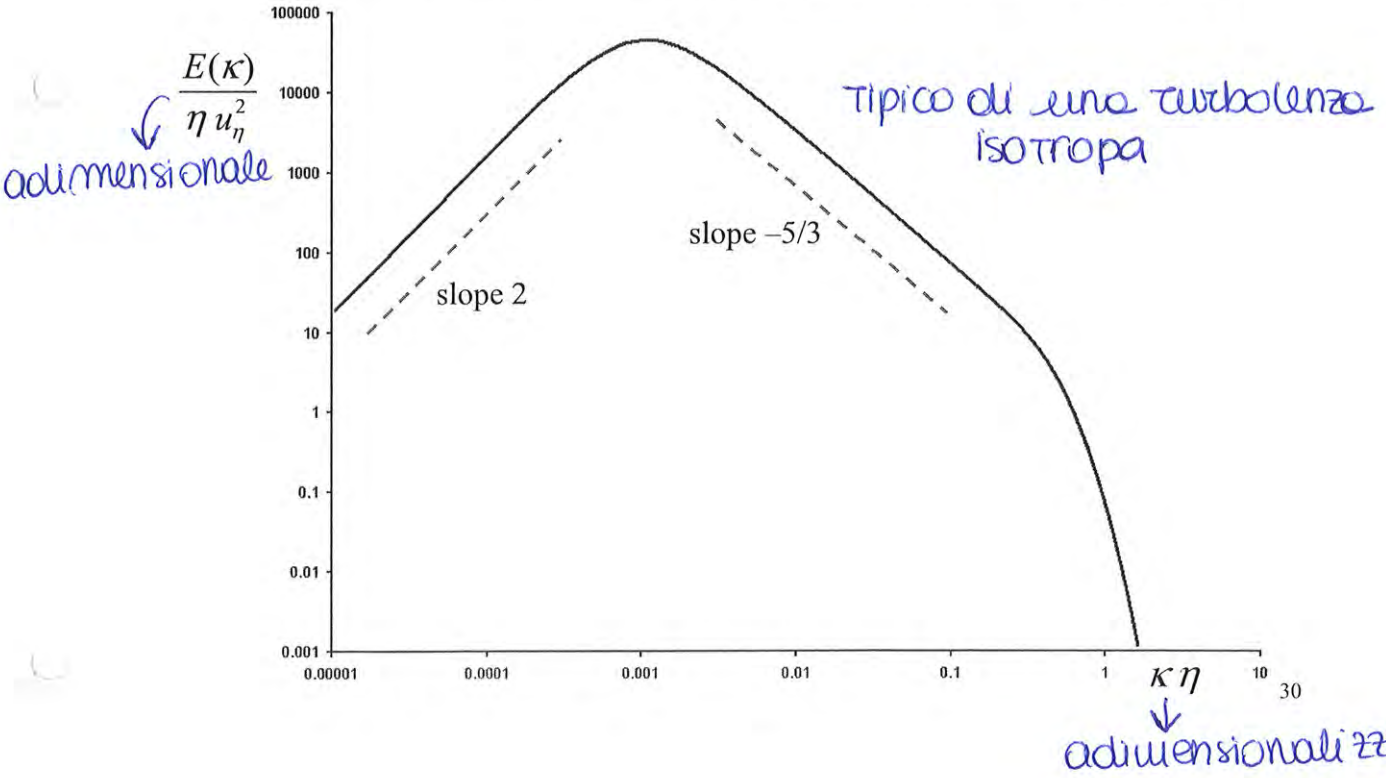
- For given values of ε, ν, and k the full spectrum can now be calculated based on these equations.
- It is, however common to normalize the spectrum in one of two ways: based on the Kolmogorov scales or based on the integral length scale.
- Based on Kolmogorov scale:
  - Measure of length scale becomes ($\eta\ \kappa$).
  - $E(\kappa)$ is made dimensionless as $E(\kappa)/(\eta\ u_\eta^2)$
- Based on integral scale:
  - Measure of length scale becomes ($l_0\ \kappa$).
  - $E(\kappa)$ is made dimensionless as $E(\kappa)/(k\ l_0)$
- Instead of having three adjustable parameters (ε,ν,k), the normalized spectrum then has only one adjustable parameter: R_λ.

29

NORMALIZZAZIONE CON LA SCALA DI KOLMOGOROV

uguale x tutti i moti con lo stesso Re_L e turbolenza isotropa, anche se hanno U, d ≠.

The normalized energy spectrum for R_λ = 500

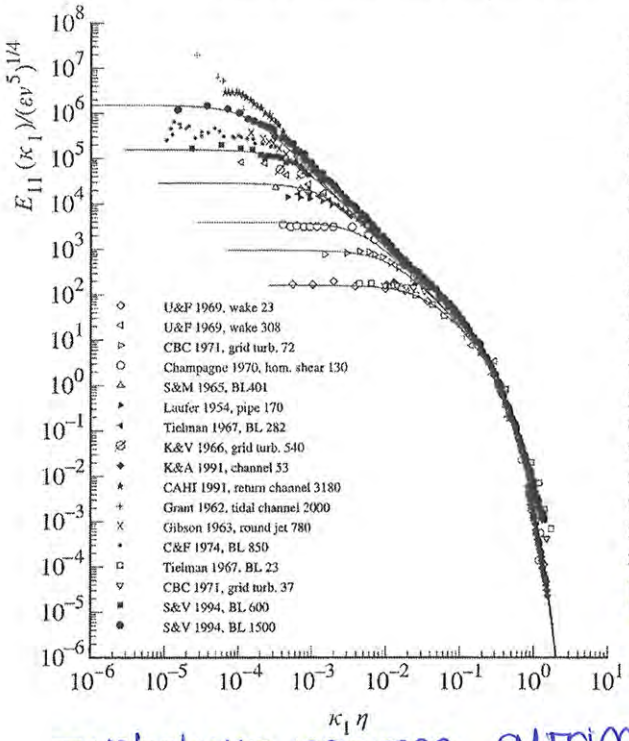


30

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 233 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 235 di 346

Measurements of spectra



The figure shows experimentally measured one dimensional spectra (one velocity component was measured only, as indicated by the "1" and "11" subscripts). The number at the end of the reference denotes the value of R_λ for which the measurements were done. Source: Pope, page 235.

Determination of the spectrum requires simultaneous measurements of all velocity components at multiple points, which is usually not possible. It is common to measure one velocity component at one point over a certain period of time and convert the time signal to a spatial signal using x = Ut with U being the time averaged velocity. This is commonly referred to as Taylor's hypothesis of frozen turbulence. It is only valid for u'/U << 1, which is not always the case. Spectrum measurements remain a challenging field of research.

L'energia turbolenta decade x tutti con la stessa LEGGE (deve essere un moto turbolento isotropo, altrimenti la teoria di Kolmogorow non e' applicabile).

Energy containing range

- From the energy spectrum, we can derive which length scales contain most of the turbulent kinetic energy in the flow.
- The derivation will not be reproduced here.
- The conclusion is that most of the energy (~80%) is contained in eddies of length scale $l_{EI} = l_0/6 < l < 6l_0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 235 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 237 di 346

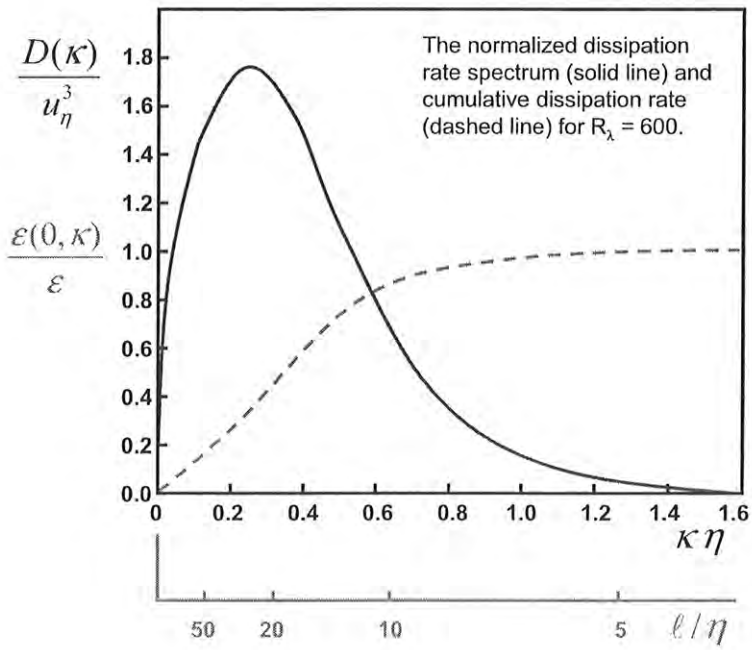
The dissipation rate spectrum

- We now know which eddies contain most of the energy. The question remains, which eddies exactly dissipate the energy.
- This question can be answered by constructing a dissipation rate spectrum $D(\kappa)$. The integral of $D(\kappa)$ over the full wavelength range is by definition the energy dissipation rate ε:

$$\varepsilon = \int_0^\infty D(\kappa)d\kappa$$

- The unit of $D(\kappa)$ is m^3/s^3 and it can thus be normalized with a velocity scale cubed, typically the Kolmogorov velocity scale.
- Just as the normalized $E(\kappa)$ only depended on R_λ, so does the normalized $D(\kappa)$ depend only on R_λ.

Dissipation rate spectrum



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 237 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 239 di 346

Summary – Reynolds numbers

- The following Reynolds numbers have been defined:
  - Flow Reynolds number: $\mathrm{Re} = UL/\nu$
  - Turbulence Reynolds number: $\mathrm{Re}_L = k^2/\varepsilon\nu$
  - Taylor Reynolds number: $R_\lambda = u'\lambda/\nu$
  - Kolmogorov Reynolds number: $\mathrm{Re}_\eta = \eta u_\eta/\nu = 1$
- The flow Reynolds number is on the order of one to ten times the turbulence Reynolds number.
- The turbulence and Taylor Reynolds numbers can be related as follows: $R_\lambda = \left(\frac{20}{3}\mathrm{Re}_L\right)^{1/2}$

41

Summary – length scales

- The integral length scale is a measure of the large scale eddies in the production range: $l_0 \propto k^{3/2}/\varepsilon$
  The proportionality constant is of the order one.
- The Taylor microscale is a measure of the size of the eddies in the inertial subrange: $\lambda \approx (10\nu k/\varepsilon)^{1/2}$
- The Kolmogorov microscale is the size of the smallest eddies present in the flow: $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$
- The length scales can be related as follows:

$$\lambda/l_0 = \sqrt{10}\,\mathrm{Re}_L^{-1/2}$$
$$\eta/l_0 = \mathrm{Re}_L^{-3/4}$$
$$\lambda/\eta = \sqrt{10}\,\mathrm{Re}_L^{1/4}$$
$$\lambda = \sqrt{10}\,\eta^{2/3} l_0^{1/3}$$

42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 239 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 241 di 346

MOTO TURBOLENTO

26 novembre 2014

Un FEN. ALEATORIO quando il suo comportamento è STAZIONARIO significa che il suo comportamento è indipendente dalla traslazione della scala dei tempi.

STAZIONARIO = μ, σ^2, KURTOSIS, SKEWNESS devono essere invariati rispetto al tempo. In qualunque istante io li calcoli, non variano ma devo avere preso uno spezzone del segnale SUFFICIENTEMENTE lungo in modo che sia rappresentativo. → S. IN SENSO STRETTO

S. IN SENSO DEBOLE = μ e ψ sono indipendenti nel tempo.

ERGODICO = ogni misura o campione è rappresentativa del processo in generale.

Il moto turbolento è un FENOMENO ALEATORIO, facendo 2 misure nelle stesse condizioni, ma in tempi ≠, esse saranno ≠. Tuttavia avranno la stessa rappresentazione STATISTICA.

Questo perché la turbolenza non è un fenomeno controllabile → basta una piccolissima perturbazione del sistema x avere risultati molto diversi.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = \beta z + xy \end{cases} \rightarrow$$ legge di moto di un oggetto nello spazio

σ, ρ, β → PARAMETRI della legge del moto

$$\begin{cases} \sigma = 10 \\ \beta = 8/3 \\ \rho = 35 \end{cases} \qquad (C.I)_1 \begin{cases} x(0) = 0,5 \\ y(0) = 0,1 \\ z(0) = 0,3 \end{cases}$$

↓

attratore di Lorentz

La legge del moto è molto sensibile alle variazioni se cambio le C.I.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 241 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 243 di 346

(Trascuro la F. di gravità) → $(+\rho g)$

* $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau]$ **EQ. MOTO**

↑ divergenza del tensore degli stress viscosi

* $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ EQ. DI CONTINUITÀ

→ acc. CONVETTIVA NON STAZIONARIA

* $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\nabla \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}]$ **Espansione DERIVATA SOSTANZIALE**

↑ divergenza dell'acc. CONVETTIVA

TENSORE DEGLI STRESS VISCOSI $= \tau$

τ_{xx}
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$
τ_{yy}
τ_{zz}
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

} dati dalle 3 componenti della velocità nelle 3 dimensioni
↓
9 componenti

|| Il termine NON LINEARI, che amplifica gli effetti del moto TURBOLENTO è $\nabla \vec{v} \cdot \vec{v}$ = divergenza dell'acc. CONVETTIVA ||

v_i = velocità in un punto i del dominio fluido istantanea

$v_i = \overline{v_i} + v_i'$

$\overline{v_i}$ ↓ valore medio
v_i' ↓ fluttuazione

$p_i = \overline{p_i} + p_i'$

$\overline{v_i} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v\,dt = COST$ → MEDIA DELLA VELOCITÀ, l'intervallo t_0 su cui la calcolo deve essere rappresentativo, affinché sia STAZIONARIO IN SENSO DEBOLE

→ x la stazionarietà in senso stretto

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 243 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 245 di 346

EQ. MOTO

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau]$$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho [\nabla \underline{v} \cdot \underline{v}] = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau]$$

$$\begin{cases} \overline{v'} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v' dt = 0 \\ \overline{v} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v dt = \text{COST} \\ \psi = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v^2 dt \neq 0 \end{cases}$$

sviluppo lungo la direzione x:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 v_x$$

sostituisco $v = \overline{v} + v'$ e $p = \overline{p} + p'$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}_x + v'_x) + \rho \left(\frac{\partial}{\partial x}(\overline{v}_x + v'_x)(\overline{v}_x + v'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v}_y - v'_y)(\overline{v}_x - v'_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v}_z - v'_z)(\overline{v}_x - v'_x) \right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\overline{p} - p')$$
$$- \mu \nabla^2 (\overline{v}_x - v'_x)$$

Integro su $\int_T dt$

$$\int_T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}_x + v'_x) dt = -\rho \left[\int_T \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v}_x + v'_x)(\overline{v}_x + v'_x) dt + \int_T \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v}_y + v'_y)(\overline{v}_x + v'_x) dt + \int_T \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v}_z + v'_z)(\overline{v}_x + v'_x) \right.$$
$$- \int_T \frac{\partial}{\partial x}(\overline{p} - p') dt - \mu \int_T \nabla^2 (\overline{v}_x - v'_x) dt$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 245 di 346

$\int_T$ e $\frac{\partial}{\partial x}$ sono OPERATORI LINEARI, quindi posso invertirli:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_T (\bar{v}_x + \cancelto{0}{v'_x})dt = -\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_T (\bar{v}_x+v'_x)(\bar{v}_x+v'_x)dt + \frac{\partial}{\partial y}\int_T (\bar{v}_y+v'_y)(\bar{v}_x+v'_x)dt + \frac{\partial}{\partial z}\int_T (\bar{v}_x+v'_x)(\bar{v}_z+v'_z)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int_T (\bar{p}+\cancelto{0}{p'})dt \quad + \mu\int_T \nabla^2(\bar{v}_x+\cancelto{0}{v'_x})dt$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = -\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_T \bar{v}_x\bar{v}_x dt + \int_T v'_x v'_x dt + 2\int_T \bar{v}_x \cancelto{0}{v'_x} dt\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_T \bar{v}_x\bar{v}_y dt + \int_T v'_x v'_y dt + \int_T \bar{v}_y \cancelto{0}{v'_x} dt + \right.\right.$$

$$\left.\left.\int_T \cancelto{0}{v'_y}\bar{v}_x dt\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_T \bar{v}_z\bar{v}_x dt + \int_T v'_x v'_z dt + \int_T \bar{v}_z \cancelto{0}{v'_x} dt + \int_T \cancelto{0}{v'_z}\bar{v}_x dt\right)\right] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{v}_x$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = -\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_x\bar{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_y\bar{v}_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_z\bar{v}_x)\right] - \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'_x v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'_x v'_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'_x v'_z})\right)$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{v}_x$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = \underbrace{-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho(\bar{v}_x\bar{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}\rho(\bar{v}_x\bar{v}_y) + \frac{\partial}{\partial z}\rho(\bar{v}_z\bar{v}_x)\right)}_{\bar{\tau}_{ij}^{(e)}} \underbrace{-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho(\overline{v'_x v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'_y v'_x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'_z v'_x})\right)}_{\tau_{ij}^{(t)}} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{v}_x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 247 di 346
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 247 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 249 di 346

3 dicembre 201

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \bar{v}_x \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho \bar{v}_y \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho \bar{v}_z \bar{v}_x\right)}_{\bar{\tau}_{ij}^{(l)}} +$$

$$-\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \overline{v_x' v_x'} + \frac{\partial}{\partial y}\rho \overline{v_x' v_y'} + \frac{\partial}{\partial z}\rho \overline{v_x' v_z'}\right)}_{\bar{\tau}_{ij}^{(t)}} + \mu \nabla^2 \bar{v}_x$$

$$\bar{\tau}_{xx}^{(t)} = \rho \overline{v_x' v_x'}$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{(t)} = \rho \overline{v_x' v_y'}$$

$$\rightarrow \bar{\tau}_{ij}^{(t)} = \rho \overline{v_i' v_j'}$$

In totale ce ne sono 9, come x il tensore degli sforzi visco

Introduciamo un nuovo tensore che dipende solo dalle FLUTTUAZIONI

$$T = \rho \overline{v_i' v_j'} = \begin{bmatrix} \rho \overline{v_x'^2} & \rho \overline{v_x' v_y'} & \rho \overline{v_x' v_z'} \\ \rho \overline{v_y' v_x'} & \rho \overline{v_y'^2} & \rho \overline{v_y' v_z'} \\ \rho \overline{v_z' v_x'} & \rho \overline{v_z' v_y'} & \rho \overline{v_z'^2} \end{bmatrix}$$

FLUSSO DI QDM TURBOLENTA

TENSORE DI RAYNOLDS dipende solo dalle FLUTTUAZIONI delle componenti della velocita'

Introducendolo nella formula precedente:

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{\tau}_{ij}^{(l)} + \bar{\tau}_{ij}^{(t)}$$

$\rightarrow$ legato al moto laminare

(FLUSSO della QDM laminare) — Tensore degli sforzi viscosi — Tensore di Raynolds — (FLUSSO della QDM TURBOLENTA)

Navier-Stockes diventa ($\rightarrow$ rappresenta sia il MOTO LAMINARE che il MOTO TURBOLENTO $\downarrow$ descrivibile solo STATISTICAMENTE

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - \left[\nabla \bar{\tau}^{(l)}\right] - \left[\nabla \bar{\tau}^{(t)}\right]}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 249 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 251 di 346

VISCOSITA' TURBOLENTA

μ_t → non è legata alle pr. fisiche del fluido come la viscosità DINAMICA μ [Pa·s]

Esprimo le 6 variabili introdotte con $\bar{\tau}^{(t)}$ in funzione delle altre 3 $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$. Tuttavia μ_t varia da punto a punto → ho bisogno di un sist. di eq. x legare la μ_t alle altre variabili, non è OMOGENEA

∃ diversi modelli per rappresentare μ_t, con un numero di variabili ≠.

TEORIA DI KOLMOGOROV

Si sviluppa su un'analisi DIMENSIONALE e nient'altro.

EN. CINETICA TURBOLENTA $K = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$

$$K = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$$

↑ FLUTTUAZIONI medie

SCALA INTEGRALE

EDDIES + GRANDI

- $u_0 = u(l_0)$ scala di velocità
- l_0 scala di lunghezza
- $\tau_0 = \frac{l_0}{u_0}$ scala dei tempi

- $Re_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu} \sim Re = \frac{UL}{\nu}$

perché sono gli eddie + grandi

se il moto è turbolento e quindi ho Re↑ allora anche gli eddie + grandi hanno Re_0↑, quindi la viscosità del fluido non influisce sul moto degli eddie e non c'è dissipazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 251 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 253 di 346

SCALA DI KOLMOGOROV

→ tutte le grandezze dipendono dalla viscosità (mentre prima era trascurabile per via delle F. di dissipazione molto elevate) e dal RATE DI DISSIPAZIONE

- scala lunghezza $= \eta$
- scala di velocità $= u_\eta$
- scala del tempo $= \tau_\eta$
- $Re_\eta = \dfrac{\eta \cdot u_\eta}{\nu} = 1$

$$\frac{\eta \cdot u_\eta}{\nu} = 1 \rightarrow u_\eta = \frac{\nu}{\eta}$$

ε deve essere sempre la stessa xk il sistema sia in equilibrio → rate di dissipazione = rate di trasferim.
ε inizio processo $= \varepsilon$ fine processo

$$\varepsilon = \frac{K}{\tau_\eta} \rightarrow \text{x l'ipotesi di isotropia} = \frac{u_\eta^2}{\tau_\eta} = \frac{u_\eta^2}{\eta} \cdot u_\eta$$

$$K = u_\eta^2$$

$$\varepsilon = \frac{u_\eta^3}{\eta} \rightarrow u_\eta = (\varepsilon \eta)^{1/3}$$

dalle 2 formule ricavo:

$$\frac{\nu}{\eta} = (\varepsilon \eta)^{1/3} \rightarrow \eta = \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3} \eta^{1/3}}$$

$$\eta^{4/3} = \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = \eta} = \text{scala di lunghezza di Kolmogorov}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 253 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 255 di 346

RAPPORTO $\dfrac{\text{scala Kolmogorov}}{\text{scala integrale}}$

$$l_0 \sim \frac{K^{3/2}}{\varepsilon} \qquad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

$$\frac{\eta}{l_0} = \frac{\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}}{\frac{K^{3/2}}{\varepsilon}} = \left[\frac{\varepsilon \nu}{K^2}\right]^{3/4}$$

$$Re_{l_0} = \frac{K^2}{\varepsilon \nu}$$

maggiore è in Re
maggiore è la differenza tra micro e macro scala

rapporto micro/macro scala

$$\boxed{\frac{\eta}{l_0} = \left[\frac{1}{Re_{l_0}}\right]^{3/4} = Re_{l_0}^{-3/4}}$$

$$\eta = l_0 \cdot Re_{l_0}^{-3/4} = \frac{l_0}{Re_{l_0}^{3/4}}$$

se ↑ Re allora ↑ la differenza tra la scala di lunghezza integrale e la scala di lunghezza di Kolmogorov.

Tutte le scale possono essere espresse in questo modo

η diminuisce tanto più Re_{l_0} è grande

tra η e l_0 ho un range di lunghezze molto ampio lungo le quali non c'è dissipazione, ma solo trasferimento.

↓

2° IPOTESI DI KOLMOGOROV

Nelle scale intermedie non ho dissipazione, pertanto non sono influenzate dalla viscosità del fluido.

Queste scale hanno dimensioni < di quella integrale e > di quella di K.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 255 di 346

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 257 di 346

GRANDI SCALE = anisotrope } ipotesi di isotropia LOCALE
PICCOLE SCALE = isotropiche

$l_{EI} = \frac{l_0}{6}$ → linea di demarcazione tra anisotropo e isotropico, tra il range che contiene l'ENERGIA e quello che la TRASFERISCE.

- 1° ipotesi di similarità:

Secondo K. la direzione del moto imposto su larga scala viene perso a livello delle scale + piccole, così come vengono perse tutte le informazioni legate alla forma e alla geometria degli eddie.

Questo significa che flussi con lo stesso Re, ma forme e caratteristiche geometriche ≠, a livello delle scale + piccole sono descritti da una STATISTICA UNIVERSALE, uguale x tutti i flussi con lo stesso Re.

Gli eddie sono indipendenti a livello delle scale + piccole dalle condizioni al contorno, dipendono solo da ε e ν.

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \qquad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \qquad u_\eta = (\varepsilon \nu)^{1/4}$$

Quindi per determinare i parametri della scala di K sono sufficienti 2 parametri:

- ν = viscosità cinematica del fluido
- ε = rate di dissipazione / iniezione dell'en. cinetica

range di equilibrio universale → range INERZIALE ($l_{EI} < l < l_{DI}$) → range DISSIPAZIONE ($l < l_{DI}$)

E' definito per scale di lunghezza $l < l_{EI}$ (→ limite di separazione tra grande e piccola scala).

A questo livello di scala, le dimensioni e i parametri degli eddie sono piccoli rispetto a quelli della scala integrale, per cui assumono Re ~ 1, tali per cui le F. viscose non sono + trascurabili e permettono di dissipare l'energia proveniente dagli eddie + grandi. A queste scale gli eddie si mantengono

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 257 di 346