



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1575A -

ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Gemello

MATERIA: Chimica Fisica Applicata + Eserc. Prof.Vanni-Marchisio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## CHIMICA FISICA DEI SISTEMI DISPERSI

SCRITTO + ORALE FACOLTATIVO (MA VOTO = 26)

4/5 + 3 ESERCIZI

NON SI PUÒ RIFIUTARE VOTO DA 2° APPELLO IN POI

MICROSCALA → IN CUI MATERIA NON È CONTINUA

MACROSCALA → MECCANICA DEL CONTINUO

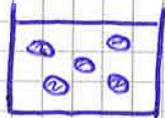
MESOSCALA → NO ESPERIENZA DIRETTA

(TRA NANOMETRO E MICRON)  
MATERIA ANCORA CONSIDERABILE CONTINUA  
MA CON DISCONTINUITÀ

↳ ES: FORZE DI NATURA SUPERFIC.;  
SEPARAZ. DI CARICHE ELETTRICHE  
INTERFACCE E COLLOIDI

QUAL'È IL RAPPORTO TRA L'AREA SUPERFIC.  
E IL VOLUME D'INSIEME DI UN EMULSIONE  
DI GOCCE D'OLIO IN ACQUA

↳  $\phi_{oe} = 0,01$

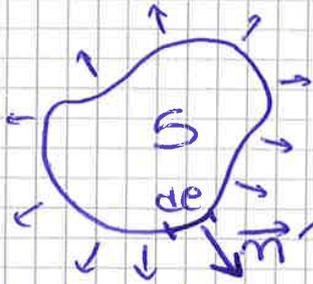


$$\frac{A_o}{V} = \frac{A_o}{V_o} \cdot \frac{V_o}{V} = \frac{N_{ol} \frac{4}{3} \pi r^2}{N_{ol} \frac{4}{3} \pi r^3} \phi_{ol} = \frac{3 \phi_{oe}}{r}$$

SE  $r = 1 \text{ mm} \rightarrow A_o/V = 30 \text{ m}^2/\text{m}^3$   
 $= 1 \mu\text{m} \rightarrow = = 30 \cdot 10^3 =$   
 $= 1 \text{ nm} \rightarrow = = 30 \cdot 10^6 =$



DEVO MANTENERE UNA FORZA LUNGO TUTTA LA SUP. PER MANTENERLA DISTESA E IMPEDIRE DI CONTRARSI COME TENDEREBBE A FARE



$$d\vec{F} = \gamma de \vec{n}$$

↳ TENSORE SUPERFIC.

VERSORE  $\vec{n}$   $\perp$  AL CONTORNO E TANGENTE ALLA SUPERF. S  
FORZA DISTRIBUITA

IN CONDIZ. DI EQUILIBRIO:  $d\vec{F}_{eq} = \gamma de \vec{n}$

SE INVECE S LA VOGLIO ESTENDERE:  $dF > dF_{eq}$   
CHE LAVORO DEVO COMPIERE?

$$d\mathcal{L} = d\vec{F} \cdot d\vec{x} > d\vec{F}_{eq} \cdot d\vec{x}$$

$$= \gamma de \vec{n} \cdot d\vec{x} = \gamma de dx \text{ (SONO ALLINEATI)}$$

$$d\mathcal{L} > \gamma dS = d\mathcal{L}_{REV}$$

LAVORO MINIMO DA FORNIRE (REVERSIBILE)

$$d\mathcal{L}_{REV}|_{T,p} = dG$$

$$dG|_{T,p} = \gamma dS \rightarrow \gamma = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \right)_{T,p}$$

DEF. TD TENSIONE SUPERFICIALE

$$1) dF = \gamma de \rightarrow [N/m]$$

$$2) d\mathcal{L}_{REV} = \gamma dS \rightarrow [J/m^2]$$

$$3) \gamma = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \right)_{T,p} \rightarrow [J/m^2]$$

Table 2-1: Surface tension values for various liquids

Liquid	T (°C)	Surface Tension (mN/m)
Helium	-272	0.16
Hydrogen	-254	2.4
Perfluoropentane	20	9.9
Oxygen	-183	13.2
Silicone (HMDS)	25	15.9
n-Heptane	20	20.3
Ethanol	20	22.0
Benzene	20	28.9
Olive oil	18	33.1
Ammonia	-33	34.1
Nitric acid	21	41.1
Glycerol	20	63.4
Methylene iodide	20	67.0
Water	20	72.7
Sodium chloride	801	114.
Lithium	181	394.
Zinc	360	877.
Iron	1530	1700.

Liquid A	Liquid B	$\gamma$ (mN/m)
Water	mercury	375.0
	n-hexane	51.1
	n-octane	50.8
	toluene	36.1
	benzene	35.0
	chloroform	32.8
	benzaldehyde	15.5
	n-octanol	8.5
	n-butanol	1.8
	Mercury	ethanol
n-hexane		378
Fluorocarbon polymer	benzene	7.8

Tensioni interfacciali a 20 °C

$\gamma < 20 \text{ mN/m}$

- GAS LIQUEFATTI
- FLUOROCARBURI
- SILICONI A BASSO PM

$20 < \gamma < 40 \text{ mN/m}$

SOST. ORGANICHE  $\rightarrow$  LEGAME VAN DER WAALS

$40 < \gamma < 70 \text{ mN/m}$

LEGAMI IDROGENO IMPORTANTI (ACQUA, AC. FORMICO, ...)

$\gamma > 100 \text{ mN/m}$

- METALLI LIQUIDI  $\rightarrow$  LEGAME METALLICO
  - $\rightarrow$  Hg: 500
  - $\rightarrow$  Fe: 1500
- LIQUIDI IONICI  $\rightarrow$  LEGAME IONICO

CONTA LA FORZA DI LEGAME TRA MOLECOLE  $\neq$



SE AGGIUNGO UN GAS  $\neq$  AL VAPORE LA TENSIONE SUPERFICIALE NON VARIA  
 $\gamma$  DIPENDE SOLO DAL LIQUIDO

$\neq$  E' SE HO 2 LIQUIDI PERFETTAM. MISCIBILI AL CONTATTO

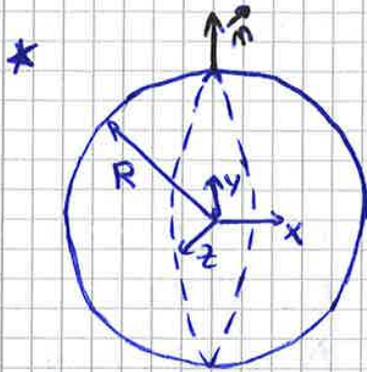


LA TENSIONE ALL'INTERFACCIA TRA ACQUA E BENZENE DIPENDE DA ENTRAMBI

$\gamma_{AB}$  = TENS. INTERFACCIALE

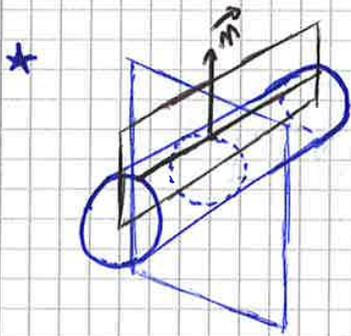
X DETERM.  $\gamma_{AB}$   $\neq$  MODELLI

$\gamma_B < \gamma_{AB} < \gamma_A$  VALORE INTERMEDIO



$$\begin{cases} \pi_1 = R \\ \pi_2 = R \end{cases}$$

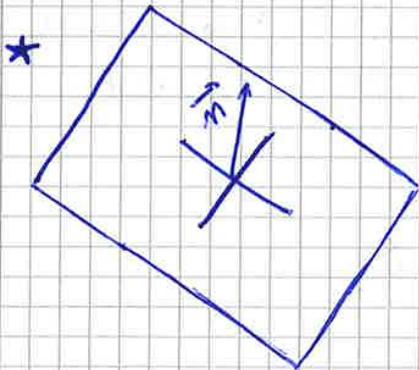
$$K = \frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_2} = \frac{2}{R}$$



SCELTA + COMODA E' PRENDERE UN PIANO // ALLE BASI DEL CILINDRO (E L'ALTRO  $\perp$ )

$$\begin{aligned} \pi_1 &\rightarrow \infty \\ \pi_2 &\rightarrow R \end{aligned}$$

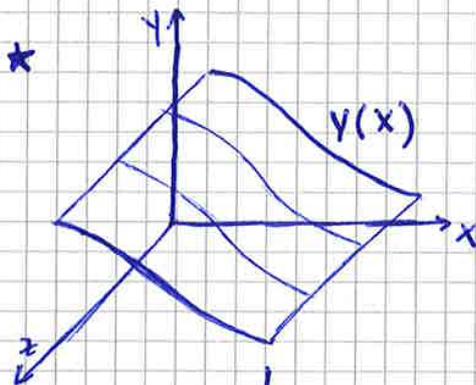
$$K = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$



$$\begin{aligned} \pi_1 &\rightarrow \infty \\ \pi_2 &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0$$

IL PIANO HA CURVATURA NULLA

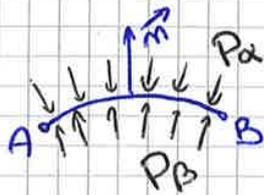


$$K = \frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_2} = -\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

UN ESEMPIO DI QUESTO E' IL MENISCO DELL'ACQUA SU UNA PIATRINA

SUPERF. OTTENUTA X TRASLAZIONE

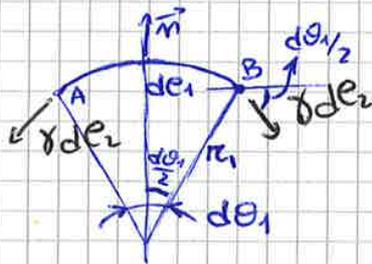
X EQUILIBRIO MECCANICO LE FORZE DEVONO COMPENSARSI



$$dF_p = P_\beta dS - P_\alpha dS$$

FORZA DI PRESSIONE

$dF = \gamma de$  FORZA INTERFACCIALE DISTRIBUITA



OPPOSTO A  $\vec{n}$

$$dF_2 = \frac{1}{2} \gamma de_2 \sin \frac{\theta_1}{2}$$

2 PARTI

$$dF_2 = -\gamma de_2 d\theta_1$$

ESSENDO  $\theta_1$  PICCOLO  $\sin \frac{\theta_1}{2} \approx \frac{\theta_1}{2}$

$$dF_p = (P_\beta - P_\alpha) dS$$

$$dF_2 = -\gamma de_2 d\theta_1$$

$$dF_1 = -\gamma de_1 d\theta_2$$

$$dF_2 = -\gamma de_1 de_2 \cdot \frac{1}{r_1}$$

$$dF_1 = -\gamma de_1 de_2 / r_2$$

$$d\theta_1 = \frac{de_1}{r_1}$$

$$d\theta_2 = \frac{de_2}{r_2}$$

$$de_1 de_2 = dS$$

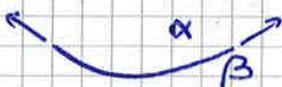
X EQUILIBRIO MECCANICO:  $dF_p + dF_2 + dF_1 = 0$

$$0 = (P_\beta - P_\alpha) dS - \frac{\gamma}{r_1} dS - \frac{\gamma}{r_2} dS$$

$$P_\beta - P_\alpha = \gamma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

IN QUESTO CASO  $P_\beta > P_\alpha$

SE CONCAVITA' OPPOSTA  $P_\beta < P_\alpha$



ESEMPIO 1: ACQUA  $\gamma = 70 \text{ mN/m}$   
 $R = 1 \text{ mm}$

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2 \cdot 0,070}{0,001} = 140 \text{ Pa}$$

ESEMPIO 2: ACQUA  $\gamma = 70 \text{ mN/m}$   
 $R = 1 \mu\text{m}$

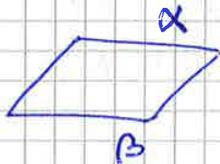
$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = 140 \cdot 000 \text{ Pa} = 1,4 \text{ bar}$$

$$R = 100 \text{ mm} \Rightarrow \Delta P = 14 \text{ bar}$$

$$R = 10 \text{ mm} \Rightarrow \Delta P = 140 \text{ bar}$$

CONTRIBUTO IMPORTANTE

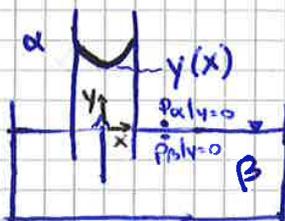
SE ABBIAMO UN'INTERFACCIA PIANA:



$$\Delta P = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

② DETERMINIAMO LA FORMA DI  $i$  DA  $\Delta P$

ES: TUBICINO SOTTILE IN VASCA



ACQUA RISALE X CAPILLARITA'  
 SI CREA MENISCO

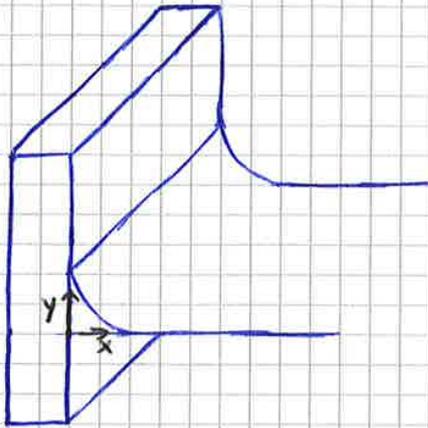
PRESSIONE SEGUE LEGGE STEVINO

$$P_\alpha = P_\alpha|_{y=0} - \rho_\alpha g y$$

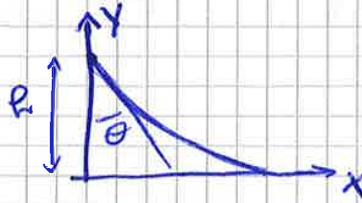
$$P_\beta = P_\beta|_{y=0} - \rho_\beta g y$$

IN  $y=0$   $P_\alpha = P_\beta = P_0$  (INTERFACCIA PIANA)

## ES: PIASTRINA IMMERSA IN UN LIQUIDO



MENISCO PIANO



$$R = a \sqrt{1 - \sin \theta}$$

LUNGH. CAPILLARE

$$a = \sqrt{\frac{2\gamma}{\Delta \rho g}}$$

BOND

$$B_0 = \frac{\text{FORZA GRAVITAZ.}}{\text{FORZA CAPILLARE}}$$

METTE IN RELAZ.  $\gamma, \Delta \rho, g, L$

$$B_0 = \frac{L^3 \Delta \rho g}{\gamma L} = \frac{\Delta \rho g L^2}{\gamma}$$

DIMENS. CARATTERISTICA DEL SISTEMA

$$\frac{\Delta \rho g}{\gamma} = \frac{2}{a^2} \rightarrow B_0 = 2 \left( \frac{L}{a} \right)^2$$

SE  $B_0 \ll 1$  IL TERMINE GRAVITAZ. E' TRASCURAB.,  
QUINDI  $\Delta P$  COST

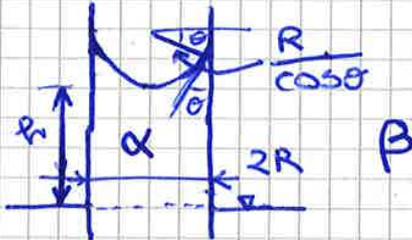
$$\Delta P = \gamma \underbrace{\left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}_{\text{COST}}$$

CON  $B_0 \ll 1$  FORMA SFERICA

SE  $B_0 \gg 1$  TRASCURO  $\gamma$ , QUINDI LE SUPERF.  
HANNO FORMA PIANA

$$Bo = \frac{\Delta \rho g L^2}{\gamma}$$

SE IL CAPILLARE È MOLTO PICCOLO  $Bo \ll 1$ , E IL MENISCO AVRÀ FORMA SFERICA



APPLICHIAMO YOUNG-LAPLACE

$$P_A - P_\alpha = \gamma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma 2 \frac{\cos \theta}{R} = P_{atm} - P_L|_h$$

PRESS. LIQ. APPENA SOTTO SUP.

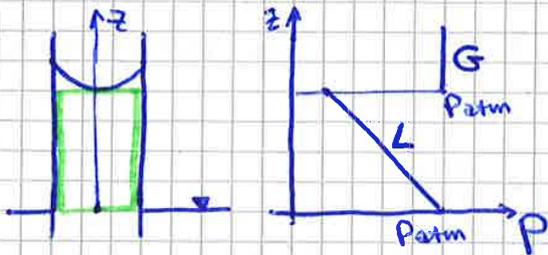
$$P_L|_h = \underset{P_{atm}}{P_L|_0} - \rho_L g h$$

$$\rho g h = 2 \gamma \frac{\cos \theta}{R}$$

$$h = 2 \gamma \frac{\cos \theta}{\rho g R}$$

ABBIAMO OTTENUTO LA STESSA RELAZ. IN MODO ≠

DIAGRAMMA  $p$  LUNGO  $z$



SI CREA DEPRESSIONE CHE TIENE SU IL LIQ.

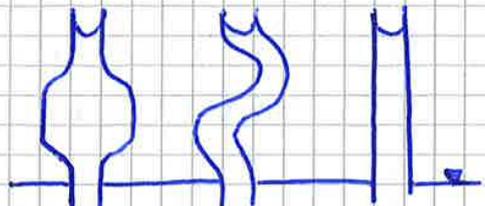
È UN ALTRO MODO X VEDERE LA COSA

C'È UN SALTO DI PRESSIONE

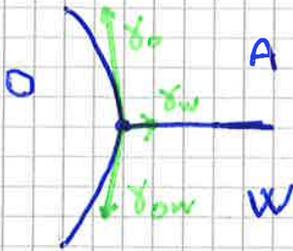
$$\Delta p = f(d) \leftarrow \text{FISSATO IL LIQUIDO / IL MATERIALE}$$

↳ DIAM. CAPILLARE

SE IL TUBICINO HA FORMA ≠ (SEZIONE NON UNIFORME) NON HA IMPORTANZA



X IL BENZENE NON FUNZIONA (TOLUENE SÌ)

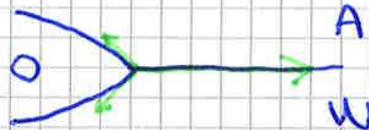


GOCCIA MOLTO PANCIUTA  
SE  $\gamma_o, \gamma_{ow} \gg \gamma_w$   
(X BILANCIAM. FORZE)

SE AL CONTRARIO  $\gamma_w \gg \gamma_o, \gamma_{ow}$



MA SE  $\gamma_w > \gamma_o + \gamma_{ow}$  E' IMPOSSIBILE AVERE  
EQUILIBRIO MECCANICO



LA GOCCIA SI ESPANDE ALL' INFINITO FINO A  
RICOPRIRE SUP. O FINO A FORMARE FILM MONO  
MOLECOLARE

$$S = \gamma_w - \gamma_o - \gamma_{ow}$$

COEFFICIENTE DI SPANDIMENTO

SE  $S > 0$  SI SPANDE INFINITAMENTE  $\rightarrow$  TENSIOATTIVI

SE  $S < 0$  RAGGIUNGE EQUIL. GOCCIA

CASO STRANO: BENZENE-ACQUA

SUBITO SI ESPANDE FINO A OCCUPARE TUTTA LA  
SUP. X UN TOT DI TEMPO, POI TORNA INDIETRO

$$\gamma_w = 72,8 \text{ mN/m}$$

$$\gamma_B = 28,9 \text{ mN/m}$$

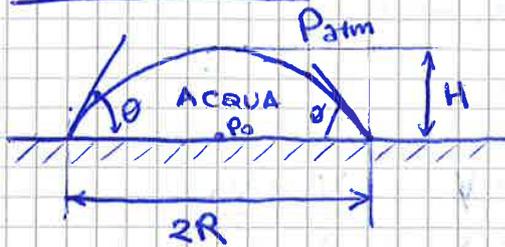
$$\gamma_{BW} = 35,0 \text{ mN/m}$$

$$S = +8,9 \text{ mN/m}$$

$\hookrightarrow$  SI SPANDE

# ESERCITAZIONE 1

## ESERCIZIO 1



$$\gamma = 0,070 \text{ N/m}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

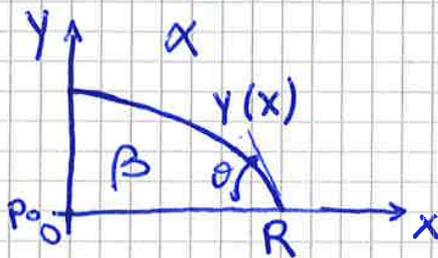
$$R = 0,25 \text{ cm}$$

$$\theta = 26,57^\circ$$

$$H = ?$$

$$P_0 - P_{atm} = ? [\approx 30 \text{ Pa}]$$

$$B_0 = \frac{\Delta \rho_0 g \text{ DIAM}^2}{\gamma} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (0,50 \cdot 10^{-2})^2}{0,07} = 3,5$$



$$P_\beta - P_\alpha = \gamma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$P_\beta - P_\alpha = \gamma \left\{ -\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} - \frac{y'}{x[1+(y')^2]^{1/2}} \right\}$$

$$P_\beta = P_0 - \rho_0 g y \quad \leftarrow \text{STEVINO}$$

↑  
INCOGNITA

$$P_\beta - P_\alpha = \underbrace{(P_0 - P_{atm})}_{\Delta P_0} - \rho_0 g y$$

$$\Delta P_0 - \rho_0 g y = \gamma \left\{ -\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} - \frac{y'}{x[1+(y')^2]^{1/2}} \right\}$$

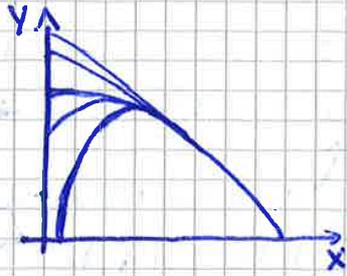
3 INCOGNITE: 3 CONDIZ. CONTORNO

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

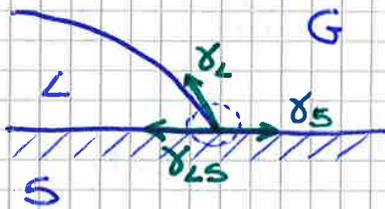
$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=R} = -\text{TAN} \theta$$

$$y \Big|_{x=R} = 0$$

C'E' UN PROBL: ABBIAMO IPOTIZZATO  $\Delta p_0$



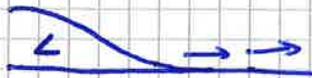
BISOGNA CAMBIARE  $\Delta p_0$   
A TENTATIVI FINO AD  
AVERE  $\approx y'|_{x=0} = 0$



$$\cos \theta = \frac{\gamma_S - \gamma_{SL}}{\gamma_L}$$

DIVERSI CASI DI  $\theta$ :

$\theta = 0$



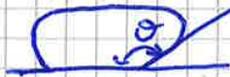
BAGNATURA COMPLETA

\*  $\gamma_S > \gamma_{SL}$   
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$



LIQUIDO BAGNA IL SOL.  
BAGNATURA PARZIALE

\*  $\gamma_S < \gamma_{SL}$   
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$



ASSENZA BAGNATURA  
 $150^\circ \times Hg$   
 $180^\circ \times$  CASI PARTIC.

EQUAZ. YOUNG VALE IN CONDIZ. DI EQUILIBRIO TD

LA TENS. SUP. DI UN LIQ. DIPENDE SOLO DAL LIQ.  
E NON DA  $v/g$

X SOLIDO NON E' COSI'

$$\frac{v(s)}{s}$$

$\gamma_{s0}$  DEL SOLIDO IN EQUILIBRIO CON  
IL SUO VAP. E QUINDI CON L'ARIA

UNA GOCCIA È CARATTERIZZATA COMPLETAM. DA A

$$dG(A_{SL}, A_{GL}, A_{SG}) = \frac{\partial G}{\partial A_{SL}} dA_{SL} + \frac{\partial G}{\partial A_{SG}} dA_{SG} + \frac{\partial G}{\partial A_{LG}} dA_{LG}$$

$$\frac{dG}{da} = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial A_{SL}} \frac{dA_{SL}}{da}}_{\gamma_{SL}} + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial A_{SG}} \frac{dA_{SG}}{da}}_{\gamma_S} + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial A_{LG}} \frac{dA_{LG}}{da}}_{\gamma_L}$$

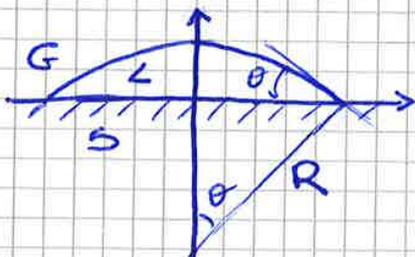
- $A_{SL} = \pi a^2 \Rightarrow \frac{dA_{SL}}{da} = 2\pi a$
  - $A_{SL} = A_{TOT} - \pi a^2 \Rightarrow \frac{dA_{SG}}{da} = -2\pi a$
  - $A_{LG} = \pi(a^2 + R^2) \Rightarrow \frac{dA_{LG}}{da} = 2\pi a + 2\pi R \frac{dR}{da} = 2\pi \left( a + R \frac{dR}{da} \right)$
- $$\frac{d(R^2)}{da} = \frac{dR^2}{dR} \cdot \frac{dR}{da} = 2R \frac{dR}{da}$$

$$V = \frac{\pi}{6} R (3a^2 + R^2)$$

$$dV = 0 \rightarrow \frac{dV}{da} = 0 = \frac{\partial V}{\partial a} \frac{da}{da} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{dR}{da}$$

$$\frac{\pi}{6} R 6a \quad \frac{\pi}{6} (3a^2 + 3R^2) \frac{dR}{da}$$

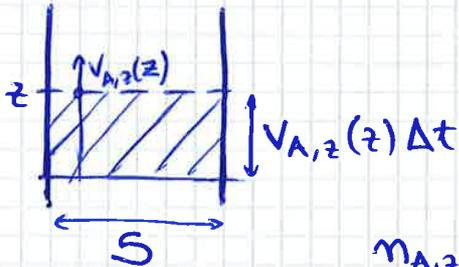
$$\frac{-6\pi a}{3a^2 + 3R^2} = \frac{dR}{da} \rightarrow \frac{dR}{da} = -\frac{2aR}{a^2 + R^2}$$



$$R^2 = a^2 + (R-h)^2 \leftarrow \text{PITAGORA}$$

$$R = \frac{a^2 + R^2}{2h}$$

$V_{A,z}(z)$  = VELOCITA' DEL COMP. A IN DIRE Z A UNA CERTA ALTEZZA z



LE MOLECOLE CHE PASSANO IN UN CERTO  $\Delta t$  SONO PARI A QUELLE CONTENUTE NELLA ZONA SEGNA TA:

$$n_{A,z}(z) = \underbrace{S V_{A,z}(z) \Delta t}_{\text{VOLUME}} \cdot \underbrace{C_A(z)}_{\text{MOLE/VOLUME}}$$

$$\dot{n}_{A,z}(z) = \frac{n_{A,z}(z)}{\Delta t}$$

$$\dot{n}_{A,z}(z) = C_A(z) \cdot V_{A,z}(z) \cdot S$$

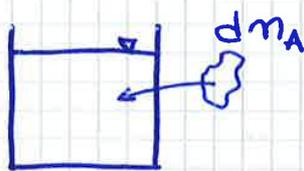
$$J_{A,z} = C_A(z) V_{A,z}(z)$$

$$J_{A,z} = \begin{cases} -D_A \frac{dC_A(z)}{dz} \\ C_A(z) V_{A,z}(z) \end{cases}$$

LA VERA FORMA MOTTRICE NON E' IL GRADIENTE DI CONCENTRAZ, MA IL GRADIENTE DI POTENZIALE CHIMICO ( $\mu$ )

E' UNA SORTA DI ENERGIA POTENZIALE MOLARE

T, p COST.  $\rightarrow dG = \sum_i \mu_i dn_i$



$$dG = \mu_A dn_A$$

$d\mathcal{L}_{REV} \rightarrow$  LAVORO REVERSIBILE DA FARE X PORTARE  $dn_A$  DENTRO IL SISTEMA

$$d\mathcal{L}_{REV} = \mu_A dn_A \leftarrow \text{X POTENZIALE CHIMICO}$$

$$d\mathcal{L}_{REV} = \phi dq \leftarrow \text{X POTENZIALE ELETTRICO}$$

$$d\vec{F}_c = (-\vec{\nabla} \mu_A) dn_A \leftarrow \text{X ANALOGIA} \quad \vec{\nabla} \mu_i = \frac{\text{FORZA}}{\text{MOLI}}$$

( =

PER UN SIST. ISOTERMO, ISOBARO, IDEALE

$$\mu_A = \mu_{A0}(T) + RT \ln C_A(z)$$

NO COEFF. ATTIVITA'

$$\frac{d\mu_A}{dz} = \frac{d\mu_A}{dC_A} \frac{dC_A}{dz} = \frac{RT}{C_A} \frac{dC_A}{dz}$$

 $\mu_{A,0}(T)$  NON  
DA' CONTRIBUTO

$$-\frac{R}{N_{AV}} \frac{T}{C_A(z)} \frac{dC_A(z)}{dz} = 6\pi\eta a v_{A,z}(z)$$

"  $k_b$

( =

$$C_A(z) v_{A,z}(z) = -\frac{k_b T}{6\pi\eta a} \frac{dC_A(z)}{dz}$$

$$\text{MA SAPPIAMO CHE: } J_{A,z} = C_A(z) v_{A,z}(z) = -D_A \frac{dC_A(z)}{dz}$$

QUINDI OTTENIAMO:

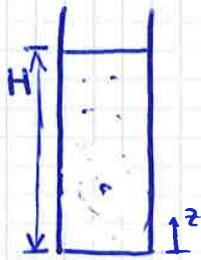
$$D_A = \frac{k_b T}{6\pi\eta a} \quad \text{STOKES-EINSTEIN}$$

VA BENE X MOLECOLE GROSSEVALE SPESSE X COLLOIDI, CHE SEGUONO UN MOTO  
BROWNIANO (NON C'E' AGITAZ. TERMICA CHE VALE  
X PARTICELLE PICCOLE)SE PARTICELLE SONO CARICHE ELETTRICAMENTE  
(IONE AD ESEMPIO) SONO SENSIBILI A' UN CAMPO  
ELETTRICO

$$E_z = -\frac{d\psi}{dz}$$

$$\text{FORZA CHIMICA} \quad -\frac{1}{N_{AV}} \frac{d\mu_A}{dz} = \frac{-k_b T}{C_A} \frac{dC_A}{dz}$$

## ESERCIZIO



POLISTIRENE  $\rho_s = 1,05 \text{ g/cm}^3$

ACQUA  $\rho_c = 1,00 \text{ "}$

$H = 1 \text{ m}$   $n_{ini} = 10^8 \frac{\text{PART.}}{\text{CM}^3}$   $T = 298 \text{ K}$

$n(z)$  IN CONDIZ. STAZIONARIE?

(DISTRIBUIZ. NON UNIFORME A CAUSA DI  $\neq \rho$ , MA  $D$  IN PARTE UNIFORMA)

$$\frac{n|_{z=H}}{n|_{z=0}} = ?$$

$$d_p = 10/30/50 \text{ mm}$$

$$n = N_{AV} C_p$$

1)  ~~$d_p = 10 \text{ mm}$~~

$$F_c = -\frac{1}{N_{AV}} \frac{d\mu_p}{dz} = -\frac{k_B T}{N_{AV} C_p} \frac{dC_p N_{AV}}{dz} = -\frac{k_B T}{n} \frac{dn}{dz}$$

$$F_v = -6\pi\eta a v_{p,z} = 0$$

$\emptyset$  IN CONDIZ. STAZIONARIE

$$F_g = -\frac{\pi}{6} d_p^3 \rho_s g$$

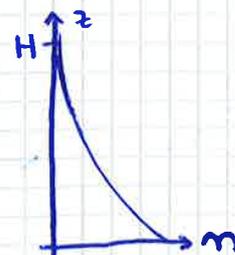
$$F_a = +\frac{\pi}{6} d_p^3 \rho_c g$$

$$-\frac{k_B T}{n} \frac{dn}{dz} = \frac{\pi}{6} d_p^3 (\rho_s - \rho_c) g$$

$$-\int_{n_0}^{n(z)} \frac{k_B T}{n} dn = \frac{\pi}{6} d_p^3 (\rho_s - \rho_c) g \int_0^z dz$$

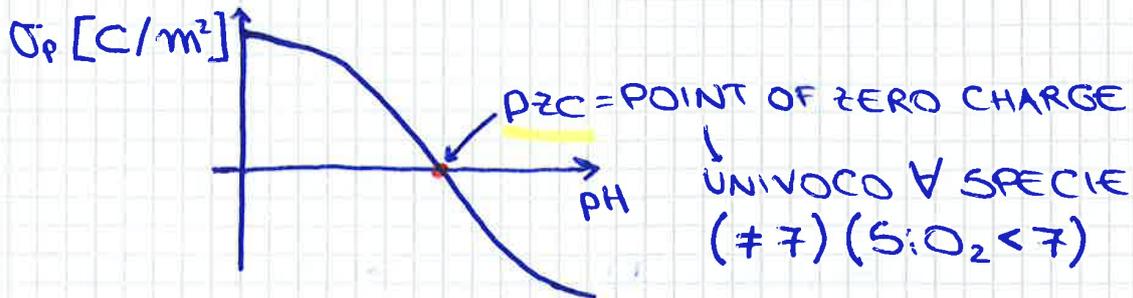
$$-k_B T \ln \frac{n(z)}{n(0)} = \frac{\pi}{6} d_p^3 \Delta\rho g z$$

$$n(z) = n(0) \exp\left\{-\frac{\pi d_p^3 \Delta\rho g z}{6 k_B T}\right\}$$



$$n(H) / n(0) = 0,000410 \quad d_p = 50 \text{ mm}$$

SE HO SOSPENSIONE AD ESEMPIO DI SILICE IN ACQUA VARIANDO IL PH VARIA LA CARICA SUP.  
( $\sigma_p$  = DENSITA' SUPERFIC.)



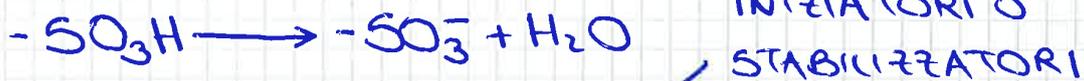
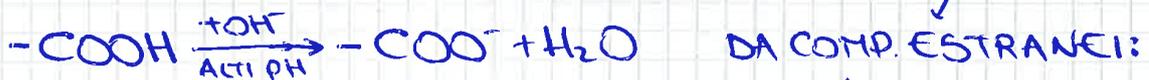
$H^+, OH^- = pdi$  = IONI CHE CONTROLLANO IL POTENZIALE  
POTENTIAL DETERMINING IONS

A NOI SPRESSO INTERESSA SOLO PZC, DETERMINABILE VEDENDO A QUALE PH LA CARICA E' FERMA

PUNTO ISOELETTRICO → SPRESSO COINCIDE CON PZC

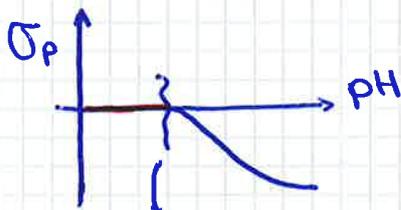
\* LATTICE = SOSPENSIONE ACQUOSA DI POLIMERO

HANNO CARICHE SUP. X PRESENZA DI GRUPPI



UN GRUPPO OGNI 100 Å<sup>2</sup>  
(SONO POCCHI)

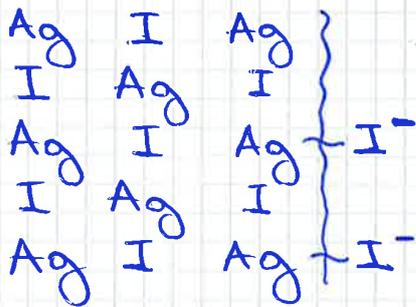
∃ ANCHE POLIMERI CREATI APROPOSITAMENTE



NON C'E' UN PUNTO SINGOLO, NETTO DI PZC

DIPENDE DA COME E' STATO COSTRUITO/PRODOTTO

SOLIDO (IODURO DI ARGENTO)



SOLUZIONE ACQUOSA  
CON ECCESSO DI IODIO

$$K_{ps} = [\text{Ag}^+][\text{I}^-] = 10^{-16} \left( \frac{\text{mol}}{\text{e}} \right)^2$$

↑ INSOLUBILE

CONC. DISCIOLTE IN ACQUA

$$[\text{I}^-] = 10^{-3} \text{ M}$$

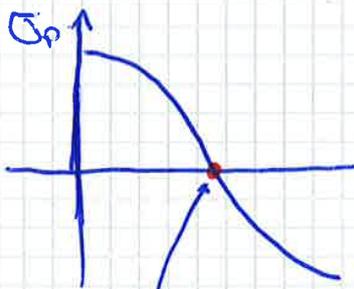
$p\text{I} = 3$  IN SOLUZIONE

$$p\text{Ag} = 13 \quad pK_{ps} = p\text{I} + p\text{Ag} = 16$$

GLI IONI IODIO IN SOLUZ. SI INCORPORANO SUL RETICOLO DOVE C'E' Ag E NON ESSENDO BILANCIATI LASCIANO CARICA NEGATIVA IN SUP.

SE IN SOLUZ.  $[\text{Ag}^+] = 10^{-3}$  (NITRATO DI ARGENTO)  
↳ ECCESSO DI IONI ARGENTO →  $\text{Ag}^+$  IN ECCESSO  
SOLIDO CARICO POSITIVAM. SUL RETICOLO

MODULO LA CARICA SUP. LAVORANDO SULLA CONCENTRAZIONE DI IONI IN SOLUZIONE



$$pzc = 5,6 \times \text{Ag}$$

NON HO BILANCIAMENTO  
TRA  $[\text{I}^-]$  E  $[\text{Ag}^+]$ , MA ECCESSO  $[\text{Ag}^+]$

LA CARICA NON E' DETERMINATA DAL PH, MA DALLE CONC. DELLO IONE CHE COSTITUISCE IL RETICOLO

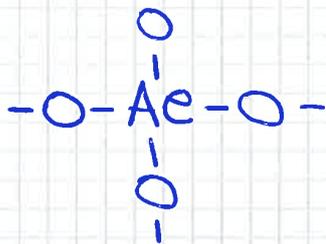
↳ DETERMINANO IL POTENZIALE

### a) INTRAPPOLAMENTO DI CARICA

#### SOSTITUZIONE ISOMORFA (ARGILLE)

ATOMI DI SILICIO ALL'INTERNO SOSTITUITI  
CON ALLUMINIO

↓  
CARICHE ⊖



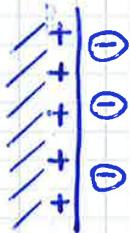
O ALLUMINIO SOSTITUITO DA Mg



→ CARICHE INTERNE X DIFETTI

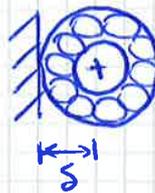
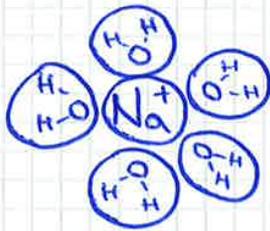
### SOLIDO IN ACQUA

↓  
SPONTANEAMENTE SI CREA UNA CARICA ELETTRICA



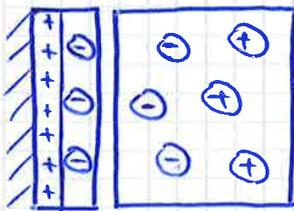
LA CARICA PUÒ ESSERE ASSOCIATA  
AL SOLIDO O DERIVA DALL'ADSOR-  
BIMENTO DI COMPONENTI AFFINI

↓  
SUPERFICIE COMPRESSIVAMENTE ⊕



$s$  = DISTANZA DI UNO IONE SOLVATATO

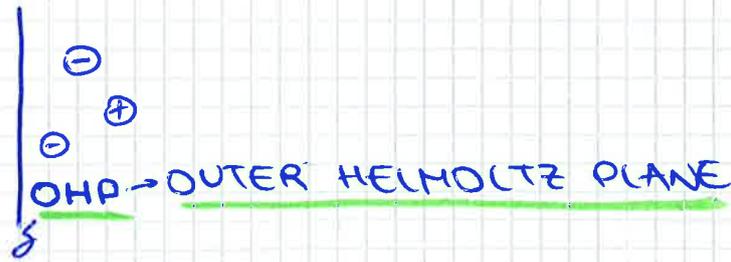
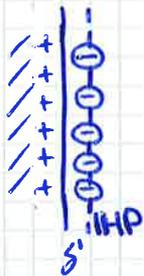
GLI IONI NON POSSONO AVVICINARSI ALLA SUPERF. + DI UNA DISTANZA  $s$



DDOPPIO STRATO ELETTRICO

ZONA DI CONTROCARICA NEL LIQUIDO  $\rightarrow 2 \div 200$  mm

ZONA DI CARICA  $0,1 \div 0,2$  mm  
STRATO DI CARICA NEL SOLIDO



OHP  $\rightarrow$  OUTER HELMHOLTZ PLANE

NON POSSO DISTINGUERE LA CARICA INTRINSECA DEL SOLIDO E QUELLA ADSORBITA.  
NEL LIQ. LA CONTROCARICA INIZIA DA DISTANZA  $s$  (OHP)

$\Delta\chi = \Delta\psi - \Delta\psi$

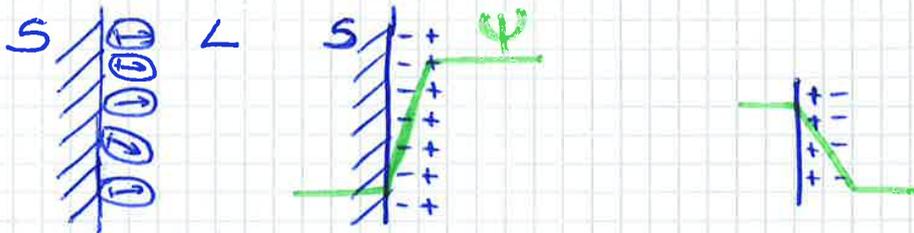
INACCESSIBILE

DOVUTO A FENOMENI DI POLARIZZAZIONE

(SULL'ORDINE DEL SINGOLO ATOMO)



$\Delta\chi \approx 0,2 \div 0,3 \text{ VOLT}$



MOLECOLA D'ACQUA NON ORIENTATE IN MODO CASUALE

MOMENTO DIPOLORE PREVALENTE

$\Delta\chi$  MAGGIORI SI HANNO CON IMETALLI



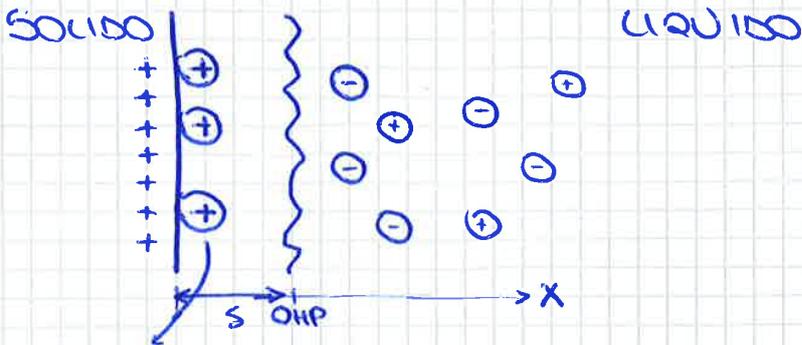
IONI IN SUPERFICIE SONO CIRCONDATI DA UNA NUVOLA DI  $e^-$

DIPOLO

POLARIZZAZIONE → SALTO POTENZIALE ELETTRICO

→ SI RAGIONE CONSIDERANDO SOLO IL LATO LIQUIDO

NEL SOLIDO GRANDEZZE NON MISURABILI



ADSORBITI CHIMICAMENTE, DRENDE DA LEG. CHIMICO,  
NON DALLA CARICA ELETTROSTATICA

1) POISSON  $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\rho_q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$

$$\rho_q = -\sum_i z_i z_i F C_i$$

$$F_c = -\frac{1}{N_{AV}} \frac{d\mu}{dx} \quad F_v = -6\pi\eta a v_{x,i}$$

$$F_e = qE = z_i e \left( -\frac{d\psi}{dx} \right) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\psi$$

X GOUY-CHAPMANN EQUILIBRIO TD  $\begin{cases} F_v = 0 \\ F_c + F_e = 0 \end{cases}$

$$-\frac{1}{N_{AV}} \frac{d\mu_i}{dx} - N_{AV} z_i e \frac{d\psi}{dx} = 0$$

$$N_{AV} \cdot e = 1 F$$

$$-\frac{dz}{dx} (\mu_i + z_i F \psi) = 0$$

COST. RISPETTO A X

$$\mu_i + z_i F \psi = \text{COST}$$

$$\mu_i^\circ + RT \ln C_i \Rightarrow RT \ln C_i + z_i F \psi = \text{COST}'$$

$$C_i = \frac{\text{COST}'}{RT} - \frac{z_i F}{RT} \psi$$

COST''

$$2) C_i = e^{\text{COST}''} e^{-\frac{z_i F}{RT} \psi} \Rightarrow C_i = K \exp\left\{-\frac{z_i F}{RT} \psi\right\}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = + \frac{F^2}{\epsilon_0 \epsilon_r RT} \left( \sum_i z_i^2 C_{b,i} \right) \psi$$

FORZA IONICA  $\rightarrow I = \frac{1}{2} \sum_i z_i^2 C_{b,i}$   
 (PER ELETTROLITA MONOVALENTE  $I = C_b$ )

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2 F^2 I}{\epsilon_0 \epsilon_r RT} \psi$$

SEMPRE  $> 0$ , LO CHIAMO  $K^2$  (K GRECA)

$1/K =$  LUNGHEZZA DI DEBYE

$$K = \sqrt{\frac{2 F^2 I}{\epsilon_0 \epsilon_r RT}}$$

CI DICE UN ORDINE DI  
 GRANDEZZA NELLO STRATO  
 INTERESSATO DA FEN. ELETTRICI

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = K^2 \psi \quad \text{EQUAZ. DIFF. 2° ORDINE}$$

2 CONDIZ. AL CONTORNO  $\begin{cases} \psi|_{x \rightarrow \infty} = 0 \\ \psi|_{x=0} = \psi_0 \text{ - ACCESSIBILE (SPERIM)} \end{cases}$

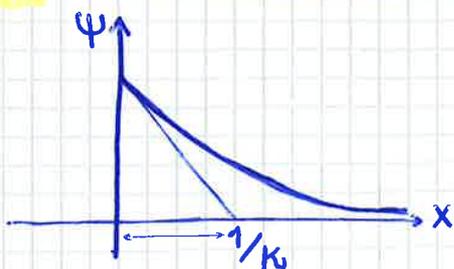
$$\lambda^2 = K^2 \rightarrow \lambda = \pm K$$

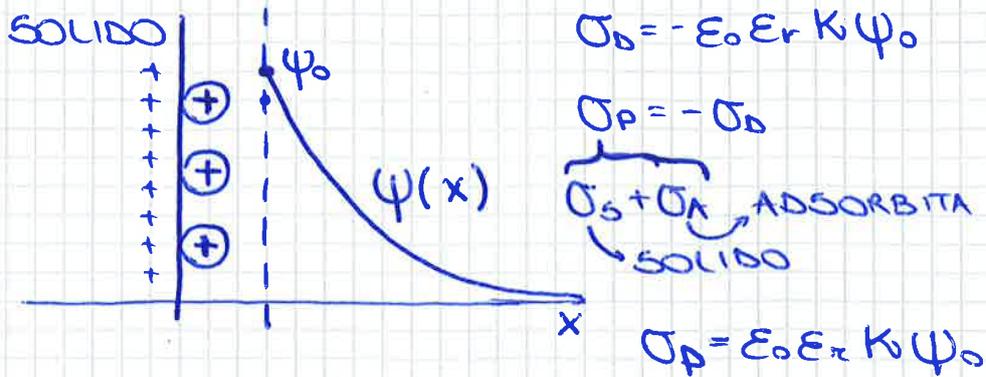
$$\psi(x) = A_1 e^{+Kx} + A_2 e^{-Kx}$$

$$x \rightarrow \infty \quad 0 = A_1 e^{+Kx} \Rightarrow A_1 = 0$$

$$x \rightarrow 0 \quad \psi_0 = A_2 e^{-Kx} \Rightarrow A_2 = \psi_0$$

$$\psi(x) = \psi_0 e^{-Kx}$$





ESERCIZIO

CALCOLARE LUNGH. DI DEBYE X UNA SOLUZ. DI NaCl  
 $10^{-3} M$  A  $25^\circ C$

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} C/\sqrt{m}$       $\epsilon_r \approx 80$

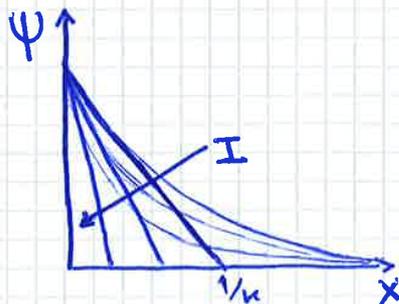
$$K^2 = \frac{2F^2 I^z}{\epsilon_0 \epsilon_r RT} = 1,06 \cdot 10^{15} \rightarrow K = 1,03 \cdot 10^8 m^{-1}$$

$$\frac{1}{K} = 0,97 \cdot 10^{-8} m^{-1} = 9,7 nm$$

$$I = C_{Na^+} = 10^{-3} \frac{mol}{e} = 1 \frac{mol}{m^3}$$

$K$  DIPENDE POCO DA  $T$ , MA X CAMBIARE LE PROP. DEL COLLOIDE POSSO GIOCARE SULLA FORZA IONICA

$$\frac{1}{K} \sim I^{-1/2}$$



SE VOGLIO CONFINARE GLI EFFETTI A UN PICCOLO STRATO DEVO AVERE  $I$  GRANDE

$I = 10^{-4} M$	$1/K = 30 nm$
$10^{-3}$	$10$
$10^{-2}$	$3$
$10^{-1}$	$1$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{z C_b F}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{e^{\frac{zF}{RT}\psi} - e^{-\frac{zF}{RT}\psi}}{2} \right) \cdot 2$$

$$\text{Sinh}\left(\frac{zF}{RT}\psi\right)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2zFC_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \text{Sinh}\left(\frac{zF}{RT}\psi\right)$$

$$\psi|_{x=0} = \psi_0$$

$$\psi|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

$$2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2zFC_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \text{Sinh}\left(\frac{zF}{RT}\psi\right) 2 \frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{d(R^2)}{dx} = \frac{d(R^2)}{dR} \frac{dR}{dx} = 2 f(x) \frac{dR(x)}{dx} \quad f(x) = \frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right] = 2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\int \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right] dx = \int \frac{4zFC_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \text{Sinh}\left(\frac{zF}{RT}\psi\right) \frac{d\psi}{dx} dx$$

$$\left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 = \int \frac{4zFC_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{RT}{zF} \text{Sinh}\left(\frac{zF}{RT}\psi\right) d\left(\frac{\psi zF}{RT}\right)$$

$$= \frac{4RT C_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left( \text{Sinh}(\alpha) \right) d\alpha$$

$$\left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 = \frac{4RT C_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \text{COSH}\left(\frac{zF}{RT}\psi\right) + \text{COST}$$

$x \rightarrow \infty \quad \psi \rightarrow 0$ , MA ANCHE  $\frac{d\psi}{dx} \rightarrow 0$



$$0 = \frac{4RT C_b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot 1 + \text{COST} \Rightarrow \text{COST} = - \frac{4RT C_b}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{zF}{2RT} \frac{K}{\psi} \sin^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right)$$

$$\frac{d\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right)}{\sin^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right)} = -K dx \quad \left(\frac{dx}{\sin^2(x)} = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\ln\left[\tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right)\right] = -Kx + \text{cost}$$

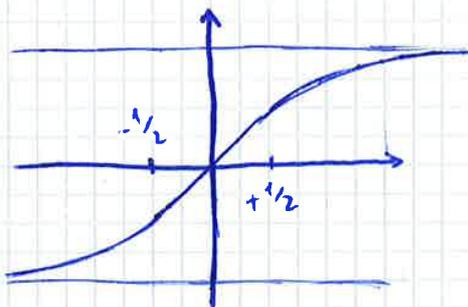
$$x=0 \Rightarrow \psi = \psi_0 \quad \ln\left[\tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi_0\right)\right] = \text{cost}$$

$$\ln \frac{\tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right)}{\tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi_0\right)} = -Kx$$

$$\tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right) = \tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi_0\right) e^{-Kx}$$

SIMILE A EQUAZ. DI DEBYE:  $\psi = \psi_0 e^{-Kx}$

DEBYE VALE QUANDO:  $\tan^2\left(\frac{zF}{2RT} \psi\right) = \frac{zF}{2RT} \psi$



QUANDO ABBIAMO:

$$\left|\frac{zF}{2RT} \psi\right| < \frac{1}{2}$$

DEBYE VALIDA SE

$$\frac{zF}{RT} \psi_0 < 2$$

SENNO' DEVO USARE SOLUZ. COMPLETA, SE  
ELETTROLITA SIMMETRICA USO EQUAZ. CON TAN<sup>2</sup>,  
SENNO' SOLUZIONE NUMERICA

$$K = 1,03 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \leftarrow \text{VEDI ES. PRECEDENTE}$$

$$\sigma_D = -K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_0 = -1,46 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_S = -\sigma_D = +1,46 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2$$

$$n_{\text{Ag}^+} = \frac{\text{IONI Ag}^+}{\text{m}^2} \quad n_{\text{I}^-} = \frac{\text{IONI I}^-}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_0 = n_{\text{Ag}^+} e + n_{\text{I}^-} (-e) = (n_{\text{Ag}^+} - n_{\text{I}^-}) e = \Delta n_{\text{Ag}^+} e$$

SI HA CARICA SUP. SE C'È UN ECCESSO DI UNO DEI 2

$$\Delta n_{\text{Ag}^+} = \sigma_S / e = \frac{\sigma_S}{(F/N_{\text{av}})} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{96500 / 6,02 \cdot 10^{23}}$$

$$\Delta n_{\text{Ag}^+} = 9,11 \cdot 10^5 \frac{\text{IONI}}{\text{m}^2} \left( \frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}} \right)^2 = 9,11 \cdot 10^{-3} \frac{\text{IONI}}{\text{mm}^2}$$

SAPPIAMO CHE:

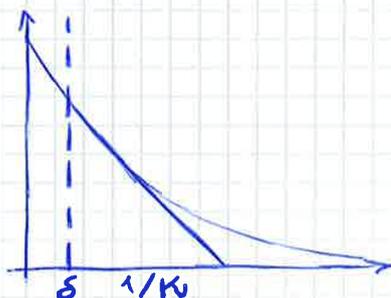
$$n_{\text{Ag}^+}^{\text{pcz}} = 2,5 \frac{\text{IONI}}{\text{mm}^2}$$

$$\Delta n_{\text{Ag}^+} = 0,009 \Rightarrow \rightarrow \text{VARIANZA DE 0,4 \%}$$

C'È UNA VARIAZIONE MINIMA X LE SPECIE IONICHE,  
QUINDI LE PROP. IN PRATICA NON CAMBIANO

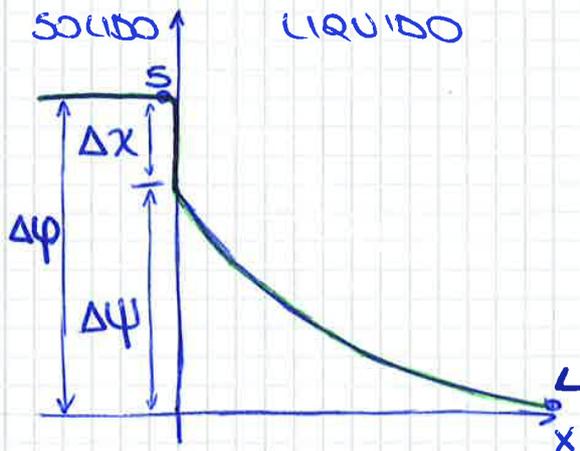
X GLI OSSIDI Me O I POLIMERI LA VARIAZIONE  
INVECE È IMPORTANTE

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = 0,1 \frac{\text{SITI}}{\text{mm}^2}$$



$\delta$  È LA DIMENSIONE DI UNA  
MOLECOLA SOLVATATA  
(STRATO DI STERN)

$1/K$  = LUNGHEZZA DI DEBYE



$$\tilde{\mu}_{Ag^+}^S = \tilde{\mu}_{Ag^+}^L$$

$$\tilde{\mu}_{Ag^+}^L = \underbrace{\mu_{Ag^+}^{o,L} + RT \ln C_{Ag^+}^L}_{\text{CHIMICO}} + \underbrace{z_{Ag^+} F \psi_L}_{\text{ELETTRICO}} = 0$$

$$\tilde{\mu}_{Ag^+}^S = \mu_{Ag^+}^{o,S} + RT \ln \eta_{Ag^+}^S + z_{Ag^+} F (\psi_P + \Delta \chi)$$

$$\mu_{Ag^+}^{o,L} + RT \ln C_{Ag^+}^L = \mu_{Ag^+}^{o,S} + RT \ln \eta_{Ag^+}^S + z_{Ag^+} F (\psi_P + \Delta \chi)$$

$$\psi_P \neq 0 \rightarrow$$

AL PUNTO PCZ ABBIAMO INVECE CHE  $C_{Ag^+}^L = C_{Ag^+}^{PCZ}$



IN PCZ:  $\psi_P = 0$

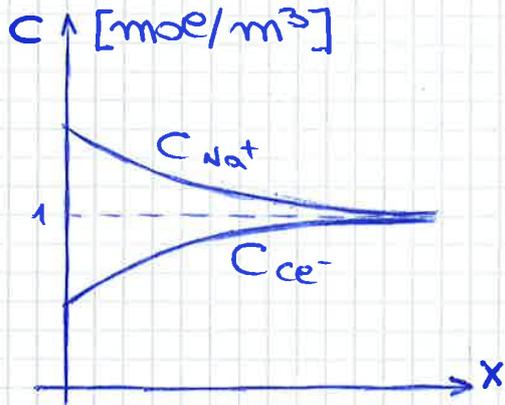
$$\mu_{Ag^+}^{o,L} + RT \ln C_{Ag^+}^{L,PCZ} = \mu_{Ag^+}^{o,S} + RT \ln \eta_{Ag^+}^{S,PCZ} + z_{Ag^+} F \Delta \chi$$

FACENDO LA DIFFERENZA TRA LE 2 EQUAZ.

$$RT \ln \frac{C_{Ag^+}^L}{C_{Ag^+}^{L,PCZ}} = RT \ln \frac{\eta_{Ag^+}^S}{\eta_{Ag^+}^{S,PCZ}} + z_{Ag^+} F \psi_P$$

VEDI ES - X IONI  $\approx 0$

$\Delta \chi$  E' COST E' SEMPLIFIC.



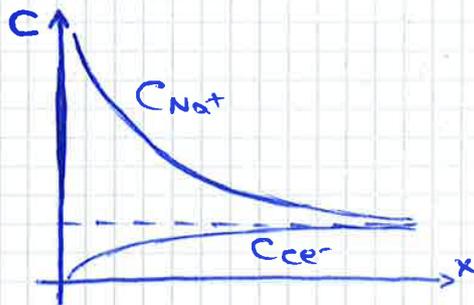
Na<sup>+</sup> DIMINUISCE  
 Ce<sup>-</sup> AUMENTA  
 ↓  
 CONTRIBUISCONO ENTRAMBI  
 A FAR TENDERE  $\psi \rightarrow 0$

$$\tanh\left(\frac{zF}{4RT}\psi\right) = \tanh\left(\frac{zF}{4RT}\psi_0\right)e^{-kx}$$

DA USARE SE NON È VALIDA L'APPROSSIMAZ.  
 DI DEBYE

ES:  $\psi_p = -100 \text{ mV}$

	$x=0$	$x=1/k$
$\psi/\psi_p$	1	0,292
$C_{Na^+}$	09,15 $\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$	
$C_{Ce^-}$	0,0020 =	



CONTA SOLO  $C_{Na^+}$ , OVVERO  
 CONTA SOLO LA CONTRAZIONE,  
 QUELLO CON CARICA OPPOSTA  
 ALLA CARICA DELLA SUPERF.

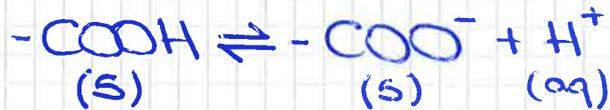
QUINDI POSSO USARE ELETTROLITI SIMMETRICI  
 ANCHE SE NON LI HO: L'EFFETTO =

~~Na<sup>+</sup> Cl<sup>-</sup>~~  
~~Na<sup>+</sup> Cl<sup>-</sup>~~

SOLIDI IONICI:

$$\psi_p = \frac{RT}{ZF} c_m \frac{C_{pdi}}{C_{pzc}} \frac{C_{pdi}}{C_{pdi}}$$

CASO DEI POLIMERI:



CASO GENERALE:



SOLIDO



SOLUZIONE



-A<sup>-</sup>, -AH SONO SULLA SUP, QUINDI USO CONC. SUP  $\Gamma_{A^-}, \Gamma_{AH}$   
 H<sup>+</sup> DISCIOLTO, USO CONC. VOLUMICA  $C_{H^+}$

$$K_a = \frac{\Gamma_{A^-} C_{H^+}}{\Gamma_{AH}}$$

$$\Gamma_{TOT} = \Gamma_{AH} + \Gamma_{A^-} = \text{COST} \rightarrow \text{GRUPPI CHE POTENZIALM. POSSONO DISSOCIARE}$$

$$C_{H^+} = C_{H^+,b} \cdot e^{-\frac{ZF}{RT} \psi}$$

(H<sup>+</sup> LI POSSO SOLO MISURARE NEL BULK)

$$\sigma_p = -\Gamma_{A^-} \cdot F$$

CARICA SUP. DIPENDE DA  $\Gamma_{A^-}$

$$\sigma_p = K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p$$

SECONDO APPROX DEBYE  
 ↓  
 SENZO HO UNA RELAZIONE + COMPLESSA X IONI SIMMETRICI

$$\frac{\Gamma_{A^-}}{\Gamma_{AH}} = \frac{\Gamma_{A^-}}{\Gamma_{TOT} - \Gamma_{A^-}}$$

$$\Gamma_{A^-} = - \frac{K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p}{F} \quad \leftarrow \sigma_p = \Gamma_{A^-} F = K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p$$

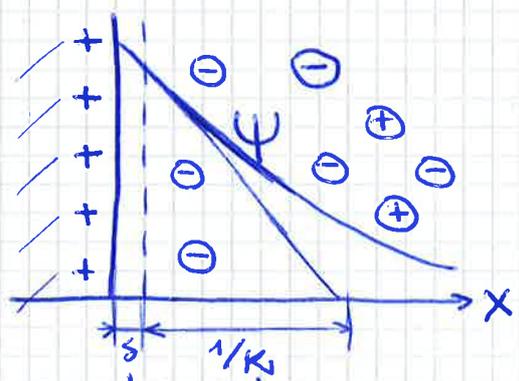
$$\frac{\Gamma_{A^-}}{\Gamma_{AH}} = \frac{-K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p / F}{\Gamma_{TOT} + K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p / F}$$

$$\psi_p = \frac{RT}{F} \ln \left( - \frac{C_{H^+,b}}{K_a} \cdot \frac{K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p / F}{\Gamma_{TOT} + K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p / F} \right)$$

EQUAZ. IMPLICITA' DA RISOLVERE NUMERICAM.

SOLIDO INFLUENZA  $\Gamma_{TOT}, K_a$   
 SOLUZIONE "  $C_{H^+,b}, K$

### MODELLO DI DOPPIO STRATO ELETTRICO



STRATO DI STERN      LUNGHERZA DI DEBYE

SE  $s \ll 1/K$

$$\psi_p = \frac{RT}{zF} \ln \frac{C_{PdI}}{C_{PdI}^{pzc}}$$

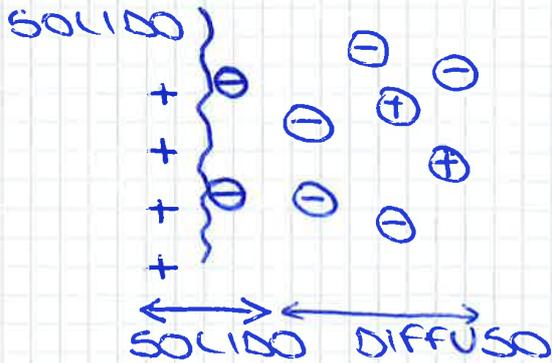
← ESATTA X SOLIDI IONICI  
 APPROSSIMATA X ALTRI SOLIDI, SENNO' CI SONO RELAZIONI + COMPLESSE

$$\psi(x) = \psi_p e^{-Kx}$$

← SE APPROX DEBYE, SENNO' "

## FENOMENI ELETTROKINETICI

FENOMENI DI NON EQUILIBRIO SE UNO STRATO VIENE FATTO MUOVERE RISPETTO AGLI ALTRI



HO ≠ FENOMENI POSSIBILI

	GRANDEZZA APPLICATA	EFFETTO INDOTTO
* <u>ELETTROSMOSI</u>	CAMPO ELETTRICO	MOTO LIQUIDO



TUBICINO (CAPILLARE)

SE INTRODUCO IL TUBICINO IN UN CONDENSATORE

GLI IONI

GLI ⊕ SI MUOVONO VERSO LA

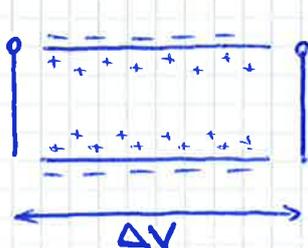
PIASTRA ⊖ E QUESTI TRASCINANO

IL LIQUIDO

SI E' CREATO UN MOTO DEL LIQUIDO

## \* POTENZIALE DI SCORRIMENTO

L'OPPOSTO A ELETTROSMOSI



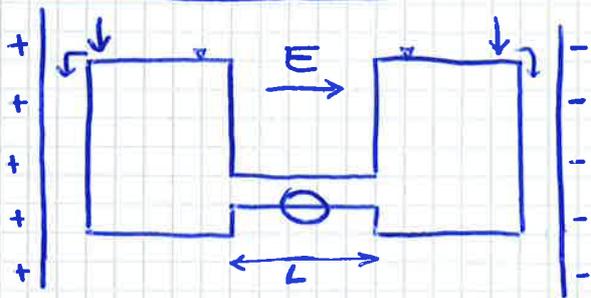
MOVIMENTO

SE POMPO LIQUIDO SI CREA UN POTENZIALE TRA I 2 ESTREMI

APPLICO MOTO → EFFETTO: ΔV

IL MOVIMENTO AVVIENE SOLO X MOLECOLE OLTRE LO STRATO DI SCORRIMENTO

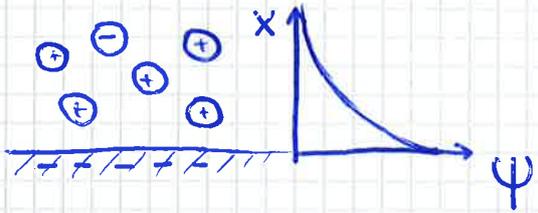
ELETTROSMOSI



BATTENTE TENUTO COSTANTE POICHE' IL LIQUIDO TRACIMA PROFONDITA' P

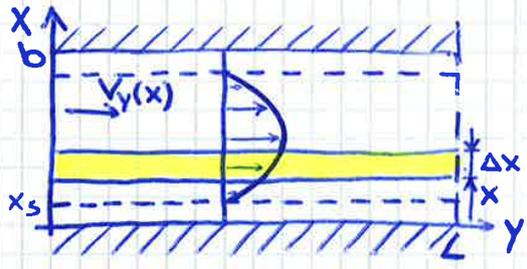
IMMERGIAMO TUTTO IN UN CAMPO ELETTRICO

INGRANDIAMO ZONA CERCHIATA



b · P

TUBICINO E' UN PARALLELEPIPEDO  TRASCURIAMO EFFETTI DI IMBOCCO/SBOCCO



HO UNO STRATO DI SCORRIMENTO SOPRA E SOTTO X<sub>S</sub> = PIANO DI SCORRIMENTO

FACCIO BILANCIO SUL VOLUMETTO DI QDM:

$$\frac{dq}{dt} = \sum_i F_{i,y} + \dot{q}_{e,y} - \dot{q}_{u,y}$$

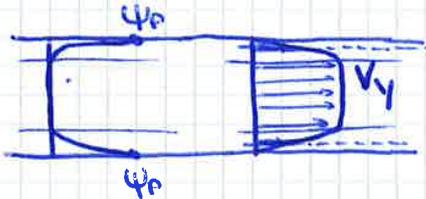
↑ GENERAZ. QDM     ↑ PORTATA ENTRANTE QDM     ↑ PORTATA USCENTE QDM

$$\dot{q}_{e,y} = [\rho V_y(x)] \cdot V_y(x) S_e$$

↑ QUANTITA' DI MOTO X VOLUME DI FLUIDO     ↑ PORTATA VOLUMICA ENTRANTE DI FLUIDO

$$\mu \frac{dv_y}{dx} = \epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_y \frac{d\psi}{dx}$$

LA VELOCITA' DEL FLUIDO VARIA DOVE VARIA  $\psi$

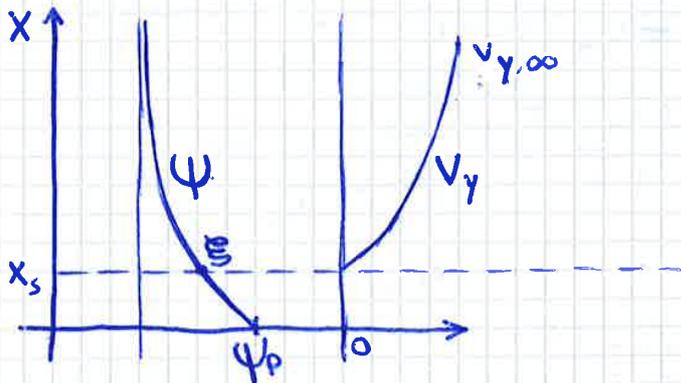


TUBICINO = 1 mm

STRATO CON  $\psi \neq 0$  DI QUACHE mm

QUINDI VARIA? MOLTO ALTA DI  $\psi$  ALLA PARETE E POI SEMPRE = 0

VEDO UN FLUSSO A PISTONE DEL FLUIDO



$$\mu \int_{x_s}^{x_{\infty}} \frac{dv_y}{dx} dx = \epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_y \int_{x_s}^{x_{\infty}} \frac{d\psi}{dx} dx$$

$$\mu [v_y(x_{\infty}) - v_y(x_s)] = \epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_y [\psi(x_{\infty}) - \psi(x_s)]$$

$$v_{y,\infty} = - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_y \xi}{\mu}$$

$$\epsilon_y = 1V/\mu\text{m} \Rightarrow v_y \approx 5 \text{ cm}/\Lambda$$

CON CAMPI NORMALI EFFETTO TRASCURABILE

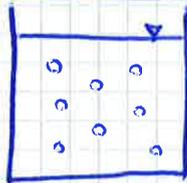
4

$\xi$  PUO' ESSERE ZERO SE LE MOLECOLE ADSORBITE BILANCIANO ESATTAMENTE LA CARICA SUP

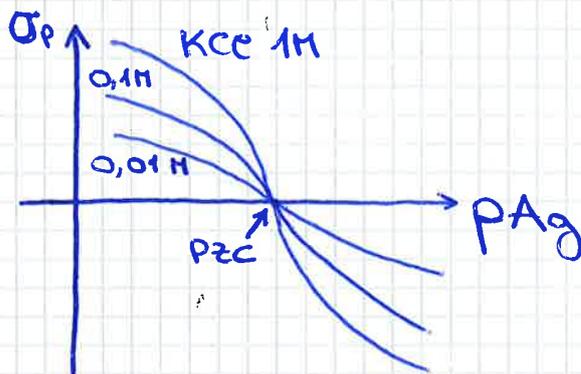
PUNTO ISOELETTRICO = QUANDO  $\xi = 0$ . PARTICELLA MESSA IN CAMPO ELETTRICO NON SI MUOVE

PZC PERO' SI RIFERISCE ALLA CARICA INTRINSECA

METODI X DETERMINARE  $\sigma_p$



SOSPENSIONE DI  $AgI$  IN KCl 0,01 M



$$\sigma_p = K \epsilon_0 \epsilon_r \psi_p$$

PZC QUANDO  $\psi_p = 0$ , QUINDI NON DIPENDE DA K (EDA F. IONICA)

TUTTE LE CURVE SI INCROCIANO IN PZC

SE AGGIUNGO UNA QUANTITA' NOTA DI  $AgNO_3$ , CHE E' UN SALE SOLUBILE

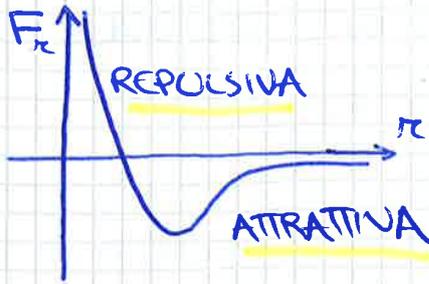
$\Delta n_{Ag^+} \rightarrow \Delta n_{LIQUIDO}$  UNA PARTE VA NEL LIQ, UN PO' NEL SOLIDO  
 $\Delta n_{Ag^+} \rightarrow \Delta n_{SOLIDO}$

$$\Delta n_{sol} F = \Delta \sigma_p A_{sol}$$

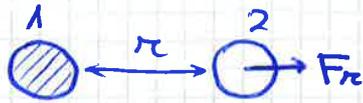
↘ AREA



FACCIO TANTE PROVE  $\neq$  → RICOVO CURVA  $\sigma_p$



$$F_r(r) = - \frac{dU(r)}{dr}$$



$U(r)$  = EN. POTENZIALE → ENERGIA CHE SERVE X PORTARE LA MOLECOLA FINO A DIST.  $r$  DA DIST.  $\infty$

$$L = \int_{\infty}^r F_{ext} dr$$

$F_{ext} \geq -F_r$ , SE REVERSIBILE  $F_{ext} = -F_r$

$$L_{MIN} = - \int_{\infty}^r F_r dr$$

$$L_{MIN} = \int_{\infty}^r \frac{du}{dr} dr = U(r) - U(\infty)$$

$\searrow = 0$

FORZA REPULSIVA →  $\frac{\alpha}{r^{12}}$  = POTENZIALE REPULSIVO

FORZA ATTRATTIVA →  $-\frac{B}{r^6}$  = " ATTRATTIVO

QUESTA E' L'INTERAZIONE CHE PORTA A:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$

SONO DOVUTE A 3 FENOMENI:

1) INTERAZIONI DIPOLO-DIPOLO (KEESOM)

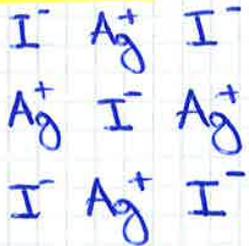
X MOLECOLE POLARI  
 / ORIENTAZIONE  
 →  $-\frac{\beta_0}{r^6}$



$$\begin{aligned}
 \beta_{12} &= R \alpha_1 \alpha_2 \\
 \beta_{11} &= R \alpha_1^2 \\
 \beta_{22} &= R \alpha_2^2
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \beta_{12} = \sqrt{R \alpha_1^2} \sqrt{R \alpha_2^2} = \sqrt{\beta_{11}} \sqrt{\beta_{22}} = \sqrt{\beta_{11} \beta_{22}}$$

MEDIA ARMONICA

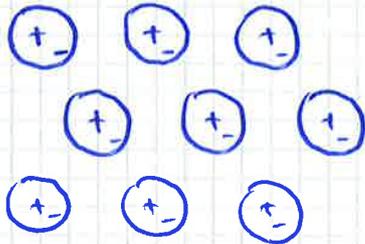
SOLIDO (IONICO O NO):



CI SONO ANCHE QUA FORZE DI VAN WAALS, MA SONO << BELE FORZE DI LEGAME, QUINDI TRASCURABILI

SE PARTICELLE  $\neq$  FORZE DI VAN DER WAALS SONO IMPORTANTI

↓  
FORZE DI VAN DER WAALS MACROSCOPICHE



EFFETTO DI INDUZIONE SUE, QUINDI MOLTO VELOCE ( $\approx$  VEL. LUCE)  
 X ZONE MACROSCOPICHE  
 ORIENTAZIONE COLLETTIVA

HAMAKER

CONTRIBUTI ADDITIVA DEI  $\neq$  ATOMI ALL'INTERAZIONE TOTALE

$$dm_2 = (2\pi y dx dy) q_1$$

ATOMI X UNITA' DI VOLUME

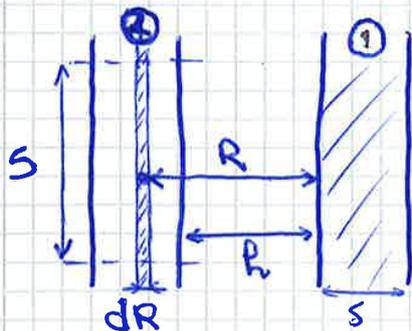
$$dU_{12} = -\frac{\beta_{12}}{r^6} dm_1$$

$$dU_{12} = -\frac{\beta_{12}}{r^6} 2\pi y dx dy q_1$$

$$U_{\text{MOLECOLA 2}} = \int_{\text{VOLUME 1}} dU_{12} = \int_{\text{VOL 1}} -\frac{\beta_{12} 2\pi q_1 y dx dy}{[(R+x)^2 + y^2]^3}$$

$$U_{\text{MOLEC 2}} = -2\pi q_1 \beta_{12} \int_{x=0}^s \int_{y=0}^{\infty} \frac{y}{[(R+x)^2 + y^2]^3} dx dy$$

$$U_{\text{MOLEC 2}}(R) = -\frac{\pi \beta_{12} q_1}{6} \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R+s)^3} \right\}$$



CONSIDERO PIASTRA 1,  
VOLUMETTO DITESIMO  $S \cdot dR$

$$dm_2 = (S dR) q_2$$

$$dU_{12} = (S dR) q_2 \cdot \left( -\frac{\pi \beta_{12} q_1}{6} \right) \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R+s)^3} \right) =$$

$$U_{\text{PIASTRA 1}} = \int_{\text{VOL 2}} dU_{12} = \frac{S \pi q_1 q_2 \beta}{6} \int_R^{R+s} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R+s)^3} \right] dR$$

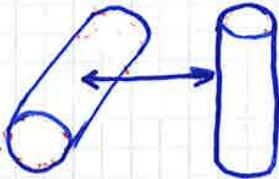
$$U_{\text{PIASTRA 1}} = -\frac{S \pi^2 q_1 q_2 \beta}{12 \pi} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R+2s)^2} - \frac{2}{(R+s)^2} \right\}$$

$$U_S(R) = \frac{U_{\text{PIASTRA 1}}}{S}$$

$$A_{12} = (\pi q_1 \sqrt{\beta_{11}}) (\pi q_2 \sqrt{\beta_{22}}) = \sqrt{A_{11}} \sqrt{A_{22}}$$

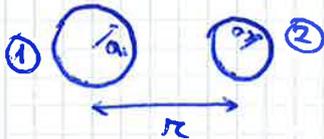
$$A_{12} = \sqrt{A_{11} A_{22}}$$

SE AD INTERAGIRE AVENO 2 CILINDRI



SI PUO' FARE LO STESSO PROCEDIMENTO DI PRIMA

SE HO 2 SFERE:

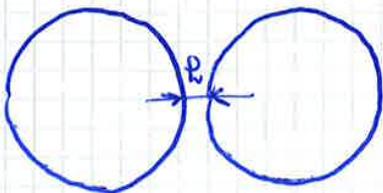


$$U(r) = \frac{A_{12}}{6} \left\{ \frac{2a_1 a_2}{r^2 - (\dots)} + \dots \right\}$$

CHIAM. IN GENERALE:

$$U(r) = A_{12} \cdot f(r, \text{GEOMETRIA})$$

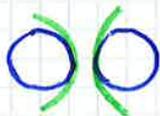
### PROCEDURA DI DERJAGUIN



FORZE DI VAN DER WAALS SI SENTONO SE  $r \ll R$   
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 10 nm 6 μm

IPOTESI DI DERJAGUIN:  $r \ll R$  CURVATURA

1) APPROSSIMAZ. PARABOLICA DELLE 2 SFERE CHE INTERAGISCONO



(APPROX DEL 2° ORDINE)

$$F(x) = \int_{x=R}^{x \rightarrow \infty} 2\pi \frac{a}{2} F_s(x) dx \quad (x \rightarrow \infty \text{ POICHE ABBIAMO APPROX CON PARABOLA})$$

$\uparrow$   
 $-dU_s/dx$

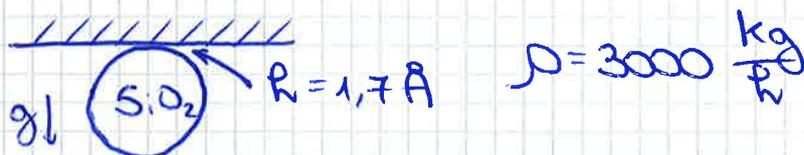
$$F(x) = \int_R^{\infty} -\pi a \frac{dU_s(x)}{dx} dx = -\pi a [U_s(\infty) - U_s(R)]$$

$$F(R) = \pi a U_s(R) = -\frac{A_{12}}{12} \frac{a}{R^2} \leftarrow \text{SE PARTICELLE} =$$

$$U_s(R) = -\frac{A_{12}}{12 \pi R^2}$$

$$F(R) = \frac{2\pi a_1 a_2}{a_1 + a_2} U_s(R) \leftarrow \text{SE PARTICELLE} \neq$$

PIANO DI SILICE A CUI AVVICINIAMO PARTICELLA DI QUARZO, SI ATTACCA X FORZE DI VAN DER WAALS (ARIA  $\approx$  VUOTO)



$\exists$  UNA DIMENSIONE CRITICA DOPODI CHE SI STACCA X GRAVITA'

ESERCIZIO

TROVARE RAGGIO MAX PER ADESIONE

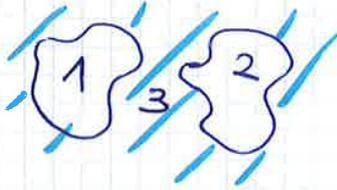
$$A = 6 \cdot 10^{-20} \text{ J (SILICE)}$$

UTILIZZIAMO:

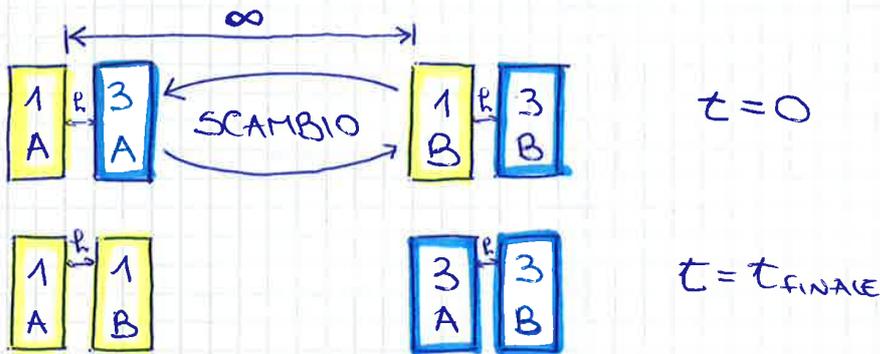
$$F(R) = \frac{2\pi a_1 a_2}{a_1 + a_2} U_s(R) \quad \text{CON } a_1 \rightarrow \infty, a_2 = R$$

$$F(R) = \frac{2\pi R a_1}{R + a_1} U_s(R) = 2\pi R U_s(R)$$

SPESSE PARTICELLE INTERAGISCONO IN UN MEZZO DISPERDENTE (NON NEL VUOTO)



CONSIDERO 2 PARTICELLE DELLO STESSO MATERIALE E DI DIM  $\neq$  (A e B)



$U_{131}(R) - U_{131}(\infty) = \mathcal{L}$  LAVORO COMPIUTO X PORTARE LA PARTIC. DA  $\infty$  A R

DEVO VALUTARLO CON HAMAKER:

1B E' SEMPRE CIRCONDATA DA MEZZO 3  
PRIMA AVEVO IL MEZZO 3, POI AVRA' LA PARTIC. 1A VICINO.

3A PRIMA INTERAGNA CON 1A, POI CON 3B

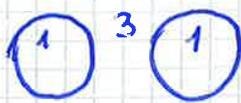
↓  
PARTICELLE FITTIZIE ←

1B, 3A SI SONO SCAMBIATE

$$= \Delta U_{1B} + \Delta U_{3A} = U_{11}(R) + U_{13}(\infty) - [U_{11}(\infty) + U_{13}(R)] + [U_{33}(R) + U_{13}(\infty)] - [U_{33}(\infty) + U_{13}(R)]$$

$U(\infty)$  NULLE

SE HO UN MEZZO DISPARENDE, TRA 2 PARTIC. DELLO STESSO MATERIALE:



$$A_{131} = A_{11} + A_{33} - 2A_{13}$$

$\uparrow$   
 $\sqrt{A_{11}A_{33}}$

$$A_{131} = (\sqrt{A_{11}} - \sqrt{A_{33}})^2$$

VUOTO  $F_{attr} \sim A_{11}$

MEZZO3  $F_{attr} \sim A_{131}$

NORMALMENTE  $F_{attr}$  (DI VAN DER WAALS) ↓

C'E' UN ECCEZIONE:

BOLLE D'ARIA IN ACQUA

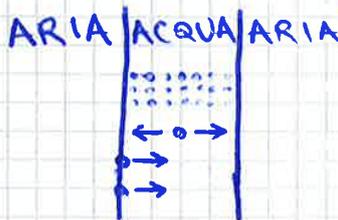
$$A_{11} \approx 0$$

$$A_{131} \approx A_{33}$$

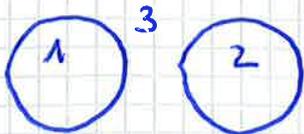


LE 2 BOLLE SENTONO  
UNA FORZA ATTRATTIVA

↓  
QUANDO SONO  
MOLTO VICINE



SE INVECE HO 2 PARTICELLE ≠ IN UN MEZZO DISPARENDE



$$A_{132} = A_{12} + A_{33} - A_{13} - A_{23}$$

$$A_{132} = (\sqrt{A_{11}} - \sqrt{A_{33}})(\sqrt{A_{12}} - \sqrt{A_{33}})$$

PRIMA + TERMINI ERANO AL QUADRATO, QUINDI  $A > 0$ , QUINDI  $F$  ATTRATTIVE, ORA  $A$  PUO' ANCHE ESSERE  $< 0$ , QUINDI  $F$  PUO' ANCHE ESSERE REPULSIVA

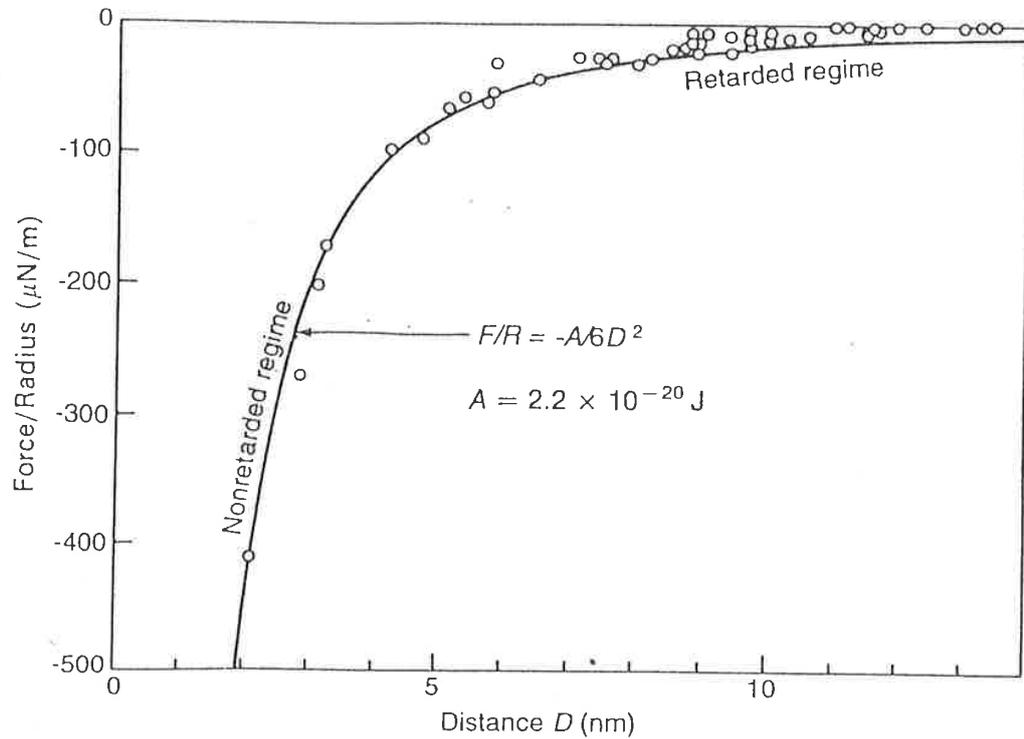


Fig. 11.6. Attractive van der Waals force  $F$  between two curved mica surfaces of radius  $R \approx 1$  cm measured in water and aqueous electrolyte solutions. The measured non-retarded Hamaker constant is  $A = 2.2 \times 10^{-20}$  J. Retardation effects are apparent at distances above 5 nm where the measured forces are weaker than the non-retarded prediction (solid line). (From Israelachvili and Adams, 1978; Israelachvili and Pashley, unpublished.)

TABLE 11.4 Comparison of experimental surface energies with those calculated on the basis of the Lifshitz theory

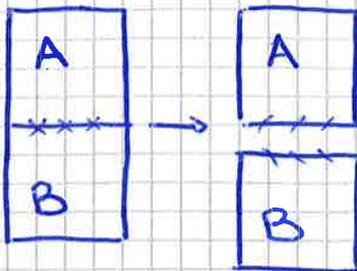
Material ( $\epsilon$ ) in ordering of increasing $\epsilon$	Theoretical $A$ ( $10^{-20}$ J)	Surface energy, $\gamma$ (mJ m $^{-2}$ )	
		$A/24\pi D_0^2$ ( $D_0 = 0.165$ nm)	Experimental <sup>a</sup> (20°C)
Liquid helium (1.057)	0.057	0.28	0.12–0.35 (4–1.6 K)
<i>n</i> -Pentane (1.8)	3.75	18.3	16.1
<i>n</i> -Octane (1.9)	4.5	21.9	21.6
Cyclohexane (2.0)	5.2	25.3	25.5
<i>n</i> -Dodecane (2.0)	5.0	24.4	25.4
<i>n</i> -Hexadecane (2.1)	5.2	25.3	27.5
PTFE (2.1)	3.8	18.5	18.3
CCl <sub>4</sub> (2.2)	5.5	26.8	29.7
Benzene (2.3)	5.0	24.4	28.8
Polystyrene (2.6)	6.6	32.1	33
Polyvinyl chloride (3.2)	7.8	38.0	39
Acetone (21)	4.1	20.0	23.7
Ethanol (26)	4.2	20.5	22.8
Methanol (33)	3.6	18	23
Glycol (37)	5.6	28	48
Glycerol (43)	6.7	33	63
Water (80)	3.7	18	73
H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> (84)	5.4	26	76
Formamide (109)	6.1	30	58

<sup>a</sup> Note the good agreement between theory and experiment (within 20%) except for the last six strongly H-bonding liquids.

LIQUIDI: STIMA  $A_{AA}$  DA  $\gamma_A$   
 ↳ FACILE DA MISURARE

SOLIDI: STIMA  $\gamma_A$  DA MISURE DI  $A_{AA}$   
 ↳ DI VAN DER WAALS

LAVORO DI ADESIONE



$$\mathcal{L}_{REV} = \gamma_A S + \gamma_B S - \gamma_{AB} S$$

$$\mathcal{L}_{ades} = \frac{\mathcal{L}_{REV}}{S} = \gamma_A + \gamma_B - \gamma_{AB}$$

SE ABBIAMO SOLO F DI VAN DER WAALS  
 (NO LEGAMI IONICI O COVALENTI)

$$\gamma_A = \frac{A_{AA}}{24\pi R_0^2}$$

$$\gamma_B = \frac{A_{BB}}{24\pi R_0^2}$$

COME PRIMA,  $\mathcal{L}_{REV} = -S U_S(R_0) = S \frac{A_{AB}}{12\pi R_0^2}$

$$\gamma_A + \gamma_B - \gamma_{AB} = \frac{A_{AB}}{12\pi R_0^2} \quad \leftarrow \text{EGUAGLIANDO } \mathcal{L}_{REV}$$

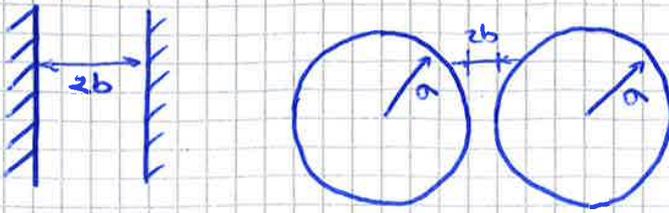
$$A_{AB} = \sqrt{A_{AA} \cdot A_{BB}}$$

$$\begin{aligned} \gamma_A + \gamma_B - \gamma_{AB} &= 2 \frac{\sqrt{A_{AA}} \cdot \sqrt{A_{BB}}}{24\pi R_0^2} \\ &= 2 \frac{\sqrt{A_{AA}}}{\sqrt{24\pi R_0^2}} \cdot \frac{\sqrt{A_{BB}}}{\sqrt{24\pi R_0^2}} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\gamma_A} \cdot \sqrt{\gamma_B} \end{aligned}$$

$$\gamma_A + \gamma_B - \gamma_{AB} = 2 \sqrt{\gamma_A} \cdot \sqrt{\gamma_B}$$

HA ≠ APPLICAZIONI

## ESERCIZIO



POTENZIALE DI PARETE  $\psi_p$

VALE DEBYE ( $\psi_p < 50/z$  mV)

NOTO  $K$

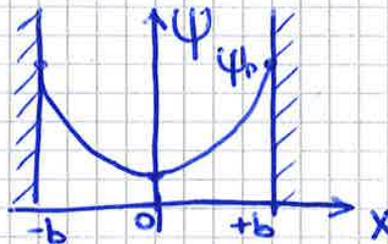
DISTRIBUZIONE  $\psi$  TRA LE PIASTRE?

$\sigma_p = ?$   $\sigma_p(K, \psi_p, b)$   $\rightarrow \psi(x, K, \psi_p, b)$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = K^2\psi$$

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\psi|_{x=b} = \psi_p$$



$$\lambda^2 = K^2 \rightarrow \lambda = \pm K$$

$$\psi = A_1 e^{-\lambda_1 x} + A_2 e^{-\lambda_2 x} = A_1 e^{-Kx} + A_2 e^{+Kx}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -KA_1 e^{-Kx} + KA_2 e^{+Kx}$$

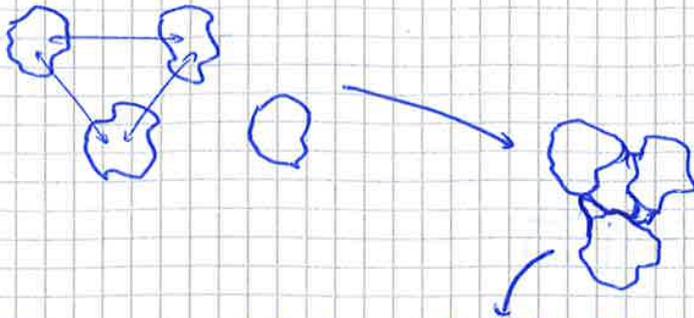
$$0 = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = -KA_1 + KA_2 \rightarrow A_1 = A_2 \equiv A$$

$$\psi_p = \psi|_{x=b} = A (e^{-Kb} + e^{+Kb}) \rightarrow A = \frac{2\psi_p}{2(e^{-Kb} + e^{+Kb})}$$

$$A = \frac{\psi_p/2}{\cosh(Kb)}$$

$$\psi_p = \frac{1}{2} \frac{\psi_p}{\cosh(Kb)} (e^{-Kx} + e^{+Kx})$$

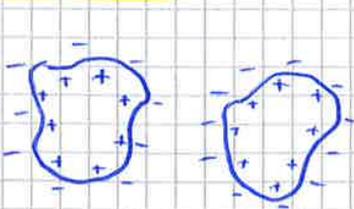
## FENOMENI ELETTROSTATICI



FORZE DI VAN DER WAALS FANNO CREARE DEI GRUPPI, CHE PRECIPITANO, QUINDI DESTABILIZZANO UNA SOLUZ. COLLOIDALE

LE FORZE DI VAN DER WAALS NON SONO REGOLABILI, SALVO ECCEZIONI, QUALI QUELLO DI RIVESTIRE STAGNO CON ~~ZINCO~~ (PROP. MECCANICHE STAGNO, COST. HAMAKER SILICE)

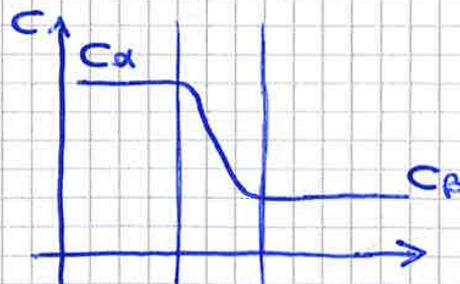
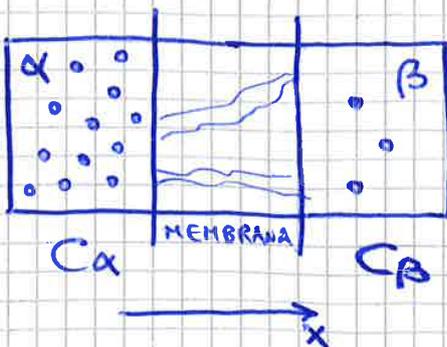
LA SOSPENSIONE PERMANE GRAZIE A FENOMENI ELETTRICI (CREANO FORZE REPULSIVE)



SBAGLIATO DIRE CHE E' UN FENOMENO DOVUTO A CARICHE UGUALI ~~OPPOSITE~~ CHE SI RESPINGONO, A CAUSA DELLA CONTROCARICA

DOVUTO A EFFETTI OSMOTICI

OSMOSI:

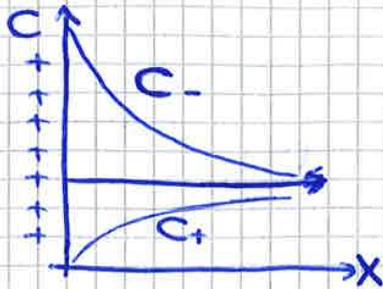


SI CREA DIFF. PRESS  $\Delta P$   
 $\Delta P = RT \Delta C$  ← LEGGE VAN'T HOFF

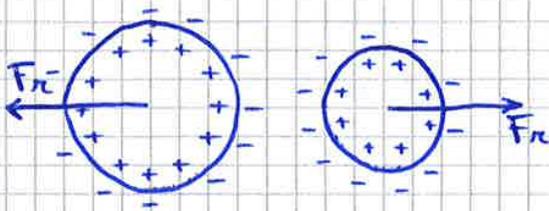
PRESS. OSMOTICA OGNI VOLTA CHE UNA FORZA MOTRICE DIFFUSIVA È BLOCCATA

NON X FORZA SOLO UNA MEMBRANA

SE HO UNA SUP. CARICA:

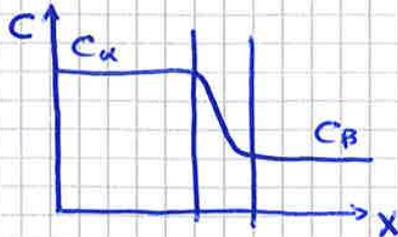


$C_-$  VORREBBERO DIFFONDERE, MA BLOCCATO DA CARICA SUP, QUINDI SI CREA PRESS. OSMOTICA



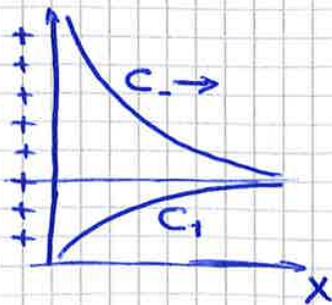
SI CREA REPULSIONE

$$P_\alpha - P_\beta = RT \sum_i C_i^\alpha - RT \sum_i C_i^\beta$$

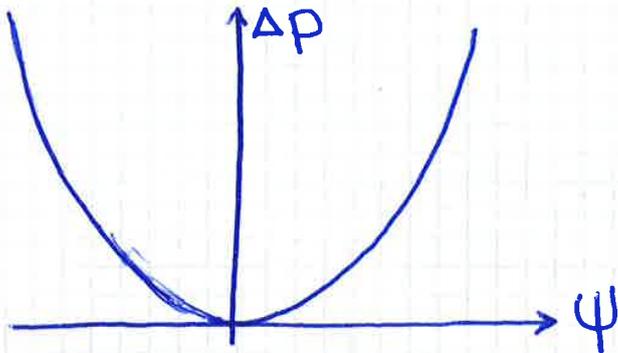


DIFFUSIONE BLOCCATA

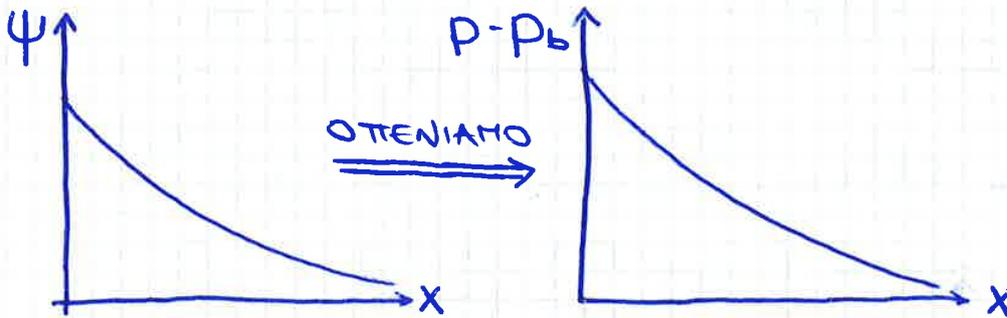
ALTRO CASO:



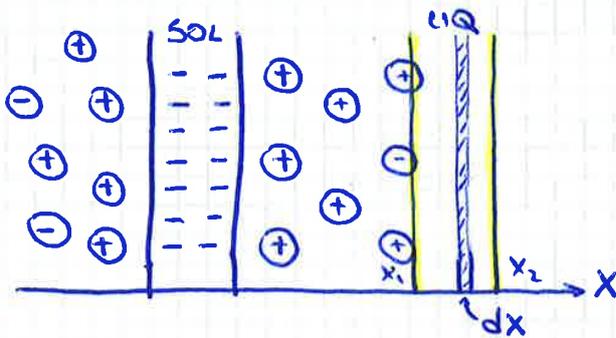
SI CREA DIFFERENZA DI PRESSIONE DOVUTA A DIFFUSIONE, OVVERO AI FENOMENI ELETTRICI CHE BLOCCANO LA DIFFUSIONE



SE SAPPIAMO CHE:



CONSIDERIAMO UN SIST. DEL TIPO:



$$dF = E dq = E \rho_q dV = E \rho_q S dx$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dF = \int_{x_1}^{x_2} E(x) \rho_q(x) S dx$$

