



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1573A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Fasano

MATERIA: Dinamica dei Sistemi Meccanici + Eserc.
Prof. Marchesiello

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

2/10/14

stefano.marachese@pd.it (appuntamento per recruitment)

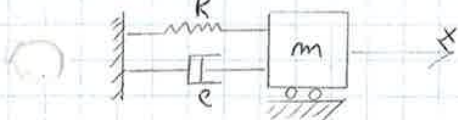
Scritto con 3 domande :- 1 teoria
- 1 esercizio
- 1 intermedio

SDOF: "Single degree of freedom"

MDOF: "Multiple " " " "

DINAMICA: studia del moto dei corpi in relazione alle cause
Es. auto in partenza, frenata, urti, forze dinamiche sui cuscinetti, vibrazioni.

VIBRAZIONI



m, K, c

$m \rightarrow$ en. cinetica

$K \rightarrow$ en. potenziale elastica

$c \rightarrow$ capacità dissipativa

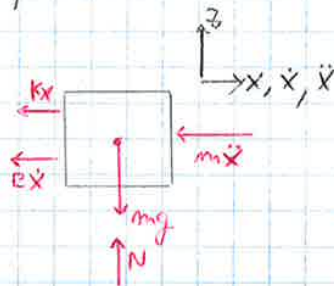
Hp: - sistema discreto
- SDOF

- sistema lineare

LTI: lineare tempo invariante

- Va aggiunta una forzante al sistema per mantenerlo in moto.

CORPO LIBERO:



$$\vec{F}_i + \vec{F}_c + \vec{F}_k = \vec{0} \quad \text{principio di D'Alembert}$$

L'eq. dinamica sussiste sempre!

$$(z): N = mg$$

$$(x): m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \quad \text{Equaz del moto}$$

La soluzione dell'equazione (x) e' del tipo:

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{st} \\ \dot{x}(t) = sAe^{st} \\ \ddot{x}(t) = s^2Ae^{st} \end{cases} \Rightarrow (ms^2 + cs + K) Ae^{st} = 0$$

$$e^{st} \neq 0 \quad \forall t \in [0; +\infty)$$

$A=0 \quad (x=0)$: soluzione banale

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = (a \cos \omega_m t + b \sin \omega_m t) e^{-\zeta \omega_m t} = A \sin(\omega_d t + \alpha) e^{-\zeta \omega_m t}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{Modulo} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{\sin \omega_m t}{\cos \omega_m t}\right) & \text{Fase} \end{cases}$$

(PSEUDO-PERIODICA)

Es.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 & (\zeta < 1) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \omega_d (-a \sin \omega_d t + b \cos \omega_d t) e^{-\zeta \omega_m t} - \zeta \omega_m e^{-\zeta \omega_m t} (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)$$

$$\begin{cases} x(0) = a = x_0 \\ \dot{x}(0) = b \omega_d - \zeta \omega_m a = v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{v_0 + \zeta \omega_m x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

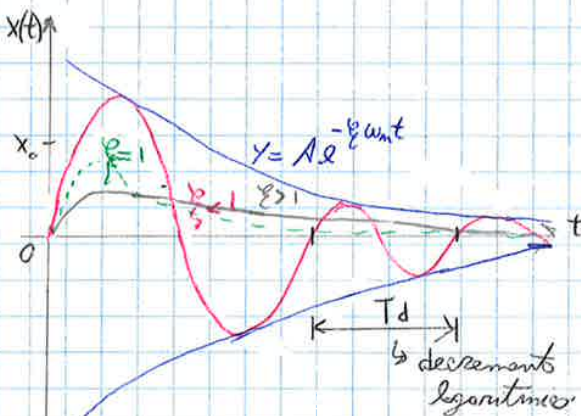
$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \text{PERIODO} \quad \omega_d = \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} < \omega_m$$

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} < T_d \quad \text{N.B.} \begin{cases} \omega_m > \omega_d \\ T_m < T_d \end{cases}$$

$$y(t) = \pm A e^{-\zeta \omega_m t} \quad \text{curve di estinzione}$$

Il sistema a $\zeta = 1$ va a 0 più velocemente di tutti gli altri!
Trova applicazione nel campo delle armi da fuoco.

Per i sovrasmorzati a $\zeta > 1$ si tratta di sospensioni automobilistiche.



Se $\zeta \ll 1$ (inferiore al 5%)

$$\sqrt{1 - \zeta^2} \approx 1 \Rightarrow \omega_m \approx \omega_d \Rightarrow T_m \approx T_d$$

Se $\zeta \downarrow \Rightarrow \uparrow$ tempo di decadimento

RISPOSTA ALLA FORZANTE ARMONICA (FRF, Frequency Response Function)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

con $f(t) = F_0 \cos \Omega t \propto F_0 \sin \Omega t$

dove $F_0 \cos \Omega t = \text{Re}(F_0 e^{i\Omega t})$

$F_0 \sin \Omega t = \text{Im}(F_0 e^{i\Omega t})$

$x(t) = x_p(t) + x_g(t)$

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$

smorzamento ($\frac{c}{2m} > 0$)

$F_0 e^{i\Omega t} = F_0 \cos \Omega t + i F_0 \sin \Omega t$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t}$ **Eq. complessa SBOF ($F_0 \in \mathbb{R}$)**

La soluzione sarà la parte reale della soluzione complessa. Se invece avessimo avuto il seno, avremmo la parte immaginaria.

$x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$

$\dot{x}(t) = i\Omega X_0 e^{i\Omega t}$

$\rightarrow (k - m\Omega^2 + i c \Omega) X_0 e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$

$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X_0 e^{i\Omega t}$

$\left(\frac{k}{m} - \Omega^2 + i \frac{c}{m} \Omega\right) X_0 = \frac{F_0}{m}$

$\omega_m^2 = \frac{k}{m}$; $\frac{c}{m} = 2\zeta \omega_m$

$(\omega_m^2 - \Omega^2 + i 2\zeta \Omega) X_0 = \frac{F_0}{k}$

$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_m^2} + i 2\zeta \frac{\Omega}{\omega_m}\right) X_0 = X_{st}$ **non è il dst della F peso!**

Spostamento che avrebbe il sistema a regime se $\omega \rightarrow 0$

$X_{st} = \frac{F_0}{k}$

$\frac{X_0}{X_{st}} = Q(i\Omega)$

Fattore di AMPLIFICAZIONE o GUADAGNO DINAMICO

$Q(i\Omega) = \frac{X_0}{X_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_m}\right)^2 + i 2\zeta \frac{\Omega}{\omega_m}}$

DIAGRAMMA DI BODE

Laplace : $Q(s) = \frac{x(s)}{f(s)/k}$

$s = i\Omega$

$\nu = \frac{\Omega}{\omega_m} = \rho$ **Rapporto di frequenza**

$$\frac{d}{d\zeta} \left[(1-\zeta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2 \right] = (1-\zeta^2) \cdot 2(-2\zeta) + 2 \cdot 2\zeta\eta = 0$$

$$1-\zeta^2 + 2\zeta^2 = 0 \rightarrow \zeta = \sqrt{1-2\eta^2} \quad \text{Frequenza di risonanza}$$

$$\omega_{res} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{max amp.} = \omega_m \sqrt{1-2\eta^2}$$

Se $\eta > 0,707 \Rightarrow$ non ho più risonanza dinamica
 ↑
 amplificazione

$$\omega_{res} = 0 \Leftrightarrow \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESERCITAZIONE

alexandros.fabozzi@polito.it

[0110203307]

1)

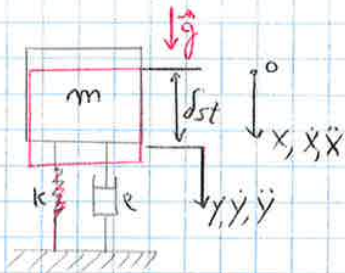
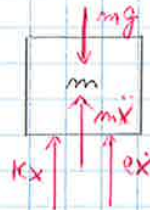


Diagramma di corpo libero



$$\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_c \Rightarrow \sum \vec{F}_i - m \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_i + \vec{F}_I = \vec{0}$$

$\vec{F}_I \rightarrow$ forza d'inerzia

$$(x) : m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg = \text{cost} \Rightarrow \text{STATICO}$$

ECCITAZIONE DEL SISTEMA

$$x(t) = \frac{mg}{k} + (a \cos \omega_m t + b \sin \omega_m t) e^{-\zeta \omega_m t} \quad (\zeta < 1)$$

$$\omega_m = \frac{k}{m} = \frac{\text{COEFF. ELASTICITÀ}}{\text{COEFF. D'INERZIA}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_m}$$

Altra equazione che tiene conto del moto rispetto alla posizione statica:
 Nella precompressione.



$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

$$m\ddot{y} + ky + k\delta_{st} + c\dot{y} - mg = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

$$y(t) = (a \cos \omega_m t + b \sin \omega_m t) e^{-\zeta \omega_m t}$$

$$y(t) - x(t) = -\delta_{st} \Rightarrow x(t) - y(t) = \delta_{st}$$

INSERIRE LE FORZE STATICHE

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{I_0} \sin\theta = f(\theta, \dot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{mgL}{I_0} \sin\theta_{eq} - \frac{mgL}{I_0} \cos\theta_{eq} = 0$$

Essendo $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \pm k\pi \quad (k=0,1,\dots)$

- 1) $\theta_{eq1} = 0$
- 2) $\theta_{eq2} = \pi$

$$f(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{mgL}{I_0} \sin\theta \Rightarrow f(\theta, \dot{\theta}) \approx 0 - \frac{mgL}{I_0} \theta \Rightarrow f(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{mgL}{I_0} \theta$$

*linearizzata
nell'intorno di
una posizione di
equilibrio*

1) $\theta_{eq} = 0, \dot{\theta}_{eq} = 0$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{I_0} \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_0} \theta = 0 \quad \text{POSIBILE STABILE}$$

2) $\theta_{eq} = \pi$

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mgL}{I_0} (\theta - \pi)$$

$$\ddot{\theta} - \frac{mgL}{I_0} \theta = -\frac{mgL}{I_0} \pi \Rightarrow I_0 \ddot{\theta} - mgL \theta = -mgL \pi \Rightarrow I_0 \ddot{\theta} - mgL (\theta - \pi) = 0$$

$$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} - mgL \theta = -mgL \pi$$

$$I_0 \ddot{\theta} - mgL \theta = 0$$

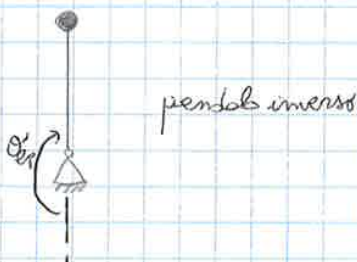
$$\theta = A e^{st}$$

$$I_0 s^2 - mgL = 0 \Rightarrow s_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{mgL}{I_0}}$$

$$\theta(t) = \pi + A_1 e^{-\frac{\sqrt{mgL}}{I_0} t} + A_2 e^{\frac{\sqrt{mgL}}{I_0} t} \Rightarrow \theta \text{ cresce}$$

cost.
*diminuisce
nel tempo*
*diverge nel
tempo*

Tali equazioni e tale soluzione sono valide per le piccole oscillazioni. Il suo moto non è spiegato, ma è solo in parte attorno a θ_{eq} .



1) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ propria

N.B. per $\zeta \ll 1$,
 $\omega_n \approx \omega_d \approx \omega_{ris}$

2) $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ oscillazioni libere smorzate

LIBERO

3) $\omega < \omega_n$ Pulsazione forzata (imposta al sistema)

FORZATO

4) $\omega_{res} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ Pulsazione di risonanza

Forzante periodica: $f(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

Essendo in ambito lineare: sovrapposizione degli effetti:

La soluzione sarà: $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ (SOLUZIONE)

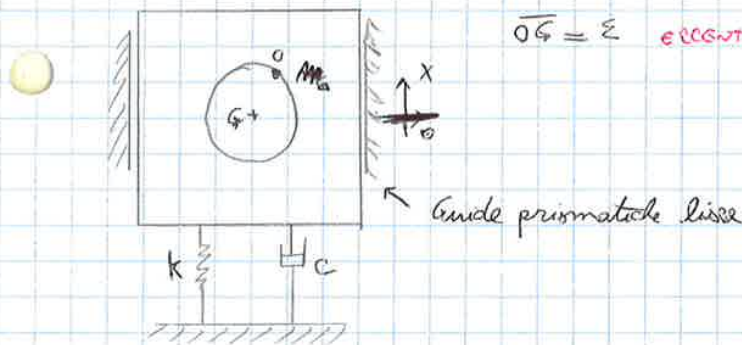
Serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t]$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Pulsazione fondamentale

Esercizi:

1) LAVATRICE



$\overline{OG} = \epsilon$ eccentricità

Parte della configurazione di equilibrio statico

$\vec{a}_0 = \vec{a}_n + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$ (per sistema di riferimento mobile)

$|\vec{a}_{rel}| = |\vec{a}_0|$ trascurando

$|\vec{a}_{rel}| = \omega^2 \epsilon$, $\omega = \omega_0 \cos t$ relativa

$|\vec{a}_{cor}| = 0 \rightarrow$ la ω nel sistema di riferimento mobile è 0.

2) **TRASMISSIBILITÀ** → è il rapporto tra la forza applicata e la forza che si scarica a terra *tramite il vincolo*
 (funzione di trasferimento)



forza trasversale vincolo (perziore)

$$f_v(t) = kx + c\dot{x} = (k + i\omega c) X_0 e^{i\omega t}$$

Im regime armonico : $x = i\omega x$

$$f(t) = F_v e^{i\omega t}, \text{ con } F_v = (k + i\omega c) X_0 \in \mathbb{C}$$

$$T_{lav} = \frac{F_v}{m_0 \omega_m^2 \xi}$$

$$T_{classica} = \frac{F_v}{F_0} \text{ con } F_0 = \cos t$$

proprietà della
 linearità

$$T_{lav} = \frac{(k + i\omega c) X_0}{m_0 \omega_m^2 \xi} = \frac{(k + i\omega c)}{m_0 \omega_m^2} \cdot \left(\frac{m_0}{m}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + i 2\xi \frac{\omega}{\omega_m}}$$

$$T_{lav} = \frac{1 + i 2\xi \omega / \omega_m}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + i 2\xi \omega / \omega_m} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \text{ Risonanza presente}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_m}$$

$$|T_{lav}| = r^2 \cdot \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}}$$

$$\left|T_{lav}\right|_{r=\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + 2\xi^2}{1 + 2\xi^2}} = 2, \quad \forall \xi$$

$$\left|T_{lav}\right|_{r=\sqrt{2}} = 2 \text{ Punto di risonanza}$$

$$|T_{lav}(0)| = 0 \text{ se } \omega \ll \omega_m, T_{lav} \approx 0$$

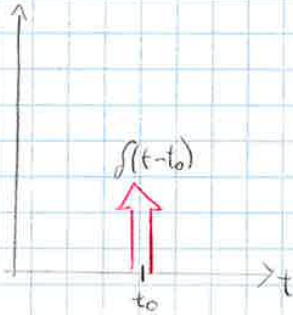
$$\lim_{r \rightarrow \infty} |T_{lav}| = +\infty, \text{ per } \xi \neq 0$$

RISPOSTA ALL'IMPULSO : gestita attraverso l'integrale di convoluzione (operazionale)

DELTA DI DIRAC
(o impulso unitario)

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\text{tale che}} \begin{cases} f(t-t_0) = 0 & \forall t \neq t_0 \\ f(t-t_0) \rightarrow \infty & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) dt = 1 \end{cases}$$

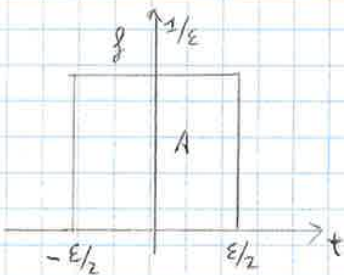
È una funzione ovunque nulla tranne in t_0 dove tende a ∞ .



$\delta(t-t_0)$ in campo temporale

Generalizzazione del concetto di derivata:

$$\frac{d}{dt} [u(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$$



Si può pensare all'impulso come:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A = 1$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} = +\infty$$

Fisicamente pensiamo ad una martellata.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 1 \cdot f(t) \Rightarrow [N]$$

↓
[N] impulso della forza

Dimostrazione

Con l'intervallo $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ $[1 f(t)]$ applicata nel primo istante di tempo

condizioni iniziali:

$$x(0^-) = 0$$

Prima di 0 non accade nulla. E a 0^+ avessimo qualche barcai in paradiso.

$$\dot{x}(0^-) = 0$$

Integrazione:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \int_{-\epsilon/2}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) dt d\tau \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \int_{-\epsilon/2}^{\tau} f(t) dt = \begin{cases} \tau > 0 = 1 \\ \tau < 0 = 0 \end{cases} = u(\tau) \text{ gradino} \\ \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} u(\tau) d\tau = [\tau \cdot u(\tau)]_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \end{cases}$$

$$x(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n t} \quad \zeta < 1$$

$$x(0) = a = 0$$

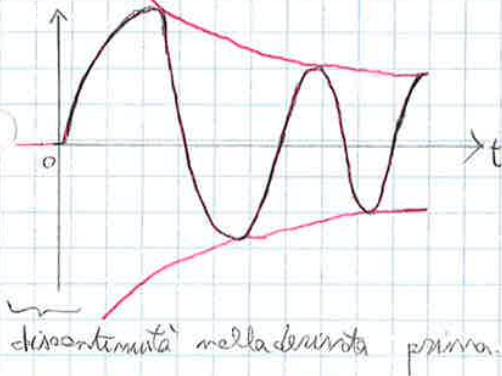
$$\dot{x}(t) = \omega_d (b \cos \omega_d t) e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n t} - \frac{\gamma}{2} \omega_n e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n t} (b \sin \omega_d t)$$

$$\dot{x}(0) = b \omega_d = \frac{1}{m} \Rightarrow b = \frac{1}{m \omega_d}$$

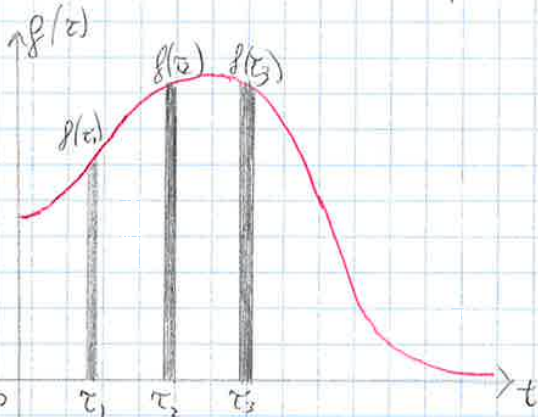
$$R(t) = \left[\frac{1}{m \omega_d} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n t} \sin \omega_d t \right] \cdot u(t) \quad \leftarrow \text{SISTEMA CAUSALE}$$

RISPOSTA ALL'IMPULSO: $R(t)$

FUNZIONE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO (UNITARIO) [IRF]



INTEGRALI DI CONVOLUZIONE : l'impulso di motore elettrico



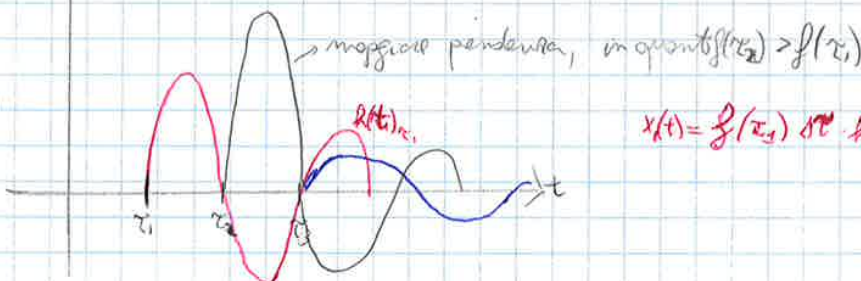
- Hp:
- 1) $f(t < 0) = 0$
 - 2) $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Supponiamo che da un certo istante, sulla massa m agisca una forza $f(t)$ e si voglia calcolare la risposta del sistema al tempo t .

Se fosse presente solo l'impulso $f(\tau_i)$, la risposta nel tempo sarebbe $x_2(t) = f(\tau_i) \delta(t - \tau_i)$ e continua.

Pertanto possiamo scrivere:

$x(t)$ → risposta del sistema immaginando che esista solo il $\delta(t)$



$$x(t) = f(\tau_2) \delta(t - \tau_2)$$

↳ Impulso non applicato in 0, ma in τ_i ! Per $t < \tau_i \Rightarrow x_i(t) = 0$

BATTIMENTO

L'ampiezza di oscillazione dipende non solo dall'intensità della forza applicata, ma anche dalla frequenza alla quale essa agisce sul sistema.

In assenza di smorzamento l'ampiezza diventa molto elevata, con $\Omega \sim \omega_m$.

Suppongo $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$

↓

$$m\ddot{x} + kx = f_0 \cos \Omega t$$

↓

$$x(t) = \frac{f_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t + A \cos \omega_m t + B \sin \omega_m t$$

$\underbrace{\cos \Omega t}_{\text{a regime}}$
 $\underbrace{A \cos \omega_m t + B \sin \omega_m t}_{\text{transitorio}}$

Per FASMA $\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \omega \text{ "ONIBONA"} \\ \omega_m = \omega \text{ "ONIGIUNA"} \end{array} \right.$

Appendice! $A = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$
 $\tan \varphi = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$

con $c=0 \Rightarrow \tan \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \vee \varphi = \pi$

Se $\Omega < \omega_m : A > 0, \varphi = 0$

Se $\Omega > \omega_m : A < 0, \varphi = \pi$

Assumo $\left\{ \begin{array}{l} x(t=0) = x_0 = 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_0}{k - m\Omega^2} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{f_0}{k - m\Omega^2} \\ B \omega_m = 0 \Rightarrow B = 0 \end{array} \right.$

$$x(t) = \frac{f_0}{k - m\Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_m t) =$$

$$\bullet \frac{\Omega + \omega_m}{2} = \omega_{\text{media}} = \omega_m$$

$$= \frac{f_0}{k - m\Omega^2} 2 \sin \left(\frac{\Omega + \omega_m}{2} t \right) \cdot \sin \left(\frac{-\Omega + \omega_m}{2} t \right) =$$

$$\bullet \frac{\omega_m - \Omega}{2} = \epsilon$$

$$\bullet \omega_m^2 - \Omega^2 = (\omega_m + \Omega)(\omega_m - \Omega) = 4\omega_m \epsilon$$

$$= 2 \cdot \frac{f_0}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin \omega_m t \cdot \sin \epsilon t =$$

$$= \frac{f_0}{2m\omega_m \epsilon} \sin \omega_m t \cdot \sin \epsilon t = \frac{f_0}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)]$$

$\underbrace{\sin \omega_m t}_{\text{periodo breve}}$
 $\underbrace{\sin \epsilon t}_{\text{periodo lungo}}$

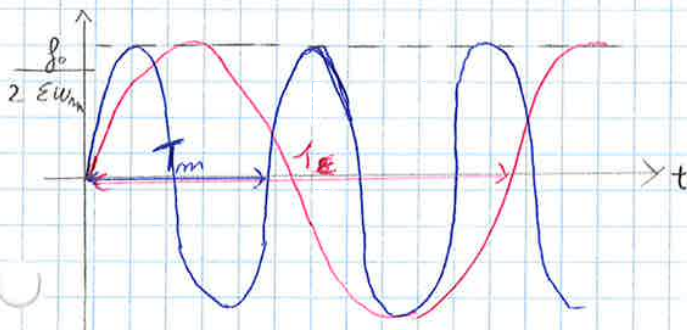
Hp:

Se $\Omega \approx \omega_m \Rightarrow \epsilon$ piccola e $\omega_m \approx \omega_m$

$$T_\epsilon \ll T_m$$

$$T_\epsilon = \frac{2\pi}{\epsilon}$$

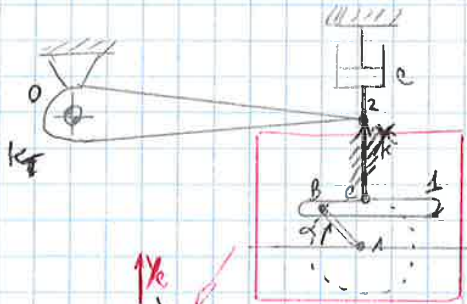
$$T_\epsilon > T_m \quad \omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$$



$f(t) = \sin \omega_m t \cdot \sin \epsilon t$: funzione ad ampiezza variabile nel tempo.

ESERCIZIO

Prova dinamica su un alettone



N.B.: molla di torsione

- lineare $F = kx$
- torsione $M = k_t \theta$
 ↓
 momento
 tangente

A: asse di rotazione di un motore elettrico

\overline{AB} : manovella (3 g.d.l.)

$$l = 3 \times 3 - (2 + 2 + 2 + 1) = 1$$

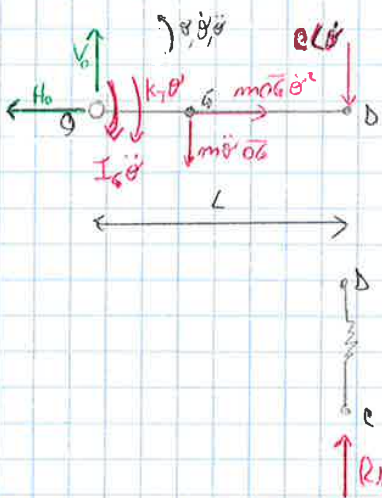
$$\overline{AB} = R \quad ; \quad \overline{BC} = L$$

$$y_c = AB \sin \omega t = R \sin \omega t$$

$\theta_{max} \text{ alettone} = 5^\circ$ (essendo piccolo, $\sin \theta \sim \theta$, $\cos \theta \sim 1$)

Alettone \rightarrow $\begin{matrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{matrix}$ (per semplicità)

SCHEMA DI CORPO LIBERO:

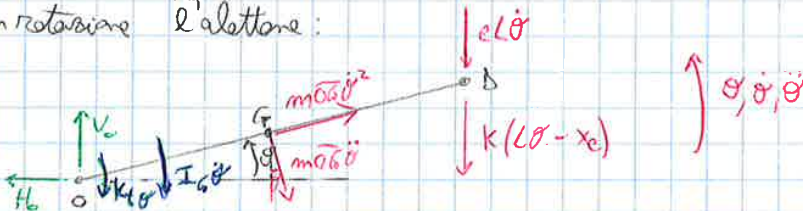


$$\overline{v_b} = \overline{v_c}$$

Massa distribuita: $\mu = \mu_0 (1 - \frac{1}{L})$

17/10/14

Rotore in rotazione l'alettone:



$$\theta) \quad I_G \ddot{\theta} + m \omega^2 OG \ddot{\theta} + e L^2 \ddot{\theta} + k(L - x_c)L + k_t \theta = 0$$

$L \cos \theta \sim L$ (piccolo)

$$(I_G + m \omega^2 OG^2) \ddot{\theta} + e L^2 \ddot{\theta} + \underbrace{(k_t + kL)}_{k_{equivalente}} \theta = kL x_c = kL R \sin \omega t$$

RIEPILOGO RISPOSTE

• **gradino** : $f_0 = f_0 u(t)$ $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 u(t) \Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right]$

$\zeta < 1$

• **forzante armonica** : $f(t) = f_0 \sin \omega t$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \sin \omega t \Rightarrow \begin{cases} |Q| = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \end{cases}$

$r = \frac{\omega}{\omega_n}$
 PULSABIONI
 R : propria forzante
 $\omega_n = \sqrt{k/m}$
 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
 $\omega_{RM} = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$

• **forzante periodica** : $f(t) = f(t+kT)$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin k\omega_0 t + b_k \cos k\omega_0 t \right] + a_0$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

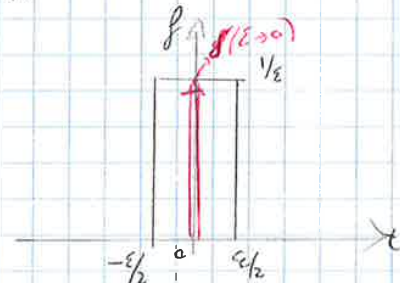
sovrapp. effetti

$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k(t)$

• **impulso** . **delta di Dirac**

$\begin{cases} f(t-t_0) = 0 & \forall t \neq t_0 \\ f(t-t_0) \geq \infty & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) dt = 1 \end{cases}$

$\frac{d}{dt} [u(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$



$h(t) = \left[\frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t \right] u(t)$ **IRF**

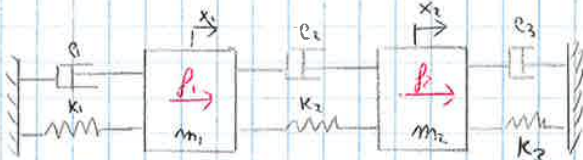
C.I. : $\begin{cases} x(0^+) = x(0^-) = 0 \\ \dot{x}(0^-) = 0 \\ \dot{x}(0^+) = 1/m \end{cases}$

lei convoluzione :

$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) h(\tau) d\tau = f(t) * h(t)$

$X(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$ (frequenza)

SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTÀ



g.d.l. = 2

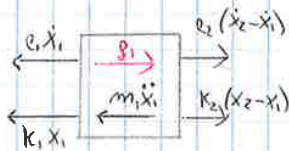
sistema vibrante accoppiato

—MM— molla LINEARE

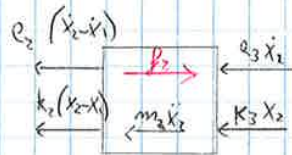
—II— smorzatori viscosi

Equa. libers.

1^a massa:



2^a massa:



Eq. alla traslazione orizzontale di ciascuna massa:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_1 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3 x_2 + c_3 \dot{x}_2 - f_2 = 0 \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\}$$

dove:

$[m]$: matrice di MASSA, reale, simmetrica e definita positiva

$[c]$: matrice di SMORZAMENTO VISCO, reale, simmetrica e definita positiva (o semidef.)

$[k]$: matrice di RIGIDEZZA, reale, simmetrica e definita positiva (o semidef.)

$\{x\}$: vettore delle coordinate generalizzate

$\{f\}$: vettore delle forzanti.

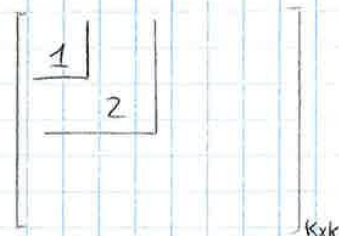
CRITERIO DI SYLVESTER: definita positiva

$$|M_1| > 0; |M_2| > 0 \dots |M_k| > 0$$

$\forall \{x\} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \{x\}^T [A] \{x\} > 0$ def. positiva

$\Rightarrow \{x\}^T [A] \{x\} \geq 0$ semidef. positiva



oss. Con 1 g.d.l. \Rightarrow coefficienti dello stesso segno

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI (EVP) : disaccoppiare le equazioni del moto.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

L.T.I. (lineare tempo invariante) conservativa

↓ cerca una **soluzione sinuosa** : particolare momento di massa tutte in fase caratterizzate da un'unica rigidità nel tempo.

$$\{x(t)\} = \{X_0\}g(t), \quad \text{con } \{X_0\} \neq \{0\}$$

$$[m]\{X_0\}\ddot{g}(t) + [k]\{X_0\}g(t) = \{0\}$$

↓ moltiplica scalarmente per $\{X_0\}^T$:

$$\{X_0\}^T [m] \{X_0\} \ddot{g}(t) + \{X_0\}^T [k] \{X_0\} g(t) = 0$$

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = - \frac{\{X_0\}^T [k] \{X_0\}}{\{X_0\}^T [m] \{X_0\}} = -\omega^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \geq 0 \quad \text{Definita o semidefinita positiva}$$

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0 \quad (\text{eq. armonica})$$

$$g(t) = \cos(\omega t + \theta) \quad \text{moto armonico}$$

$$\Downarrow$$

$$\{x(t)\} = \{X_0\} \cos(\omega t + \theta) \quad \text{SOLUZIONE SINUSOIA}$$

Sostituendo:

$$[m]\{X_0\}(-\omega^2) \cos(\omega t + \theta) + [k]\{X_0\} \cos(\omega t + \theta) = \{0\} \quad \forall t$$

$$\boxed{([k] - [m]\omega^2) \{X_0\} = \{0\}} \quad \text{Problema agli autovalori}$$

↳ sistema lineare algebrico omogeneo

EVP

↓
Eigen Value Problem

Assumendo $\{X_0\} \neq \{0\}$: $\det([k] - [m]\omega^2) = 0$

Eq. caratteristica : polinomio di ω^2 a grado n .

$$a_n \omega^{2n} + a_{n-1} \omega^{2n-2} + \dots + a_1 \omega^2 + a_0 = 0$$

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2 \quad \text{AUTOVALORI} \geq 0$$

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \quad \text{PULSIZIONI PROPRIE o NATURALI}$$

ORTOGONALITÀ DEI MODI PROPRI

23/10/14

Si consideri l'autoproblema:

$$\omega^2 [m] \{x_0\} = [k] \{x_0\}$$

Per ciascuno degli n autovalori ω_i^2 (hp: distinti) è possibile risolvere l'autovettore $\{\psi_i\}$.

Prendi 2 autovalori, ω_r^2 e ω_s^2 , si può scrivere:

$$\begin{cases} \omega_r^2 [m] \{\psi_r\} = [k] \{\psi_r\} \\ \omega_s^2 [m] \{\psi_s\} = [k] \{\psi_s\} \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione per $\{\psi_s\}^T$ e la seconda per $\{\psi_r\}^T$, otteniamo:

$$\textcircled{1} \{\psi_s\}^T \omega_r^2 [m] \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\}$$

$$\textcircled{2} \{\psi_r\}^T \omega_s^2 [m] \{\psi_s\} = \{\psi_r\}^T [k] \{\psi_s\}$$

È possibile trasporre l'equazione $\textcircled{2}$, ottenendo:

$$\textcircled{2}^T: \omega_s^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\}$$

A causa della simmetria delle matrici di massa e di rigidità, $[m]^T = [m]$ e $[k]^T = [k]$.

$$\textcircled{2}^T: \omega_s^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\}$$

La $\textcircled{1}$ e la $\textcircled{2}^T$ hanno il secondo membro uguale

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}^T := (\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$$

⇓

$\textcircled{1}$ Se $\omega_r \neq \omega_s$, allora $\{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$ **m-ORTOGONALITÀ (m-1)**
"gli autovettori sono m-ortogonali"

$\textcircled{2}$ Se $\omega_r = \omega_s$, allora $(\omega_r^2 - \omega_s^2) = 0$

$$\{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\} = [m_r] > 0 \quad \text{MASSA MODALE r-esima}$$

$\omega_r \neq \omega_s$, dalla $\textcircled{1}$, poiché il primo membro è 0 (a meno di ω_r^2), anche il secondo lo sarà:

$$\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = 0 \quad \text{k-ORTOGONALITÀ (k-1)}$$

$\textcircled{2}$ Se $\omega_r = \omega_s$, allora $\{\psi_r\}^T [k] \{\psi_r\} = [k_r] = m_r \omega_r^2 \geq 0$ **RIGIDEZZA MODALE r-esima**

IN SINTESI

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] = \text{diag}(m_r)$$

$$[\Psi]^T [k] [\Psi] = \text{diag}(k_r)$$

Si ottengono matrici diagonali perché al di fuori della diagonale prendo autovalori diversi.

25.

Quando faccio la trasposizione, cambio l'ordine delle matrici.

AUTOVALORI RIPETUTI cenno

Considero un sistema vibrante ad m g.d.l., caratterizzato da p autovalori ripetuti con $2 \leq p \leq m$.

Eq. caratteristica: $(\omega^2 - \omega_0^2)^p f(\omega^2) = 0$
radice multipla

L'autovalore ω_0^2 si porta dietro i suoi autovettori, e lo stesso fanno gli altri autovalori.

Il problema nasce quando si vogliono confrontare 2 autovettori dello stesso autovalore multiplo, la m -ortogonalità potrebbe non valere. Esistono alcuni teoremi che dicono che è sempre possibile scegliere autovettori associati allo stesso autovalore in modo che sia comunque rispettata la m -ortogonalità.

Es.

3 g.d.l.

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il problema agli autovalori $([k] - \omega^2[m])\{x_0\} = \{0\}$ si ottiene:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si nota l'autovalore ripetuto $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0$
 $\omega_3^2 = 1$

Si può verificare che si sceglie la matrice modale come

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e si calcola $[\Psi]^T [m] [\Psi] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i primi 2 autovettori non sono ortogonali tra loro

Sceglie $[\tilde{\Psi}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\tilde{\Psi}]^T [m] [\tilde{\Psi}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Scegliendo gli autovettori in maniera appropriata, facendo il prodotto otteniamo la matrice diagonale.

$[c]$ è non proporzionale quando $[\Psi]^T [c] [\Psi]$ non è diagonale.

Se $[\Psi]^T [c] [\Psi]$ è diagonale, lo smorzamento si dice **proporzionale**.

Condiz. sufficiente, ma non necessaria, per avere smorzamento proporzionale:

$$[c_p] = \alpha [m] + \beta [k], \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Se vale questa condizione:

$$\text{diag}(m_r \ddot{\eta}_r) + [\Psi]^T (\alpha [m] + \beta [k]) [\Psi] \{\dot{\eta}_r\} + \text{diag}(k_r) \{\eta_r\} = \{0\}$$

↓ disaccoppiamento

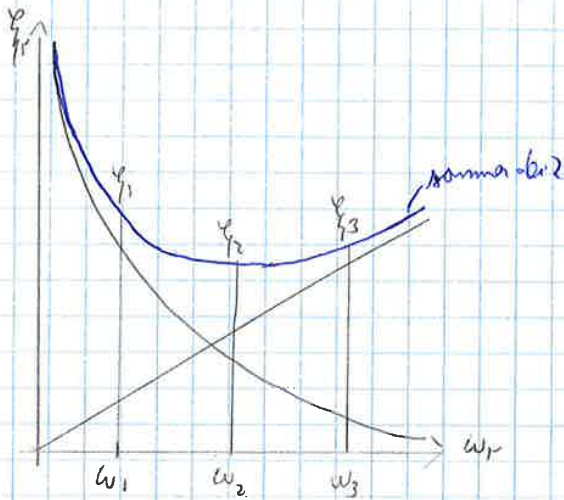
$$m_r \ddot{\eta}_r + (\alpha m_r + \beta k_r) \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = 0$$

↓ Divido per m_r

$$\ddot{\eta}_r + \underbrace{(\alpha + \beta \omega_r^2)}_{2 \zeta_r \omega_r} \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

$$\zeta_r = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2} \omega_r$$

fattore di smorzamento del modo r -esimo



Considerando sistemi discreti prendersi solo alcuni punti

$$\ddot{y}_r = \omega_{dr} \left(-A_r \sin \omega_{dr} t + B_r \cos \omega_{dr} t \right) e^{-\xi_r \omega_{dr} t} - \sum_r \omega_r e^{-\xi_r \omega_r t} \left(A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t \right)$$

$$y_r(0) = A_r$$

$$\dot{y}_r(0) = B_r \omega_{dr} - \sum_r \omega_r A_r$$

$$\{\Psi_s\}^T [m] \{x(0)\} = \{\Psi_s\}^T [m] \sum_{r=1}^m \{\Psi_r\} A_r = m_s A_s$$

$$A_s = \frac{\{\Psi_s\}^T [m] \{x_0\}}{m_s}$$

$$\{\Psi_s\}^T [m] \{v_0\} = \{\Psi_s\}^T [m] \sum_{r=1}^m \{\Psi_r\} (B_r \omega_{dr} - A_r \xi_r \omega_r) = m_s (B_s \omega_{ds} - A_s \xi_s \omega_s)$$

$$B_s = \frac{\{\Psi_s\}^T [m]}{m_s \omega_{ds}} \left(\{v_0\} + \sum_r \omega_s \{x_0\} \right)$$

Queste formule includono anche alcuni non smorzati ($\xi_s = 0$).

Questa seconda strada è più vantaggiosa perché:

- non deve effettuare inversioni di matrici
- ciascuno contributo modale dipende da quel singolo modo
- è vantaggiosa perché è un po' più semplice.

SI USA NELLA PRATICA

1) INVERSIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA DINAMICA

$$[K_{din}] = [k] - \omega^2 [m] + i\omega [c]$$

matrice di rigidità dinamica

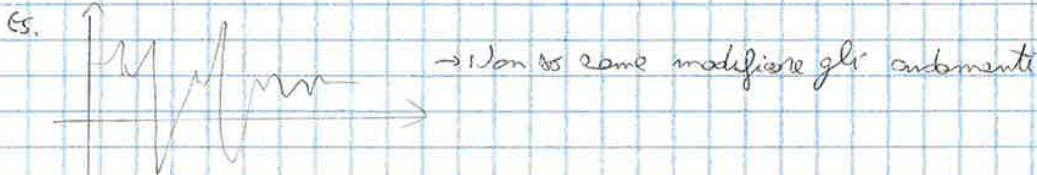
che corrisponde a $[k]$ con un termine inverso ed uno di smorzamento

⇓

$$\{x_0\} = [K_{din}(\omega)]^{-1} \{F_0\}$$

$$[K_{din}]^{-1} = [\alpha(\omega)] \text{ matrice di REATTANZA}$$

Questa strada, valida anche per smorzamenti non proporzionali, è onerosa dal punto di vista computazionale, ma richiede un tempo meno ridotto.



VANTAGGI

SVANTAGGI

- Non è richiesta l'analisi modale
- Non serve l'ipotesi smorzamento proporzionale

- Tempi di calcolo elevati
- Non sappiamo intervenire sugli andamenti

2) APPROCCIO MODALE

Hp: $[c]$ proporzionale

$$\{x_0\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{\psi_r\}^T \{F_0\} \{\psi_r\}}{k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r}$$

ampiezza degli spostamenti per ciascun g.d.l.

$$c_r = \{\psi_r\}^T [c] \{\psi_r\} \text{ smorzamento modale}$$

\sum indica che la risposta del singolo g.d.l. dipende da ogni modo.

Il prodotto al numeratore si fa $\{\psi_r\}^T \{F_0\} = \text{scalare} \rightarrow \text{scalare} \{\psi_r\}$

A causa del termine al denominatore, quando tende a 0 si può avere la risonanza, al variare della pulsazione.

$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_{j0}}{F_{k0}}$ → rapporto fra l'ampiezza dello spostamento j -esimo e la forza applicata in pulsazione k -esima, a patto che tutte le altre forze siano nulle.

↓
 Singoli elementi della matrice di reattanza

$F_{i0} = 0, \forall i \neq k$
 ↓
 tutte le forze nulle eccetto la k -esima

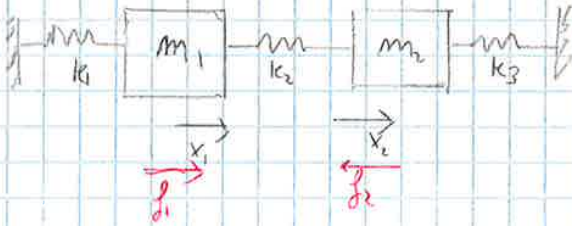
$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{kr} \psi_{jr}}{k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r}$$

REATTANZA

A causa dello smorzamento, $\alpha_{jk}(\omega) \in \mathbb{C}$

EFFETTI CAMBIO DI COORDINATE

31/10/14



Si ottengono dai diagrammi di corpo libero:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Si può applicare l'analisi modale (c'è ortogonalità delle matrici):

Nuovo set di coordinate : $x_1 \triangleq x_2 - x_1$

In questo caso la matrice si ridurrà come:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_3 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Queste matrici non sono più simmetriche
 \Downarrow
 non posso scegliere autovalori ed autovettori

È sempre possibile che le matrici siano simmetriche, posso effettuare delle trasformazioni elementari:

Lascio invariata la seconda equazione, e sostituisco, alla prima, la prima più la seconda:

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_3 & k_3 \\ k_3 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1+f_2 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Le matrici sono ora simmetriche

Meccanica vettoriale \rightarrow Newton

" Analitica \rightarrow Lagrange \rightarrow si basa su quantità scalari, ossia lavoro ed energia.

$$dW_e = -dV$$

In generale:

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_c \quad (\text{esclusa la f. d'inerzia})$$

Calcolo il lavoro delle forze non conservative:

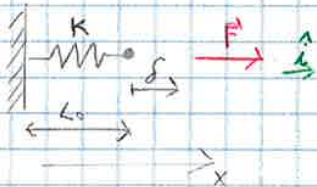
$$\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} \vec{F}_m \cdot d\vec{P} = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} \vec{F} \cdot d\vec{P} - \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{P} = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} dT - \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-dV) = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d(T+V) = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} dE = \Delta E = E_2 - E_1$$

Se $\vec{F}_m = 0$, $E = \text{cost}$ principio di conservazione dell'energia

$$E = T + V \quad \text{ENERGIA TOTALE}$$

ES. 1 MOLLA

Hp.
molla lineare



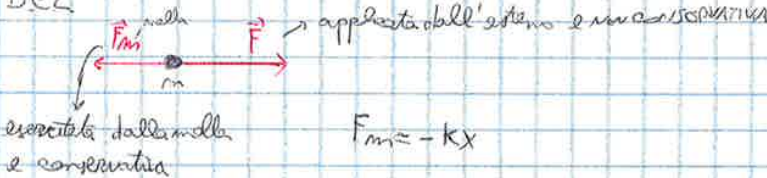
Vogliamo calcolare il lavoro della forza conservativa, cioè il lavoro della forza che la molla esercita sulla massa.

L_0 : lunghezza naturale

$$\vec{P} = (L_0 + x) \hat{i}$$

$$d\vec{P} = dx \hat{i} \quad (L_0 \text{ è costante})$$

DEL



$$F_m = -kx$$

$$\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-kx) dx = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-kx) dx + \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-kx) dx = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-kx) dx - \int_{\vec{P}_2}^{\vec{P}_1} (-kx) dx =$$

La scelta della posizione di riferimento è INIRRELEVANTE, perché si annulla nei calcoli.

$$\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-kx) dx = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} (-kx) dx = \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} = -\frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 = -\Delta V$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{EN. POTENZIALE ELASTICA}$$

↓
lavoro svolto dalla forza conservativa per portare la molla da x_1 a x_2 (posizione di riferimento)

Posso immaginare di avere degli spostamenti virtuali arbitrari, compatibili con i vincoli. Il lavoro virtuale è scomponibile in 2 termini:

$$0 = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i + \sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta v_i$$

Se i vincoli sono LISCI (privi di attrito), allora le reazioni vincolari sono sempre ortogonali al vincolo, e quindi essendo gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli (\perp):

$$\vec{f}_i \cdot \delta \vec{P}_i = 0 \quad \forall i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{P}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i = 0} \quad \text{PLV}$$

VANTAGGIO ✓

Non interviengono reazioni vincolari

SVANTAGGIO X

"Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema sia in equilibrio statico è che il lavoro virtuale di tutte le forze attive sia 0 per tutti gli spostamenti virtuali, scelti arbitrariamente."

vale solo per sistemi privi di attrito.

Se un sistema è in equilibrio senza attrito, a maggior ragione lo è in presenza di attrito.

PRINCIPIO GENERALIZZATO DI D'ALEMBERT

Per la singola massa:

Newton $\vec{R} = m\vec{a}$

D'ALEMBERT $\vec{R} - m\vec{a} = \vec{0}$

con $\vec{F}^I = -m\vec{a}$ forze d'inerzia

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{R} + \vec{F}^I = \vec{0}}$$

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Posso guardare i problemi di dinamica come problemi di statica

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{P}_i = \vec{0}}$$

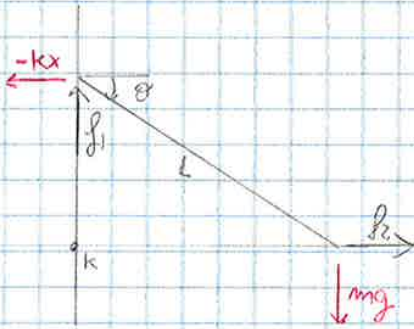
PRINC. GEN. DI D'ALEMBERT

eq. simboliche della dinamica

"Il sistema è in equilibrio dinamico quando il lavoro delle forze attive e delle forze d'inerzia è nullo per ogni spostamento virtuale"

2° metab, → meccanica vettoriale

DCC



f_1, f_2 : reazioni vettoriali

$$\begin{cases} \leftarrow kx - f_2 = 0 \\ \uparrow f_1 - mg = 0 \\ \curvearrowright mgL \cos \theta - kxL \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Occorre calcolare le reazioni vettoriali (per sistemi + complessi è difficile).

Per sistemi con molti g.c.l. la 2° strada è proibitiva, e si preferisce la meccanica analitica.

Se interessano le reazioni vettoriali invece, si deve passare per la meccanica vettoriale.

17/11/19

Risolvero ora con D'ALEMBERT

Il principio è lo stesso, ma si suppone che la massa stia accelerando:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 = \gamma \hat{j} &\Rightarrow \vec{F}_1 \delta \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 - m_2 \ddot{\vec{F}}_2) \delta \vec{F}_2 = 0 \quad (\text{P. di D'Alembert}) \\ \vec{F}_2 = \gamma \hat{j} & \\ &\Downarrow \\ -kx \delta x + (mg - m\ddot{y}) \delta y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con} \\ y &= L \sin \theta & x &= L - L \cos \theta \\ \dot{y} &= L \cos \theta \dot{\theta} & \dot{x} &= L \sin \theta \dot{\theta} \\ \ddot{y} &= -L \sin \theta \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \ddot{\theta} & \ddot{x} &= L \cos \theta \ddot{\theta} \end{aligned}$$

$$-kL(1 - \cos \theta) L \sin \theta \delta \theta + [mg - m(-L \sin \theta \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \ddot{\theta})] L \cos \theta \delta \theta = 0$$

$$\begin{aligned} \forall \delta \theta \\ \Downarrow \\ mL(\dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\theta} \sin \theta) + kL(1 - \cos \theta) \sin \theta - mg \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare le condizioni di equilibrio statico, si cercano delle soluzioni con $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$

θ : posizione di eq. statico

$$\boxed{\frac{mg}{k} = (1 - \cos \theta) \sin \theta}$$

ES. HAMILTON

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2 - mgy \quad (\uparrow)$$

E' più opportuna la coordinata $\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + mgL \sin \theta - \frac{1}{2} kL^2 (1 - \cos \theta)^2 \rightarrow \text{la consideriamo come funzione di 2 variabili } (\theta \text{ e } \dot{\theta})$$

devo ora calcolare la variazione di \mathcal{L} :

\rightarrow si considera θ come una variabile a se stante

$$\delta \mathcal{L} = mL^2 \cos \theta (-\sin \theta) \delta \theta \cdot \dot{\theta}^2 + mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + mgL \cos \theta \delta \theta - kL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta}] dt = \text{su questo termine } \delta \dot{\theta} \text{ non abbiamo condizioni, quindi dobbiamo ricorrendoci a } \delta \theta:$$

$$\int_{t_1}^{t_2} mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\delta \theta) dt =$$

\downarrow integra per parti

$$\left[\underbrace{mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}}_0 \underbrace{\delta \theta}_0 \right]_{t_1}^{t_2} - mL^2 \int_{t_1}^{t_2} (-2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + \cos^2 \theta \ddot{\theta}) \delta \theta dt$$

Il principio di Hamilton sarà quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \delta \theta dt = 0 \quad \forall \delta \theta$$

\Leftrightarrow

la funzione integranda è 0 $\Rightarrow f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = 0$
eq. del moto

$$L = T - V = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_m, \underbrace{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m}_{\text{en. cinetica}}, t)$$

$$\overline{\delta W_{nc}} = \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k dt = 0$$

PR. DI HAMILTON

con $\delta q_1(t_1) = \dots = \delta q_m(t_1) = \delta q_1(t_2) = \dots = \delta q_m(t_2) = 0$

Le variazioni delle coordinate lagrangiane inietate devono essere 0.

Imponendo la stazionarietà dell'integrale si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE

$k=1..m$

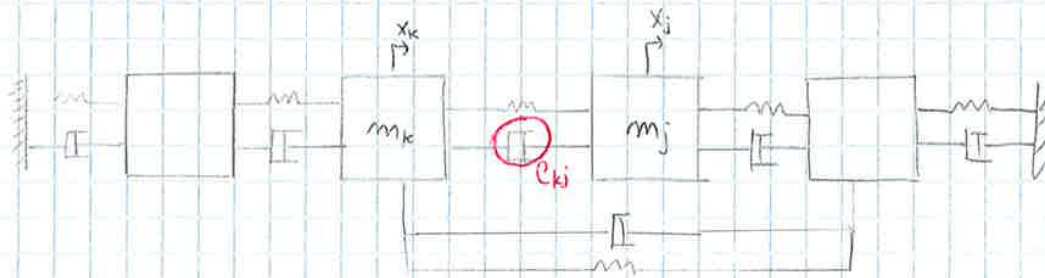
Bisogna scrivere en. cinetica e potenziale rispetto alle coordinate lagrangiane (x, y, α, θ) .

Sostituire tutti e applicare le equazioni di Lagrange. Non sono necessarie posizioni vincolari, forze e momenti d'inerzia, accelerazioni.

CIT. LAGRANGE

"In questo libro non troverete neanche una figura".

Es.



Nelle Q_k , considereremo le forze (attive di tipo non conservativo)

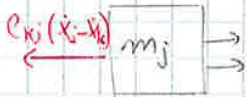
\swarrow esterne
 \searrow interne
 sul g.d.l. $l=k$ sul g.d.l. $l=j$

c_{kj} : smorzatore che collega i g.d.l. k e j

Dei



Immagina in un certo istante che $x_j > x_k \Rightarrow$ la massa m_k viene tirata verso dx



$$Q_k^{(c_{kj})} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \cdot \vec{e}_i \text{ ma } \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial q_k} \rightarrow \text{le coord. finiche coincidono con la lagrangiana}$$

$$\vec{F}_1 = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i}$$

forza che agisce su m_k

$$\vec{F}_2 = -c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i}$$

$$\vec{F}_1 = \dot{x}_k \hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = \dot{x}_j \hat{i}$$

$$Q_k^{(c_{kj})} = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_k} - c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k} = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left[\frac{1}{2} c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k)^2 \right] = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} U^{(c_{kj})}$$

Scriviamo le equazioni del moto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & -m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_3 & k_3 \\ k_3 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1-f_2 \\ -f_2 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto le stesse matrici ottenute con l'approccio Newtoniano. La formula Lagrangiana fornisce direttamente matrici simmetriche.

bim. [m] simmetrica

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

nessuna dipendenza dalla velocità

forma lineare

forma quadratica

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^a \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^a \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) =$$

m: g.d.l.
N: max

$$= \sum_{k=1}^a \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \cdot \dot{q}_j + \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} =$$

USO CRISTIANO PER PER
SCRIVERE $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$

$$= \sum_{k=1}^a \sum_{j=1}^a M_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^a M_k \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2$$

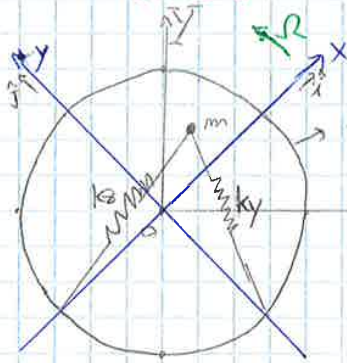
(con dell'angolo fra \vec{r}_i ed $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$)

$$M_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = M_{kj}$$

□

CASO GENERALE (lineare)

20/11/14



telaio rotante, all'interno del quale può muoversi una massa puntiforme collegata elasticamente al telaio.

$X_0 Y_0$: sist. di rif. fissa

$x_0 y_0$: " " " mobile

$\Omega = \text{cost.}$

$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\vec{\Omega} = \Omega\hat{k}$

$\vec{F} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt}$

$\frac{d\hat{i}}{dt} = \Omega\hat{j}$

$\frac{d\hat{j}}{dt} = -\Omega\hat{i}$

FORMULE DI POISSON

$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{i}$

$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{j}$

↓

$\vec{r} = (x - \Omega y)\hat{i} + (y + \Omega x)\hat{j}$

$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right]$

$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right] =$

Verifico che l'en. cinematica si può scrivere come $T_2 + T_1 + T_0$ (Potenziale applicato (gravi):

$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m (x\dot{y} - y\dot{x})\Omega + \frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2)$

$T_1 = \frac{1}{2} (L\dot{\theta}^2, \dot{\phi}^2)$

0: punto di equilibrio in assenza di rotazione

Imponiamo un generico spostamento alla massa, x, y :



$\Delta y = l(x, y) - l_0 =$

$= \sqrt{(l_0 + y)^2 + x^2} - l_0 =$

$= \left[\sqrt{\left(1 + \frac{y}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1 \right] l_0 = l_0 \left[\sqrt{1 + 2\frac{y}{l_0} + \left(\frac{y}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1 \right]$

rispetto ad l_0 , si supponga di avere piccoli spostamenti $x, y \Rightarrow \frac{x}{l_0} \ll 1$

$\Delta y \approx l_0 \left[\left(1 + 2\frac{y}{l_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \approx l_0 \left[1 + \frac{y}{l_0} - 1 \right] = y$

$\frac{y}{l_0} \ll 1$

↓ (con gli stessi ragionamenti)

$\Delta x \approx x$

SALUPPO BINOMIALE

$(1+z)^x \approx 1+xz \quad z \rightarrow 0$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2ml \\ 2ml & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Riscriviamo in forma compatta:

$$[m] \{ \ddot{q} \} + ([c^*] + [s]) \{ \dot{q} \} + ([k^*] + [H]) \{ q \} = \{ 0 \}$$

$$c^* = \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \rightarrow \text{include i 2 contributi di smorzamento interno ed esterno}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{i valori sono quelli per questo caso, non in generale}$$

MATRICE
SIRSOIDALE

Non è SIMMETRICA \Rightarrow NO ANALISI MODALE

è ANTISIMMETRICA

$$[G]^T = -[G] \text{ (sulla diagonale valori opposti)}$$

$$F_c = -m\Omega^2 \vec{r}_{rel}$$

↓
forza di Coriolis

(rel - deriva dall'approssim alla D'Alembert)

$$k^* = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{bmatrix}$$

i regni non sono sbagliati, sono legati alle forze centrifughe; una forza di richiamo elastico e' una forza centrifuga.

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix} : \text{MATRICE CIRCOLARE (antisimmetrica)}$$

↳ trasposizione

Questo è un esempio di sistema non naturale.

FINE MECCANICA
ANALITICA

Quando imponiamo le condizioni al contorno avremo un numero infinito di autofunzioni (w.g.d.l.)

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t) \left(C_r \cos \frac{\omega_r x}{c} + D_r \sin \frac{\omega_r x}{c} \right)$$

$A_r, B_r, C_r, D_r, \omega_r$ costanti

con A_r, B_r : dipendono dalle condizioni iniziali $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'(x,0) = g'(x) \end{cases}$

C_r, D_r, ω_r : .. " " al bordo o contorno

Bisogna vedere i bordi ($x=0$ e $x=l$) come sono legati. ω_r sono le radici degli autovalori, \rightarrow pulsaz. proprie dell'asta, dipendono solo dalle condizioni al bordo.

CASO PARTICOLARE: INCASTRO-LIBERO



$$\phi(x) = C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x$$

$$c = \sqrt{\frac{AE}{\mu}}$$

abbiamo tradurre matematicamente i vincoli

INCASTRO: $u(0,t) = 0 \quad \forall t$

ESTREMO LIBERO:

$$N(x,t) = AE \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$N(l,t) = AE \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$

$$\phi(x) \eta(t) = u(x,t)$$

I. vinco. Bordo: $\phi(0) \eta(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \phi(0) = 0$

II. " " : $AE \phi(l) \eta(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \phi(l) = 0$

$$\phi'(x) = \frac{\omega}{c} \left(-C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x \right)$$

$$\begin{cases} \phi(0) = C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi'(l) = \frac{\omega}{c} D \cos \frac{\omega}{c} l = 0 \end{cases}$$

\downarrow

Vediamo quindi la funzione $\phi(x)$

27/1/14

L'eq. $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ha 2 tipi di soluzioni:

• $u(x,t) = \phi(x) \cdot \eta(t)$ *Soluzione di Bernoulli* (vale per onde stazionarie)

• $u(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$ *soluzione di D'Alembert*

↓
onda
PROGRESSIVA ↓
onda
REGRESSIVA

$f_1(x-ct)$ $y = x-ct$

c velocità ~ 5130 m/s

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{df_1}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = f_1'(-c)$$

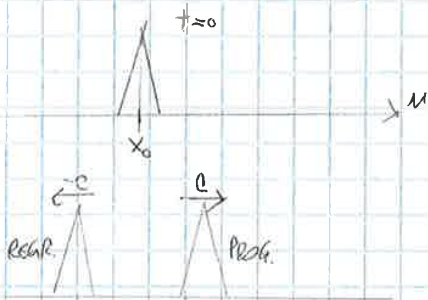
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = f_1''(-c)(-c) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} (-c) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{df_1}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} = f_1'$$

Se sostituisco nell'equazione di partenza:

$f_1'' c^2 = c^2 \cdot f_2'' \Rightarrow$ Una generica soluzione $f_1(x-ct)$ è una soluzione
(f_1 ed f_2 sono soluzioni generiche delle variabili $x-ct$ e $x+ct$.)

Applico una perturbazione:



es. martellata

Osservo 2 onde che si propagano con velocità c e $-c$, rispettivamente onda progressiva e regressiva.

Nei corpi di lunghezza finita le onde arrivano all'estremità del corpo e si riflettono. Poi di nuovo si combinano per dar luogo ad un'onda stazionaria.

VIBRAZIONI FLESSIONALI DI TRAVI RETTILINEE

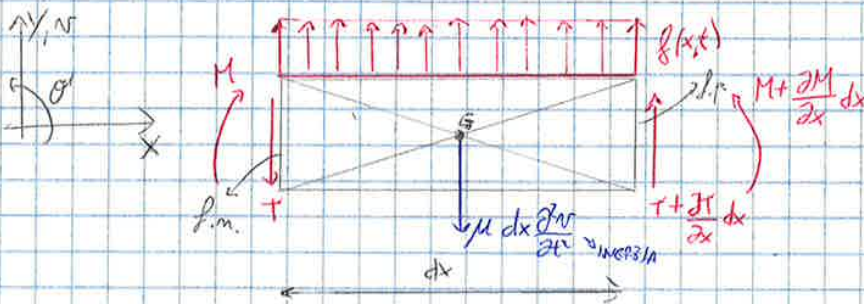
Due modelli di trave:

• MODELLO DI EULER-BERNOULLI

- trascura l'inerzia rotazionale delle sezioni: (trascura il momento d'inerzia rispetto alla flessione)
- trascura la deformabilità a taglio (travi snelle)
 - ↳ dimensione della sezione trasversale trascurabile rispetto alla sua lunghezza.

• MODELLO DI TIMOSHENKO

- Nessuna delle Hp precedenti (travi tozze)



θ : rotazione flessionale, attorno all'asse z

$f(x,t)$: carico (dinamico) costante, per la dimensione d'infinitesimo (dx).

CONVENZIONI

Sulla fascia positiva le sollecitazioni sono comodi al sistema di riferimento.

1^a Hp \Rightarrow trascura il mom. d'inerzia

Impone l'equilibrio alla trazione verticale.

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - \mu dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(x,t) dx = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(x,t) = 0$$

per dimensioni molto sottili

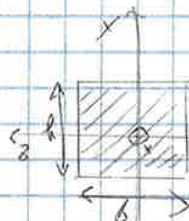
$$\sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{\partial M}{\partial x} dx = M + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} + T \frac{dx}{2} = 0$$

\Downarrow

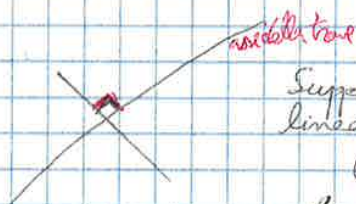
$$T = - \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$



I_z : mom. d'inerzia di area della sezione trasversale rispetto all'asse z.



Suppongo che la sezione si mantenga perpendicolare alla linea d'asse

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{no deformazione a taglio})$$

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

F_r, H_r dipendono dalle condizioni iniziali

$A_r, B_r, C_r, D_r, \beta_r$ dipendono dalle condizioni al bordo
(w_r)

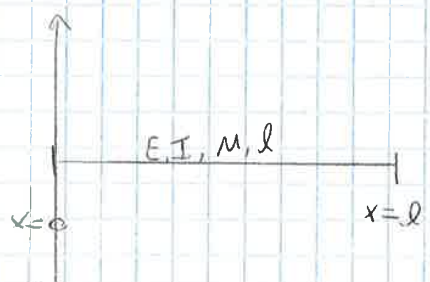
CONDIZIONI AL CONTORNO tipiche per una trave


estremità LIBERA
momento nullo
taglio nullo
 $EI \phi'' = 0$
 $-EI \phi''' = 0$


estremità APPOGGIATA
momento nullo
spostamento nullo
 $EI \phi'' = 0$
 $\phi = 0$


estremità INCASSATA
spostamento nullo
pendenza nulla
 $\phi = 0$
 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$

CS. LIBERA-LIBERA → molto usata nella pratica, i vincoli sono delle molle, con rigidità molto bassa rispetto a quella del sistema.

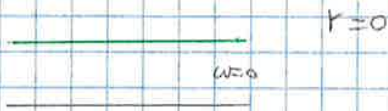


$$\begin{cases} \tau(0,t) = T(l,t) = 0 \\ M(0,t) = M(l,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi''(0) = \phi''(l) = 0 \\ \phi'''(0) = \phi'''(l) = 0 \end{cases}$$

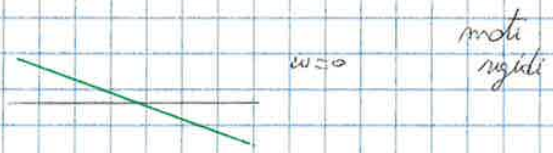
$$\begin{aligned} \phi &= A \cos + B \sin + C \cosh + D \sinh \\ \phi' &= \beta [-A \sin + B \cos + C \sinh + D \cosh] \\ \phi'' &= \beta^2 [-A \cos - B \sin + C \cosh + D \sinh] \\ \phi''' &= \beta^3 [A \sin - B \cos + C \sinh + D \cosh] \\ \phi^{(4)} &= \beta^4 \phi \end{aligned}$$

Rappresentazione & diverse forme modali:

TRASLAZIONE PURA



ROTAZIONE PURA



Sono dei modi a tutti gli effetti. Numericamente posso indicare gli altri β .

$$r=1 \quad \beta_1 l \approx \frac{3}{2} \pi = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$r=2 \quad \beta_2 l \approx \frac{5}{2} \pi = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$r=3 \quad \beta_3 l \approx \frac{7}{2} \pi = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$\begin{cases} \beta_r l \approx \left(r + \frac{1}{2}\right) \pi & \text{con } r=1,2,3 \\ + (\beta=0) \end{cases}$$

Dovrei prendere i β , sostituirli nel sistema per calcolare ω e B .

$$\omega_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Prima di dimostrare l'ortogonalità delle autofunzioni è necessario verificare che essi siano **AUTOAGGIUNTI**.

SIMMETRIA nei discreti \Leftrightarrow operatori AGGIUNTI nel continuo

Dato un operatore lineare \mathcal{L} sul dominio Ω , e assegnate due funzioni u e v che soddisfano le condizioni al contorno, si definisce:

$$(u, \mathcal{L}(v)) = \int_{\Omega} u \mathcal{L}(v) d\Omega \quad \text{prodotto interno fra } u \text{ ed } \mathcal{L} \text{ applicato a } v$$

$$\mathcal{L} \text{ AUTOAGGIUNTO se } (u, \mathcal{L}(v)) = (v, \mathcal{L}(u))$$

Devo dimostrare che M e K sono positivi:

M : MASSA

$$\int_0^l u(x) M(x) v(x) dx = \int_0^l v(x) M(x) u(x) dx \quad \square$$

K : RIGIDITÀ DELLA TRAVE DI E-B.

Supponiamo EI e μ costanti lungo la trave:

$$\int_0^l \mu(x) EI \frac{d^4 v}{dx^4} dx = EI \int_0^l \mu v'''' dx =$$

per parti:

$$= \left[\mu v'''' \right]_0^l - \int_0^l \mu' v'''' dx =$$

\Rightarrow v.c.b. (tutte le combinazioni delle condizioni al contorno annullano)

$$= \left[\mu' v'''' \right]_0^l + \int_0^l \mu'' v'''' dx =$$

$$= \int_0^l \mu'''' v dx \rightarrow \text{Partendo da questa otteniamo } \int_0^l \mu'' v'' dx \quad \square$$

Es. esercizio d'esame:

Dimostrare l'ortogonalità di rigidezza per le vibrazioni assiali

In assenza di moti rigidi (trave sufficientemente vincolata): (subs. fissando)

$$(u, K(u)) = \int_0^l \mu EI \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx > 0 \quad (\text{la funzione integranda è positiva})$$

\square

VIBRAZIONI FORZATE DI SISTEMI CONTINUI

Applicando una ^{distribuzione} forzante (forza generalizzata per unità di lunghezza) ad un sistema continuo monodimensionale, l'equazione del moto diventa:

$$M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + K[w] = f(x, t)$$

Applico l'analisi modale:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x \text{ discreti} \\ \eta \end{matrix} \right\} = \left[\eta \right] / \eta_i$$

Devo applicare l'operatore di massa alla derivata seconda. Posso portare la commutativa fuori dal segno di operatore, perché M e K sono operatori differenziali lineari.

Sostituisco, ottenendo:

$$\int_0^l \phi_i(x) \sum_{i=1}^{\infty} M[\phi_i] \ddot{\eta}_i dx + \int_0^l \phi_i(x) \sum_{i=1}^{\infty} K[\phi_i] \eta_i dx = \int_0^l \phi_i(x) f(x, t) dx$$

Faccio intervenire l'ortogonalità delle autofunzioni

$$\int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

Applicando la m - e la k -ortogonalità delle autofunzioni, si ottiene un insieme di infinite equazioni differenziali lineari del tipo:

$$m_i \ddot{\eta}_i + k_i \eta_i = \int_0^l \phi_i(x) f(x, t) dx = N_i(t) \rightarrow \text{FORZANTE MODALE}$$

integrando rispetto allo spazio
rimane la dipendenza dal tempo

In generale, la soluzione di ciascuna equazione si ottiene applicando l'integrale di convoluzione:

$$\eta_i(t) = \int_0^t N_i(\tau) h_i(t-\tau) d\tau$$

$x \in \text{spazio}$

dimostrazione dell'integrale di convoluzione

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t)$$

$$= \frac{\mu l}{k_{\pi}} \frac{k_{\pi}}{2} = \frac{\mu l}{2} = \frac{m_{TOT}}{2} \quad V_r$$

matrice di massa

Usare fuori che tutte le masse metalliche sono uguali, pari alla metà della massa totale.

$$K_r = \int_0^l \phi_r EI \phi_r'''' dx = m_r \omega_r^2$$

↓
è facile da usare

FORZANTE

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(t) \delta(x - l/2)$$

[kg/m] [m/s²] [N/m] = OK

distribuzione di forze, sempre nulla, tranne in $l/2$

5/12/16

L'equazione in coordinate modali sarà:

$$m_n \ddot{q}_n + k_n q_n = \int_0^l P(t) \delta(x - l/2) \phi_n(x) dx = P(t) \phi_n(l/2)$$

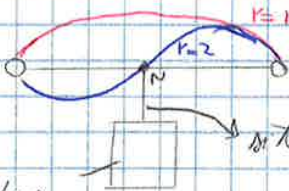
PROP. ORTOGONALITÀ DI DIRAC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$w(x, t) = \sum_{r=1,3,5} \phi_r(x) q_r(t)$$

I contributi modali vanno considerati solo dispari, si dimostra che i contributi pari si annullano:

$$\phi_n(l/2) = \sin\left(\frac{r\pi}{l} \cdot \frac{l}{2}\right) = \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \text{ pari} \\ \pm 1 & \text{se } r \text{ dispari} \end{cases}$$



I modi pari hanno TUTTI un modo improprio.

si toglia il caso e si produce un'oscillazione.

se allago di N esec. solo i modi dispari.

basta a' acqua

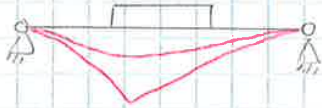
FINE
DEI
CONTINUI

COLLEGIO

Quanto $r=1$ (modo fondamentale):

$$R(\{\omega\}) = \omega_1^2 + \sum_{i=2}^n (\omega_i^2 - \omega_1^2) > \omega_1^2 \quad \omega_i > \omega_1$$

Preso una configurazione generica, e presso tante altre, le inserisco nel quoziente di Rayleigh e quella con R più piccolo è la più vicina alla configurazione vera.



Hp. 1: la prima deformazione dinamica ricrea la forma statica

Hp. 2: forma diversa.

"Più è vicina la forma mobile all'autofunzione, migliore è la stima del 1° modo".

METODO DELL'ENERGIA DI RAYLEIGH

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{b\}$$

$$\{x(t)\} = \{x_0\} g(t) \quad (\text{soluzione sinusoidale})$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [m] \{\dot{x}\} = \frac{1}{2} \{\dot{x}_0\}^T [m] \{\dot{x}_0\} [g'(t)]^2$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \{x\}^T [k] \{x\} = \frac{1}{2} \{x_0\}^T [k] \{x_0\} [g(t)]^2$$

Ma $g(t) = \sin(\omega t + \alpha)$

$\dot{g}(t) = \omega \cos(\omega t + \alpha)$

⇓

$V_{max} = \frac{1}{2} \{x_0\}^T [k] \{x_0\}$ (il massimo di $g(t)$ è 1 (seno))

→ il numeratore del quoziente di Rayleigh ha il significato di energia potenziale elastica

$\bar{T} = \frac{1}{2} \{\dot{x}_0\}^T [m] \{\dot{x}_0\} = \frac{T_{max}}{\omega^2}$ → (per tenere conto dell' ω^2 causato dalla derivata al quadrato)

$E = T + V = T_{max} + 0 = 0 + V_{max} \Rightarrow T_{max} = V_{max}$

$\cos^2=1$ $\sin^2=0$ $\cos^2=0$ $\sin^2=1$

$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\bar{T}} = \frac{\{x_0\}^T [k] \{x_0\}}{\{x_0\}^T [m] \{x_0\}} = R(\{x_0\})$ → con ω continuo è l'unica strada percorribile

Per stimare la prima frequenza propria di un sistema occorre sostituire nel $R(\omega)$ un vettore di tentativo $\{x_0\}$, il più vicino possibile al primo autovettore.

11/12/14

continua da

$$V_{max} = T_{max} = \omega^2 \bar{y}$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx \quad \text{per avere } V_{max}$$

$$T = T_{barra} + T_{volano} =$$

I_u : momento d'inerzia per unità di lunghezza

$$= \frac{1}{2} \int_0^l I_u dx \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} I_u \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} (l, t) \right)^2 =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^l I_u M^2(x) dx + \frac{1}{2} I_u^2(l) \right] \cos^2(\omega t + \alpha) = \omega^2 \bar{y}^2$$

ω viene fuori da

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega \cos(\omega t + \alpha) \psi(x)$$

↓
(al quadrato)

La dipendenza temporale d'ora contenuta solo in ω^2

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\bar{y}^2} = \frac{\int_0^l G J_p \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l I_u M^2(x) dx + I_u^2(l)}$$

ω da $R = \frac{1}{2} \rho A \omega^2$

Applicando una serie di derivazioni per parti si abbassa il grado di derivazione.

Solo adesso la funzione tentativa $u(x)$ deve soddisfare le C.B. geometriche

	C.B. geometriche	C.B. naturali
trave	u, u'	u'', u'''
cassa	u	$u' \rightarrow$ legata a $\theta \Rightarrow \omega \frac{d\psi}{dx}$
bana (trave + cassa)	\emptyset	\emptyset'

1° modo: $u(x) = x$

$u(0) = 0 \rightarrow$ soddisfa le condiz. geometriche

$u'(x) = 1$

controllo dimensionale

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l G J_p dx}{\int_0^l I_u x^2 dx + I_l^2} = \frac{G J_p l}{\frac{I_u l^3}{3} + I_l^2} = \frac{G J_p / l}{\frac{I_u l}{3} + I_l} \rightarrow \frac{N \cdot m}{kg \cdot m^2}$$

STIMA DELLA 1° FREQUENZA PROPRIA

DINAMICA DEI ROTORI - VELOCITÀ CRITICHE FLESSIONALI

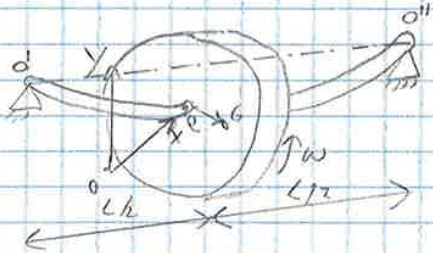
12/12/14

ROTORE: sistema costituito da un albero rotante elastico e continuo (eventualmente dotato di massa), sul quale sono collegati degli elementi (dischi, palette, turbine, ecc...)
es. turbina

Hp semplificativa

- disco sottile rispetto alla lunghezza dell'albero

ROTORE DI JEFFROT (1919)



Hp

- Albero elastico massimale

- disco montato in posizione simmetrica

durante la rotazione, il piano medio del disco si mantiene perpendicolare alla congiungente i 2 centri
nati

non ci sono fenomeni giroscopici

C : centro geometrico del disco

$e = CG$: eccentricità

G : baricentro

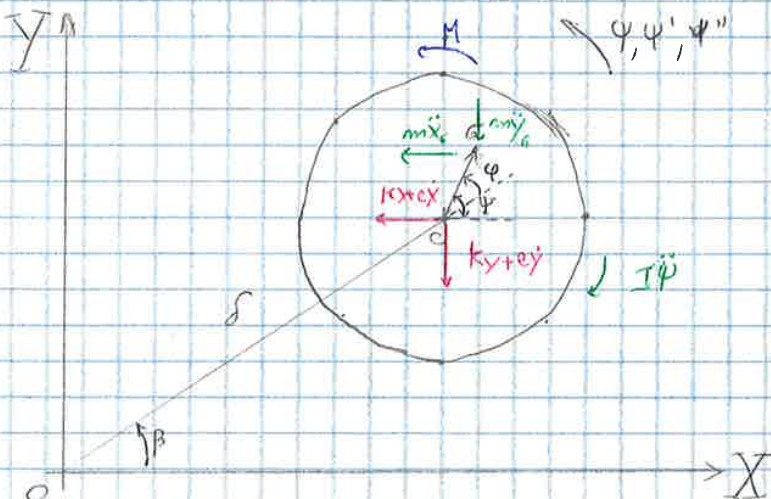
Se $e \neq 0$, si parla di **SQUILIBRIO STATICO**

Es.



il solo effetto della gravità, fa ruotare l'albero spontaneamente, G si sposta sotto C .

Quando tutto è fermo, il piano xy dispone lungo $(O-x-y)$.



— forze e momenti d'inerzia

M : momento motore

ψ : idoneo a rappresentare la rotazione del disco: **ANGOLI POSIZIONE**: angolo fra una retta solabile al corpo e una forza.

β : **ANGOLO DI PRESSIONE**: angolo formato fra OC e l'assiale, non si riesce a rappresentare la rotazione del disco.

k : rigidità di un albero su 2 appoggi (astabilità)

k_x e k_y : forze di richiamo elastiche dell'albero.

ce : flessia elastica

Hp

- Si aggiunge una forma di smorzamento, c_x e c_y

- albero solame verticale ($\beta \neq 0$)

$$e(x_e, y_e) \equiv x, y \quad \text{D'ora in poi}$$

Vogliamo ora ritornare a quantità reali:

$$z(t) = |z_0| e^{i(\omega t - \varphi)}$$

↓
ampiezza complessa

↘ con questa espressione, φ è positiva (ritardo di fase)

$$|z_0| = \frac{\varepsilon \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]^2 + \left(2\varphi \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}} = \delta$$

$$\tan \varphi = \frac{2\varphi \frac{\omega}{\omega_m}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} \quad (\varphi = 0)$$

$$x = \text{Re}(z) = \text{Re}\left[|z_0| e^{i(\omega t - \varphi)}\right]$$

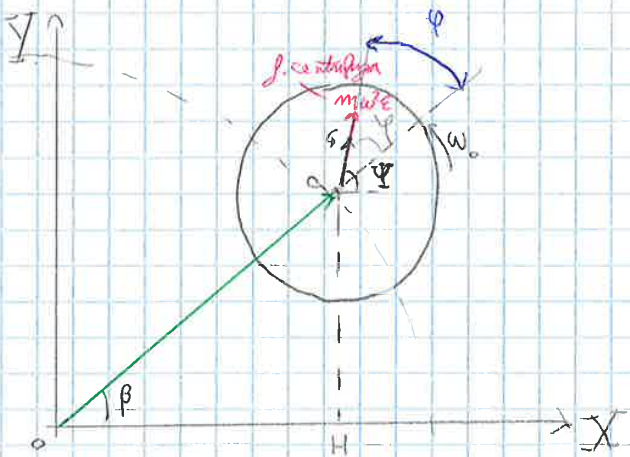
$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = \delta \cos(\omega t - \varphi) \\ y = \delta \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

↓ quadrato e somma:

$$x^2 + y^2 = \delta^2 \text{ costante al variare del tempo}$$

↓
Il mot di precessione è circolare (mot della linea elastica)



$$\boxed{\varphi = \psi - \beta}$$

$$\tan \beta = \frac{y(t)}{x(t)} = \tan(\omega t - \varphi) \quad (\forall t)$$

↓ (d/dt)

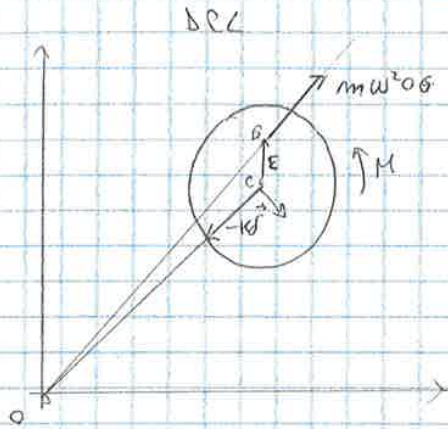
$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \dot{\beta} = \frac{1}{\cos^2(\omega t - \varphi)} \cdot \omega$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\omega} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\omega t - \varphi)} = 1$$

MOTO DI PRESSIONE SINCRONA INFRANTI (+)
(0 " SINCRONA)

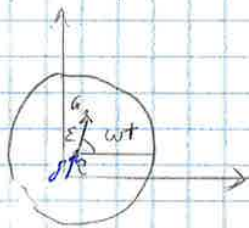
" \vec{oe} è un ritardo rispetto alla forzante $\vec{m\omega t e}$ di un angolo φ "



$\Psi = \beta + \varphi$ se $\dot{\varphi} = 0$
 \downarrow Derivata
 $\omega = \dot{\beta}$ $\dot{\beta}/\omega = +1$

SIGILIFICATO DELLA FASE

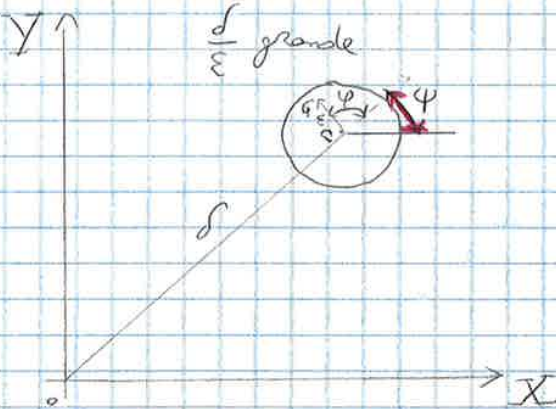
1) $\omega \ll \omega_m$ (quasi statica) $\varphi \approx 0$ La traiettoria di G è esterna



\Downarrow δ ed ε sono circa allineati

δ dovrebbe essere molto minore di ε (quasi)

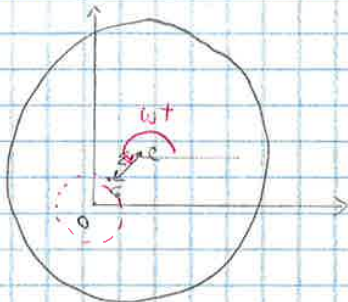
2) $\omega = \omega_m$ $\varphi = 90^\circ$



$\frac{d}{\epsilon}$ grande

Nella risonanza, G precede C.

3) $\omega \gg \omega_m$



$\varphi \approx 180^\circ$

$\vec{\sigma} = -\vec{\epsilon}$ si parla di **AUTOCENTRAMENTO**

La traiettoria di G è interna alla traiettoria di C.

Quando la velocità diventa elevata, il centro di massa G si porta verso il centro, per minimizzare i problemi → come un'autozifera.

Piccola $w = \text{cost}$:

$$\begin{cases} \ddot{X}_G = \ddot{X} - \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{Y}_G = \ddot{Y} - \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_x x = m\omega^2 \varepsilon \cos \omega t \\ m\ddot{y} + k_y y = m\omega^2 \varepsilon \sin \omega t \end{cases}$$

(Se $k_x = k_y$ ottenerei il modello di prima)

\downarrow In questo caso non posso ricorrere ad una coordinata complessa.

$$\begin{cases} x = X_0 \cos \omega t \\ y = Y_0 \sin \omega t \end{cases}$$

la fase varia 0° o 180°
 \downarrow
($X_0 < 0$)

$X_0, Y_0 \in \mathbb{R}$

Sostituisco nelle eq. del moto:

$$(k_x - m\omega^2) X_0 = m\omega^2 \varepsilon$$

$$(k_y - m\omega^2) Y_0 = m\omega^2 \varepsilon$$

lo elimino la dipendenza dal t.

$$X_0 = \frac{m\omega^2 \varepsilon}{k_x - m\omega^2} = \frac{\frac{1}{m} \omega^2 \varepsilon}{\omega_x^2 - \omega^2}$$

$$Y_0 = \frac{m\omega^2 \varepsilon}{k_y - m\omega^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon}{\omega_y^2 - \omega^2}$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} = \omega_{\text{rot} \pm}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} = \omega_{\text{rot} \pm}$$

velocità critiche flessionali

\downarrow ω_x o $\omega_y \Rightarrow$ RISONANZA

Hip. $k_x < k_y$

Quadranti e rombo:

$$\left(\frac{x}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_0}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

\downarrow e' un ELLISSE \rightarrow i moti di precessione sono ellittici

(Se $k_x = k_y$ circonferenza)

Semiassi $|X_0|, |Y_0|$ negativi

$$\tan \beta = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Y_0}{X_0} \tan(\omega t) \quad \forall t$$

\downarrow d/dt

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \dot{\beta} = \frac{Y_0}{X_0} \frac{1}{\cos^2 \omega t} \omega$$

$$\text{Sign} \frac{\dot{\beta}}{\omega} = \text{sign} \frac{Y_0}{X_0}$$

Se il segno e' -, rotore e linea elastica hanno versi di rotazione opposti.

19/12/16

$$\omega < \omega_x < \omega_y$$

$$x_0 > y_0 > 0$$

Moto in avanti (F)

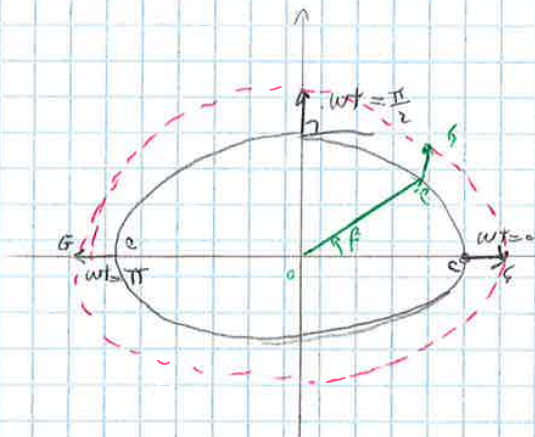
Vogliamo rappresentare l'ellisse:

$$\omega t = 0 \quad \begin{cases} x_c = x_0 \\ y_c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_G = x_0 + \epsilon \\ y_G = 0 \end{cases}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = y_0 + \epsilon \end{cases}$$

$$\omega t = \pi \quad \begin{cases} x_c = x_0 \\ y_c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_G = -x_0 - \epsilon \\ y_G = 0 \end{cases}$$

possiamo disegnare la traiettoria (orbita di precessione)



La linea elastica ruota con verso concorde a quello di ω

La traiettoria di G è concentrica a quella del.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} x_0 = -\epsilon$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} y_0 = -\epsilon$$

$(x_G, y_G) \rightarrow (0, 0)$ il baricentro tende a coincidere con il centro indeformato.
 ↳ autolifera del rotore **AUTO CENTRAMENTO**

Approfondiamo il problema dello **SGUilibrio Dinamico**:



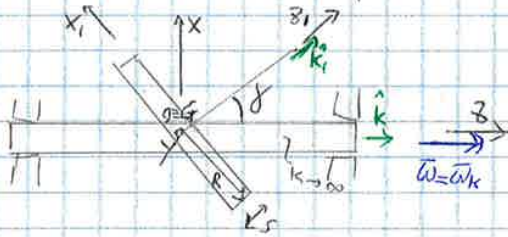
albero flessibile e senza massa:

γ : **SGUilibrio Dinamico** (senza angolare)

L'asse di rotazione dell'albero non coincide con l'asse di simmetria del disco.

ESEMPIO ①

Disco montato con uno squilibrio dinamico, ma infinitamente rigido.



asse polare del disco + 2 assi ortogonali tra di loro rispetto all'asse polare. ↳ stesso una terza centrale

x, y, z : tema fissa, baricentrica, ma non è centrale in quanto z non è l'asse polare.

x_1, y_1, z_1 : tema centrale e mobile, ruota alla velocità ω .

$$A = I_{x_1 y_1} = I_d = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m s^2$$

$$B = A$$

$$C = I_p = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\vec{M}'_E = \frac{d\vec{K}}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \hat{i}_1)}_P \hat{i}_1 + \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \hat{j}_1)}_{\dot{\delta}} \hat{j}_1 + \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \hat{k}_1)}_V \hat{k}_1$$

$- \omega \sin \delta$ $\dot{\delta}$ $\omega \cos \delta$

$\vec{M}' = -(I_p - I_d) \omega^2 \sin \delta \cos \delta \hat{j}_1$ per il fatto stesso che il disco sta ruotando con uno squilibrio dinamico, nasce una forza d'inerzia il cui momento è \vec{M}' .

L'angolo δ generalmente è piccolo $\Rightarrow \sin \delta \approx \delta$
 $\cos \delta \approx 1$

$$\boxed{\vec{M}' = -(I_p - I_d) \omega^2 \delta \hat{j}_1} \quad \vec{J} = \delta \hat{j}_1 \text{ vettore squilibrio}$$

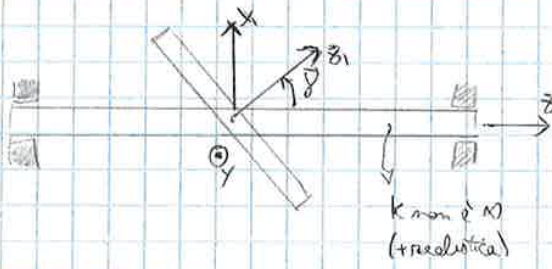
• Se $I_p > I_d \rightarrow$ disco sottile $\Rightarrow \vec{M}'$ è RADDIVISANTE. \vec{M}' tende a raddrizzare il disco (non c'è fa, perché l'albero è rigido)

• Se $I_p < I_d \rightarrow$ disco lungo $\Rightarrow \vec{M}'$ è RIBALTANTE. \vec{M}' tende a ribaltare il disco.

In entrambi i casi nascono delle reazioni circolari rotanti (carico unico sui cuscinetti).

ROTORE CON SQUILIBRIO DINAMICO

8/01/15



C'è un errore di montaggio (sbilanciamento dinamico)
 ↓

Nascono delle vibrazioni d'innescia, e l'albero inizia a incurvarsi.



Alla rotazione elastica θ_y si somma l'errore di montaggio //
 equivarie ad una rotazione della linea elastica.

PREMESSA: procedura non rigorosa

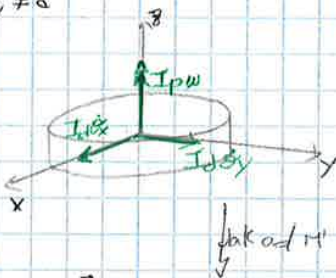
Per effetto della rotazione, la terna centrale ruota continuamente.

La forzante è dovuta alla presenza dello squilibrio dinamico.

① Considero $\delta = 0$:

$\theta_x = 0, \theta_y = 0 \Rightarrow$ la terna centrale d'innescia coincide con (x, y, z)

$\dot{\theta}_x \neq 0, \dot{\theta}_y \neq 0$



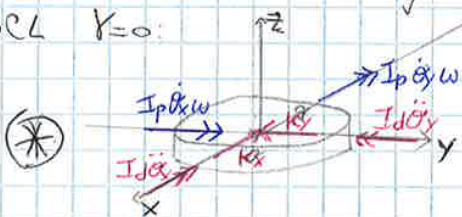
$$\{K_s\} = [I_s] \{w\}$$

$$[I_s] = \text{diag} (I_d, I_d, I_p)$$

| / |
 diametrali | polo
 (x) (y) (z)

$$\vec{M} = -\frac{dK}{dt}$$

DCL $\delta = 0$:



Derivare k_x e cambio segno:

Derivare $I_p \omega$ ($= 0$ perché $\omega = \text{cost}$)

Derivare $I_d \ddot{\theta}_x$ ($= -I_d \ddot{\theta}_x$)

" $I_d \ddot{\theta}_y$ ($= -I_d \ddot{\theta}_y$)

L'albero reagisce alla rotazione ($k_{\theta_x}, k_{\theta_y}$, con k_{θ} opportuna costante elastica).

Durante la rotazione, $I_p \omega$ cambia direzione: stessa situazione dell'esempio 2.

Il disco ruota con ω , e anno delle velocità di rotazione $\dot{\theta}_x$ e $\dot{\theta}_y$.

Se applico una rotazione $\dot{\theta}_x$, "vettore trasportato" sulla $x \Rightarrow$ la coppia giroscopica è perpendicolare a $\dot{\theta}_x$ e ω , quindi è diretta lungo y :
 $I_p \dot{\theta}_x \omega$

" " " " $\dot{\theta}_y$, " " " " $\dot{\theta}_y \Rightarrow I_p \dot{\theta}_y \omega$

A quest punto servono le 2 equazioni del moto che voglio ridurre:

$$x) I_d \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y + k \theta_x = (I_p - I_d) \gamma \omega^2 \sin \omega t \quad (1)$$

$$y) I_d \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x + k \theta_y = -(I_p - I_d) \gamma \omega^2 \cos \omega t \quad (2)$$

→ Potrei usare la forma matriciale, ma è inutile:

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix}$$
 è antisimmetrica.

Ritorno allora alle variabili complesse:

$(1) + i(2)$:

$$I_d (\ddot{\theta}_x + i \ddot{\theta}_y) + I_p \omega (\dot{\theta}_y - i \dot{\theta}_x) + k (\theta_x + i \theta_y) = (I_p - I_d) \omega^2 \gamma (\sin \omega t - i \cos \omega t)$$

$$\theta = \theta_x + i \theta_y \in \mathbb{C}$$

$$\dot{\theta}_y - i \dot{\theta}_x = -i (\dot{\theta}_x + i \dot{\theta}_y)$$

$$\sin \omega t - i \cos \omega t = -i (\cos \omega t + i \sin \omega t) = -i e^{i \omega t}$$

Tratto un sistema a 2 gdl. come un sistema a 1 gdl nella variabile complessa.

$$I_d \ddot{\theta} - i I_p \omega \dot{\theta} + k \theta = -i \gamma \omega^2 (I_p - I_d) e^{i \omega t}$$

DIAGRAMMA DI CAMPBELL

$\lambda = \lambda(\omega)$ si rappresentano gli autovalori λ in funzione della velocità di rotazione ω :

omogenea associata ($\gamma=0$):

$$I_d \ddot{\theta} - i I_p \omega \dot{\theta} + k \theta = 0$$

$$\theta = \theta_0 e^{s t} \quad (\text{con } s \in \mathbb{C})$$

oppure

$$\theta = \theta_0 e^{i \lambda t} \quad (\text{con } \lambda \in \mathbb{R}) \rightarrow \dot{\theta} = i \lambda \theta_0 e^{i \lambda t} \rightarrow \ddot{\theta} = -\lambda^2 \theta_0 e^{i \lambda t}$$

Non essendoci smorzamenti, il moto di precessione non si smorza nel tempo \Rightarrow SISTEMA CONSERVATIVO.

$$[-\lambda^2 I_d - i I_p \omega i \lambda + k] \theta_0 e^{i \lambda t} = 0$$

$$I_d \lambda^2 - I_p \omega \lambda - k = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{I_p \omega \pm \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 k I_d}}{2 I_d}$$

$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda$ reali (sistema conservativo)

$$\bullet \lambda_1 = \frac{I_p \omega + \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 k I_d}}{2 I_d}$$

FORWARDS

$$\lambda/\omega > 0$$

momento in avanti della linea elastica.

$$\bullet \lambda_2 = \frac{I_p \omega - \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 k I_d}}{2 I_d}$$

BACKWARDS

$$\lambda/\omega < 0$$

moto di precessione retrogrado, o all'indietro