NUMERO: 1571A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Cibrario

MATERIA: Fisica I + temi d'esame. Prof.Trigiante

03/03/14 FISICA - APPUNTI

FISICA
↓
Acustica: suono e sua propagazione
Ottica: luce
Meccanica: moto
Termodinamica: scambio di calore tra due oggetti
Elettromagnetismo: fenomeni legati al campo elettromagnetico

La distinzione tra le branche della fisica ha motivi essenzialmente storici, poiché si credevano attinenti a fenomeni scorrelati tra loro.
Ma in realtà non è così (infatti la luce, ad esempio, è costituita da un'oscillazione del campo elettrico e magnetico).

XX secolo

1) Proprietà della materia
↓
3 particelle fondamentali
e loro interazioni

2) Leggi della meccanica classica (Newton) inadatte a descrivere le proprietà delle particelle fondamentali e dell'atomo
↓
Meccanica quantistica

3) Meccanica classica (legge della gravitazione universale) inadeguata a descrivere processi che avvengono a velocità molto elevate, prossime a quella della luce
c (v. luce nel vuoto) $\simeq 3 \cdot 10^8$ m/s

Legge della gravitazione universale cessa di valere per campi gravitazionali molto intensi
↓
Albert Einstein → Relatività ristretta (generalizza i processi della meccanica a velocità molto elevate)
→ Relatività generale (generalizza la legge della gravitazione universale)

Stelle → Galassia (10^{18} Km)

Interazione → Forza che uno o più corpi esercitano su un altro corpo il quale a sua volta esercita una forza sui primi (azione reciproca di un corpo su un altro)

1) Forza a distanza (non richiede contatto tra i corpi)
Es.: Forza gravità, forza elettrica

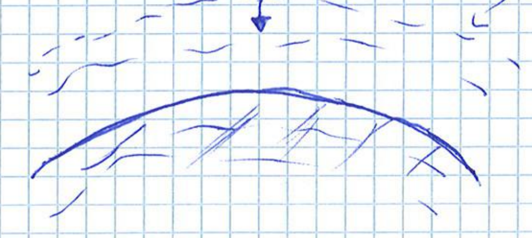
2) Forza dovuta al contatto tra 2 oggetti (in realtà anche questo tipo di forza è descrivibile come una forza a distanza)
Il moto di un pallone conseguente ad un calcio dipende da forze repulsive che si instaurano tra le molecole della palla e del piede che si instaurano a distanze microscopiche.

• Rappresentazione di un'interazione come azione a distanza

L'azione gravitazionale della Terra su un corpo è, ad esempio, istantanea.
Per fenomeni relativistici è necessario introdurre un nuovo oggetto: il campo.
La rappresentazione corretta è mediata da un campo di interazione.

→ 1° momento: particella genera nello spazio intorno a sé un campo

→ 2° momento: il campo esercita la forza: l'interazione è localizzata nel punto in cui è localizzata la particella



campo gravitazionale sia all'esterno che all'interno

N.B. È il campo generato dalla Terra che esercita la forza sul corpo

Metodo Scientifico

XVII → metodo scientifico → Galileo Galilei Teoria ⟷ Esperienza

- Osservazioni
- Ipotesi → modello (è sempre semplice e riduttivo perché mira a spiegare solo certi aspetti del fenomeno)
  matematico

previsioni su fenomeni non ancora osservati → esperimento →(sì) ...

(no → Ipotesi)

→ Carattere quantitativo: ogni grandezza fisica deve essere descritta da una sua misura rispetto ad un'opportuna unità di misura scelta per quella grandezza
quantità matematica (numero, vettore etc)

→ Legge Fisica: relazione tra le grandezze fisiche; relazione matematica tra le corrispondenti misure

→ Definizioni Operative; Grandezza fisica è definita dalla procedura sperimentale per misurarla

→ Grandezze fisiche

FONDAMENTALI

Si misurano per confronto direttamente con l'unità di misura scelta.

Lunghezza, Tempo, massa ...

DERIVATE

Sono definite in funzione di grandezze fondamentali. Si misurano indirettamente attraverso la relazione che le lega in funzione di grandezze fondamentali

Velocità media

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

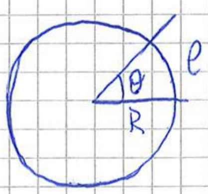
$$\left(\text{Unità di misura di } v\right) = \frac{(\text{Unità misura spostamento})}{(\text{Unità misura Tempo})} = \frac{m}{s}$$

- Una buona unità di misura:

1) Determinabile con la massima precisione
2) Facilmente riproducibile

→ Grandezza è adimensionale quando tutte le grandezze fondamentali che entrano nella sua definizione con potenza 0

$[\ ] = [L^0 T^0 M^0 \ldots]$



$\theta = \frac{\ell}{R}$ misura in radianti $[\theta] = [L \cdot L^{-1}] = [L^0]$

→ Funzioni elementari

$\sin(x)$, $\cos(x)$, $Tg(x)$, $\log(x)$ ...

x deve essere adimensionale perché una qualsiasi funzione elementare è esprimibile come somma di infinite potenze del suo argomento (serie di Taylor)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

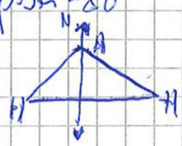
Es.: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Se x non fosse adimensionale l'espansione di Taylor non avrebbe significato fisico

→ Definizione: Unità di misura → proprietà atomiche di elementi soddisfano i requisiti di ottimalità. Le qualità di un certo elemento sono identiche ovunque l'elemento si trovi nello spazio e nel tempo. Le unità di misura sono definite dunque in relazione alle proprietà atomiche della materia

1 m = 1650763,73 λ dall'atomo di Krypton-86

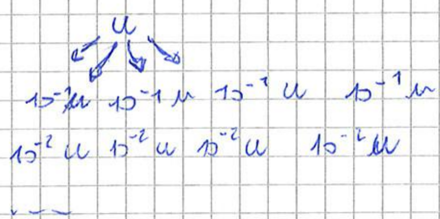
1 s = periodo di oscillazione di N in NH_3



→ Misurazione grandezza

1) Stabilire quando due quantità della stessa grandezza sono uguali
2) Dividere una quantità della grandezza in un numero n di parti uguali

Unità di misura



04/03/14 APPUNTI

$X \pm \delta X$ ← incertezza (errore)

↑ migliore stima del valore della grandezza

FONTI DI INCERTEZZA

- sensibilità dello strumento

Se faccio cadere un grave e calcolo il tempo di caduta ottengo tempi molto diversi dovuti alla mia interazione con lo strumento di misura (es un cronometro)

- errore casuale/accidentale ⇒ il controllo delle condizioni in cui avviene un esperimento non è mai completo

L'entità è casuale cioè X_0 è valore vero le misurazioni saranno distribuite intorno a tale valore con la stessa probabilità

$\updownarrow \delta X > \varepsilon$ (sensibilità dello strumento)

- errori sistematici ⇒ legati a un'errata taratura dello strumento, spostano il risultato in una sola direzione

Supponiamo che una misurazione sia affetta solo da errori casuali

$X \qquad x_1, x_2, x_3, \dots x_N$

Valor medio $\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

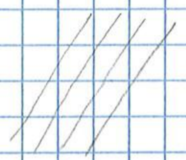
Esso è il valore più vicino a quello vero di qualunque singola misura

Se $N \gg 1 \qquad x_i - x_0$

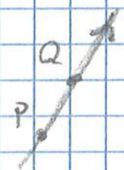
$N \to \infty$ le differenze nella somma si azzerano $\bar{x} \to x_0$

N finito, $\gg 1 \qquad \bar{x} \sim x_0 \qquad$ l'approssimazione è tanto migliore quanto maggiore è

- CALCOLO VETTORIALE

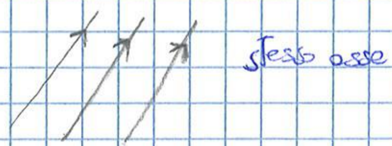


Infinite rette parallele ad una retta data definiscono una DIREZIONE. Lungo una direzione è possibile orientare i punti della retta determinando un VERSO

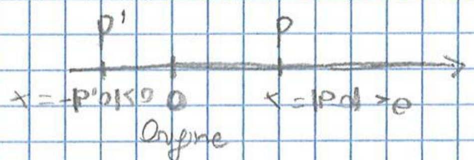


Verso o Orientazione: P precede Q se spostandomi da P a Q mi muovo nello verso della retta

Asse: è una direzione con un verso



Asse X   u unità di misura di lunghezza

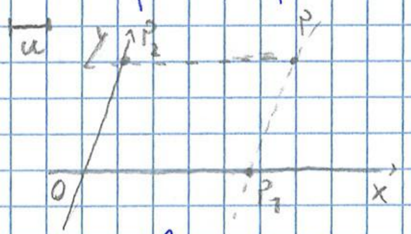


Ogni punto sull'asse può essere descritto da un numero che ne definisce la coordinata

$$x = \begin{cases} |PO| & P \text{ segue } O \\ -|P'O| & P \text{ precede } O \end{cases}$$

$\{X, O, u\}$ definiscono un sistema di coordinate unidimensionale

Per descrivere i punti del piano sono necessari due assi non paralleli

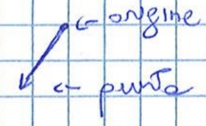


P_1 ha coordinata x rispetto a $\{X, O, u\}$

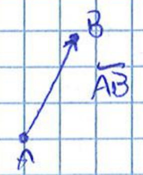
P_2 ha coordinata y rispetto a $\{Y, O, u\}$

- **Vettore**:
  - Ampiezza o modulo $|\vec{v}|$
  - direzione
  - verso

$\vec{v}$

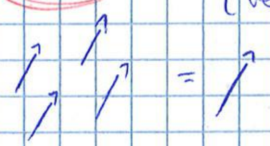


Lo spostamento di un oggetto può essere descritto da un vettore



- $|\vec{AB}|$ (metri)
- direzione (retta per AB)
- verso

- **Vettore libero** ⟷
  - modulo
  - direzione
  - verso



Descrivono lo stesso vettore, che pertanto può essere traslato in modo rigido, cioè purché non si modifichino il modulo, direzione e verso.

- **Vettore applicato** $(P, \vec{v})$ Definito da un punto di applicazione e da un vettore libero

Punto di applicazione ≡ origine

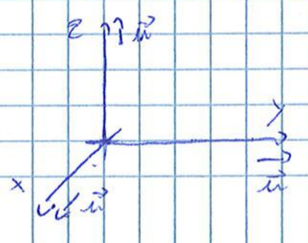
Le forze sono definite da vettori applicati, perché l'effetto che esse hanno dipende dal punto in cui esse sono applicate

- **Versore**: vettore di lunghezza unitaria e adimensionale $\vec{u}$ $|\vec{u}| = 1$

Qualsiasi asse $\xrightarrow{\quad}$ x è descrivibile da un versore $\vec{u}$

$\vec{u}$

asse ⟷ $\vec{u}$ versore

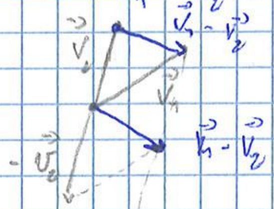


$\vec{u}_x = \vec{i}$

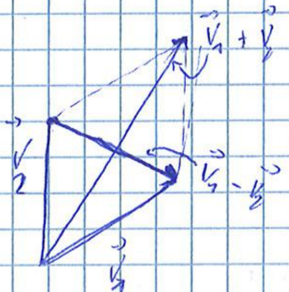
$\vec{u}_y = \vec{j}$

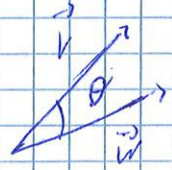
$\vec{u}_z = \vec{k}$

$\vec{V}_1, \vec{V}_2$ $\qquad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$



$\to$ Si origina sulla punta di V_2 e termina sulla punta di V_1

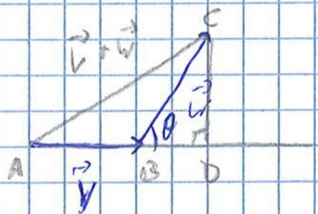




$\theta \leq \pi$

- MODULO DI $\vec{V}+\vec{W}$ IN DIPENDENZA DI $|\vec{V}|$ E $|\vec{W}|$

$|\vec{V} + \vec{W}| \; ? \; |\vec{V}| \; ? \; |\vec{W}|$



$|\overline{AB}| = |\vec{V}|$

$|\overline{BC}| = |\vec{W}|$

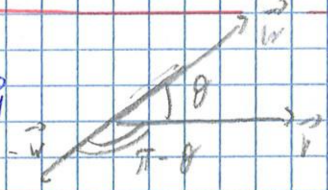
$|\overline{AC}| = |\vec{V} + \vec{W}|$

$|\overline{BD}| = |\vec{W}| \cos\theta \qquad |\overline{AD}| = |AB| + |BD| = |\vec{V}| + |\vec{W}| \cos\theta.$

$|\overline{CD}| = |\vec{W}| \sin\theta$

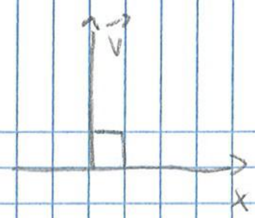
$$\boxed{|\vec{V} + \vec{W}| = \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{\left(|\vec{V}| + |\vec{W}|\cos\theta\right)^2 + \left(|\vec{W}|\sin\theta\right)^2} = \sqrt{|\vec{V}|^2 + 2|\vec{V}\vec{W}|\cos\theta + |\vec{W}|^2\cos^2\theta + |\vec{W}|^2\sin^2\theta} = \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{W}|^2 + 2|\vec{V}\vec{W}|\cos\theta}}$$

$\vec{V}, \vec{W}$



$$\boxed{|\vec{V} - \vec{W}| = |\vec{V} + (-\vec{W})| = \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{W}|^2 + 2|\vec{V}||\vec{W}|\cos(\pi - \theta)} = \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{W}|^2 - 2|\vec{V}||\vec{W}|\cos\theta}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 338

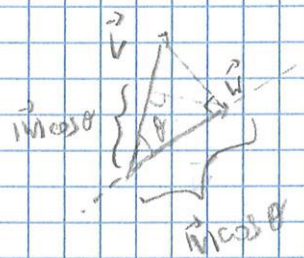


$V_x = 0$ se $\vec{V}_x = \vec{0} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

PRODOTTO SCALARE DI VETTORI

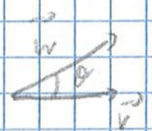
$\vec{V} \cdot \vec{W}$

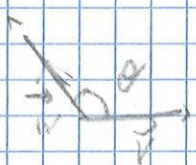
prodotto scalare $\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}| \cdot |\vec{W}| \cos\theta$ (è un numero)



$\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}|(|\vec{W}|\cos\theta) = |\vec{W}|(|\vec{V}|\cos\theta) = \vec{W} \cdot \vec{V}$

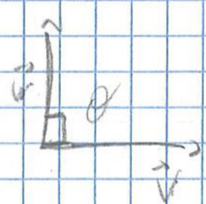
$\vec{V} \cdot \vec{W} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$





$\vec{V} \cdot \vec{W} < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow \theta > \frac{\pi}{2}$

$\vec{V} \cdot \vec{W} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$



$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}||\vec{V}| \cos 0 = |\vec{V}|^2$ sempre positivo

$\vec{u}$ versore $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$

1) $(\vec{V} \cdot \vec{W})a = (a\vec{V}) \cdot \vec{W} = (a\vec{W})\vec{V}$

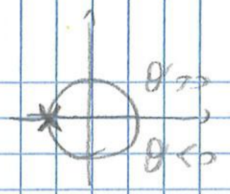
2) $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)\vec{W} = (\vec{V}_1\vec{W}) + (\vec{V}_2\vec{W})$ Proprietà distributiva

$\Rightarrow \vec{V}(\pm\vec{W}) = (\pm\vec{V})\vec{W} = \pm(\vec{V} \cdot \vec{W})$

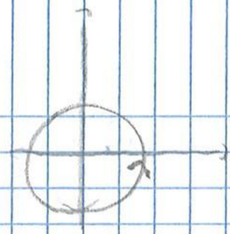
$|\vec{V} \pm \vec{W}| = \sqrt{(\vec{V} \pm \vec{W})(\vec{V} \pm \vec{W})} = \sqrt{(\vec{V})^2 + \vec{V}(\pm\vec{W}) + (\pm\vec{W})(\vec{V}) + (\pm\vec{W})(\pm\vec{W})} =$

$= \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{W}|^2 \pm \vec{V} \cdot \vec{W} \pm \vec{W} \cdot \vec{V}} = \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{W}|^2 \pm 2\vec{V}\vec{W}} = \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{W}|^2 \pm 2|\vec{V}||\vec{W}|\cos\theta}$

$\theta : -\pi \to \pi$



$\theta : 0 \to 2\pi$

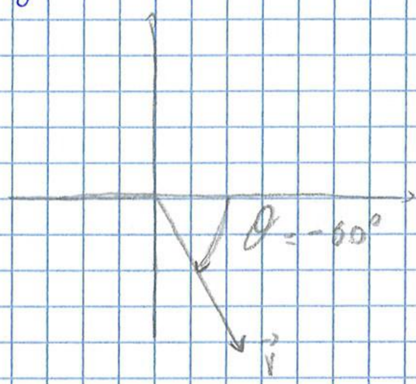


$$\boxed{\begin{aligned} \vec{V} &\leftrightarrow (V_x, V_y) \\ &\leftrightarrow (|\vec{V}|, \theta) \end{aligned}}$$

↳ definisce direzione e verso

Es: $|\vec{V}| = 5u \qquad \theta = -60°$

Disegnare il vettore e calcolarne le componenti rispetto a x e y



$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$

$V_x = |\vec{V}| \cos\theta = 5u \cos(-60°) = 2{,}5u > 0$

$V_y = |\vec{V}| \sin\theta = -5u \sin 60° = -\frac{5}{2}\sqrt{3}\, u$

$\vec{V} = (2{,}5u)\, \vec{u}_x + \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} u\right) \vec{u}_y$

Prodotto scalare con decomposizione

$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y \qquad \vec{W} = W_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y$

$\boxed{\vec{V} \cdot \vec{W}} = (V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y)(W_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y) = V_x W_x \vec{u}_x^{\,2} + \cancel{V_x W_y \vec{u}_x \vec{u}_y} +$

$+ \cancel{V_y W_x \vec{u}_x \vec{u}_y} + V_y W_y \vec{u}_y^{\,2} = \boxed{V_x W_x + V_y W_y}$

$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y \qquad \vec{W} = V_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y$

$\vec{V} + \vec{W} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + W_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y = \vec{u}_x (V_x + W_x) + \vec{u}_y (V_y + W_y)$

$a\vec{V} = a(V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y) = \vec{u}_x (a V_x) + \vec{u}_y (a V_y)$

$-\vec{V} = -V_x \vec{u}_x + (-V_y \vec{u}_y)$

$\vec{V} - \vec{W} = (V_x - W_x)\vec{u}_x + (V_y - W_y)\vec{u}_y$

Es. $\vec{V} = (3,0)$; $\vec{W} = (1,3)$

Calcolare $\vec{V} \pm \vec{W}$

Calcolare ϑ

Disegnare i vettori

—

Si generalizza la somma dei vettori

$\vec{V}_i = (V_{ix}, V_{iy})$ ... $\vec{V}_n = (V_{nx}, V_{ny})$

$\sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} V_{ix} , \sum_{i=1}^{n} V_{iy} \right)$

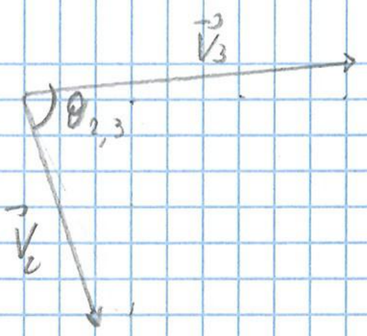
—

Es. 2 $\vec{V}_1 = (4,-3)$ $\vec{V}_2 = (2,-6)$ $\vec{V}_3 = (9,1)$ $\vec{V}_4 = (-3,2)$

Calcolare - $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$

- $\vartheta_{1,2}$ tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$

- $\vartheta_{2,3}$ " $\vec{V}_2$ e $\vec{V}_3$



FISICA - ESERCITAZIONE 06/03/2014

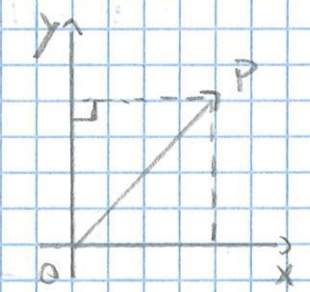
PUNTI DEL PIANO

$\vec{r}$ Vettore posizione di P rispetto ad O origine

$\vec{r} = \vec{OP}$

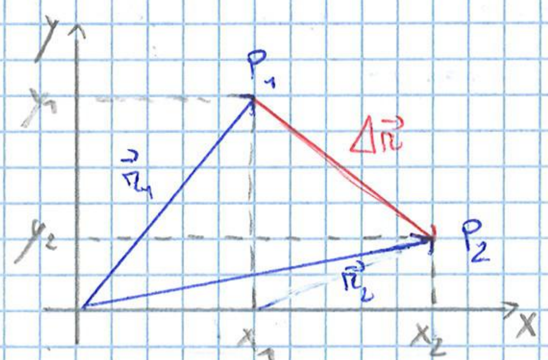
Fissato O, fisso il piano cartesiano ortogonale

$\{x, y, O, u\}$



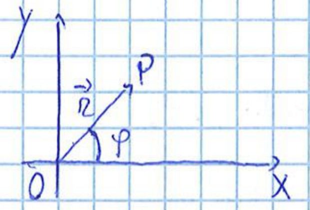
$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = (x,y)$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$



$\vec{OP}_1 = (x_1, y_1)$

$\vec{OP}_2 = (x_2, y_2)$



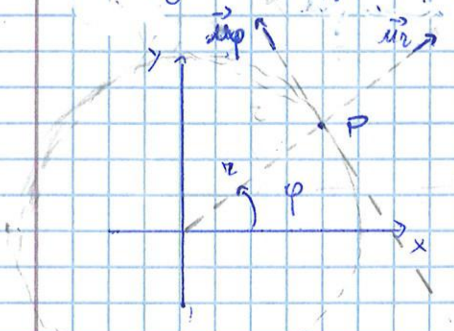
$$P \longleftrightarrow \vec{r} \longleftrightarrow \begin{cases} r = |\vec{r}| \\ \varphi \text{ angolo con } X \\ \quad \hookrightarrow 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$$\boxed{P \begin{array}{l} \nearrow (x, y) \text{ coordinate cartesiane} \\ \searrow (r, \varphi) \text{ coordinate polari piane} \end{array}}$$

<u>SISTEMA DI ASSI POLARI</u>

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

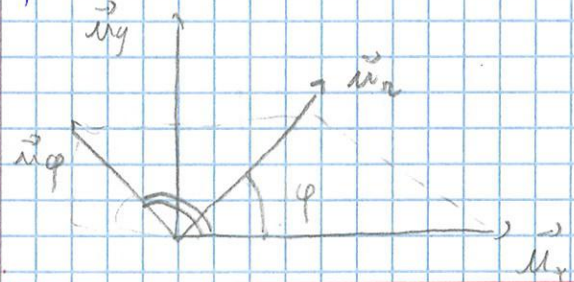
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ Tg(\varphi) = y/x \end{cases}$$



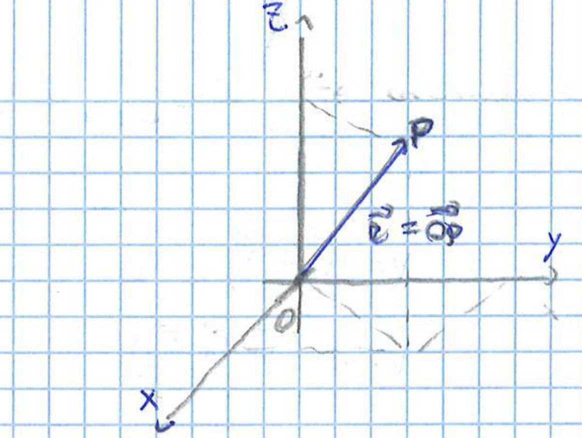
$\vec{u}_r$: versore radiale, definisce l'asse radiale uscente

φ crescente in senso antiorario

I versori polari ruotano e variano in dipendenza del punto, a differenza di quelli cartesiani



$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\varphi\, \vec{u}_x + \sin\varphi\, \vec{u}_\varphi \quad \leftarrow ? \\ \vec{u}_\varphi = \cos(\varphi + 90°)\, \vec{u}_x + \sin(\varphi + 90°)\, \vec{u}_y = -\sin\varphi\, \vec{u}_x + \cos\varphi\, \vec{u}_y \end{cases}}$$



(x, y, z, O, u) SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANO ORTOGONALE

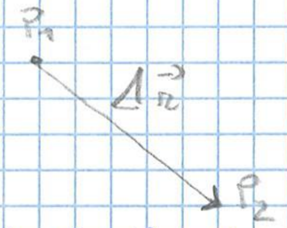
3D

$\vec r = x\vec u_x + y\vec u_y + z\vec u_z = (x, y, z)$ → notazione matriciale

$r = |\vec r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

P_1 $\vec r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec r_1, \vec r_2$ vettore posizione

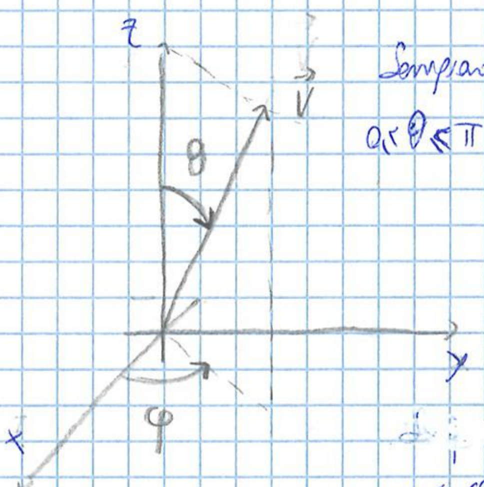
P_2 $\vec r_2 = (x_2, y_2, z_2)$



$\Delta\vec r = \vec r_2 - \vec r_1 = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

$|P_1P_2| = |\Delta\vec r| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$

SISTEMA DI COORDINATE POLARI SFERICHE



Semipiano che si origina in z e passa per $\vec V$

$0 \le \theta \le \pi$ θ angolo tra $\vec V$ e z

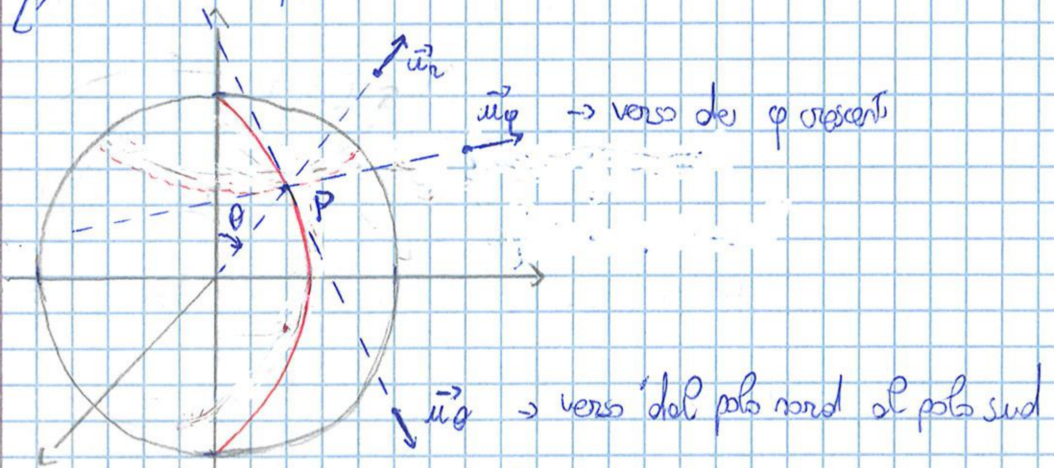
φ angolo diedro tra x e semipiano descritto da θ

$0 \le \varphi < 2\pi$ φ verso positivo se osservatore posto su +z lo vede ruotare in senso antiorario

Infine occorre definire $|\vec V|$ cioè il modulo

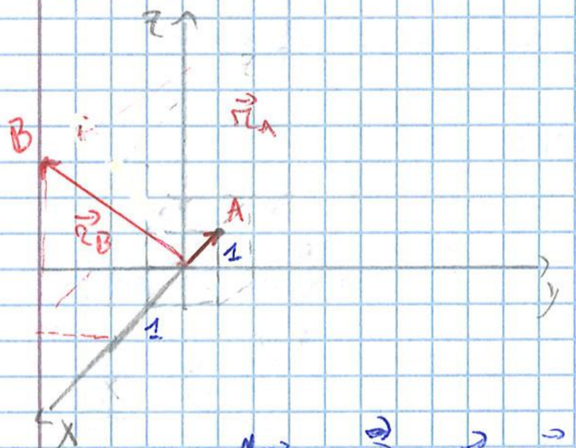
$$\boxed{\vec V \leftrightarrow (V_x, V_y, V_z) \quad \vec V \leftrightarrow (|\vec V|, \theta, \varphi)}$$

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$



$\vec{u}_r$ versore di $\vec{r}$ (versore radiale uscente) $\quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{r} = r\,\vec{u}_r$

- **ESERCIZIO**



A (1, 1, 1)

B (2, -1, 3)

- Distanza
- Versore A → B

$$\Delta\vec{r} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (2,-1,3) - (1,1,1) = (1,-2,2)\ m$$

$$\vec{u} = \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} \qquad |\Delta\vec{r}| = |AB| = \sqrt{1+4+4} = 3\ m$$

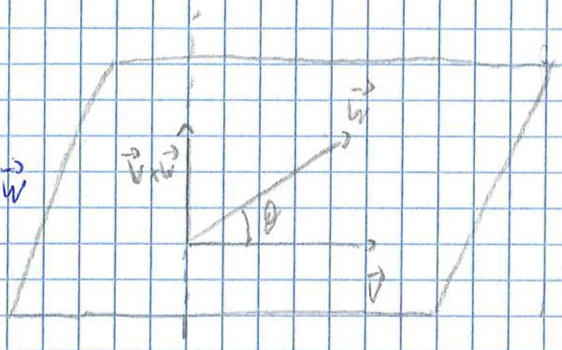
$$\vec{u} = \frac{1}{3}(1,-2,2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

APPUNTI

PRODOTTO VETTORIALE

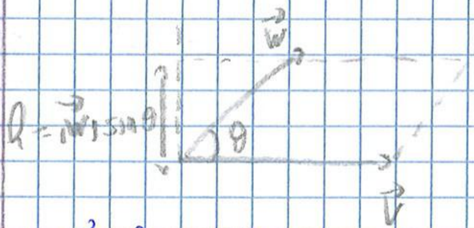
10/03/2019

$\vec{v}, \vec{w}$ $\quad$ $\vec{v} \times \vec{w}$



$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\,|\sin\theta|$$



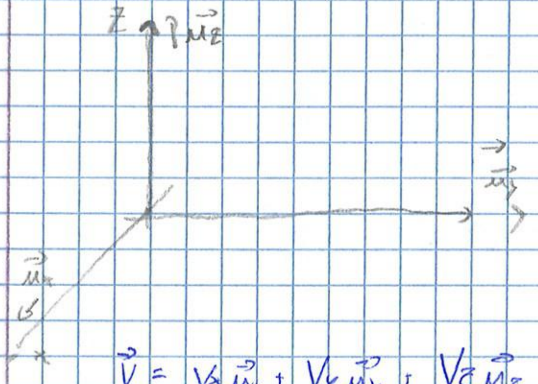
$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\,(|\vec{w}|\sin\theta) = |\vec{v}|\,h = \text{Area parallelogramma}$$

Proprietà

DISTRIBUTIVO $\quad \vec{v} \times (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \times \vec{w}_1 + \vec{v} \times \vec{w}_2$

$$a(\vec{v} \times \vec{w}) = (a\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (a\vec{w})$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0} \iff \vec{v} \parallel \vec{w}$$



$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z = (v_x, v_y, v_z)$ $\quad$ Vettore riga

$\vec{w} = w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z = (w_x, w_y, w_z)$

$\vec{u}_x \times \vec{u}_x = \vec{0}$ $\quad$ (sono paralleli) $\qquad$ $\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$ $\quad$ (Prodotto dei moduli è 1 ed è perpendicolare sia a $\vec{u}_x$ che a $\vec{u}_y$)

$\vec{u}_y \times \vec{u}_y = \vec{0}$

$\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x$

$\vec{u}_x \times \vec{u}_z = -\vec{u}_y$

r = distanza di P dall'asse

$0 \leq \varphi < 2\pi$

L'asse z corrisponde all'asse di simmetria cilindrica

Questo sistema fornisce la rappresentazione più semplice (col minor numero di variabili)

Ad ogni punto P si possono associare 3 assi

Moto - Cinematica

Meccanica
- cinematica → studio del moto indipendentemente dalle cause che ne determinano le caratteristiche → studio descrittivo
- dinamica → studio del moto note le cause che lo determinano (forze) → effetto delle forze sul moto

Un oggetto diresi in moto quando la sua posizione varia nel tempo

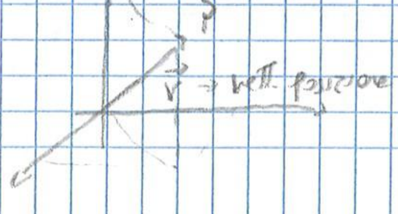
Il moto è però un concetto relativo, infatti la sua descrizione dipende da chi lo osserva. Quando si descrive un moto è sempre necessario specificare l'osservatore: due osservatori diversi descriveranno due moti diversi

Le leggi di trasformazione correlano due descrizioni differenti del moto poiché mettono in relazione posizione, velocità e accelerazione dei due moti osservati

→ Descrizione di un moto:

① Definire la posizione dell'oggetto in ogni istante → fissiamo un sistema di coordinate

$\{x, y, z, \theta, \varphi\}$



$\vec{r} = (x, y, z)$

$P_1 \quad (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$

$P_2 \quad (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ ⇒ Queste variabili non sono tutte indipendenti, ma legate dalle 3 relazioni

$P_3 \quad (x_3(t), y_3(t), z_3(t))$

9 variabili - 3 condizioni che fissano la distanza relativa dei 3 punti = **6** gradi di libertà

Moto di un corpo rigido si può decomporre in 2 componenti

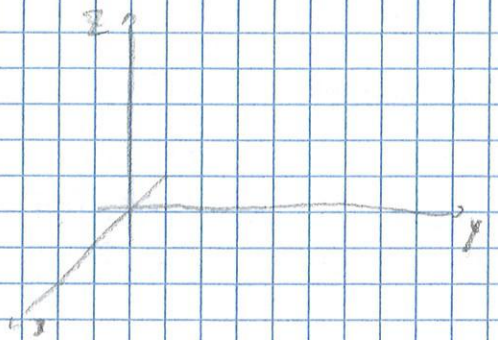
- Traslatorio di insieme (uguale x tutti i punti)
- Moto interno di rotazione rispetto ad un asse

Corpi elastici ⇒ La distanza tra due punti, in presenza di una sollecitazione esterna, varia in un certo intervallo intorno ad una posizione di equilibrio.
Durante una sollecitazione, si sviluppano delle forze che tendono a riportare il corpo alla sua forma generale; cambia inoltre il numero di gradi di libertà.
Mentre la c. traslatoria è sempre uguale, il moto interno si complica con l'aggiunta di un'oscillazione.
Per qualsiasi corpo, più in generale, il moto si può decomporre in

- Componente traslatoria ↓ Associato ad un punto caratteristico dell'insieme detto CENTRO DI MASSA
- Moto interno

In certe situazioni il moto interno è irrilevante:

1) Dimensione del corpo ≪ delle lunghezze in gioco
↳ è difficile rendersi conto della sua struttura interna ⇒ del moto interno



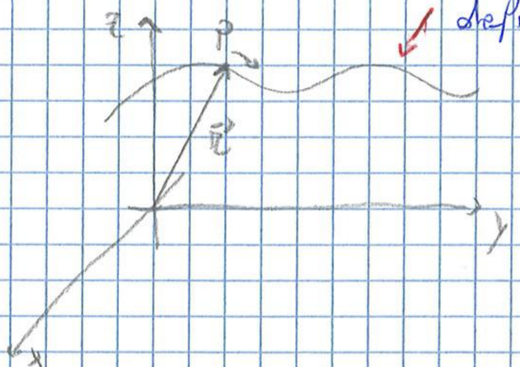
$\{x, y, z, O, u\}$ + strumenti di misura definiscono un sistema di riferimento

Osservatore $\leftrightarrow$ Sistema di riferimento

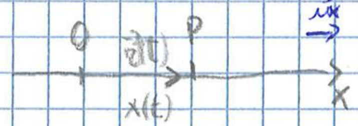
È sempre necessario specificare uno o equivalentemente l'altro

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

La successione delle posizioni occupate nel tempo definisce una curva detta TRAIETTORIA



MOTO RETTILINEO



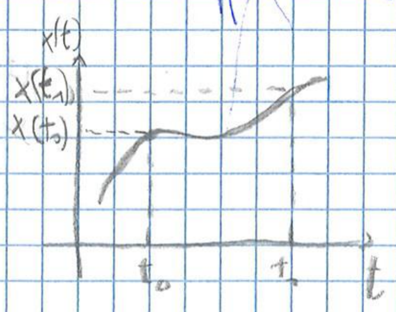
$\{x, O, u\}$ $\rightarrow$ sistema di coordinate unidimensionali

$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x$

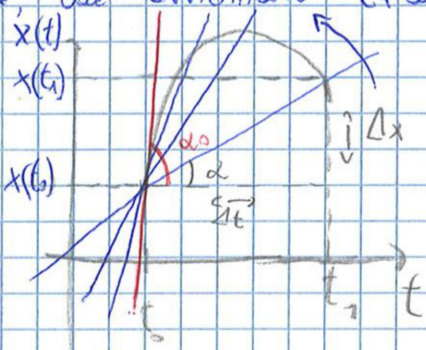
moto $\leftrightarrow$ $x(t)$	Descrivere il moto significa descrivere la posizione in ogni istante, cioè in funzione del tempo

$\rightarrow$ $x(t)$ $\rightarrow$ "legge oraria"

Tale funzione si suole rappresentare attraverso un grafico



Riduciamo Δt, cioè avviciniamo t_1 a t_0



$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = Tan(\alpha)$ varia

$\Delta t \to 0 \quad t_1 \to t_0$

La pendenza della secante $\to$ pendenza della Tangente

$Tan(\alpha) \to Tan(\alpha_0)$

Cioè la velocità media, mano a mano che t_1 si avvicina a t_0, Tende alla derivata della legge oraria

rapporto incrementale di $x(t)$ tra t_0 e $t_0+\Delta t$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_0)$$

$\to$ valore finito (derivata)

$$\boxed{\text{Velocità istantanea} = v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \frac{dx}{dt}(t_0) = \dot{x}(t_0)}$$

$\to$ Rapidità con cui si muove l'oggetto in un certo istante

$\Delta t \to 0$ Per Δt sufficientemente piccolo, ulteriori diminuzioni di Δt, il rapporto incrementale $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ non varia più apprezzabilmente. Posso così approssimare $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ col valore della derivata $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \simeq \frac{dx}{dt}(t_0) = v(t_0)$

$\Delta x \approx \frac{dx}{dt}(t_0) \cdot \Delta t = v(t_0)\Delta t$

L'errore con cui approssimiamo è calcolabile tramite Taylor

$$x(t) = x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t_0)(t-t_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots}_{o(\Delta t^2)} \qquad \text{Serie di Taylor}$$

$$x(t) - x(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)\Delta t + o(\Delta t^2)$$

$\Delta x \approx \frac{dx}{dt}(t_0)\Delta t$ Così scritto ignoro ulteriori termini: l'approssimazione è corretta a meno di ordine Δt^2

$x(t) = a t^3 + b$

$[b] = [L]$

$[a] = [L T^{-3}]$

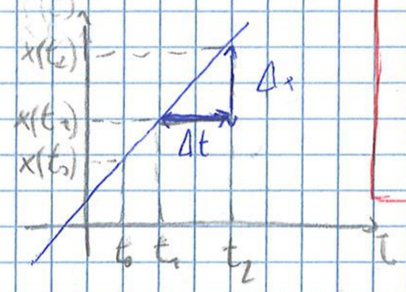
$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3a t^2$

$x(t) = a t + b$ ← Legge oraria generale per il moto uniforme

$v(t) = a \Rightarrow$ costante   Moto uniforme (v = costante)

Moto uniforme

$v = \frac{dx}{dt}$ = costante



$\boxed{x(t) = a t + b \;\downarrow\; \text{Per moto uniforme legge oraria è una retta}}$

→ La velocità è costante poiché la pendenza è costante e, qualunque Δt scelgo, i rapporti incrementali sono uguali, quindi è uguale la pendenza della retta, cioè la velocità media $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$

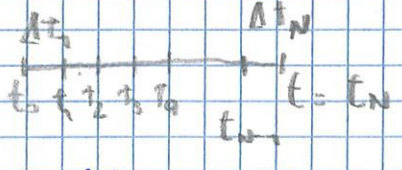
$\boxed{\text{Moto uniforme} \quad v_{ist} = v_{media}}$ in ogni istante

→ Problema inverso della cinematica in

$\forall\, t \geq t_0$ $v(t)$ nota

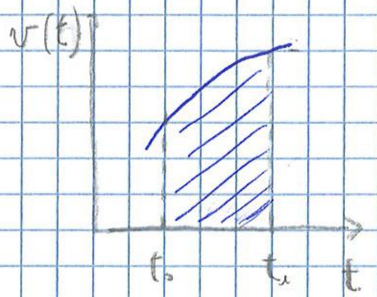
Ricavare la legge oraria $x(t)$

$t > t_0$ fissato



$\bar{v}_N$ velocità media nell'intervallo Δt_N con $n = 1, 2, 3, \dots N$

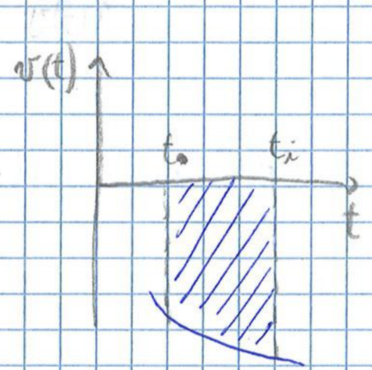
$\Delta t = t - t_0 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots \Delta t_N$



$\Delta x = +$ area > 0

$\Delta x > 0$

$\Delta x < 0$



$\Delta x = -$area < 0

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 338

1) Disegnare la legge oraria da $t_0 = 0\,s$ a $t_2 = 16\,s$

2) Calcolare $\bar{v}$ in $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_0$, $\Delta t_3 = t_2 - t_1$

3) Determinare $v(t)$ → velocità istantanea

Consideriamo istanti $0 < t < t_1 = 10\,s$: moto uniforme, velocità costante

- $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = x(0) + v_1(t - t_0) = v_1 t =$

velocità istantanea = velocità media

$x(t_1) = v_1 t_1$ $\quad v_1 = \dfrac{x(t_1) - x(0)}{t_1 - 0} = \dfrac{x(t_1)}{t_1} = \dfrac{1000\,m}{10\,s} = 100\,m/s$

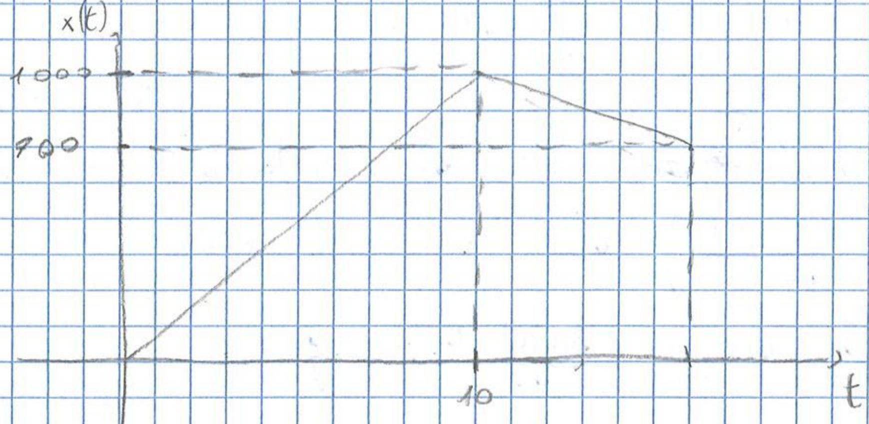
$x(t) = v_1 t = 100\left(\frac{m}{s}\right) t$

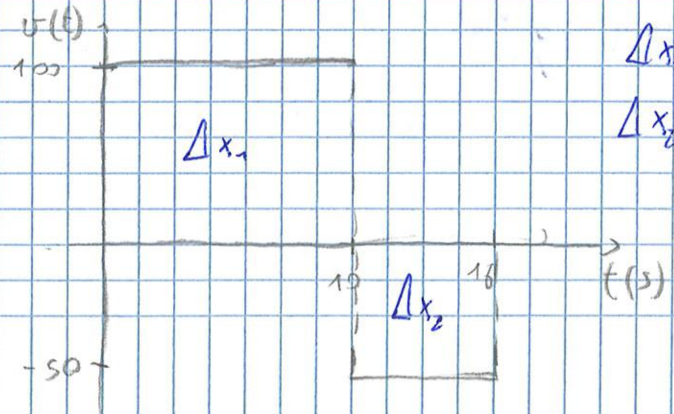
- Consideriamo istanti $t_1 < t < t_2$: moto uniforme

$x(t) = x(t_1) + v_2(t - t_1)$

$v_2 = \dfrac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{700\,m - 1000\,m}{16\,s - 10\,s} = -\dfrac{300}{6}\dfrac{m}{s} = -50\,m/s$

$x(t) = 1000\,m - 50(t - 10\,s)$





$\Delta x_1 = 10\,s \cdot 100\,\frac{m}{s} = 1000\,m$

$\Delta x_2 = (6\,s \cdot (-50)\,\frac{m}{s}) = -300\,m$

$a_{medio} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = \bar{a}\Delta t$

Per Δt sufficientemente piccoli, ulteriori riduzioni di Δt, $\bar{a}$ non varia apprezzabilmente: si può pertanto ipotizzare di aver già ottenuto il valore limite, seppur con una certa approssimazione

$a_{medio} \simeq a(t_0) \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} \simeq a(t_0) \Rightarrow \Delta v \simeq a(t_0)\Delta t = \frac{dv}{dt}(t_0)\Delta t$

$\Delta v = \frac{dv}{dt}(t_0)\Delta t + (\Delta t^2)$
→ non lo consideriamo

Δt infinitesimo $\Rightarrow dt$

$dv = v(t_0 + dt) - v(t_0)$ l'approssimazione diventa esatta

$dv = \frac{dv}{dt}(t_0)\,dt$

PROBLEMA INVERSO DELLA CINEMATICA

Noto $a(t)$ $t = t_0$ $x(t) = ?$

$t > t_0$

Δt_n $n = 1, 2, \dots N$

$\Delta t = t - t_0 = \sum_{n=1}^{N} \Delta t_n$

$\bar{a}_n$ accelerazione media in Δt_n

$\Delta v_n = \bar{a}_n \Delta t_n$

$\Delta v = v(t) - v(t_0) = \sum_{n=1}^{N} \Delta v_n = \sum_{n=1}^{N} \bar{a}_n \Delta t_n$

$N \to \infty$
$\Delta t_n \to 0$ $\Rightarrow \bar{a}_n \to a(t_n)$ $a(t_n) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_n$

$\Delta t_n = dt_n$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t_0)\,dt + \int_{t_0}^{t} a(t'-t_0)\,dt'$$

$$= x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + a\int_{t_0}^{t} (t'-t_0)\,dt' =$$

$$= x(t_0) + v(t_0)(t-t_0)$$

: Calcoliamo $\int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$

$\int_{t_0}^{t} f(t')\,dt'$ $\quad y = y(t')$ funzione biettiva tra t_0 e t (invertibile)

$t' = t'(y)$

$$\int_{t_0}^{t} f(t')\,dt' = \int_{y(t_0)}^{y(t)} f(t'(y))\left(\frac{dt'}{dy}\right) dy \qquad dt' = \left(\frac{dt'}{dy}\right) dy$$

$$\int_{t_0}^{t} (t'-t_0)\,dt' \qquad y = t'-t_0 \qquad t' = y+t_0 \qquad \frac{dt'}{dy} = 1 \qquad dt' = \frac{dt'}{dy}dy = dy$$

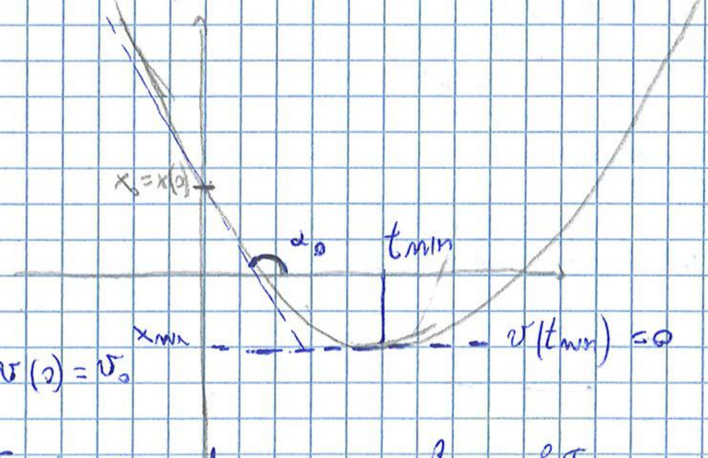
$$\int_{t_0}^{t} (t'-t_0)\,dt' = \int_{0}^{t-t_0} y\,dy = \frac{(t-t_0)^2}{2}$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2}$$

$v(t) = v(t_0) + a(t-t_0)$

$t_0 = 0\,s$

$a > 0$



$\tan(\alpha_0) = v(0) = v_0$

A sx $v = \tan\alpha_0 < 0$ diminuisce in valore assoluto

A dx $v = \tan\alpha_0 > 0$ aumenta sempre

- $v > 0 \quad v = |v| \quad dv = d|v| < 0$

$$a = \frac{dv}{dt} < 0$$

- $v < 0 \quad v = -|v| \quad dv = -d|v| > 0$

$$a = \frac{dv}{dt} > 0$$

Se il moto è decelerato $\boxed{(a \cdot v) < 0}$

$a(t) = a =$ costante

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + v(t_0)\underbrace{V}_{(t-t_0)} + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \\ v(t) = v(t_0) + a(t-t_0) \end{cases}$$

$$t - t_0 = \frac{v(t) - v(t_0)}{a}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\left(\frac{v(t) - v(t_0)}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v(t) - v(t_0)}{a}\right)^2$$

$$x(t) = x(t_0) + \frac{\cancel{v(t_0)v(t)}}{a} - \frac{v(t_0)^2}{a} + \frac{1}{2a}\left(v(t)^2 - 2\cancel{v(t)v(t_0)} + v(t_0)^2\right)$$

$$x(t) - x(t_0) = \frac{1}{2a}\left(v(t)^2 - v(t_0)^2\right)$$

$$v(t)^2 - v(t_0)^2 = 2a\left(x(t) - x(t_0)\right)$$

$\Rightarrow v = v(x)$ Ricavo v in funzione di x

$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ Vale solo per il moto uniformemente accelerato

Ricapitolando

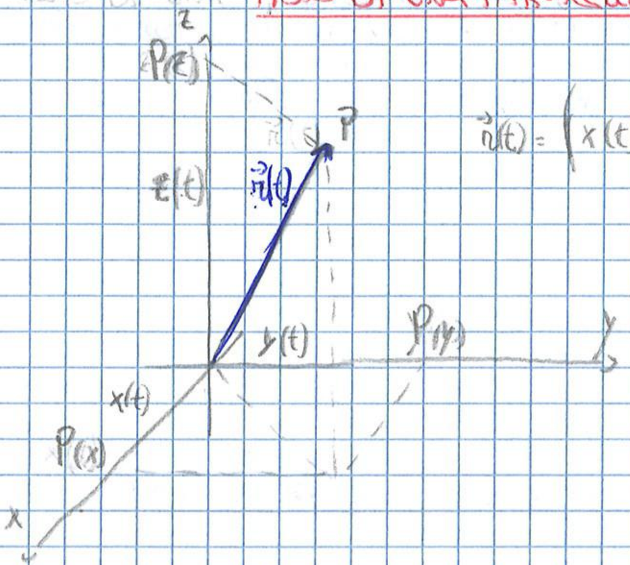
Noto $a(t)$, $t \geq t_0$, $x(t_0)$, $v(t_0)$ cond. iniziali

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 338

MOTO DI UNA PARTICELLA IN 3 DIMENSIONI



$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$

P_x descritto da $x(t)$ lungo x
P_y " " $y(t)$ lungo y
P_z " " $z(t)$ lungo z
} Univocamente definita posizione particella

$P \leftrightarrow (P_x, P_y, P_z)$

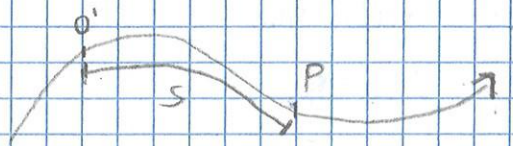
Il moto di P può essere descritto attraverso 3 moti unidimensionali, cioè dai moti delle proiezioni di P lungo gli assi

$x(t), y(t), z(t)$

→ Moto di P_x lungo x $x(t)$
→ Moto lungo y $y(t)$ di P_y
→ Moto di P_z lungo z $z(t)$

→ Moti componenti unidimensionali del moto tridimensionale lungo i 3 assi

Traiettoria nota → moto descrivibile con una variabile (ascissa curvilinea)



ascissa curvilinea: s $\quad s > 0$ se P segue O'
$\quad s < 0$ se P precede O'

s è la lunghezza dell'arco di traiettoria determinato da O' e P

$$\boxed{\vec{v}_{medio} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)}$$

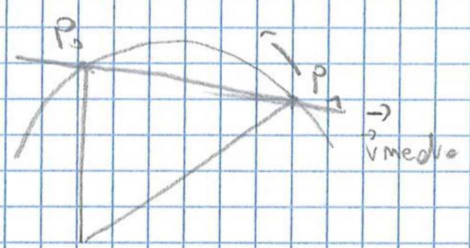
$|\Delta \vec{r}|$ non descrive una lunghezza percorsa, ma una posizione relativa di un punto finale rispetto al punto iniziale e quindi il modulo di $\vec{v}_{medio}$ non descrive lo spostamento

$\vec{v}_{medio}$ ha per componenti le v medie di $\begin{cases} P_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ P_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ P_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$ cioè delle

3 proiezioni di P sui 3 assi.

$\Delta \vec{r} = \vec{v}_{medio} \Delta t$

Se riduco Δt, P_1 si avvicina a P_0



$\Delta t \to 0$ v medio tenderà alla direzione della tangente

$\vec{v}_{medio} \to$ tangente alla traiettoria in P_0

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{medio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$$

V istantanea è un vettore che giace sulla tangente, nel verso del moto ed è la derivata del vettore posizione

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_0)$$

$$\vec{v}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right)$$

Componente del moto lungo x è descritto da $x(t)$

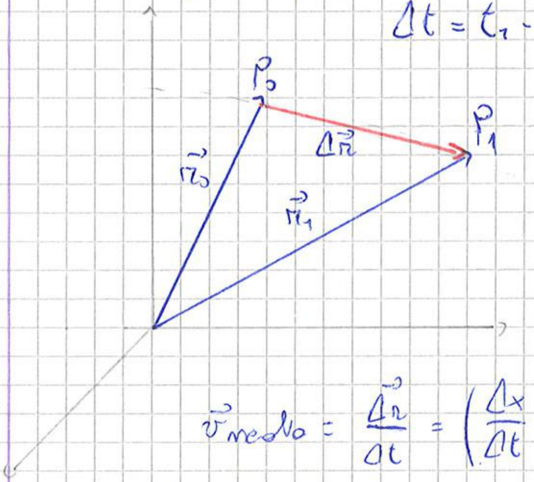
17/03/2019 APPUNTI

Moto 3D
$\rightarrow P_x$ lungo x $(x(t))$
$\rightarrow P_y$ lungo y $(y(t))$
$\rightarrow P_z$ lungo z $(z(t))$

Si divide in 3 moti unidimensionali simultanei

Def. $t_0,\ t_1 > t_0$, $\quad t_1 = t_0 + \Delta t$

$\Delta t = t_1 - t_0$



$P_0 \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$

$P_1 \quad \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0) =$

$= (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

$$\vec{v}_{medio} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

$\Delta t \to 0$, $t_1 \to t_0$

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{v}_{medio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$$

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right) = \left(v_x(t_0), v_y(t_0), v_z(t_0)\right)$$

$v_x = \frac{dx}{dt}$ velocità istantanea P_x

$v_y = \frac{dy}{dt}$ " " P_y

$v_z = \frac{dz}{dt}$ " " P_z

$\Delta\vec{r} = \vec{v}_{medio}\Delta t$ $\quad$ Se Δt è molto piccolo $\vec{v}_{medio} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \simeq \vec{v}(t_0)$

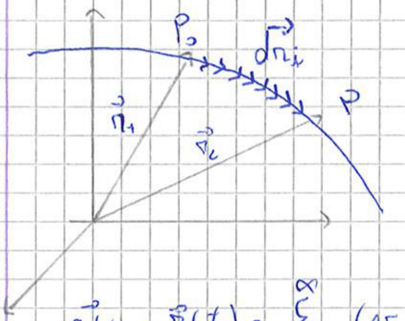
$\hookrightarrow \Delta\vec{r} \simeq \vec{v}(t_0)\Delta t$

$\Delta\vec{r} = \vec{v}(t_0)\Delta t + o(\cancel{\Delta t^2})$

Δt infinitesimo $\rightarrow dt$

$o(dt^2) = 0$

$d\vec{r} = \vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)$ $\qquad$ $d\vec{r} = \vec{v}(t_0)dt = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\,dt$



$$\Delta\vec{r} = \vec{P_0P} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} d\vec{r}_i = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{v}(t_i)\,dt_i = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(v_x(t_i), v_y(t_i), v_z(t_i)\right) dt_i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_x(t_i)dt_i, \sum_{i=0}^{\infty} v_y(t_i)dt_i, \sum_{i=0}^{\infty} v_z(t_i)dt_i\right) = \left(\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt', \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt', \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt'\right)$$

Lungo x $\quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt'$

Lungo y $\quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt'$

Lungo z $\quad z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt'$

Noti $\vec{v}(t)$ $\quad \forall\, t \geq t_0 \quad \vec{r}(t_0) = \left(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\right)$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

Per riassumere:

$\vec{v}(t)$	$v_x(t),\ x(t_0)$	$\rightarrow x(t)$
$t \geq t_0$	$v_y(t),\ y(t_0)$	$\rightarrow y(t)$
$\vec{r}(t_0)$	$v_z(t),\ z(t_0)$	$\rightarrow z(t)$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$\vec{v}(t) = \vec{v}$ = COSTANTE

$$\int_{t_0}^{t} v\,dt' = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{v}\,dt_i = \vec{v}\sum_{i=0}^{\infty} dt_i = \vec{v}\,(t-t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0) \iff \begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t-t_0) \\ z(t) = z(t_0) + v_z(t-t_0) \end{cases}$$

Rappresentazione parametrica di una retta (parallela a $\vec{v}$ e che passa per $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$)

Dato il moto 3D descritto da $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$

lungo x
$x(t)$
$v_x = \frac{dx}{dt}$, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

lungo y
$y(t)$
$v_y = \frac{dy}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

lungo z
$z(t)$
$v_z = \frac{dz}{dt}$ $a_z = \frac{dv_z}{dt}$

$\forall \Delta t$ finito, $\Delta \vec{v} = \vec{a}_{medio} \Delta t$

Se consideriamo $\Delta t \to 0$, quando Δt è sufficientemente piccolo, $\vec{a}_{medio}$ non varia più sensibilmente

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{medio} \simeq \vec{a}(t_0)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{v} \simeq \vec{a}(t_0) \Delta t$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{a}(t_0) \Delta t + o(\Delta t^2)$$

$$dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)$$

$$d\vec{v} = \vec{a}(t_0) dt = \frac{d\vec{v}}{dt}(t_0) dt$$

PROBLEMA INVERSO

NOTI $\vec{a}(t)$ $t \geq t_0$ $\vec{r}(t)$?

CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} \vec{v}(t_0) \\ \vec{r}(t_0) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t)$ è univocamente determinabile

- Lungo x

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt'$$

- Lungo z

$$v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t')dt'$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt'$$

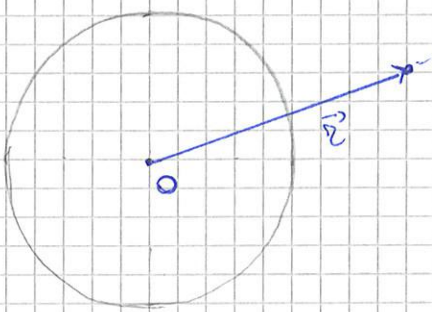
- Lungo y

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t')dt'$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt'$$

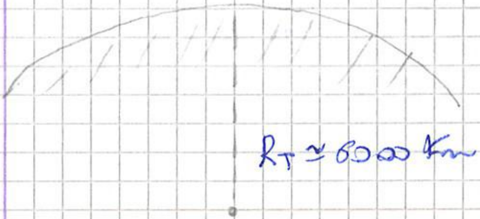
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 338

Moto Balistico

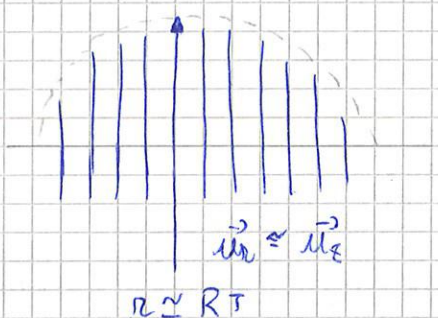


$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{-GM_T}{r^2}}_{<0} \vec{u}_r$$



Al proiettile la Terra sembra lineare ($S \ll R_T$)



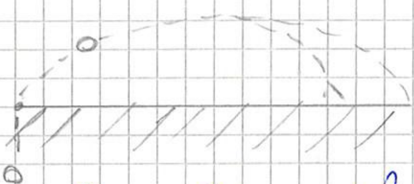
$$\vec{a} \simeq -\frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u}_z = -g\vec{u}_z$$

$R_T \simeq 6{,}37 \cdot 10^3$ Km

$G \simeq 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2} \cdot Kg^{-1}$

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{26}}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2} \simeq 9{,}81\ m/s^2$$

Esercizio



$\vec{r}(0) = (0,0)$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Il moto si svolge nel piano definito da z (verticale) con $\vec{v}_0$

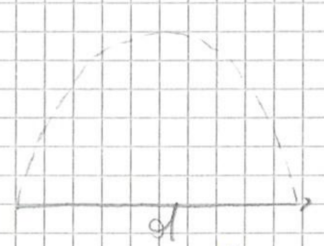
$\{x, z, O, u\}$ moto $(x(t), z(t))$

$\vec{a} = -g\vec{u}_z = (0, -g)$

$\vec{r}(0) = (0,0)$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

3.



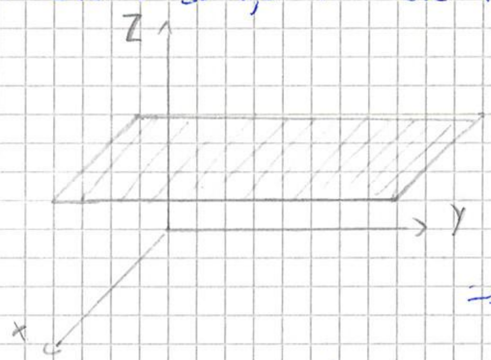
t_1 istante in cui atterra $\Rightarrow$ $z(t_1) = 0$
$x(t_1) = d$

$z(x=d) = 0 \Leftrightarrow v_{0z}t - g\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow (tg\alpha)d - \frac{gd^2}{2(v_0)^2\cos^2\alpha} = 0$

$$d = \frac{2(\vec{v_0})^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{(\vec{v_0})^2\sin 2\alpha}{g}$$

Gittata max con $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

$\Rightarrow$ CONDIZIONI SU $\vec{v}_0, \vec{a}$ AFFINCHÉ IL MOTO SI SVOLGA SU UN PIANO // XY



$z(t) = z(t_0) \quad \forall t$

$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_{0z}(t')dt'$

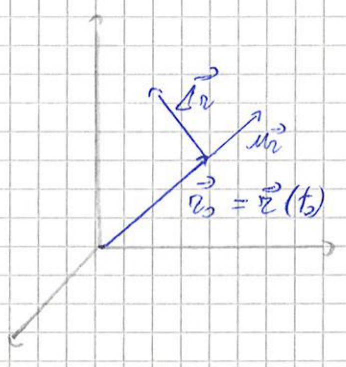
$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt' = 0 \quad \forall_t^{t_0} \Rightarrow v_z(t) = 0 \ \forall t$

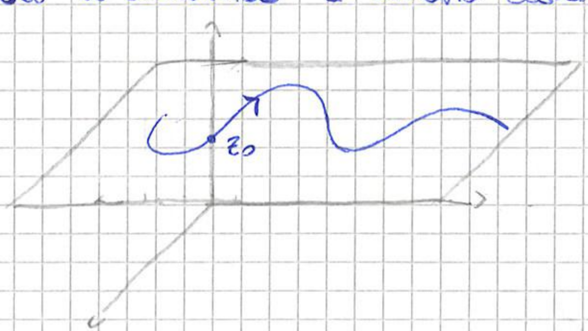
$v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t')dt'$

$v_z(t_0) = 0 \quad e \int_{t_0}^{t} a_z(t')dt' = 0 \quad \forall_t^{t_0}$

Allora $v_z(t_0) = 0$ e $a_z(t) = 0 \ \forall t$

Il moto si svolge sul piano quando $z(t) = z_0$, cioè la coordinata z rimane costante





$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt' \Rightarrow v_z(t) = 0$ $\rightarrow$ Condizione necessaria e sufficiente affinché $z(t)$ sia costante

DERIVATA DI UN VETTORE

$\Rightarrow$ Sia dato un generico vettore $\vec{V}(t)$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\,\vec{V}(t)\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{f(t+\Delta t)\,\vec{V}(t+\Delta t) - f(t)\,\vec{V}(t)}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{f(t+\Delta t)\,\vec{V}(t+\Delta t) - f(t)\,\vec{V}(t+\Delta t) + f(t)\,\vec{V}(t+\Delta t) - f(t)\,\vec{V}(t)}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right)\vec{V}(t+\Delta t) + f(t)\left(\frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}\right)\right\} =$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(f(t)\,\vec{V}(t)\right) = \frac{d\,f(t)}{dt}\,\vec{V}(t) + f(t)\,\frac{d\,\vec{V}(t)}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\,\vec{u}_x + V_y(t)\,\vec{u}_y + V_z(t)\,\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}(t) = \frac{dV_x}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dV_y}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dV_z}{dt}\,\vec{u}_z$$

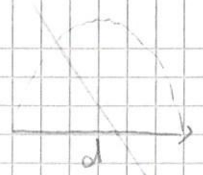
$\left(\frac{dV_x}{dt}, \frac{dV_y}{dt}, \frac{dV_z}{dt} \neq 0\right.$ Perché: V_x, V_y, V_z sono funzioni di t, quindi non costanti$\left.\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(t)\cdot\vec{W}(t)\right) = \frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{W} + \vec{V}\,\frac{d\vec{W}}{dt} \\ &\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(t)\times\vec{W}(t)\right) = \frac{d}{dt}\vec{V}\times\vec{W} + \vec{V}\,\frac{d}{dt}\vec{W} \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Regola di Leibniz per la derivazione di un prodotto

$\rightarrow$ Derivazione prodotto vettoriale

3°



t_1 istante in cui atterra

NO

$z(t_1) = 0$

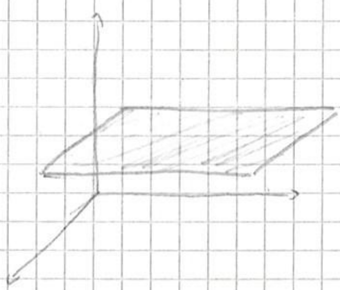
$x(t_1) = d$

$z(x=d) = 0 \iff v_{0z} t - g\frac{t^2}{2} = 0 \iff (tg\alpha) d - \frac{g d^2}{2(v_0)^2 \cos^2\alpha} = 0$

$$d = \frac{2|\vec{v}_0|^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Gittata max con $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

$\Rightarrow$ CONDIZIONI SU $\vec{v}, \vec{a}$ AFFINCHÉ IL MOTO SI SVOLGA SU UN PIANO // XY



$z(t) = z(t_0) \quad \forall t$

$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_z(t')\,dt'$

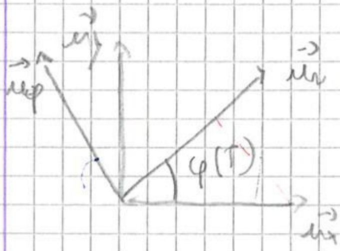
$\rightarrow \int_{t_0}^{t} v_z(t')\,dt' = 0 \quad \forall_t^{t_0} \Rightarrow v_z(t) = 0 \quad \forall t$

$v_z(t) = \underbrace{v_z(t_0)}_{0} + \int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt'$ e $\int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt' = v_z(t) = 0$

$\int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt' = 0 \quad \forall_t^{t_0}$

Allora $v_z(t_0)$ e $a_z(t) = 0 \quad \forall t$

$\omega < 0$: VERSO ORARIO



La coppia di assi polari $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\varphi$ ruota con $\varphi(t)$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y\end{aligned}}$$

$$\vec{u}_r = \vec{u}_r(t)$$
$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi(t)$$

$\varphi(t) = \omega t$

COSTANTE

- $$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\cos(\varphi(t))}{dt}\vec{u}_x + \frac{d}{dt}\sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y = -\sin(\varphi(t))\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{u}_y$$
$$= \frac{d\varphi}{dt}\left[-\sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y\right] = \omega\left[-\sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y\right] =$$
$$= \omega\,\vec{u}_\varphi(t)$$

- $$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \omega\left(-\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x - \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y\right) = -\omega\,\vec{u}_r(t)$$

Quindi

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \omega\,\vec{u}_\varphi(t) \qquad \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\omega\,\vec{u}_r(t)}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$$

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{u}_r = R\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{d R\vec{u}_r}{dt} = R\omega\,\vec{u}_\varphi = R\omega\,\vec{u}_T = v\,\vec{u}_T$$ ← La velocità è diretta nella direzione tangente nel verso del moto

$$v = R\omega = R\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = \frac{ds}{dt}$$ Derivata ascissa curvilinea

$|\vec{v}| = R|\omega| =$ costante   La velocità ha sempre lo stesso modulo, ma varia la direzione (poiché proporzionale a $\vec{u}_\varphi$, che ruota)

$\vec{v}$ varia solo in direzione (non in modulo)

$\vec{r}(t) = R\,\vec{u}_r \qquad |\vec{r}(t)| = R = cost$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}$

$\vec{v}(t) = R\,\omega\,\vec{u}_\varphi \qquad |\vec{v}| = R|\omega| = costante$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$

Se v varia solo in direzione, $\vec{a} \perp \vec{v}$ $\forall t$

Se v varia sia in direzione che in modulo, $\vec{a}$ ha due componenti legate sia alla variazione di direzione che di modulo

$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_T$

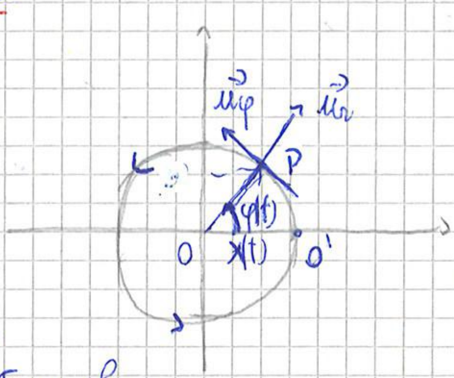
$\vec{a}_c$: centripeta $\perp \vec{v}$ → Dovuta alla sola variazione di $\vec{v}$ in direzione

$\vec{a}_T$: Tangenziale $\parallel \vec{v}$ → Dovuta alla sola variazione di $|\vec{v}|$

Moto CIRCOLARE GENERICO

$x(t) = R\cos(\varphi(t))$

$y(t) = R\sin(\varphi(t))$



$r(t) = |\vec{OP}| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = R$

moto circolare

$r(t) = R$

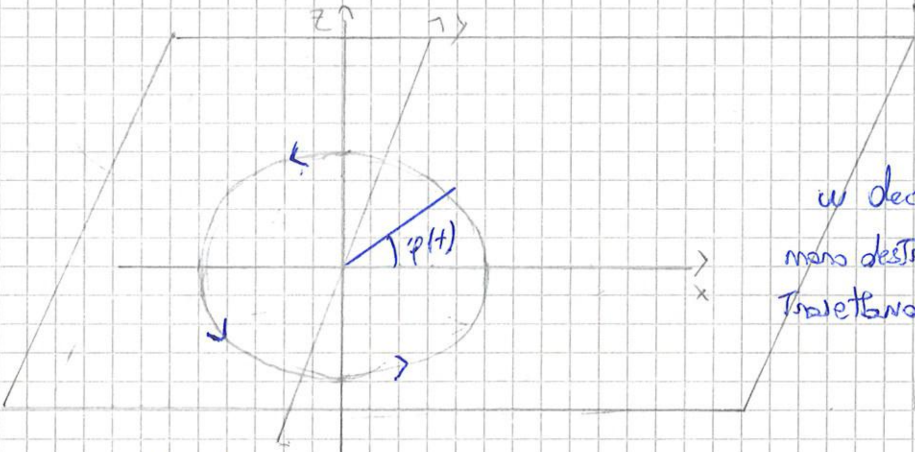
$\varphi(t) \qquad s(t) = R\,\varphi(t)$

$\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \left(+\dfrac{d\varphi}{dt}\right)\vec{u}_\varphi = \omega\,\vec{u}_\varphi$

Si definisce velocità angolare $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega(t) \neq costante$

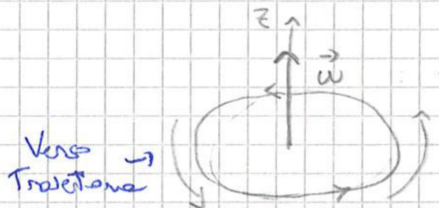
$\dfrac{d}{dt}\vec{u}_\varphi = -\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)\vec{u}_r = -\omega\,\vec{u}_r$

NOTAZIONE VETTORIALE



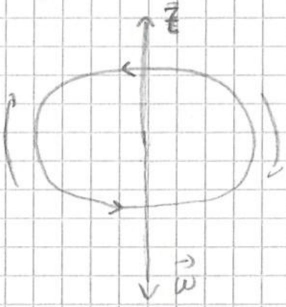
ω decretato dalla regola mano destra seguendo la traiettoria del moto

$|\vec{\omega}| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$ Il verso di z è legato dalla regola della mano destra al verso de φ crescente



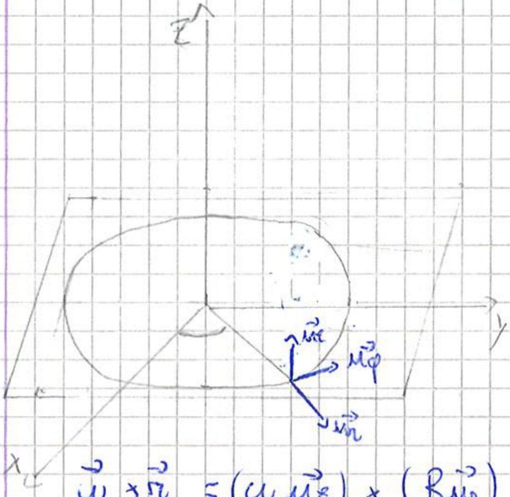
$\vec{\omega}$ concorde con z ⇒ $\omega > 0$

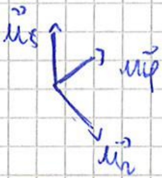
$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$



$\vec{\omega} < 0$

$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$





$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$\vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_z \times \vec{u}_r = \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_\varphi = -\vec{u}_r \\ \vec{u}_r \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \end{cases}}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \vec{u}_z) \times (R \vec{u}_r) = R\omega \vec{u}_z \times \vec{u}_r = R\omega \vec{u}_\varphi = \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \qquad \boxed{\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega \vec{u}_z) \times (v \vec{u}_\varphi) = -\omega v \vec{u}_r = \vec{a}_c}$$

Moto angolare uniforme

$\omega = \text{costante} \Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

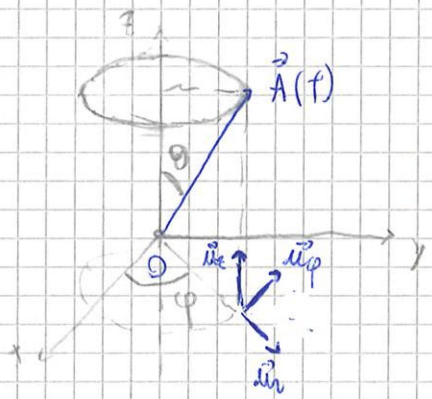
$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega \, dt' = \varphi(t_0) + \omega(t - t_0)$$

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \omega(t - t_0)$$

Sia $t = t_0 + T$ $\quad \Delta\varphi = \varphi(t_0 + T) - \varphi(t_0) = 2\pi$ (Un angolo giro)

$\Delta\varphi = 2\pi = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$ oppure $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\vec{A}(t) \quad |\vec{A}| = |A|$ - costante $\quad \vec{A}$ vettore libero che ruota intorno all'asse z



$|\vec{A}|, \theta, \varphi$

$|\vec{A}| = \text{costante}$

$\theta = \text{costante}$

$\varphi = \varphi(t)$

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$

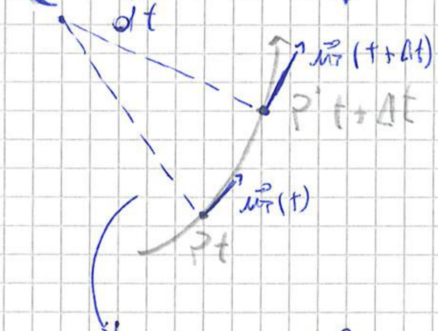
$$\begin{cases} A_x = |\vec{A}| \sin\theta \cos\varphi \\ A_y = |\vec{A}| \sin\theta \sin\varphi \\ A_z = |\vec{A}| \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = |\vec{A}| \sin\theta \cos\varphi \, \vec{u}_x + |\vec{A}| \sin\theta \sin\varphi \, \vec{u}_y + |\vec{A}| \cos\theta \, \vec{u}_z$$

$$\vec{A} = |\vec{A}| \sin\theta (\cos\varphi \, \vec{u}_x + \sin\varphi \, \vec{u}_y) + |\vec{A}| \cos\theta \, \vec{u}_z =$$

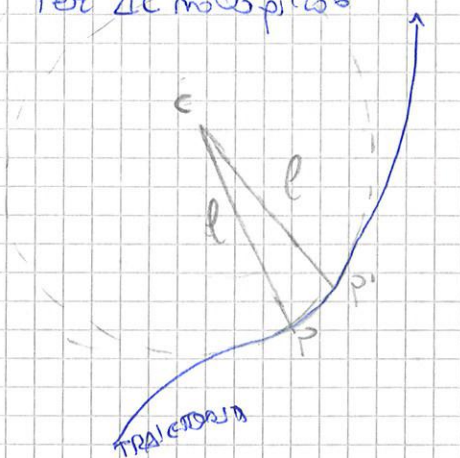
$$= |\vec{A}| \sin\theta \underbrace{\vec{u}_r}_{\text{Dipende dal Tempo}} + |\vec{A}| \cos\theta \, \vec{u}_z$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 338

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_T$$



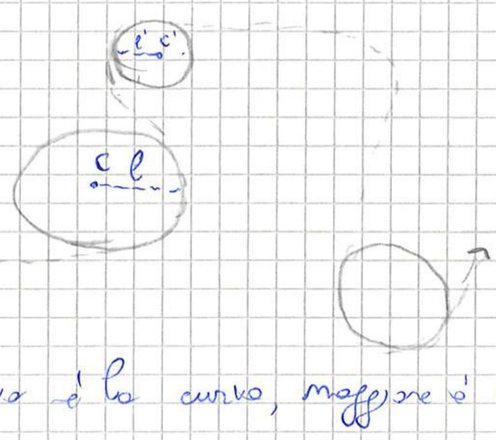
Direzioni perpendicolari a $\vec{u}_T$ che si incontrano (anche)
Quanto più è rettilinea la traiettoria, tanto più lontano è C
Consideriamo Δt sempre più piccolo $\Rightarrow$ P' si avvicina a P
e PC si avvicina a P'C
Per Δt molto piccolo



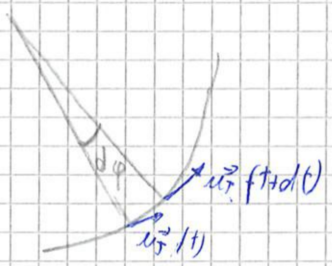
$|CP| \simeq |CP'| = \ell$

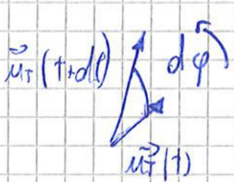
C è detto centro di curvatura
ℓ è detto raggio di curvatura
↓
Più grande è ℓ, maggiore è il raggio di curvatura

↳ <u>Cerchio osculatore</u>: se considero il moto per spostamenti infinitesimi, posso approssimare il moto come moto circolare, su un piano detto piano osculatore



Più ampia è la curva, maggiore è il cerchio (il cerchio osculatore varia)



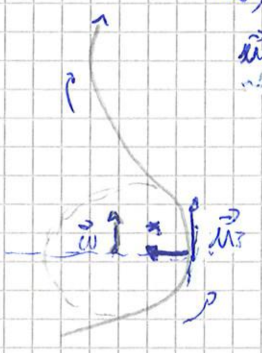


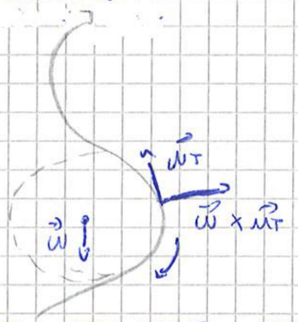
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_T$$

$\vec{\omega}, \vec{u}_T$ perpendicolare al piano osculatore

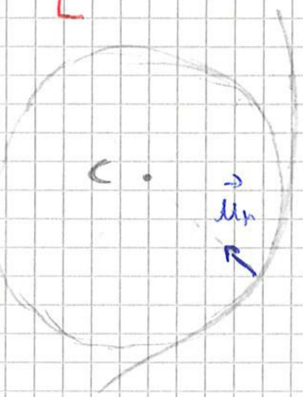
$\vec{u}_T$ segue la traiettoria





$\vec{\omega} \times \vec{u}_T$ verso interno $\omega > 0$ (verso percorrenza curva)

$\vec{\omega} \times \vec{u}_T$ " esterno $\omega < 0$ (verso opposto)



$$\boxed{\vec{\omega} \times \vec{u}_T = \omega \vec{u}_n \qquad \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \omega \vec{u}_n}$$

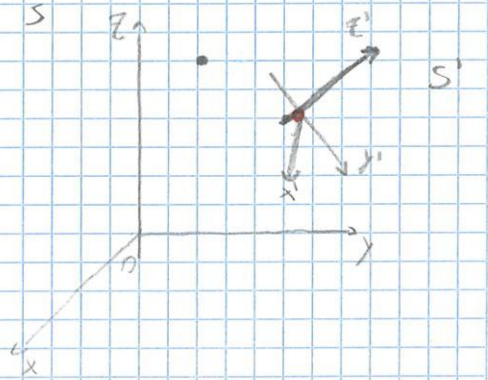
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\omega\vec{u}_n = \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T$$

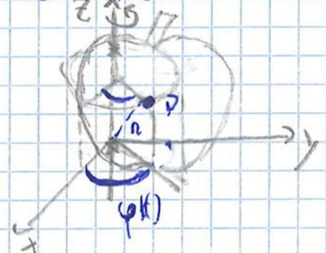
$$\vec{a}_C = v\omega\vec{u}_n = \rho\omega^2\vec{u}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$ Sempre diretto verso C

24-03-2014 APPUNTI - MOTI RELATIVI

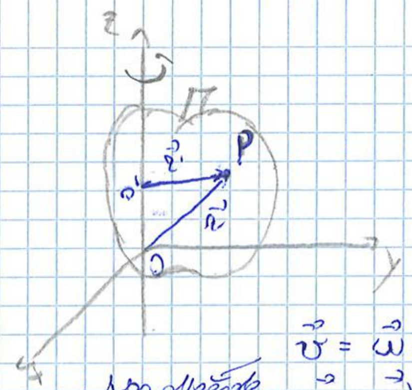
Descrizione di uno stesso moto date da due osservatori in moto relativo



Il punto • è un corpo in movimento, il quale vuole descrivere il moto del secondo punto. Fisso un sistema di riferimento S'
Leggi di trasformazione. Supponiamo che il punto si muova in modo rigido.
Sistema di riferimento S' (S) e tutti i punti fissi rispetto ad esso si muovono rispetto a noi mantenendo costante la reciproca distanza
⇒ caratteristica che definisce un $\boxed{\text{sistema rigido}}$
(cioè un insieme di punti che si muovono mantenendo invariata la loro reciproca distanza! ad esempio i tre assi sono insiemi di punti non materiali che costituiscono un sistema rigido)
Un esempio di sistema rigido è un corpo rigido (la distanza tra i suoi punti non cambia)
Consideriamo il moto di un corpo rigido intorno ad un asse fisso (in questo caso asse z)



Distanza P-asse è fisso ⇒ moto circolare centrato sull'asse z su un piano perpendicolare all'asse stesso
Moto di P descritto da $\varphi(t)$ $\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$



$\vec{r}' = \vec{O'P}$

$\vec{r} = \vec{OP}$

$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OO'} + \vec{r}'$

parallel

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{OO'} + \vec{r}') = \cancel{\vec{\omega} \times \vec{OO'}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$

non dipende dal punto in cui fisso l'origine

Moto di rotazione più generale caratterizzato dall'esistenza in ogni istante di un punto del sistema rigido con $\vec{v} = \vec{0}$. Se non esiste neanche un punto con $\vec{v} = \vec{0}$, allora non è moto di rotazione

Se esiste un punto (in ogni istante): $\vec{v} = \vec{0}$ (che punto può anche cambiare nel tempo) allora esiste un asse di rotazione in ogni istante per O costituito da tutti i punti che hanno $\vec{v} = \vec{0}$ in t

Da $t \to t+dt$ il moto di un c. rigido si può descrivere come un moto di rotazione intorno ad un asse (che cambia di istante in istante)

Prende il nome di moto di istantanea rotazione e l'asse asse di istantanea rotazione.

Caratterizzato da $\vec{\omega}$ diretto lungo asse di istantanea rotazione che varia anche in direzione (poiché l'asse varia) oltre che in modulo

In ogni istante
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

In generale $\vec{\alpha}$ non è più parallelo a $\vec{\omega}$

Il moto più generale di un sistema rigido è la sovrapposizione di un moto traslatorio (uguale per ogni punto) e di un moto rotatorio

Il moto di un sistema di riferimento è descrivibile come moto di un sistema rigido

Si scelgono gli assi in modo che siano paralleli ai nostri $x // x'$, $y // y'$, $z // z'$

$\vec{u}_x = \vec{u}_x'$, $\vec{u}_y = \vec{u}_y'$, $\vec{u}_z = \vec{u}_z'$

Poiché non c'è componente di rotazione $\vec{\omega} = \vec{0}$ ($\Rightarrow$ moto di pura traslazione)

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OO'} + \vec{r}'(t)}$$

Sebbene sia vero solo per velocità molto piccole rispetto alla velocità della luce, assumiamo che il tempo sia assoluto, cioè assumiamo che se facciamo partire insieme due cronometri, si ottiene che il tempo letto su un orologio sia uguale a quello misurato sul cronometro in moto rispetto a noi:

$t = t'$

Supponiamo anche che lo spazio sia assoluto (anche questa è un'approssimazione anch'essa però valida per velocità non relativistiche, lontane da c)

$\vec{r}(t) = \vec{OO'}(t) + \vec{r}'(t)$

In componenti

$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z$

$\vec{r}'(t) = x'(t)\,\vec{u}_x + y'(t)\,\vec{u}_y + z'(t)\,\vec{u}_z$

$\vec{OO'}(t) = x_0(t)\,\vec{u}_x + y_0(t)\,\vec{u}_y + z_0(t)\,\vec{u}_z$

LEGGI DI TRASFORMAZIONE

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = x_0(t) + x'(t) \\ y(t) = y_0(t) + y'(t) \\ z(t) = z_0(t) + z'(t) \end{cases}}$$

$\rightarrow$ Relazioni tra posizione di P nei due sistemi di riferimento

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z\right) = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{r})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Deriviamo ambo i membri:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,\vec{OO'}}{dt} + \vec{v}' = \vec{V} + \vec{v}'}$$

dove $\vec{V}$ è velocità di O' rispetto a noi

$\vec{V} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$ $\vec{V}$ è anche la velocità di un qualsiasi punto fisso rispetto a O': velocità di trascinamento

$\boxed{\vec{V}: \text{velocità di trascinamento}}$

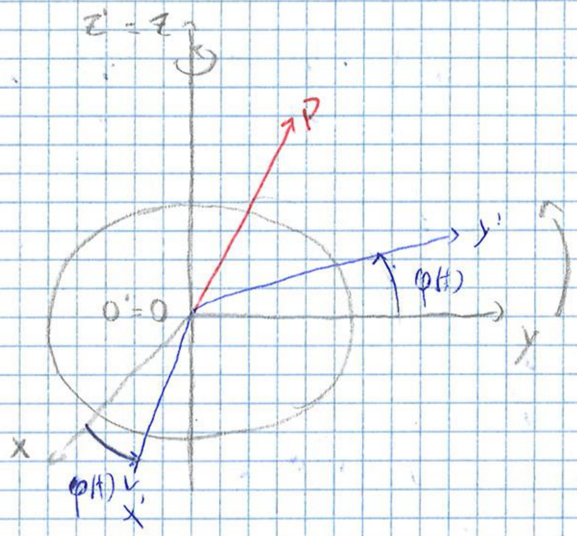
LEGGI DI TRASFORMAZIONE

$$\boxed{\begin{cases} v_x = V_x + v_x' \\ v_y = V_y + v_y' \\ v_z = V_z + v_z' \end{cases}}$$

MOTO DI UN SISTEMA S' RISPETTO AD S DI PURA ROTAZIONE - 2° CASO

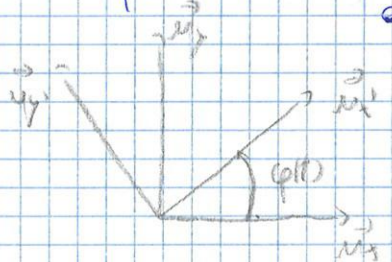
Consideriamo una rotazione intorno ad un asse fisso

Asse di rotazione: z



x'y'z' ruota attorno all'asse z e lo si può immaginare come una piattaforma che ruota

$\varphi(t) \Rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\quad \vec{\omega} = \omega \vec{u}_z \quad \vec{u}_z = \vec{u}_{z'} \quad O = O'$



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}_{x'} &= \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_{y'} &= -\sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y \end{aligned}}$$

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \omega \vec{u}_{y'} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{x'}$$

$$\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = -\omega \vec{u}_{x'} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{y'}$$

$$\frac{d u_{z'}}{dt} = 0 = \vec{\omega} \times \vec{u}_{z'}$$

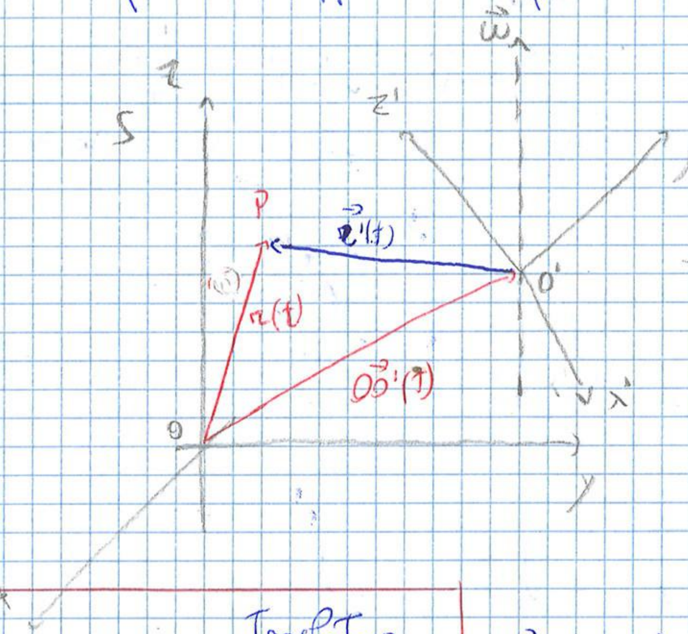
$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \vec{OP}(t) = \vec{O'P}(t)$ L'origine è la stessa

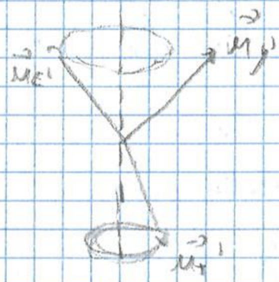
$\vec{r}'(t) = x'(t)\,\vec{u}_{x'} + y'(t)\,\vec{u}_{y'} + z'(t)\,\vec{u}_{z'}$

- Velocità rispetto ad S' (Osservatore ruota insieme alla piattaforma ⇒ versori sono fissi ($\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}$)

  l'osservatore solidale alla piattaforma osserverà un diverso moto rispetto ad un osservatore nel laboratorio

Ora è possibile affrontare il problema iniziale





$\boxed{\text{Moto di } S' \begin{cases} \to \text{Traslatorio} \\ \to \text{Rotatorio} \end{cases}}$

$\vec{\omega}$ asse di rotazione istantaneo

$$r(t) = \vec{OO'}(t) + r'(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{x'} \\ \dfrac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{y'} \\ \dfrac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{z'} \end{cases}$$

$$\vec{OO'}(t) = x_0(t)\,\vec{u}_x + y_0(t)\,\vec{u}_y + z_0(t)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\,\vec{u}_{x'} + y'\,\vec{u}_{y'} + z'\,\vec{u}_{z'}$$

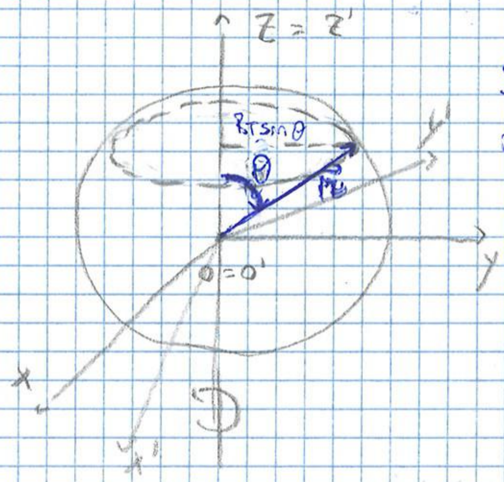
<u>in S'</u>: $\vec{v}' = \left(\dfrac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = \dfrac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \dfrac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \dfrac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}$ $\to$ non derivo i versori (fissi rispetto a me)

<u>in S</u>: $\left(\dfrac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = \dfrac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + x'\dfrac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \dots =$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' \quad \text{dove} \left(\vec{V} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)}$$

Moto della Terra



Si prenda il nostro sistema di riferimento (partecipe del moto di rotazione) S' ed un sistema S nel centro della Terra che non partecipa della rotazione

S' ha rotazione intorno a z, mentre x' e y' ruotano. Noi siamo fissi rispetto ad S'

$$\omega = \frac{1 \text{ giro}}{1 \text{ giorno}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega |\vec{r}| \sin\theta = \omega R_T \sin\theta$$

$\theta \simeq 45°$ $\quad |\vec{v}| = 327{,}5 \text{ m/s} = 1179 \text{ Km/h}$ Movimento rispetto al centro della Terra

Rispetto ad S

$$\vec{g}_0 = -\frac{G M_T}{R_T^2} \vec{u}_r = -g_0 \vec{u}_r \qquad g_0 \simeq 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

$\vec{a}$ Accelerazione rispetto ad S

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}'}_{\text{S', misurata da noi}} + \vec{a}_{co} + \cancel{\vec{\alpha} \times \vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ω costante

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Sola azione della forza di gravità

$$\vec{a} = \vec{g}_0 = -g_0 \vec{u}_r$$

$$\vec{a}' = -g_0 \vec{u}_r - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
Acc. centripeta (verso l'asse)

Se $\vec{v}' = \vec{0}$ si ha $\vec{a}' = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ Questa accelerazione non è diretta verso il centro

$-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
Acc. centrifuga, opposta alla centripeta

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 338

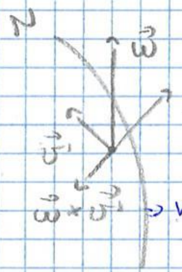
25-03-2014 APPUNTI

← Accelerazione centrifuga

$v' = 0 \qquad \vec{a} = \vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{v}' \neq 0$

$\vec{a} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

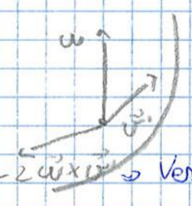


$-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ → Accelerazione di Coriolis: verso dx rispetto a direzione moto

$\vec{\omega} \times \vec{v}'$ → verso uscente

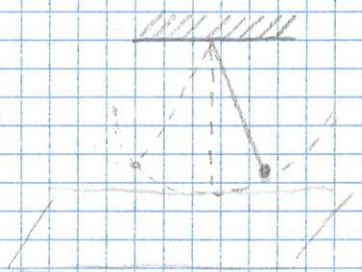
⇓

Se c'è solo la forza di gravità, il corpo si sposta verso destra rispetto alla direzione del moto



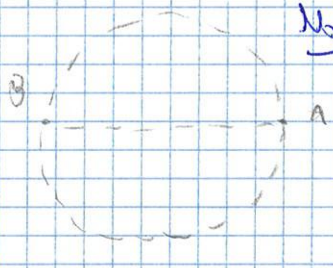
$-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ → Verso uscente, diretto verso sinistra: Accelerazione di Coriolis determina uno spostamento verso sinistra rispetto alla direzione del moto

Questo fenomeno è osservabile nel moto di un pendolo

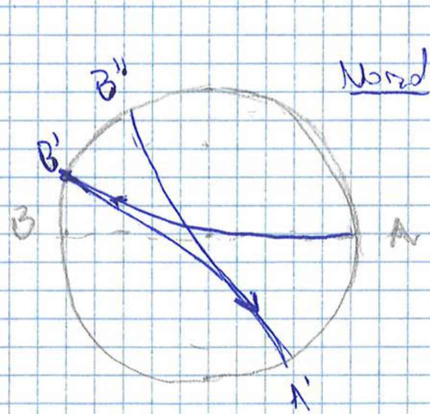


Supponiamo di guardare il pendolo dall'alto.
Se non ci fosse rotazione:

Nord   Non ci sarebbe spostamento



Nord



Spostamento orario → Nord

Spostamento antiorario → Emisfero Sud