centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1570A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Cibrario

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc. Prof.De Angelis

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 212

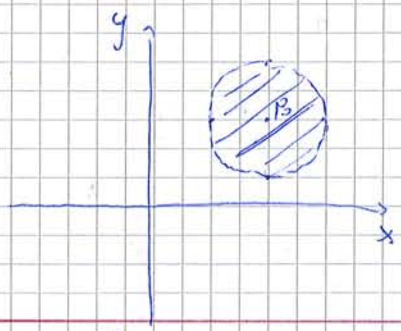
[redacted] 30/09/2014 APPUNTI

ANALISI MATEMATICA II - TEORIA

MAIL: elena.deangelis@polito.it

APPELLI: 5/2/15
20/2/15

INTEGRALI DOPPI



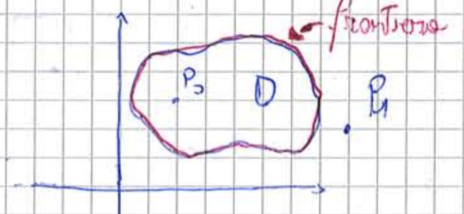
DEF $B_r(P_0)$ Cerchio di centro P_0 e raggio r

• $B_r(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$

DEF $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice LIMITATO se è contenuto in qualche cerchio

DEF $D \subset \mathbb{R}^2$, $P_0 \in D$, $P_1 \notin D$

• P_0 si dice INTERNO a D se esiste un cerchio di centro P_0 tutto contenuto in D



• P_1 si dice ESTERNO a D se è interno a $\mathbb{R}^2 \setminus D$ (complementare)

DEF L'insieme dei punti che non sono né interni né esterni a D si chiama BORDO o FRONTIERA di D

DEF $D \in \mathbb{R}^2$ si dice CHIUSO se contiene il suo bordo
$D \subset \mathbb{R}^2$ si dice APERTO se il suo complementare $(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ è chiuso

Frontiera di D : ∂D
Interno di D : $\mathring{D} = D \setminus \partial D$
Chiusura di D : $\bar{D} = D \cup \partial D$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 212

(Miglioriamo l'approssimazione)

Apparentemente, l'oggetto dipende dalla partizione o dal valore della funzione scelto all'interno di ogni rettangolino.

Detto $\delta = \max_{j,k} \{\Delta x_j, \Delta y_k\}$, si può dimostrare che $\exists$ ed è finito

il $\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(\alpha_j, \beta_k) \Delta x_j \Delta y_k$. Ciò significa che affinando la partizione il volume calcolato non dipende dalla scelta della stessa che andiamo ad effettuare.

Tale oggetto è ciò che definiamo il volume del cilindroide. Usando la notazione di integrale, utilizzeremo, invece del limite,:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{Volume definito dal grafico della funzione}}$$

Come per gli integrali semplici, ciò che troviamo è un volume con segno: occorre quindi fare attenzione a dove la nostra funzione è negativa e dove invece è positiva.

PROPRIETÀ

- **Linearità** $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue
  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$$

Tale proprietà deriva direttamente dal limite proprio della costruzione

- **Monotonia**

$f \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq 0$

$\Rightarrow f \leq g$ in D allora $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$

Basta pensare al significato dell'integrale doppio come volume. Si deduce con la linearità ($g - f \geq 0$ ...)

- **Additività**

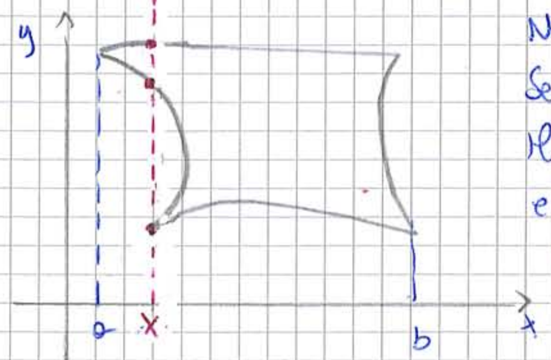
$D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ no punti interni

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy$

Anche ciò si deduce facilmente dal punto di vista geometrico (si spezza il cilindroide in due parti)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 212



No! Non è semplice
Se ogni parallela all'asse delle y che incontra il dominio lo fa in un unico punto d'ingresso e in un unico punto di uscita, allora il dominio è semplice

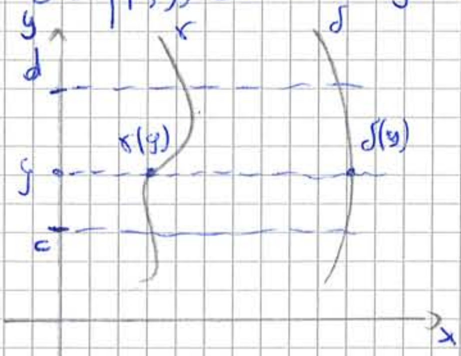
TEOREMA $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua
D semplice in y $\Rightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \le f(x,y) \le \beta(x)\}$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

'Congeliamo' la x e ci muoviamo lungo un segmento che va da $\alpha(x)$ a $\beta(x)$.
Questo primo calcolo che facciamo va ripetuto per ogni x del dominio (di qui l'integrale più esterno)

DEF $D \subset \mathbb{R}^2$ dicesi SEMPLICE in x se $\exists$ due funzioni continue

$\gamma : [c,d] \to \mathbb{R}$
$\delta : [c,d] \to \mathbb{R}$
Tali che
$D = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$



TEST GRAFICO PER VALUTARE LA SEMPLICITÀ

Se tutte le parallele all'asse x che incontrano il dominio lo incontrano in un punto di ingresso e in uno di uscita, allora il dominio è semplice in x.
Fissato y, il dominio è descritto da tutte le x in ingresso e quelle in uscita: integro in x e poi ripeto l'operazione per ogni y. 3

TEOREMA: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua
D semplice in x
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$

$$\Rightarrow \iint_D f\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 212

07/10/2014 APPUNTI

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Fissare x significa considerare una sezione lungo un piano // all'asse z (y-z)
Si calcola l'area di questa sezione. La descrizione del volume (integrando rispetto a x) si ottiene sommando tutte le aree di tutte le sezioni.
Fissare y significa considerare una sezione lungo un piano // a quello formato dagli assi x-z

MEDIA INTEGRALE

$D \subset \mathbb{R}^2$; si dice MEDIA di f in D

$$\mu = \frac{1}{\text{area}(D)} \cdot \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

DEF: $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice CONNESSO PER ARCHI se due suoi punti qualsiasi possono essere congiunti da una curva continua che giace interamente in D

TEOREMA DELLA MEDIA

- $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e connesso per archi (in Analisi I, un intervallo è un segmento, quindi lo è automaticamente)
- $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione continua

$\Rightarrow \exists (x_0, y_0) \in D$ tale che $f(x_0,y_0) = \dfrac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

4

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 212

$\varphi(u,v) = \left(x(u,v) \, , \, y(u,v) \right)$

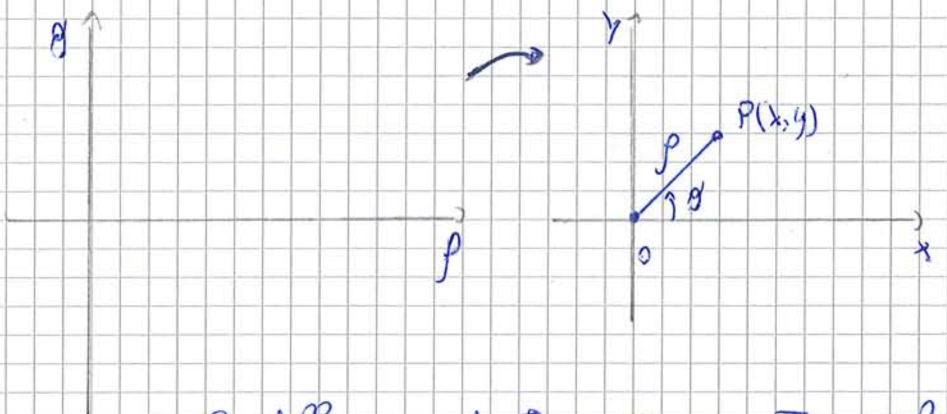
$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \qquad f \text{ continua in } D \\ &= \iint_{D'} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |\det J\varphi| \, du\,dv \end{aligned}}$$

In Analisi 1 la φ può mandare da ab in un verso di percorrenza o in quello inverso. Se il verso di percorrenza cambia, $\varphi' < 0$ ma $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(\varphi)$
Quindi $(-)\cdot(-) = +$ e non è necessario il valore assoluto.
Il modulo $|\det J\varphi|$ ci garantisce che non cambiano il segno dell'integrale
$\int_a^b f(x) = \int_b^a f(\varphi)\cdot\varphi' \, dt = (-)\int_a^b f(\varphi)\,|\varphi'|\,dt = \int_a^b f(\varphi)\,\varphi'\,dt$

COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$



Fissato ρ, θ posso passare ai valori delle coordinate cartesiane. Troviamo la matrice Jacobiana corrispondente

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Posso anche cambiare le righe o le colonne perché pur ottenendo una matrice di verso, l'uso del modulo annulla l'effetto $E' = -E$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det J(\varphi) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$

$|\det J(\varphi)| = |\rho| = \rho$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 212

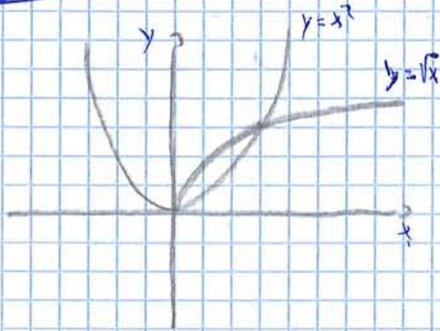
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 212

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^{3/2} \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho^{3/2} \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

Questo lo facciamo perché gli estremi di integrazione sono numerici e le funzioni sono fattorizzabili

$$= \frac{2}{5} \rho^{5/2} \cdot (2\pi - 0) \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \pi \, \rho^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \pi \, \rho^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \pi$$

ESERCIZIO



$\sigma = 1$

Calcolare $G(x_G, y_G)$

6

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 212

Come per gli integrali doppi, solo su alcuni domini è possibile calcolare l'integrale.

1. D dicesi Z-SEMPLICE se è del tipo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

La parallela all'asse z passante per (x,y) incontra il dominio in due superfici

A in $\mathbb{R}^2$ è la proiezione di D sul piano xy, cioè $z=0$
α, β continue in D
Al variare di x,y su A abbiamo tutto il dominio

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy}$$

Inizialmente, mi muovo lungo z. Dopodiché ripeto l'operazione su tutto A. Si parla di INTEGRAZIONE PER FILI PARALLELI ALL'ASSE Z

α, β sono le espressioni delle superfici "bordo".

2. D dicesi Y-SEMPLICE se è del tipo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in B \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } \delta(x,z) \le y \le \gamma(x,z)\}$$

B proiezione del dominio sul piano xz
δ, γ continue

Si integra prima in y e poi in xz

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_{\delta(x,z)}^{\gamma(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx\,dz}$$

Formula di INTEGRAZIONI PER FILI PARALLELI ALL'ASSE Y

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 212

5.) INTEGRAZIONE PER STRATI PARALLELI AL PIANO XZ

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\iint_{B_y} f(x,y,z)\,dx\,dz \right) dy}$$

B_y proiezione sul piano xz della sezione del solido ottenuta intersecando il solido stesso con un piano $y =$ costante

6) INTEGRAZIONE PER STRATI PARALLELI AL PIANO YZ

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^f \left(\iint_{C_x} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx}$$

C_x proiezione sul piano yz della sezione del solido ottenuta con l'intersezione con un piano $x =$ costante

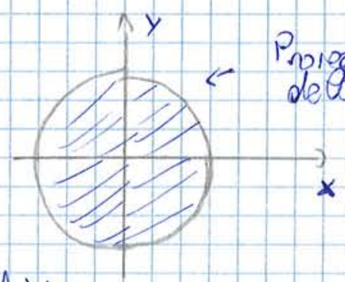
ESEMPIO

$$f(x,y,z) = z^2 \qquad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}$$

D è sfera di centro O e raggio 1

$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz \rightarrow$ integrazione per fili paralleli all'asse z

$$= \iint_A \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} z^2\,dz \right) dx\,dy$$



Proiezione sul piano xy $(z=0)$ della sfera

$A = x^2+y^2 \leq 1$

$x^2+y^2+z^2=1$

Ricaviamo z in funzione di x,y

$z = -\sqrt{1-x^2-y^2} = \alpha(x,y)$

$z = +\sqrt{1-x^2-y^2} = \beta(x,y)$

8

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 212

17/10/2014 APPUNTI

INTEGRALI TRIPLI E CAMBI DI COORDINATE

$\iiint_D f(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz \qquad D \subset \mathbb{R}^3$ $\qquad$ f. funzione di tre variabili reali

$f \equiv 1 \Rightarrow \iiint_D dx\,dy\,dz = \text{Volume}(D)$

BARICENTRO

Coordinate del baricentro D

$\delta(x\,y\,z)$ DENSITÀ DI VOLUME

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\text{Vol}(D)} \cdot \int_D x\,\delta(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz \\ y_G &= \frac{1}{\text{Vol}(D)} \cdot \int_D y\,\delta(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz \\ z_G &= \frac{1}{\text{Vol}(D)} \cdot \int_D z\,\delta(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned}}$$

CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$D', D \subset \mathbb{R}^3$ $\qquad (u, v, w) \in D'$

$\varphi : D' \to D$ $\qquad (x, y, z) \in D$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 212

$(\rho\ \theta\ \varphi) \to (x, y, z)$

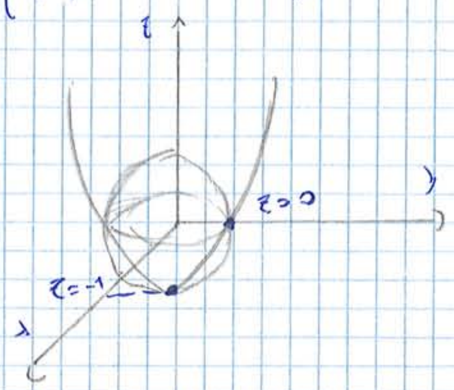
$$J\varphi = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

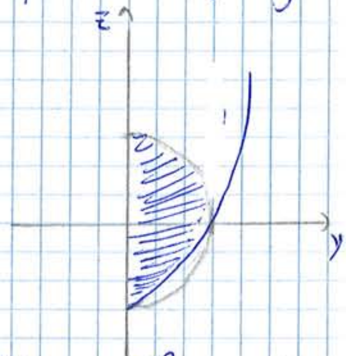
$$\boxed{|\det J\varphi| = \rho^2\sin\varphi}$$

Esempio

$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ $\qquad D = \{$ interno a $x^2+y^2+z^2=1$ e sopra a $z = x^2+y^2-1 \}$

$z_{min} = -1 \quad (x^2, y^2 \geq 0)$





Può essere utile proiettare la figura su un dato piano

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2+z=0 \\ \sim \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \vee z=-1 \\ \sim \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-1 \\ x=y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$D = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad x^2+y^2-1 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

Consideriamo la proiezione di x, y sul piano $z=0$

$D' \to$ Descrivo D in coordinate cilindriche (lascio fisso z e mi occupo solo di x e y)

$D' = \{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \rho^2-1 \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}\}$

$\hookrightarrow$ sostituisco ρ, θ a x e y

$$\iiint_{D'} z\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho \left(\int_{\rho^2-1}^{\sqrt{1-\rho^2}} z\,dz\right) d\rho\,d\theta =$$

$=$

10

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 212

$$y_g = \frac{1}{Area(A)} \iint_A y \, dy \, dz = \quad \text{Densità di massa} = \text{costante} = 1$$

$$= \frac{1}{Area(A)} \int_{y=a}^{y=b} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} y \, dz \right) dy = \frac{1}{Area(A)} \int_a^b y \left(\beta(y) - \alpha(y) \right) dy$$

Se uguagliamo gli integrali, formalmente identici

$$\frac{Vol(D)}{2\pi} = y_g \cdot Area(A)$$

$$\boxed{Vol(D) = 2\pi y_G \cdot Area(A)}$$

($2\pi y_G$ → circonferenza descritta dal baricentro attorno all'asse z)

TEOREMA DI GULDINO

Confronto integrali doppi - integrali tripli

INTEGRALI DOPPI	INTEGRALI TRIPLI
• Volume (con segno)	• \ (Grafici in 4 coordinate)
• Aree $\int_D 1 \, dx dy$	• Volumi $\int_D 1 \, dx dy dz$
• Massa, Baricentro, Momenti d'inerzia } Lamine piane	• Masse, Baricentri, Momenti d'inerzia } Regioni solide

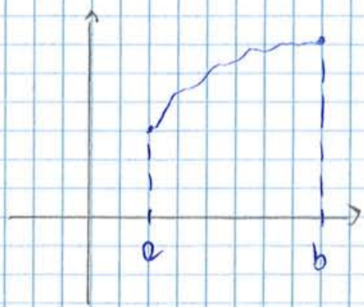
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 212

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos \omega t \\ y = \sin \omega t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right], \ \omega \text{ parametro fissato}$$

Il sostegno è sempre lo stesso.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$



$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Esempio di curva cartesiana; il grafico è il sostegno

VETTORE TANGENTE

Data $\gamma(t)$, $\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t), \dots, \gamma_n'(t)\right)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\gamma_i'(t)\right)^2}$$

È la generalizzazione del concetto di derivata

- INTEGRALE CURVILINEO DI I SPECIE

Data la curva $\gamma \ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, semplice e una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continua sul sostegno di γ, si definisce

$$\boxed{\int_\gamma f\, ds = \int_a^b \underbrace{f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}_{\text{Composizione di } f \text{ con } \gamma} \underbrace{\|\gamma'(t)\|\, dt}_{ds}}$$

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

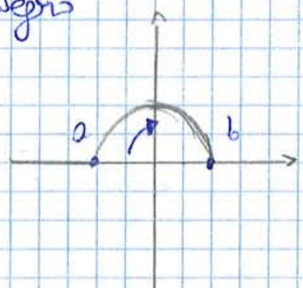
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 212

Cambiamo la curva associata al sostegno

$$\gamma : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -2\sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, 0]$$



$$\gamma' : \begin{cases} x = -2\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$$

$$\int_\gamma x^2 y \, ds = \int_{-\pi}^{0} 4\cos^2 t \, (-2\sin t) \, 2 \, dt = -16 \int_{-\pi}^{0} \cos^2 t \sin t \, dt = -\frac{16}{3} \cos^3 t \Big]_{-\pi}^{0} =$$

$$= -\frac{16}{3}(-1 - 1) = \frac{32}{3}$$

Osserviamo come l'oggetto che chiamiamo integrale dipende non dalla curva, ma soltanto dal suo sostegno.

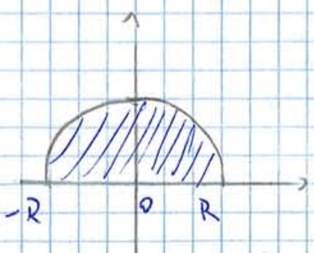
APPLICAZIONI

filo disposto lungo una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ con densità lineare di massa $\delta = \delta(x, y, z)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Massa Totale} = \int_\gamma \delta \, ds & \\ \text{Coordinate del baricentro} \quad x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma x \, \delta(x,y,z) \, ds, & y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma y \, \delta(x,y,z) \, ds \\ & z_G = \frac{1}{M}\int_\gamma z \, \delta(x,y,z) \, ds \end{array}}$$

ESEMPIO

2 masse uguali m distribuite uniformemente su un filo disposto lungo una semicirconferenza di raggio R oppure su una lamina che occupa un semicerchio di raggio R



$$\gamma : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2, \; y \geq 0\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, \; y \geq 0\}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 212

$\frac{4}{3\pi} R$

$G = (x_G, y_G) = \left(0, \frac{4}{3\pi} R\right)$

$y_G \to \gamma \to \frac{2}{\pi} R$

$y_G \to D \to \frac{4}{3\pi} R$

• INTEGRALI CURVILINEI DI II SPECIE (INTEGRALI DI LINEA)

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

- C^1, semplice ...

CAMPO VETTORIALE

$F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

F campo continuo sul sostegno di γ

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$

$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

DEF

$$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds$$

τ versore tangente a $\gamma \Rightarrow \tau = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$

NOTAZIONI

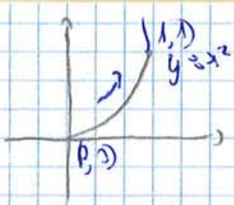
$$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_\gamma F \cdot \tau = \int_\gamma F \cdot dP$$ dove P è il punto

$$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

↳ È un numero, una funzione scalare in t

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 212

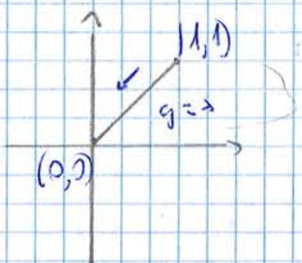


$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad \gamma' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \end{cases}$$

$$W = \int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^1 (t^4, 2t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t^4 + 4t^4) \, dt =$$

$$= \int_0^1 5t^4 = t^5 \Big|_0^1 = 1$$

Ripetiamo lo stesso calcolo lungo $y=x$ ma percorrendolo da $(1,1)$ a $(0,0)$



$$\gamma : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \end{cases} \qquad \gamma' : \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$W' = \int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^1 ((1-t)^2, 2(1-t)^2) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 ((1-2t+t^2), (2-4t+2t^2))$$

$$= \int_0^1 (2t - t^2 - 1 - 2t^2 + 4t - 2) \, dt = \int_0^1 (-3t^2 + 6t - 3) \, dt = -3 \int_0^1 (t^2 - 2t + 1) \, dt =$$

$$= -3 \int_0^1 (t-1)^2 \, dt = \frac{-3}{3} (t-1)^3 \Big|_0^1 = -1 (0 - (-1)) = -1 = -W$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 212

* I) $\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$ ← Non dipende dalla parametrizzazione scelta di γ (ciò è dovuto al modulo di γ')

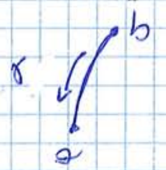
II) $\int_\gamma F\cdot\tau\,ds = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$ ← Non dipende dalla parametrizzazione purché la nuova scelta mantenga l'orientamento da a a b e non inverta gli estremi di integrazione

Se cambiamo l'orientamento, allora cambia il segno dell'integrale (infatti manca il modulo di γ')

I) Si calcola sulle CURVE

II) Si calcola sulle CURVE ORIENTATE

II) $\int_{\gamma(a)\to\gamma(b)} = -\int_{\gamma(b)\to\gamma(a)}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 212

Se il campo è conservativo, l'integrale su γ non dipende dalla curva γ ma soltanto dagli estremi della stessa.
Questo spiega il nome dei campi conservativi

TEOREMA

Campo $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo C^1.
Sono equivalenti le seguenti affermazioni

1. F è conservativo
2. Date due curve γ_1 e γ_2 contenute in A ed aventi gli stessi estremi (nell'ordine),
   ↳ Parliamo di integrali di II specie, che operano su curve e dipendono dall'orientazione

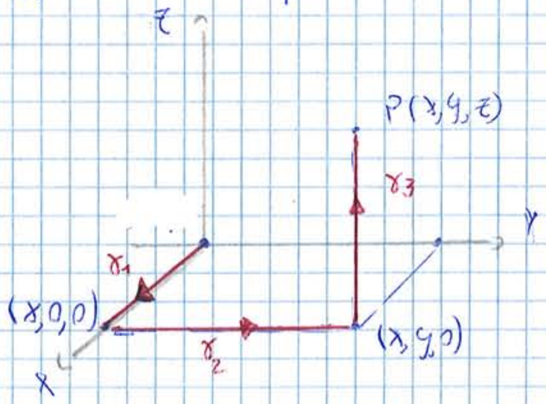
   si ha:
$$\int_{\gamma_1} F\cdot\tau\,ds = \int_{\gamma_2} F\cdot\tau\,ds$$
3. Data una curva chiusa $\gamma \subset A$
$$\oint_{\gamma} F\cdot\tau\,ds = 0$$

La circuitazione del campo lungo una curva chiusa vale zero.

Esempi

$$F(x,y,z) = (2xy\sin z,\ x^2\sin z,\ x^2 y\cos z)$$

Supponiamo di sapere che F è conservativo. Come calcolare U?



— Percorso scelto per andare da O a P

Fisso P nel dominio del campo; fisso un secondo punto del dominio (l'origine). So che l'integrale del campo non dipende dal cammino che collega O e P

$$\int_{\gamma} F\cdot\tau\,ds = U(x,y,z) - U(0,0,0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 212

• Come riconoscere se F è conservativo?

Dato F

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\partial_y F_3 - \partial_z F_2\right)\vec{i} - \left(\partial_x F_3 - \partial_z F_1\right)\vec{j} + \left(\partial_x F_2 - \partial_y F_1\right)\vec{k}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix}$$

$\text{rot } F = \nabla \times F$

$\text{div } F = \nabla \cdot F$

Campo irrotazionale
$\text{rot } F = 0$

Un campo F tale che $\text{rot } F \equiv 0$ si dice IRROTAZIONALE

Relazione tra campi conservativi e irrotazionali

Se F conservativo $F = \nabla U$ con U di classe C^2

$F_1 = \partial_x U \quad F_2 = \partial_y U \quad F_3 = \partial_z U$

Calcoliamo il rotore

Lemma di Schwarz

$\partial_y F_3 = \partial_y(\partial_z U) = \partial_z(\partial_y U) = \partial_z F_2$

$\Rightarrow \partial_y F_3 - \partial_z F_2 = 0 \quad \Rightarrow$ Annullo $\vec{i}$

Ripetendo l'operazione per le altre componenti

$\partial_x F_3 = \partial_x(\partial_z U) = \partial_z(\partial_x U) = \partial_z F_1$

$\Rightarrow \partial_x F_3 - \partial_z F_1 = 0 \quad \Rightarrow$ Annullo $\vec{j}$

$\partial_x F_2 = \partial_x(\partial_y U) = \partial_y(\partial_x U) = \partial_y F_1$

$\Rightarrow \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0 \quad \rightarrow$ Annullo $\vec{k}$

Abbiamo dimostrato che se F è conservativo con potenziale C^2, esso è anche irrotazionale

F conservativo $\Rightarrow$ F irrotazionale

18

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 212

$$\oint_\gamma F \cdot \underset{\sim}{\tau}\, ds$$

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma' : \begin{cases} x = -\sin t \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$\oint_\gamma F \cdot \underset{\sim}{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 \Rightarrow F \text{ non è conservativo}$$

Riprendendo il linguaggio delle forme differenziali

$$\oint_\gamma F \cdot \tau\, ds = \oint_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 2\pi \neq 0 \Rightarrow F \text{ non conservativo}$$

Un campo irrotazionale, per essere conservativo, deve avere un dominio di un certo tipo.

PROPOSIZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

- A aperto e connesso
- Ogni curva chiusa contenuta in A deve essere contraibile in un punto, rimanendo sempre all'interno di A. (semplicemente connesso)
  - ↳ Non accetti domini con un 'buco' (ad es. $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$)
  - → Presa una curva chiusa qualsiasi nel dominio, tutto ciò che sta all'interno è parte del dominio
- $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 e irrotazionale

$\Rightarrow F$ è conservativo

Esempio

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \text{ non è conservativo in } \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$$

$F(x,y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0,\ x\leq 0\}$ 19

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 212

PROPOSIZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ IN $\mathbb{R}^3$

- A aperto e connesso
- Ogni curva chiusa contenuta in A sia contraibile in un punto rimanendo in A (semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$)

ESEMPIO
- Una sfera senza un punto è semplicemente connessa
- $\mathbb{R}^3 - \{PUNTO\}$
- $\mathbb{R}^3 - \{UNA\ RETTA\}$ NO
- Sfera - una sferetta concentrica

- $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ classe C^1 irrotazionale in A

$\Rightarrow$ F CONSERVATIVO

ESEMPIO

$F(x,y,z) = (e^y, xe^y, z+e^z)$

- F è irrotazionale? SI
- Campo $A = \mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso? SI $\Rightarrow$ F conservativo
- C^1? SI

$\partial_x U = F_1 \qquad \partial_y U = F_2 \qquad \partial_z U = F_3$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 = e^y \Rightarrow U(x,y,z) = \int e^y dx + C(y,z) = xe^y + C(y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U = \begin{cases} xe^y + \frac{\partial C}{\partial y} \\ F_2 = xe^y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow C = K(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} 0 + K'(z) \\ F_3 = z + e^z \end{cases} \Rightarrow z + e^z = K'(z) \Rightarrow K(z) = \int (z+e^z)\,dz + h = \frac{z^2}{2} + e^z + h$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 212

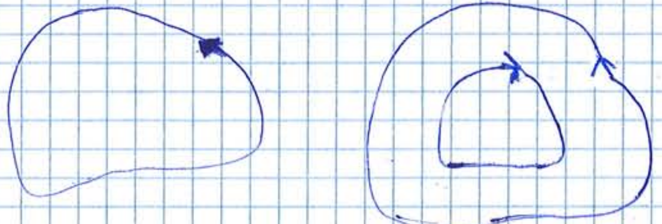
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 212

04 11 - 2014 APPUNTI

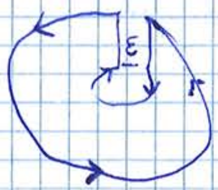
TEOREMA DI GAUSS - GREEN

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ tale che

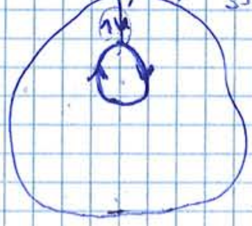
1. D è unione di un numero finito di regioni semplici rispetto agli assi, che abbiano in comune soltanto tratti di frontiera
2. ∂D è l'unione di un numero finito di curve chiuse regolari a tratti (frontiera di D)
3. ∂D sia orientata positivamente: percorrendo la ∂D, il dominio D rimane a sinistra



Internamente, mi muovo in senso orario; esternamente, mi muovo in senso antiorario.



Se ε si riduce, per $\varepsilon \to 0$



Questi integrali si elidono e la frontiera interna si percorre in senso orario

Dato un campo $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ C^1 su un aperto contenente D, allora

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dx\, dy &= \oint_{\partial D} F \cdot \tau \, ds = \oint_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy \\ \iint_D \operatorname{rot} F \, dx\, dy &= \oint_{\partial^+ D} F \cdot \tau \, ds = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy \end{aligned}}$$

Il segno "+" indica l'orientamento positivo della frontiera ∂D

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 212

Quindi

$$\oint_{+\gamma_2} F\cdot\tau\, ds + \oint_{+\gamma_1} F\cdot\tau\, ds = 0$$

Ciò significa che

$$\oint_{+\gamma_2} F\tau\, ds = -\oint_{\gamma_1} F\tau\, ds \Rightarrow \oint_{\gamma_2} F\tau\, ds = \oint_{\gamma_1} F\tau\, ds$$

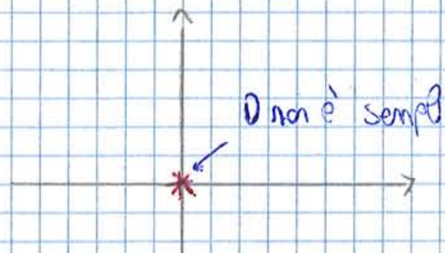
Di conseguenza, se il campo è irrotazionale gli integrali su curve dello stesso tipo sono uguali. Se anche γ_1, oltre a γ_2, è orientata in senso antiorario, gli integrali del campo hanno lo stesso valore.

Avevamo già visto che integrali su curve chiuse di campi conservativi valevano zero; se invece il campo è irrotazionale, gli integrali su curve chiuse sono uguali, anche se non ne conosciamo il valore

F conservativo	$\oint_{\gamma_1} F\tau\, ds = \oint_{\gamma_2} F\tau\, ds = 0$
F irrotazionale	$\oint_{\gamma_1} F\tau\, ds = \oint_{\gamma_2} F\tau\, ds$

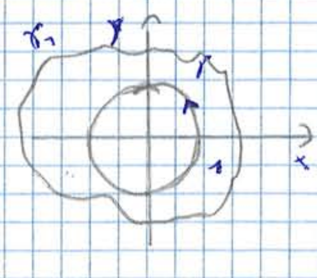
Esempio

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \rightarrow \text{irrotazionale, ma non conservativo}$$



D non è semplicemente connesso

$\gamma: x^2+y^2=1$



$$\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = \ldots = 2\pi$$ 12

Per qualsiasi curva che circonda l'origine (punto che nega il fatto di essere semplicemente connesso a D), l'integrale su γ di F sono sempre lo stesso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 212

*

SUPERFICI PARAMETRICHE

$\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua

$\sigma(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \right)$, $u, v \in D$

La superficie è σ, ovvero la legge (in questo caso in forma parametrica)

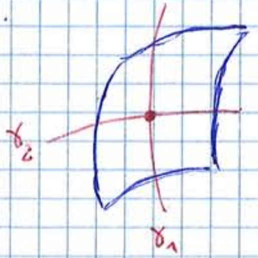
l'immagine, cioè il sostegno della superficie è $\Sigma = \sigma(D) \subset \mathbb{R}^3$

Esempi

$f(x,y)$ $x, y \in D$ Superficie cartesiana $\to$ Si ottengono a partire da funzioni a valori in $\mathbb{R}$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$



Fissato $u = u_0$: $\gamma_1 \begin{cases} x = x(u_0,v) \\ y = y(u_0,v) \\ z = z(u_0,v) \end{cases}$ Otteniamo una curva (dicesi curva coordinata)

Fissato $v = v_0$: $\gamma_2 \begin{cases} x = x(u,v_0) \\ y = y(u,v_0) \\ z = z(u,v_0) \end{cases}$ Otteniamo ancora una curva

Chiaramente, fissati sia u che v, troviamo un punto

Fissata una coppia $(u_0,v_0) \in D$, sia $P_0(u_0,v_0) \in \Sigma$

Il vettore tangente a γ_1 in P_0 sarà:

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)}$$

Il vettore tangente a γ_2 in P_0 sarà:

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 212

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$ → Sviluppo di Taylor al primo ordine

$$\begin{cases} x_0 = u_0 \\ y_0 = v_0 \end{cases}$$

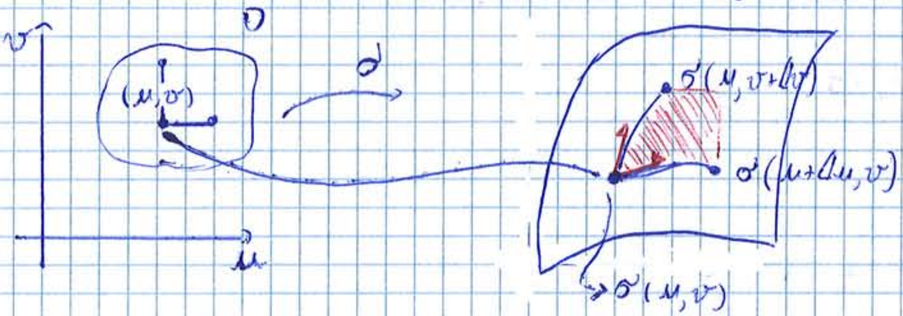
• INTEGRALE DI SUPERFICIE DI I SPECIE

$$\sigma : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$ superficie regolare $(u,v) \in D$

$f(x,y,z)$ funzione continua sul sostegno di σ

$$\boxed{\iint_\Sigma f \, d\sigma = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \underbrace{\|N(u,v)\| \, du \, dv}_{d\sigma}}$$

N → Lungo le curve, o si muove sul vettore tangente alla curva in ogni punto



Se incremento solo u faccio il seguente passaggio $(u,v) \to (u+\Delta u, v)$
Se incremento solo v faccio il seguente passaggio $(u,v) \to (u, v+\Delta v)$

Come approssimare

$\sigma(u+\Delta u, v)$? $\Rightarrow$ $\sigma(u+\Delta u, v) \simeq \sigma(u,v) + \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)\Delta u + \dots$

$\sigma(u, v+\Delta v)$? $\Rightarrow$ $\sigma(u, v+\Delta v) \simeq \sigma(u,v) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\Delta v + \dots$

L'idea è considerare l'area individuata da $\sigma(u,v)$, $\sigma(u+\Delta u, v)$, $\sigma(u, v+\Delta v)$
Ottengo un'approssimazione dell'area:

$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)\Delta u \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\Delta v \right\|$ ⟹ È l'area del parallelogramma (modulo del prodotto vettoriale)

$= \underbrace{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\|}_{\|N\|} \Delta u \, \Delta v$ se $\Delta u, \Delta v \to 0$, l'approssimazione è significativa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 212

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right) \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)$$

$$N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, 1\right)$$

$$\|N\| = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{R^2-u^2-v^2} + 1} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-u^2-v^2}} = \frac{|R|}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}$$

$$\iint_D \underbrace{\cancel{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}}_{z} \cdot \underbrace{\frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}}}_{\|N\|} \, du\, dv = R\iint_D du\,dv = R\left(\text{Area}(D)\right) = R\pi R^2$$

$$= \pi R^3$$

$$z_G = \frac{\pi R^{\cancel{3}}}{2\pi \cancel{R^2}} = \frac{R}{2}$$

1. $(x_G, y_G, z_G) = \left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$

2. $z_G = \dfrac{\int_D z\,dx\,dy\,dz}{\int_\Sigma d\sigma} =$ $\quad z = +\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $\quad z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in D\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \le x \le R,\ -R \le y \le R\}$

Cambio di coordinate → Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad |\det J| = \rho^2 \sin\varphi \qquad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le R \end{matrix}$$

Troviamo

$$\int_D \rho\cos\theta\, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho^3 \sin\varphi\cos\theta\, d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^R \rho^3\, d\rho = \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} \cdot \underbrace{\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = 0$$

Ciò implica che

$$z_G = \frac{\int_D z\,dx\,dy\,dz}{\int_\Sigma d\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (x_G, y_G, z_G) = (0,0,0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 212

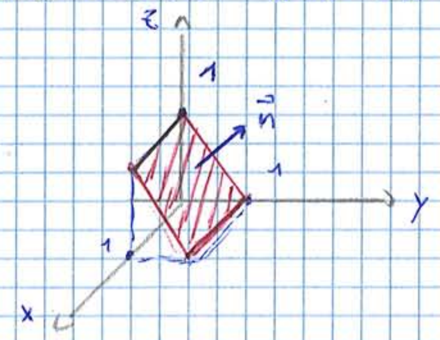
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 212

Esempio

Flusso del Campo $F(x,y,z) = (\cos xz,\ xy,\ z)$

Σ dato da $\begin{cases} z = 1-y \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

con normale tale che $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0 \Rightarrow \vec{n}$ forma un angolo acuto con $\vec{k}$ (versore $\vec{u_z}$)

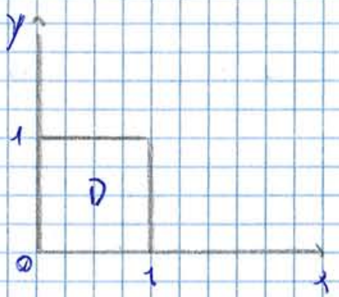


$$N(x,y) = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1) = (0, +1, 1)$$

(Poiché la superficie è data in forma cartesiana)

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_D F(x,y,z)\, N(u,v)\, du\, dv = \int_D \left(\cos[x(1-y)],\ xy,\ 1-y\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy =$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ è la proiezione di Σ sul piano xy



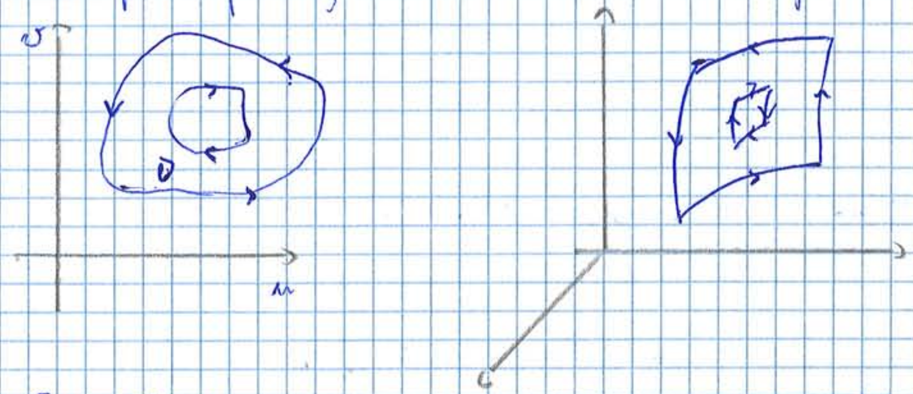
$$= \int_0^1 \int_0^1 (xy + 1 - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy + 1 - y\, dx \right) dy = \int_0^1 \left. \frac{x^2}{2} y + x - xy \right|_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + 1 - y \right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{y}{2} + 1 \right) dy = \left. -\frac{y^2}{4} + y \right|_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 212

Se il campo è piano, il Teorema di Stokes corrisponde al Teorema di Gauss-Green



$\Sigma = \sigma(D) =$

$\partial\Sigma = \partial\sigma(D) = \sigma(\partial D)$

OSS

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

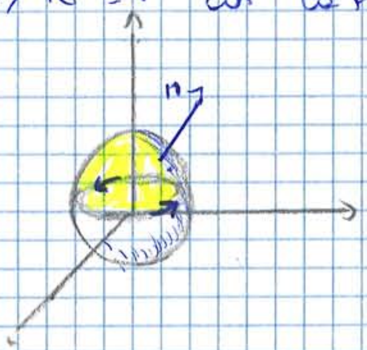
Sull'intervallo $[a,b]$, a e b costituiscono il bordo del dominio;

il Teorema di Stokes è in qualche modo l'analogo in più dimensioni

Esempio

$F(x,y,z) = \left(2x - y,\ -yz^2,\ -y^2 z\right)$

Flusso del rotore di F attraverso l'emisfero superiore della sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con la normale che punta verso l'alto.



n è assegnata; devo orientare il bordo di Σ in base a n

L'orientamento deve essere coerente!

$\iint_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} F\, \tau\, ds$

È un lavoro

$\partial^+\Sigma = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$ $\partial^+\Sigma$ è la circonferenza

$\int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \sin^2 t)\, dt = -\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} + \pi =$

$= 0 + \pi = \pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 212

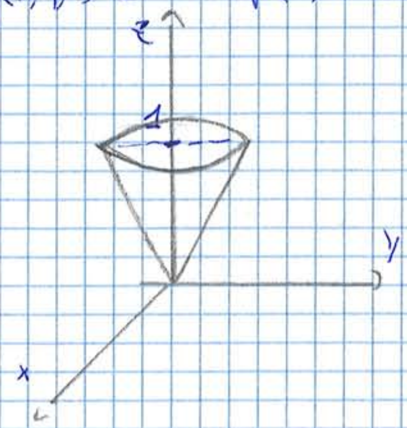
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 212

Esempio

Calcolare flusso di $F(x,y,z) = (2x+z^2, 3, e^y)$ uscente dal bordo del dominio D, con

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$

$z = \sqrt{x^2+y^2} \to$ cono



$$\iint_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz =$$

$$\nabla \cdot F = 2+0+0 = 2$$

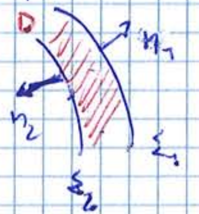
$$\iiint_D 2 \, dx\,dy\,dz = 2\iiint_D dx\,dy\,dz = 2 \cdot [\text{Volume}(D)] = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{2\pi}{3}$$

Supponiamo di avere in $\mathbb{R}^3$ un campo $F(x,y,z)$ tale che $\operatorname{div} F = 0$

Ciò significa che

$$\iint_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = 0$$

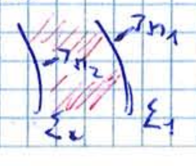
Immaginiamo D come parte di due sfere (e che la normale sia esterna)



Se è così, potrò scrivere

$$\iint_{\Sigma_1}^{e} + \iint_{\Sigma_2}^{e} = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma_1}^{e} = -\iint_{\Sigma_2}^{e}$$ $\to$ Questo è l'integrale su Σ_2 con la normale orientata all'interno del dominio

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma_1}^{e} = \iint_{\Sigma_2}^{i}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 212

Per il Teorema della divergenza

$$\varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} E \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} E \, dx\,dy\,dz$$

Quindi

$$\int_\Omega q \, dx\,dy\,dz = \varepsilon_0 \int_\Omega \operatorname{div} E \, dx\,dy\,dz$$

Ma gli integrali sono effettuati sullo stesso dominio

$$\int_\Omega (q - \varepsilon_0 \operatorname{div} E) \, dx\,dy\,dz = 0 \qquad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow q - \varepsilon_0 \operatorname{div} E = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} E = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{LEGGE DI MAXWELL}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 212

ESEMPIO

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$

La successione è $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\vdots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

In generale, $r \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & r \neq 1 \\ n+1 & r = 1 \end{cases}$$

$(1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n) = 1 \cancel{+r} \cancel{+r^2} \cancel{+r^3} + \dots + r^n \cancel{-r} \cancel{-r^2} \cancel{-r^3} - r^4 - \dots - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$

Dividendo per $(1-r)$, abbiamo dimostrato la formula.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

La S_n, scritta in questo modo, consente subito di dare una risposta

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^{\to 0}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

PROPOSIZIONE

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 212

Infatti $(-1)^{n+1}$ ha un segno positivo o negativo a seconda che $n+1$ sia pari o dispari: si potrebbero estrarre due sottosuccessioni che tendono a valori diversi

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$n \to +\infty \quad S_n \to 1$

Serie somma

$\sum_n a_n, \ \sum_n b_n$ serie convergenti $\qquad S = \sum_n a_n \quad T = \sum_n b_n$

$\Rightarrow \sum_n (a_n + b_n)$ è convergente;

$\Rightarrow \sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n = S + T$

Dimostrazione

ridotta n-esima di $\sum_n a_n + b_n$

$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$

$= a_0 + a_1 + \dots + a_n + b_0 + b_1 + \dots + b_n$

$= S_n + T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S + T$

Moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_n a_n$ convergente e $S = \sum_n a_n$

$\Rightarrow \sum_n \lambda a_n$ è convergente

$\Rightarrow \sum_n \lambda a_n = \lambda S$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 212

CRITERI PER SERIE A TERMINI POSITIVI

- **CRITERIO DEL CONFRONTO**

$\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n$ e tali che $a_n \leq b_n$ $\forall n$

1 ⇒ Se $\sum_n b_n$ converge, allora anche $\sum_n a_n$ converge

2 ⇒ Se $\sum_n a_n$ diverge positivamente, allora anche $\sum_n b_n$ diverge positivamente

DIMOSTRAZIONE

① $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
$T_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$ $a_i \leq b_i$ $\forall i$ ⇒ $S_n \leq T_n$ $\forall n$

$$\Rightarrow \sup_n \{S_n\} \leq \sup_n \{T_n\}$$

ma $\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_n \{S_n\} \leq \sup_n \{T_n\} = \lim_{n\to+\infty} T_n$

poiché $\{S_n\}$ è successione crescente

Se $\exists$ finito $\lim_{n\to\infty} T_n$ ⇒ $\exists$ finito anche $\lim_{n\to\infty} S_n$ ⇒ $\{S_n\}$ converge

② Se $\sum_n b_n$ convergesse ⇒ (applicando la parte 1) $\sum_n a_n$ convergerebbe ⇒ Ma ciò è assurdo (per ipotesi $\{a_n\}$ diverge) ⇒ $\{b_n\}$ diverge positivamente

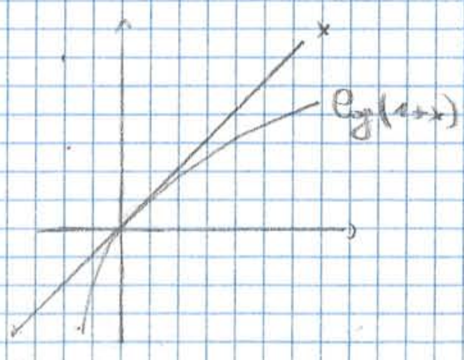
ESEMPIO

$$\boxed{\sum_n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{SERIE ARMONICA}}$$

È a termini positivi ⇒ Div. positivamente o convergente

$\forall n$ $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

Diverge positivamente



⇒ $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge positivamente per il criterio del confronto

32

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 212

$f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ $\iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$ $\iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Allora

$f(x) \sim g(x)$, $x \to c$ $\iff f(x) = g(x) + o(g(x))$

Esempio

$\sum_n \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Sappiamo che $\sin x \sim x$ $x \to 0$ $\Rightarrow \sin x = x + o(x)$ $x \to 0$

$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ $n \to +\infty$ $\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$

Poiché $\frac{1}{n^2}$ converge, per il confronto asintotico anche $\left|\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ converge

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

$e^x - 1 \sim x$

$\log(1+x) \sim x$ $\quad x \to 0$

$\arcsin x \sim x$

$\arctg x \sim x$

Esempio

$\sum_n \left(e^{1/n} - 1\right)^2$

$e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$ $\quad e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$

$\left(e^{1/n} - 1\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$ $\quad n \to +\infty$

converge $\Leftarrow$ converge

33

- CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_n a_n \quad a_n > 0$

- $\exists$ finito o infinito $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$\Rightarrow$ Se $l < 1$, allora la serie converge

$\Rightarrow$ Se $l > 1$, allora la serie diverge (positivamente)

$\Rightarrow$ Se $l = 1$, nulla si può dire rispetto alla convergenza o alla divergenza della serie

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 212

25/11/2014 APPUNTI

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad n \in \mathbb{N}$

Definiamo un'altra successione (delle somme parziali)

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_0 + \dots + a_n$

Valutiamo $\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \text{ (converge)} \\ \pm\infty & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ (diverge)} \\ \nexists & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ non ammette limite} \end{cases}$

CRITERIO DELLA RADICE

$\sum_n a_n \quad a_n \geq 0 \ \forall n$

Se $\exists$ (finito o infinito) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\Rightarrow$ Se $\ell < 1$ $\sum_n a_n$ CONVERGE

$\Rightarrow$ Se $\ell > 1$ $\sum_n a_n$ DIVERGE (positivamente)

$\Rightarrow$ Se $\ell = 1$ nulla si può dire circa la convergenza o la divergenza

Es

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

34

Anche se il comportamento assume una certa modalità solo da un punto in poi, esso non cambia poiché la valutiamo su infiniti termini

$$\sqrt[n]{a_n} = a_n^{1/n} = \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(-2)}{n}\right)^n \to e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1 \Rightarrow \text{serie converge}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 212

Es

$$\sum_n \frac{1}{n \log^2 n} \quad , \quad \sum_n \frac{1}{n(\log n)\log(\log(n))}$$

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{(A Termini qualsiasi)}$$

DEFINIZIONE

Si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE se converge la serie $\sum_n |a_n|$

Es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{3/2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \text{Converge}$$

Di conseguenza

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ converge assolutamente

Es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge}$$

Di conseguenza

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ non converge assolutamente

Qual è la relazione tra convergenza e convergenza assoluta di una serie?

TEOREMA

Se $\sum_n a_n$ converge assolutamente, allora converge

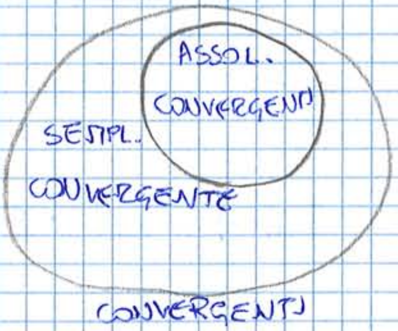
35

Con la serie in modulo $\sum_n^{\infty} |a_n|$ recuperiamo tutti i criteri per le serie a termini positivi

Se la serie dei moduli non converge, nulla si può dire circa la convergenza semplice

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 212



Una serie che non è assolutamente convergente, ma converge ugualmente, si dice SEMPLICEMENTE CONVERGENTE

• OSSERVAZIONI SU PROPRIETÀ COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA PER LE SERIE

• La proprietà associativa vale se la serie non è indeterminata

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+1 \dots$$

Associamo

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0$

$1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+0+\dots = 1$

Quindi nel primo caso la serie convergerebbe a 0, mentre nel secondo a 1; pertanto la proprietà associativa non vale.

• La proprietà commutativa vale se la serie è assolutamente convergente

• SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tutte definite in uno stesso $A \subseteq \mathbb{R}$
insieme

Es

$f_n(x) = e^{-nx}$

$n=0 \quad f_0(x) = 1$

$n=1 \quad f_1(x) = e^{-x}$

$n=2 \quad f_2(x) = e^{-2x}$

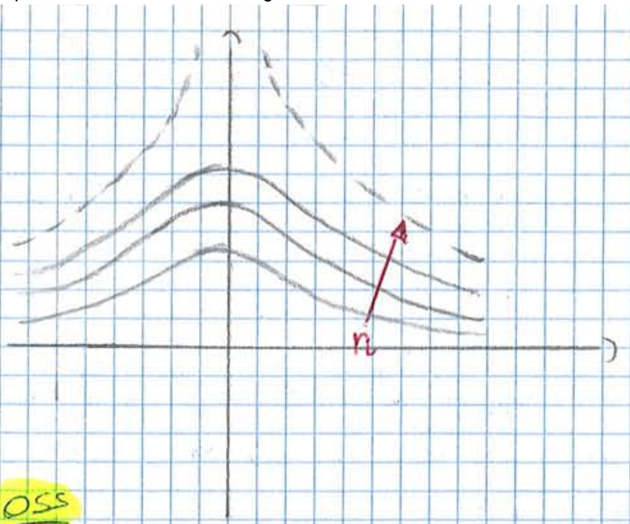
$\vdots \qquad \vdots$

DEFINIZIONE

Si dice che $\{f_n(x)\}$ CONVERGE PUNTUALMENTE ad una funzione f in A se:
$\forall x \in A$
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 212



OSS

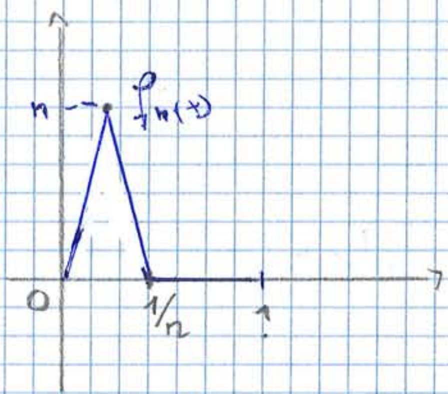
$n=1 \quad \dfrac{1}{x^2+1}$

$n=2 \quad \dfrac{1}{x^2+\frac{1}{2}}$

Analogamente al caso precedente, perdiamo la limitatezza nella funzione limite (tutte sono finite tranne $\frac{1}{x^2}$, che esplode in $x=0$)

Es

$[0,1]$.



Maggiore è n, minore è l'area dove la successione è diversa da 0.

Per $x=0$ $\quad f_n(x)=0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Per $0<x\leq 1$

Posso prendere n sufficientemente grande: $x>\frac{1}{n}$ $\left(n>\frac{1}{x}\right)$.

$f_n(x)=0 \quad \forall n>\frac{1}{x}$

E quindi $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

$f_n(x)\to 0 \quad \forall x\in[0,1]$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ma l'integrale della funzione limite vale 0.

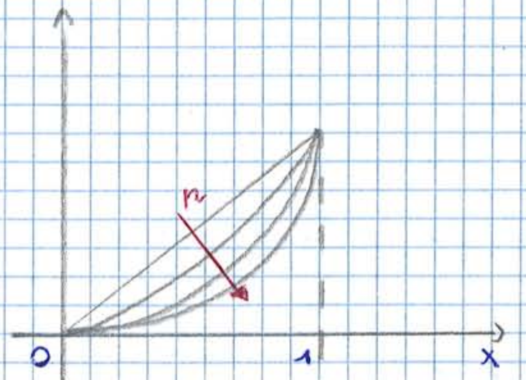
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 212

Poiché per la convergenza uniforme N è slegato da x (l'opposto accade per la convergenza puntuale):

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Convergenza uniforme} \Rightarrow \text{Convergenza puntuale} \\ \text{Convergenza puntuale} \not\Rightarrow \text{Convergenza uniforme}\end{array}}$$

Es



$f_n(x) = x^n \qquad A = [0,1)$

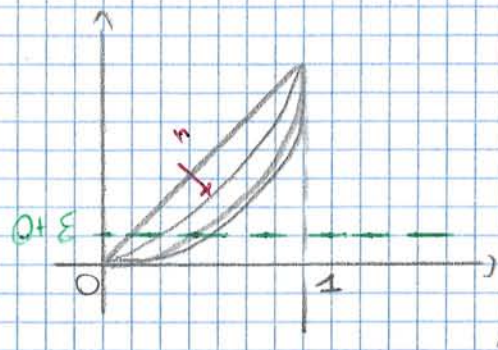
$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall x \in [0,1)$ Convergenza puntuale

La convergenza è uniforme ?

$\sup_{x \in [0,1)} |x^n - 0| = \sup_{x \in [0,1)} |x^n| = 1$

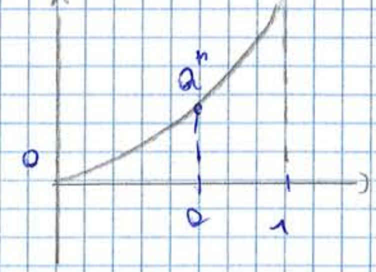
Metto il limite puntuale $(f(x) = 0)$

$\lim_{n \to +\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Non c'è convergenza uniforme



Le $f_n(x)$ escono dalla striscia $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$

In $[0,a]$ con $a < 1$?



$\sup_{x \in [0,a]} |x^n - 0| = a^n$

$\lim_{n \to +\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} a^n = 0$

Quindi, nell'intervallo $[0,a]$ c'è convergenza uniforme

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 212

02/12/2014 APPUNTI

CONVERGENZA UNIFORME operativamente è data dalla relazione

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

PROPOSIZIONE

Sia f_n una successione di funzioni che converge uniformemente ad una funzione f su un intervallo I, allora

- Se ciascuna f_n è limitata in I, allora f è limitata in I
- Se ciascuna f_n è continua in I, allora f è continua in I
- Se $I = [a,b]$ e ciascuna f_n è integrabile su $[a,b]$, allora f è integrabile su $[a,b]$

e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

"L'integrale del limite è il limite dell'integrale"

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Analogamente operiamo per la continuità

$f(x)$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$

$x_0 \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

39

PROPOSIZIONE

Siano f_n funzioni di classe C^1 in $[a,b]$; supponiamo che f_n sia convergente puntualmente ad f in $[a,b]$

Sia f_n' convergente uniformemente in $[a,b]$

$\Rightarrow f$ è di classe C^1 in $[a,b]$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$(\Rightarrow f_n$ converge uniformemente a f in $[a,b])$

↳ talvolta è posto come ipotesi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 212

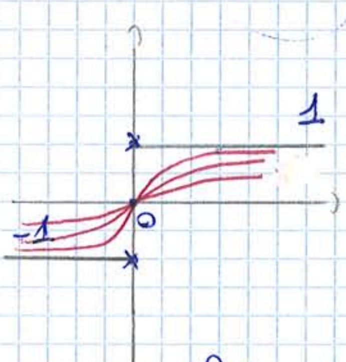
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 212

Inoltre $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = n \neq 0$

Esempio

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

- $f_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} |x|$ convergenza puntuale
- la convergenza è uniforme:
- $f'_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \end{cases}$



le $f'_n(x)$ sono continue ma convergono ad una funzione che non è continua: segue che la convergenza non può essere uniforme

Questo fatto si può vedere anche direttamente

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$

$f'_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \neq f'(x)$ proprio perché la convergenza non è uniforme

OSS

Se $f_n \to f$ uniformemente
e se $x_n \to x$
$\Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$
$\Updownarrow$
$|f_n(x_n) - f(x)| \to 0$

Possiamo utilizzare questo risultato per mostrare che non c'è convergenza uniforme

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ Uso quest'espressione per cercare di eliminare il denominatore

$f'_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 212

Questo perchè

- $\sup_{[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = 1$

oppure consideriamo

- $x_n = 1 - \frac{1}{2n}$ questa successione tende a 1

Sebbene $x=1$ non sia appartenente all'insieme, esso è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE e, in quanto tale (punto limite), è accettabile.

Verifichiamo che non vi è convergenza uniforme
Se c'è convergenza uniforme, per $x_n \to x$ e $f_n \to f$, allora $f_n(x_n) \to f(x)$

$x_n \to 1$, $f_n \to -1$, quindi $f(x) = -1$

$$f_n(x_n) = \frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n} - 1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n} + 1} \quad \text{Posto } 2n = \alpha \quad = \frac{\left(1+\frac{(-1)}{\alpha}\right)^{\alpha} - 1}{\left(1+\frac{(-1)}{\alpha}\right)^{\alpha} + 1} \quad \begin{matrix} n \to +\infty \\ \alpha \to +\infty \end{matrix} \longrightarrow \frac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1} \neq -1$$

Quindi concludiamo che non si ha convergenza uniforme

Su $[0,1) \Rightarrow$ no convergenza uniforme

- Cosa avviene in $[R, +\infty)$ con $R > 1$?

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 1| = \frac{1}{R^{2n}+1}$$

$$\sup_{[R,+\infty)} \frac{1}{R^{2n}+1} \to \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{1}{R^{2n}+1} = 0$$

Su $[R, +\infty) \Rightarrow$ si convergenza uniforme
Su $(-\infty, -R] \Rightarrow$ si convergenza uniforme

- Infine

Su $(1, +\infty) \Rightarrow$ no convergenza uniforme

Consideriamo

$x_n = 1 + \frac{1}{2n}$

Se c'è convergenza uniforme con $f_n \to f$, se $x_n \to x$, allora si deve verificare che $f_n(x_n) \to f(x)$

41

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 212

- Se $S_n(x)$ converge uniformemente in A, allora diremo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in A

S_n è detta SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI O RIDOTTE

__Es__ $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$

Per ogni x fissato, la serie diventa una serie geometrica (cioè una serie numerica)

Studiamone la convergenza puntuale

$|e^{-x}| = e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1$ Ho convergenza quando $\frac{1}{e^x} < 1 \Rightarrow \forall x > 0$

La somma è $S(x)$

$S(x) = \sum_{0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \quad x > 0$

La convergenza è anche assoluta poiché $(e^{-x})^n = |(e^{-x})^n|$

OSS

- f_n continue in $[a,b]$
- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente

$\Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è continua in $[a,b]$

Se le f_n sono continue $\Rightarrow$ anche le S_n sono continue $\Rightarrow$ le S_n convergono uniformemente $\Rightarrow$ la funzione a cui convergono è automaticamente continua

Anche tutte le altre proprietà finora enunciate si possono estendere

- CRITERIO DI WEIRSTRASS

92

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad A$

$\exists\ M_n$ tale che $\begin{cases} |f_n(x)| \le M_n, & \forall n, \forall x \in A \\ \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \text{ convergente} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La serie $\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente, assolutamente, e uniformemente

2

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 212

Per il criterio di Weierstrass dobbiamo la convergenza totale

È possibile avere la convergenza uniforme in $[0, +\infty)$?

$\sum_n e^{-nx}$ converge puntualmente per $x > 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \rightarrow$ in $(0, +\infty)$ non è limitata

Queste funzioni sono limitate

Quindi non si ha convergenza uniforme

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI WEIRSTRASS

- Convergenza assoluta $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in A$ $\Rightarrow$ Convergenza Assoluta dal criterio del confronto (la serie convergente)

- Convergenza uniforme

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

Per ipotesi $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$

$$\sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M_k = \sum_{k=0}^{n} M_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow_{n \to +\infty} & \downarrow_{n \to +\infty} \\ M & M & 0 \end{array}$$

Necessariamente la coda va a zero in una serie convergente

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0$$

Di conseguenza, abbiamo anche la convergenza uniforme (la scrittura di sopra è molto simile ad uno sviluppo in serie di Taylor con tutti i termini che vanno a zero)

3

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 212

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi: la serie numerica $\sum_n a_n x_1^n$ converge, quindi

$\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0 \Rightarrow$ la successione $a_n x_1^n$ è limitata

$\Rightarrow \exists M > 0$ tale che $|a_n x_1^n| \leq M \ \forall n$.

Prendiamo $x \in (-|x_1|, |x_1|)$; allora $|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| \leq M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$

Ma $\frac{x}{x_1}$ è il termine generico di una serie geometrica di ragione < 1, quindi converge. Per confronto, anche $|a_n x^n|$ converge

DEF

Data $\sum_n a_n x^n$, si definisce il suo raggio di convergenza R:

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_n a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

R è un numero ≥ 0 (lo 0 è sempre presente) o è $+\infty$, quindi esiste sempre.

TEOREMA

Data $\sum_n a_n x^n$, sia R il suo raggio di convergenza

1. Se $R = 0$, la serie converge soltanto per $x = 0$
2. Se R è un numero tale che $0 < R < +\infty$, la serie converge assolutamente in tutto l'intervallo $(-R, R)$ e uniformemente in ogni sottointervallo chiuso del tipo $[-k, k]$ con $0 < k < R$. Non converge per $|x| > R$
3. Se $R = +\infty$, allora la serie converge assolutamente in tutto $\mathbb{R}$ e uniformemente in ogni intervallo chiuso $[-k, k]$ con $k > 0$.

In tutti i punti intermedi c'è conv. assoluta e uniforme su determinati intervalli

44

4

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 212

È continua in $(-R,R)$? Sì perché posso sempre prendere un intervallo chiuso che non contenga R.

Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definita in $(-R,R)$ allora $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è continua su tutto l'intervallo

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad a_n = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{converge in } (-1,1) \Rightarrow R = 1$$

- Convergenza assoluta in $(-1,1)$
- Convergenza uniforme in $[-k,k]$ con $0<k<1$
- $S(x)$ è continua in $(-1,1)$
- Convergenza uniforme in $(-1,1)$? NO perché tutte le x^n, limitate, differiscono dalla funzione somma $\frac{1}{1-x}$, che invece esplode in $x=1$ (discontinua)

CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA

- FORMULA DELLA RADICE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$

$$\Rightarrow R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } 0<\ell<+\infty \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases} \qquad \text{"}\left(\left(R = \frac{1}{\ell}\right)\right)\text{"}$$

- FORMULA DEL RAPPORTO

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_n \neq 0$ $\forall n$, se $\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$

$$\Rightarrow R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ 1/\ell & \text{se } 0<\ell<+\infty \end{cases} \qquad \text{"}\left(\left(R = 1/\ell\right)\right)\text{"}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 212

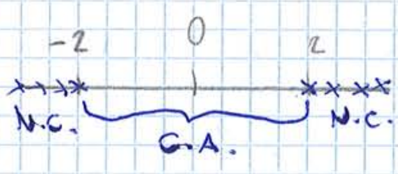
Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

- Convergenza uniforme in $[-k, k]$, $0 \le k < 2$
- Convergenza assoluta in $(-2, 2)$
- Non convergenza per $|x| > 2$
- Non convergenza per $x = \pm 2$



$R = x = 2$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \to$ non converge

$R = x = -2$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 \to$ non converge

Insieme di convergenza: $(-2, 2)$

Teorema di Abel

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad 0 < R < +\infty$$

1. Se la serie converge in $x = R$, allora la serie converge uniformemente in tutti gli intervalli del tipo $[-k, R]$ con $0 < k < R$

Dimostrata la convergenza in $x = R$, allora avremo convergenza uniforme su $[-k, R]$

2. Se la serie converge in $x = -R$, allora la serie converge uniformemente in $[-R, k]$ con $0 < k < R$

3. Se la serie converge sia in $x = R$ che in $x = -R$, allora essa converge uniformemente in tutto $[-R, R]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 212

Definiamo prodotto alla Cauchy la serie così definita

$(a_0 \cdot b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + \dots$

La somma degli indici è pari all'esponente della potenza di x

Scriviamo la serie come segue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

TEOREMA

$\sum_n a_n x^n \to R_1, \; S(x)$

$\sum_n b_n x^n \to R_2, \; T(x)$

$\Rightarrow \sum_n c_n x^n$ ha raggio di convergenza $R = \min\{R_1, R_2\}$ e somma $S(x) \cdot T(x)$

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_n c_n x^n$$

$a_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad b_n = 1$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2}^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$R_1 = 2$ $\qquad R_2 = 1$

$S(x)$ $\qquad T(x)$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$\sum_n c_n x^n \to R = \min\{R_1, R_2\}$

Inoltre la somma $S(x) \cdot T(x)$

DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

$(*) \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \quad R > 0$

- La serie delle derivate della serie $(*)$ è ancora una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} \qquad \ell = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell'$$

$\ell \qquad \ell'$

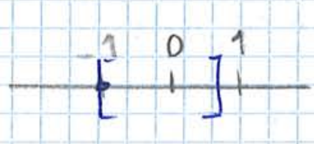
(Ciò si osserva applicando la formula del rapporto)

- Le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza R
- La somma $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è derivabile con derivata continua (C^1) per $|x| < R$ e la sua derivata $S'(x)$ è la somma della serie delle derivate

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 212

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 212

$\cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ $\quad [-1,1)$ Per il Teorema di Abel



Converge uniformemente in $[-1,1)$?

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \qquad x\,S(x) = \sum_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_n \int_0^x t^n\,dt = \int_0^x \sum_n t^n\,dt$$

$$x\,S(x) = \int_0^x \sum_n t^n\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\log(1-x)$$

$$\Rightarrow S(x) = -\frac{1}{x}\log(1-x)$$

Se convergesse in tutto $[-1,1)$ $S(x)$ non sarebbe limitata (esplode) e ciò non sarebbe possibile ($S(x)$ è infatti somma di funzioni limitate)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 212