



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1569A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Cappelletti

MATERIA: Aeroelasticità + temi d'esame. Prof. Chiocchia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Politecnico di Torino

**Appunti, esercitazioni svolte
e domande d'esame**

AEROELASTICITA'



Prof. G. Chiocchia
A.A.2014-2015
Corso di Laurea Magistrale
Ingegneria Aerospaziale

Appunti di Cippo Matteo

ARGOMENTI TRATTATI

INTRODUZIONE e RICHIAMI

- Cos'è l'aeroelasticità
- Problemi di risposta e stabilità: diagrammi funzionali
- Operatori aeroelastici
- Vortex shedding
- Galloping
- Richiami di elasto-meccanica
- Equazioni differenziali e integrali per il comportamento statico di ali dritte e a freccia
- Equazioni differenziali e integrali per il comportamento dinamico di ali dritte e a freccia

AEROELASTICITA' STATICA

- Richiami di aerodinamica stazionaria
- Divergenza torsionale di profilo alare
- Inversione di comando di alettoni su profilo con superficie mobile
- Richiami su ali ad allungamento finito
- Esplicitazione dei carichi su ala ad allungamento finito
- Metodi numerici discreti per equazioni integrali
- Divergenza torsionale ala finita
- Risposta di ala deformata simmetricamente
- Risposta di ala deformata asimmetricamente (alettoni in manovra rollio)
- Divergenza flessionale slender body

AEROELASTICITA' DINAMICA

- Introduzione
 - AERODINAMICA NON STAZIONARIA
 - Equazioni del moto
 - Equazione del potenziale
 - Equazione di Bernoulli generalizzato e della pressione in forma di Lord Kelvin
 - Condizioni al contorno
 - Linearizzazione delle equazioni e delle condizioni al contorno
 - Potenziale delle accelerazioni
 - **Campi di moto incompressibili piani**
 - Condizioni di incompressibilità
 - Campo di moto attorno a un cilindro
 - Moti instazionari lamina piana: funzione di Wagner e di Kussner

- Risposta specifiche
- Profili alari in regime instazionario
- Profili alari in moto armonico
- Ali di allungamento finito in moto instazionario
- Slender body in moto instazionario
- **Campi di moto compressibili piani**
 - Sorgente sferica attivata a gradino in fluido in quiete
 - Sorgente armonica in fluido in quiete
 - Fluido in moto: equazione delle onde
 - Sorgente sferica attivata a gradino in flusso subsonico
 - Sorgente sferica attivata a gradino in flusso supersonico
 - Profili oscillanti in campo subsonico e supersonico
 - Piston Theory
- Ammettenze specifiche
- Risposta aeroelastica a carichi genericamente variabili nel tempo
- Risposta aeroelastica a carichi armonici
- Funzioni di trasferimento aerodinamiche
- Risonanza e instabilità
- Decremento logaritmico e smorzamento strutturale
- **Flutter classico**
 - Modello di Pines
 - Metodo U-g
 - Metodo p-k
 - Interpretazione energetica del flutter
 - Effetto di quota e compressibilità
 - Effetto della freccia alare
- Flutter dei pannelli
- **Flutter non classici**
 - Flutter di stallo
 - Buffeting
 - Buffeting transonico
 - Buzz
 - Whirl flutter
- FEM applicato a problemi aeroelastici

ESERCITAZIONI SVOLTE

- Esercitazione 2.1: Velocità di divergenza di un'ala con metodo della sezione rappresentativa
- Esercitazione 2.2: Calcolo della velocità di divergenza della stessa ala con metodo di collocazione diretta (script Matlab)
- Esercitazione 3: Calcolo della velocità di inversione del comando di alettoni per la stessa ala

- Esercitazione 4: Calcolo della velocità di divergenza di un'ala con il metodo di Rayleigh-Ritz e col modello analitico (script Matlab)
- Esercitazione 1: Calcolare la velocità critica di vortex shedding per una barretta di acciaio
- Esercitazione 5: Calcolare la minima lunghezza di un tubo percorso da acqua per cui questo va in divergenza flessionale

Relazione su esercitazioni con software MUL 2_1D

Domande d'esame con risposte

AEROELASTICITÀ 29/09/2014

Prof. Gianfranco Chiochie

Testo: "Principi di aerelasticità", Levrotto & Belli
"Lezioni di aerodinamica non stazionaria"
de moteriale su portole

ESAME: 2 domande orali sorteggiate da una lista di 65.

AEROELASTICITÀ = AERODINAMICA + ELASTICITÀ strutture

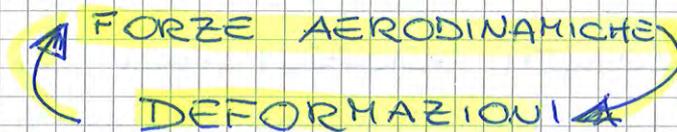
- Aerodinamica: era aerodinamica stazionaria dove il corpo / profilo era di forma assegnata e indeformabile; carichi variabili
- Strutture: forma → deformabile
carichi → fissati

ALA reale: **FORZE AERODINAMICHE**
LA DEFORMANO

... e la deformazione introduce una retroazione!!

Ala si torce → cambia incidenza della sezione → cambiano azioni aerodinamiche → cambia di nuovo deform.

FEEDBACK



⚠ PERICOLO DI INSTABILITÀ

◆ Fenomeni DINAMICI: OSCILLAZIONI!



Morale: un ingegnere aeronautico ne sa molto di più di un ingegnere civile.

⚠ CONTROLLI DI VOLO + AEROELASTICITÀ = Aero-servo-elasticità!

- Aero-termo-elasticità ... rientro space shuttle

Tutte le varie interazioni tra le varie discipline.

DIAGRAMMI FUNZIONALI



PROBLEMI DI RISPOSTA: input esterno (forze aerodinamiche) deforma la struttura → genera azioni diverse → EQUILIBRIO SI SPOSTA SU CONFIG. DEFORMATA

PROBLEMI DI STABILITÀ: input esterno SFASCIA LA STRUTTURA → SI AMPLIFICA INPUT

* input esterno = raffiche, perturbazioni

RISPOSTA: risposta in frequenza e in ampiezza della perturbazione sull'ala

Un problema statico / dinamico può essere un problema di risposta / di stabilità

STABILITÀ	STATICO
RISPOSTA	DINAMICO

⚠ Esiste un parametro per cui il sistema abbia soluzioni non banali?

→ V_D : PROBLEMA DI AUTOVALORI

[soluzione banale: $\theta = 0$ per $\alpha = 0$; non banale: $\theta \neq 0$ per $\alpha = 0$]

Problema di RISPOSTA: problema **COMPLETO** si risolve

Problema di STABILITÀ: problema **OMOGENEO** si cercano gli **AUTOVALORI**

⚠ È IMPORTANTE LA CLASSIFICAZIONE DEL PROBLEMA

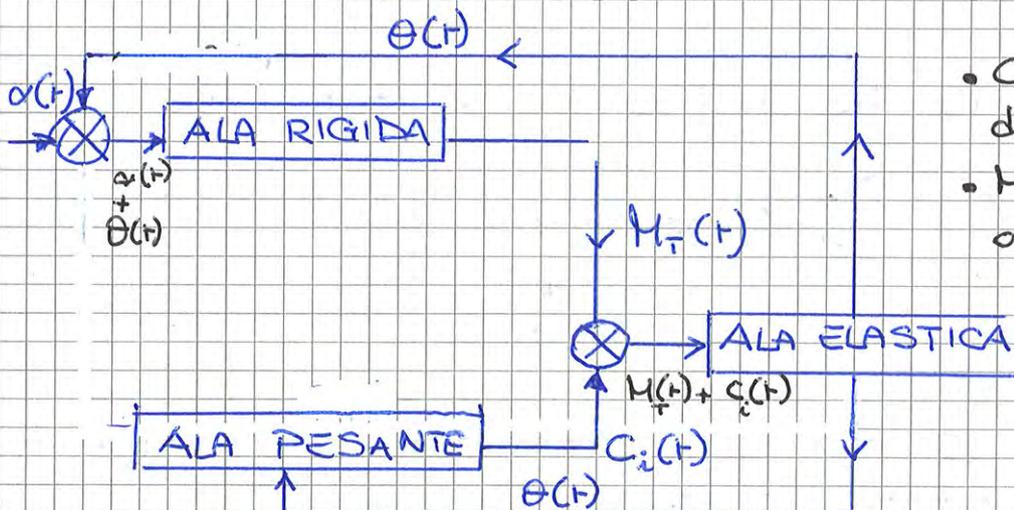
3) PROBLEMA DINAMICO DI RISPOSTA

La deformazione è funzione del tempo

|| ACCELERAZIONE DELLA DEFORMAZIONE, non accelerazione del moto dell'orizzonte

$$\theta = f(t) \quad \alpha = f(t)$$

[campo lineare: lineare elastico strutture + aerodinamica lineare]



- C_i : coppia di inerzia
- M_T : momento aerodinamico

• $\alpha(t)$: input esterno variabile nel tempo come una raffica periodica, un'onda d'urto,...

• Funzione "ALA PESANTE" → INERZIA

Non ci fosse la funzione dell'ala pesante sarebbe un equilibrio del velivolo rigido

AEROELASTICITÀ 30/09/2014

- Noi vogliamo rimanere al di sotto della V_F ! Le frequenze sono meno importanti della velocità.

TRASFORMIAMO I DIAGRAMMI FUNZIONALI IN ALGORITMI

Blocchi \longrightarrow DIVENTANO

OPERATORI AEROELASTICI
[aerodinamici, inerziali, strutturali]

SPOSTAMENTO \longrightarrow
es. incidenza
spostamento, ...

OPERATORE \longrightarrow AZIONE MECCANICA
es. forza
momento

SPOSTAM. GENERALIZZATI q

FORZE GENERALIZ. Q

$O(q) = Q$: applicando l'operatore generico allo spostamento q ci dà la forza generica Q

OPERATORE AERODINAMICO

$$O_A(q) = Q^A$$

q : incidenza, distribuzione di incidenze lungo l'apertura, ...

es: $\downarrow \theta$ $\downarrow L$

$$L = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l C_L \cdot \theta$$

θ : deformazione, opposto non è stato messo α

OPERATORE STRUTTURALE

$$O_S(q) = Q^S$$

problema statico

$$O_D(q) = Q^D$$

problema dinamico

DINAMICO: q dovrà almeno comportare una volta come $\ddot{q} \rightarrow$ ACCELERAZIONI

es. $F = Kx$ MOLLA

.. poi nelle applicazioni l'OPERATORE potrebbe essere un codice di calcolo.

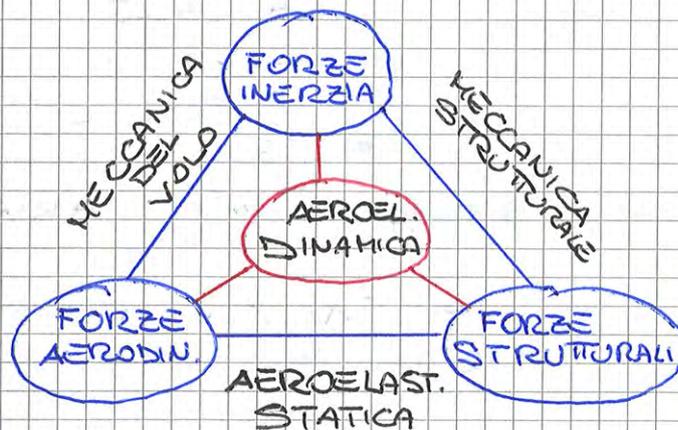
- FLUTTER CLASSICO : quando inizia in pochi cicli distrugge l'ala
- FLUTTER DEI PANNELLI
- BUZZ : fenomeno in campo transonico con alettone
- BUFFETING : transonico, oscilla tutta ala
- BUFFETING CLASSICO : i vortici dell'ala fanno oscillare i piani di coda
- GALLOPING
- VORTEX SHEDDING
- WHIRL FLUTTER : fenomeno oscillatorio su eliche di grande diametro
- FLUTTER DELLE TURBOMACCHINE
- FLUTTER STRUTTURE CIVILI : ponti sospesi

D) risposta

- RISPOSTA A UNA RAFFICA : raffica armonica, raffica stocastica, raffica impulsiva
- STABILITÀ DI VOLO \rightarrow meccanica del volo
- ⚠ STABILITÀ DELL'AEREO VISTO COME A.M.D.V. NON STABILITÀ ELASTICA DELLA STRUTTURA.

Come si colloca l'aeroelasticità rispetto alle altre discipline ?

TRIANGOLO DI COLLAR



Aggiungendosi nuove aree di studio si aggiungono pezzi al triangolo \rightarrow

SCHEMATIZZAZIONE BRUTALE :

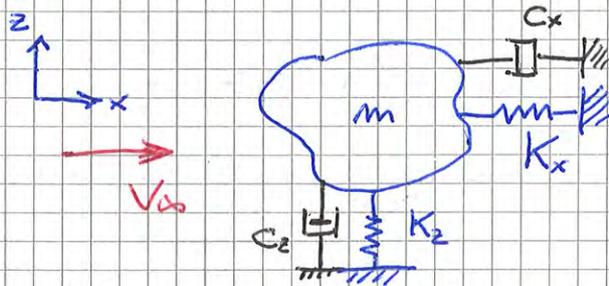
● $L(t) = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 l C_L \alpha(t)$

APPROCCIO QUASI-STAZIONARIO

Si prendono i valori istante per istante di α .
 Più ω è bassa più si è vicini al caso stazionario

● Usiamo un modello a PARAMETRI CONCENTRATI

LUMPED PARAMETER MODEL



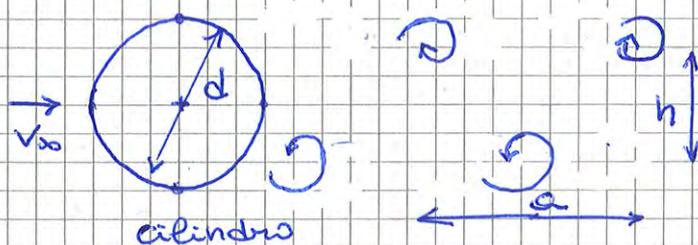
● Supponiamo un moto piano → BIDIMENSIONALE
 il corpo è la sezione di una trave di lunghezza infinita in direzione y

1) $m\ddot{x} - C_x \dot{x} - K_{xx}x - K_{xz}z + F_x(t) = 0$

accoppiamento: non avviene solo se x e z sono assi principali

2) $m\ddot{z} - C_z \dot{z} - K_{zz}z - K_{zx}x + F_z(t) = 0$

VORTEX SHEDDING



$40 \leq Re \leq 150$

$\frac{\lambda}{h} = 3,56$ vortici avanzano con velocità $< V_{\infty}$

SCIA DI VON KARMAN [Korman's street]

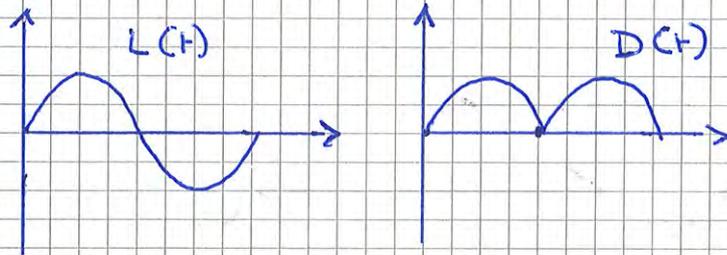
Calcola rapporti geometrici ma NON la frequenza di come si staccano i vortici

STROUHAL : fa considerazioni sulla

PORTANZA OSCILLATORIA SU CILINDRO:

$$L(t) = \frac{1}{2} \rho V_0^2 d C_L \sin \omega_s t \quad C_L \approx 0,6$$

- Ciclo completo di L: un vortice + e un vortice -
- Ciclo di D: un vortice + o uno -
 → frequenza doppia di L
 La resistenza conta poco rispetto a L.



LA FORZANTE È ESTERNA rispetto agli spostamenti elastici.

CORPO FERMO RISPONDE A VIBRAZIONI

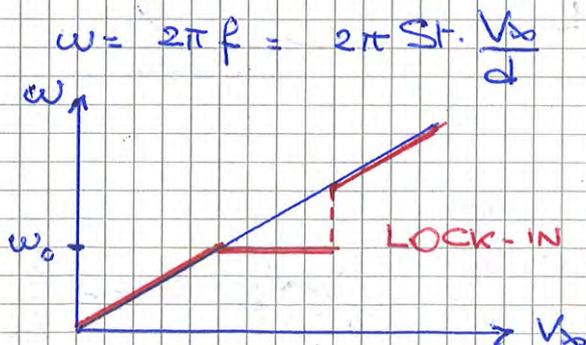
FORZATE → problema di risposta / risonanza

- ⚠ UNA VOLTA CHE IL CORPO È IN MOTO LO STESSO MOTO DEL CORPO FA VARIARE QUELLE FORZE ELASTICHE che mantengono il movimento
 → varia la frequenza
 → DIVENTA UN PROBLEMA DI STABILITÀ

Se la ω_s coincide con la pulsazione ω_0 propria del corpo \Rightarrow si ha risposta max.

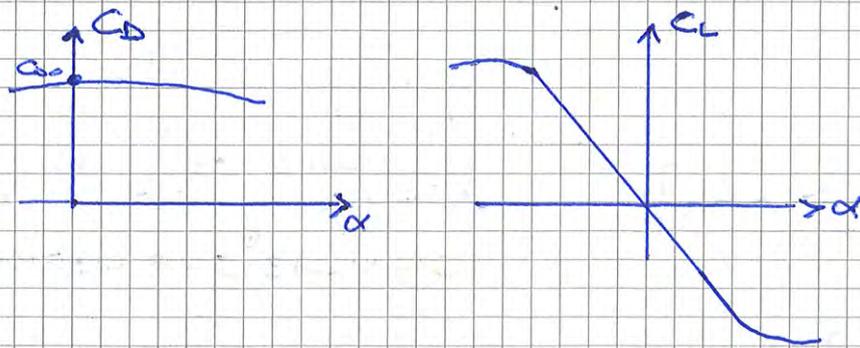
$$\omega^* = 2\pi Sf = \frac{\omega d}{V_0} \quad ; \quad Sf = \frac{fd}{V_0}$$

$$\omega = 2\pi f$$



$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{\omega_n^2 - \omega^2 \xi^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\xi}{2m}\right)^2}$$

LOCK-IN: LA FREQUENZA DI DISTACCO DEI VORTICI NON È PIÙ $Sf = fd/V_0$ MA SI SINCRONIZZA SULLA FREQ. PROPRIA DELLA STRUTTURA



A NOI
INTERESSA
COSA SUCCEDDE
VICINO A
 $\alpha = 0$
→ INIZIO DEL
MOTO

$$C_D \approx C_{D0}$$

$$C_L \approx \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \cdot \alpha$$

$$\text{con } \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} < 0$$

$$L = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 \cdot \alpha$$

PORTANZA NEGATIVA
A INCIDENZA POSITIVA

$$D \approx \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d C_{D0}$$

(dato da PARTICOLARE FORMA
SCELTA!)

$$F_z(t) = L \cos \alpha + D \sin \alpha$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d \left[- \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 \frac{\dot{z}}{V_{\infty}} - C_{D0} \frac{\dot{z}}{V_{\infty}} \right] =$$

$$= - \frac{1}{2} \rho V_{\infty} d \left[\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 + C_{D0} \right] \dot{z}$$

⚠ $F_z(t)$ DIPENDE DAL MOTO DEL CORPO !!!

(cioè dalla sua deformazione!) ⇒ NON È ESTERNA!

$$m \ddot{z} + \left[C_z + \frac{1}{2} \rho V_{\infty} d \left(\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 + C_{D0} \right) \right] \dot{z} + K_z \cdot z = 0$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{C_{TOT}}$$

PROBLEMA
DI STABILITÀ
→ NO FORZANTE

$$m \ddot{z} + C_{TOT} \dot{z} + K_z \cdot z = 0$$

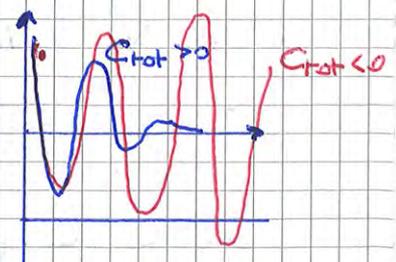
EQ. OMOGENEA

Soluzione:

$$z(t) = z_0 e^{-\frac{C_{TOT}}{2m} t} \cdot \sin(\omega_d t)$$

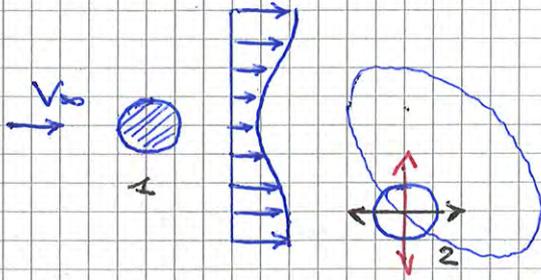
$$\omega_d = \sqrt{\frac{K_z}{m} - \left(\frac{C_{TOT}}{2m} \right)^2}$$

- SE
- $C_{TOT} > 0 \rightarrow$ SMORZAMENTO
 - $C_{TOT} < 0 \rightarrow$ AMPLIFICAZIONE
 - $C_{TOT} = 0 \rightarrow V_{\infty}$ parametro CRITICO



GALLOPING DI SCIA

Serve per osservare due cavi: uno a valle dell'altro rispetto alla corrente



Uno pensa: sul dorso del cavo 2 c'è una velocità inferiore rispetto a sotto → per Bernoulli sopra c'è pressione + alta e il cavo va in basso... NO!!! IL FLUSSO NON È IRROTAZIONALE!

→ il cavo 2 oscilla seguendo una traiettoria ellittica.

COME OVVIARE AL PROBLEMA? → DISTANZIALI
Tra i 2 cavi

AEROELASTICITÀ 1/10/2014

Ieri abbiamo visto il GALLOPING

↓
prototipo di instabilità elastica

- NO FORZANTE ESTERNA
- FONTE DI ENERGIA SARÀ ESTERNA

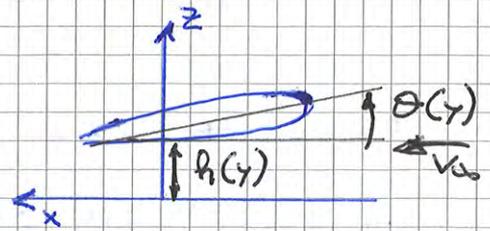
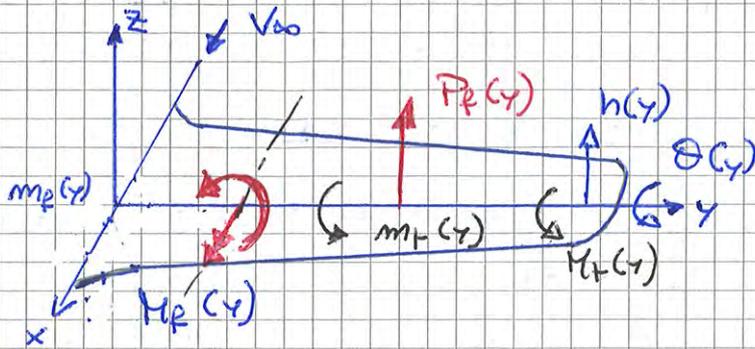
GALLOPING = PURA INSTABILITÀ

FORTE NON LINEARITÀ delle curve $C_i - \alpha$ già per $\alpha = \alpha_0$

⇒ anche il comportamento dell'OSCILLAZIONE AMPLIFICATA DIVENTA NON LINEARE OLTRE UNA CERTA AMPIEZZA

- AMPIEZZA NON CRESCE INDEFINITAMENTE come direbbe l'analisi lineare MA SI STABILIZZA SU UN CICLO LIMITE (VALORE MASSIMO)

▶ ALA DRITTA



SPOSTAMENTI:

- $h(y)$: freccia data da flessione
 - $\theta(y)$: angolo di torsione
→ CAMBIA α DEL PROFILO LOCALMENTE
- **Flessione nel piano xy la escludiamo**
- $\frac{dh}{dy}$: rotazione sezione nel piano yz



CARICHI:

- $p_f(y)$: distribuzione carico di pressione [N/m]
- $m_t(y)$: momento torcente distribuito [Nm/m]
- $m_f(y)$: momento flettente distribuito [Nm/m]
(per ALA A FRECCIA)
- $M_t(y)$: caratteristica di sollecitazione interna
- $M_f(y)$: " " " " " flessione

⚠ CARICHI AERODINAMICI SONO TUTTI DISTRIBUITI ⚠

ASSI DI RIFERIMENTO

→ assi principali d'inerzia per non avere flessioni accoppiate

NON CONSIDEREREMO UN CILINDRO, quindi ^{non} bene qualsiasi asse passante per il centro!

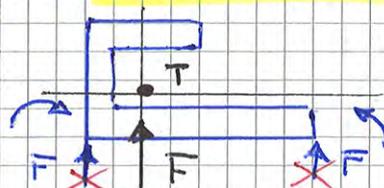
Dove si posiziona l'origine degli assi?

NO nel baricentro!

Y SARÀ ASSE ELASTICO → POSIZIONATO NEL

UNA FORZA ESERCITATA NEL C.D.T. PRODUCE FLESSIONE PURA E NON TORSIONE.

{ CENTRO DI TAGLIO della sezione



TORSIONE

$$GJ_T \frac{d\theta}{dy} = M_T(y)$$

$$M_T(y) = \int_y^b m_T(\eta) d\eta$$

$$\frac{d}{dy} \left(GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right) = -m_T(y)$$

EQ. TORSIONE

BCs: $\theta(0) = 0$
 $\theta'(b) = 0$ } VALIDE PER SEMIALA } $\theta'(-b) = 0$
 per ala completa } $\theta'(b) = 0$

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

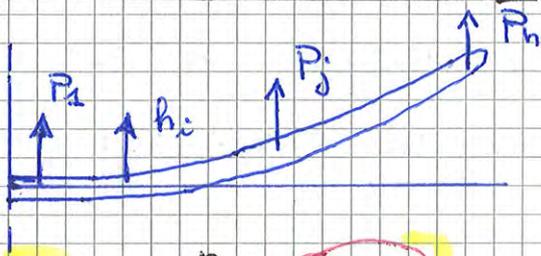
$$U = U_f + U_t = \frac{1}{2} \int_0^b EJ \left(\frac{d^2h}{dy^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^b GJ_T \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \frac{M_f^2}{EJ} dy + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{M_t^2}{GJ_T} dy$$

Energia potenziale accumulata dal taglio è trascurabile rispetto agli altri 2 contributi [e meno di non avere un allungamento alveolare di ~30]

Eq. differenziali vogliono funzioni CONTINUE e DERIVABILI lungo y
 ALA REALE
 ← È PIENA DI DISCONTINUITÀ

EQUAZIONI INTEGRALI



• DISTRIBUZIONE DISCRETA DI CARICHI SU n sezioni
 - LINEARITÀ → SOVRAPPOSIZ. EFFETTI.

$$h_i = \sum_{j=1}^n (Jh_i)_j$$

SPOSTAMENTO SULLA SEZIONE i DATO DAL CARICO SULLA GENERICA SEZIONE j

$$j = 1, \dots, n$$

C_{ij}^{zz} = DEFLESSIONE PRODOTTA IN i DA UN CARICO $P_j = 1$

C_{ij}^{zz} → COEFFICIENTE DI INFLUENZA A FLESSIONE

$$(Jh_i)_j = C_{ij}^{zz} P_j$$

$$\rightarrow h_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}^{zz} P_j$$

AEROELASTICITÀ 6/10/2014

... continua

OGGI SI SALUTA
UNA BRAVA PERSONA
E UN GRANDE
PROFESSORE:
SERGIO CHIESA,
NON TI DIMENTICHEREMO

FUNZIONI DI INFLUENZA

↳ estensioni nel CONTINUO della formulazione DISCRETA (→ i coefficienti c_{ij}^{zz}, \dots)

$$h(y) = \int_0^b [c^{zz}(y, \eta)] P_p(\eta) d\eta$$

↓
FUNZIONE DI INFLUENZA DI DEFORMABILITÀ

$$c^{zz}(y, \eta) = c^{zz}(\eta, y)$$

RECIPROCIITÀ: la deflessione in un punto y dovuta al carico UNITARIO in η è LA STESSA DATA IN η DA UN CARICO UNITARIO in y .

Inverso:

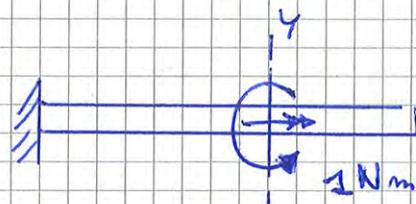
$$P_p(y) = \int_0^b [k^{zz}(y, \eta)] h(\eta) d\eta$$

→ B.C. già contenute in c^{zz} che è la distribuz. della freccia prodotta dal carico unitario e NON LA SI PUÒ DARE SE PRIMA NON SI SONO ASSEGNATE LE CONDIZIONI AL CONTORNO

● FUNZIONE 1-D DI GREEN

Funzione completa differenziabile con il carico unitario

$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right] = -m_T(y)$$



Se voglio esprimere l'effetto unitario in un punto solo come si fa?

→ DELTA DI DIRAC

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \forall y \neq 0 \\ +\infty & y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d}{dy} \int_0^b c^{\infty}(y, \eta) m_T(\eta) d\eta \right] = -m_T(y)$$

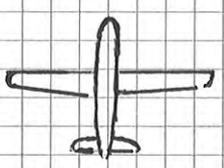
$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right] = -m_T(y)$$

→ esce la dipendenza da y dell'integrale rispetto a η

Questo è valido per la TORSIONE [sul libro c'è la flessione]

IDENTITÀ TRA FUNZIONE 1D DI GREEN E FUNZIONE DI INFLUENZA

- Le discontinuità non ci creano problemi xk bisogna calcolare degli integrali
- Per avere c^{∞} → RISOLVERE EQ. DIFFERENZIALI CON DELTA DI DIRAC (posso calcolarlo lo stesso con formulez. integrali)

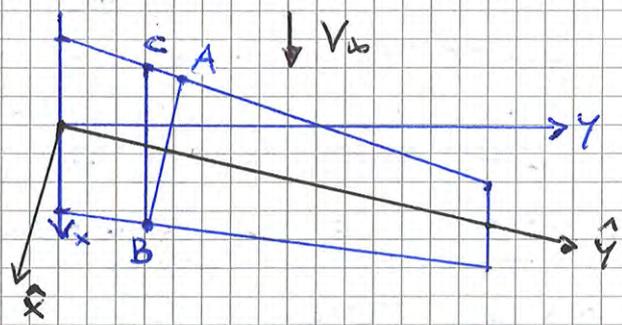


ALA DIRITTA:

- 1 eq. FLESSIONE
 - 1 eq. TORSIONE
- } **DISACCOPPIATE** ⚠

ALA A FRECCIA

→ siamo obbligati a usare un sistema dove si perde il disaccoppiamento.



- $z = \hat{z}$
- \hat{y} ASSE ELASTICO:
 - un carico lungo \hat{y} dà flessione pura
 - torsione pura attorno a \hat{y}

STRUTTURAMENTE PARLANDO NON FA UNA PIEGA...

... ma in AEROELASTICITÀ SÌ !!

- La coppia torcente si genera attorno all'asse y, orientato diversamente da \hat{y} !

FLESSIONE ALA A FRECCIA, attorno \hat{x}

$$\frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left[\bar{E}J \frac{d^2 h}{d\hat{y}^2} \right] = P_F(\hat{y}) + \frac{d}{d\hat{y}} \left[m_T(\hat{y}) \sin \varphi \right]$$

$\hat{m}_T(\hat{y}) = \hat{m}_T(\hat{y}) \sin \varphi$ flette l'estremità dorsale verso il basso $\rightarrow \hat{e} < 0$
 [poi c'è il - nell'eq.]

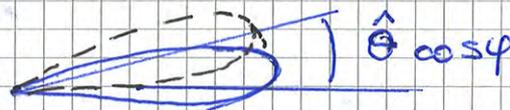
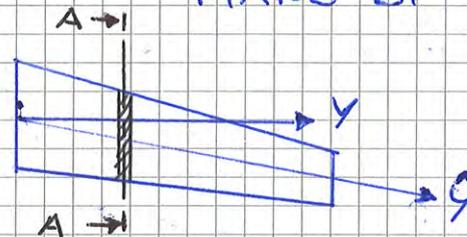
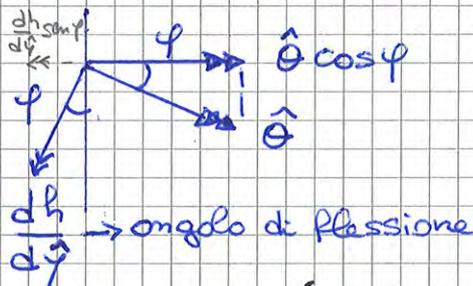
TORSIONE ALA A FRECCIA attorno \hat{y}

$$\frac{d}{d\hat{y}} \left[GJ_T \frac{d\hat{\theta}}{d\hat{y}} \right] = -m_T(\hat{y}) \cos \varphi$$

$$\hat{m}_T(\hat{y}) = m_T(\hat{y}) \cos \varphi$$

• ANGOLI DI ROTAZIONE •

\Rightarrow VANNO RIFERITI AL PIANO DI V_∞ (piano $x-y$)



AI FINI AEROELASTICI MI INTERESSA SAPERE QUANTO È LA TORSIONE DEL PROFILO VISTO DAL VENTO!! \Rightarrow ci interessa $\hat{\theta} \cos \varphi!$

⚠ IL PROFILO SENTE ANCHE LA ROTAZIONE NEGATIVA $dh/d\hat{y}$ DATA DALLA FLESSIONE VERSO L'ALTO (contributo allievante se $h > 0$)

↓
 VARIAZIONE INCIDENZA LOCALE

$$\theta(\hat{y}) = \hat{\theta}(\hat{y}) \cos \varphi - \frac{dh}{d\hat{y}} \sin \varphi$$

FRECCIA POSITIVA: se $h > 0 \Rightarrow$ incidenza si riduce aerodinamica

\Rightarrow FRECCIA POSITIVA = STABILITÀ!

FRECCIA NEGATIVA: se $h > 0 \rightarrow \alpha_{aerodin} \uparrow \Rightarrow$ INSTABILITÀ

AEROELASTICITÀ 7/10/2014

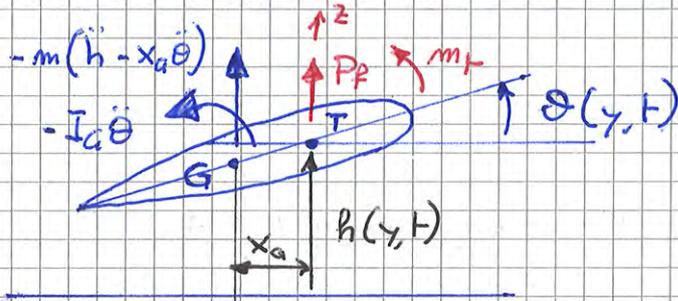
... continuo

Ieri si sono aggiunti anche gli effetti inerziali:

↑ FORZA DI INERZIA VERTICALE → aggiunta a equazione della flessione

↪ COPPIA DI INERZIA → aggiunta a eq. torsione

● ASSE ELASTICO ≠ ASSE BARICENTRICO



→ EQUAZIONI ACCOPPIATE

CONDIZ. CONTORNO

$$\theta(0, t) = 0$$

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{y=b} = 0 \text{ se estremità scarica}$$

$$\text{se no c'è } m_T(y=b, t)$$

AZIONI INERZIALI → ridotte al baricentro

$$-m(\ddot{h} - x_a \ddot{\theta}) \quad \cdot \quad -I_G \ddot{\theta}$$

→ FLESSIONE DINAMICA

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[EJ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] = P_F(y, t) - m(\ddot{h} - x_a \ddot{\theta})$$

→ TORSIONE DINAMICA

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[GJ_T \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = - \left[m_T(y, t) - I_G \ddot{\theta} + m x_a (\ddot{h} - x_a \ddot{\theta}) \right]$$

Flessione e torsione accoppiate: se parte come torsione pura → si innescano poi la flessione e viceversa

- Se asse rotazione NON COINCIDE con asse baricentrico allora

$$m x_a = S_x$$

MOMENTO STATICO DEL PROFILO

$$- (I_G + m x_a^2) = - I_x$$

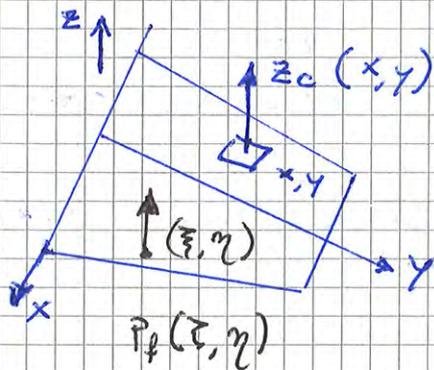
MOMENTO D'INERZIA DEL PROFILO TRASPORTATO SUL C.T.

STRUTTURE 2-D

Struttura a sviluppo superficiale, danno problemi aerodinamici per alte velocità, quando l'aerodinamica è potente!

Lasciamo stare le eq. differenziali xk
dovremmo usare le eq. della piastra!

● ALI DI CORTO ALLUNGAMENTO



FUNZIONI DI INFLUENZA
BIDIMENSIONALI

$$c(x, y; \xi, \eta)$$

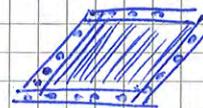
z_c = spostamento della
superficie media

$$z_c = \iint_A c(x, y; \xi, \eta) p_f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Pioni di coda e deriva danno problemi solo in supersonico potente!

... oppure se abbiamo una struttura in legno e tela super leggera e allora basta una forza minore

● PANNELLI quadrati



Per pannello isotropo

→ eq. della piastra

$$D \nabla^4 z_c = p_f(x, y, t) - m_s(x, y) \ddot{z}_c(x, y, t)$$

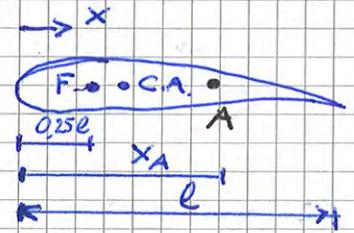
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

□ UN PICCOLO INGOMBAMENTO DEL PANNELLO NON CI CAMBIA L'AERODINAMICA

▲ A NOI INTERESSA QUELLO CHE CI CAMBIA L'INCIDENZA!

fine richiami

CENTRO AERODINAMICO
 → punto di applicazione delle forze aerodinamiche
 $M = 0$... ma il C.A. SI SPOSTA CON L'INCIDENZA!!!



LAMINA PIANA : $F \equiv C.A.$ sta a 25% c

$C_{m_A} = C_L \left(\frac{x_A}{c} - 0,25 \right)$ coeff. di momento focale rispetto a un punto A

Compressibilità

$M_\infty = \frac{V_\infty}{C_a}$ $\beta_\infty = \sqrt{1 - M_\infty^2}$

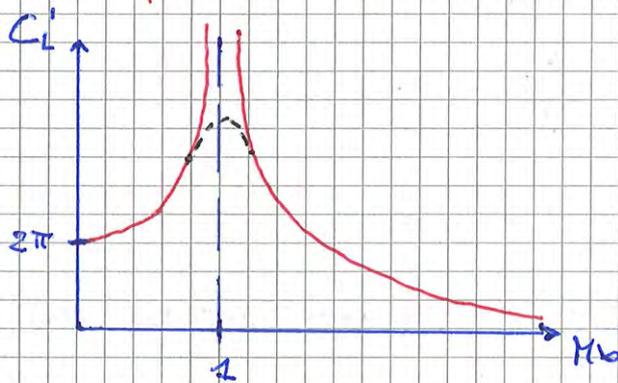
Correzione di PRANDTL-GLAUERT

$C_L = \frac{C_{L0}}{\beta_\infty}$ $C_L' = \frac{C_{L0}'}{\beta_\infty}$ $C_{m_A} = \frac{C_{m_A0}}{\beta_\infty}$

LAMINA PIANA : $C_{L\alpha} = 2\pi \approx 6,28$

NACA 0012 : $C_{L\alpha} = 5,12$

Non è così sbollato il modello di lamina piana eh!



● CAMPO TRANSONICO : NON LINEARE!

SUB. COMPR.

$\beta_\infty = \sqrt{1 - M_\infty^2}$

SUPER.

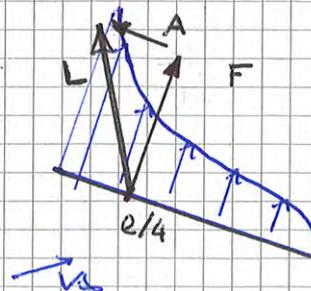
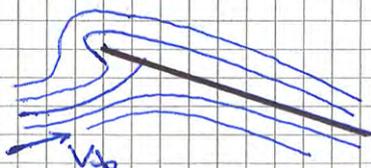
$\beta_\infty = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

$C_L' = \frac{4}{\beta_\infty}$

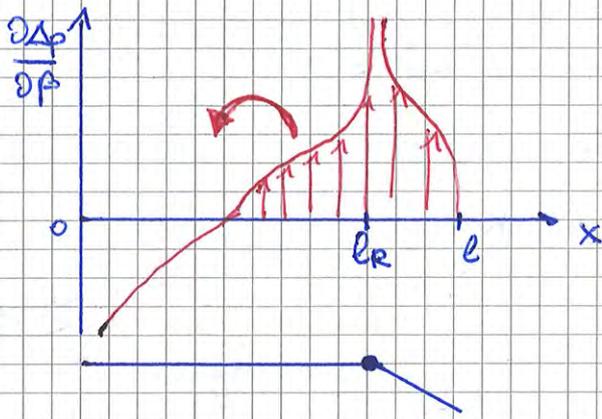
$C_{m_A} = C_L \left(\frac{x_A}{c} - 0,5 \right)$

Supersonico : fuoco a 50% corda

$M_\infty < 1$



$\Delta p = p^- - p^+$



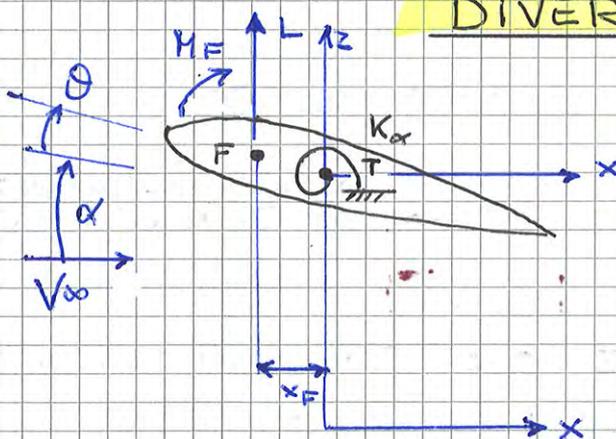
Formula per stime:

$$\frac{\partial C_M}{\partial \beta} = -2 \sqrt{\lambda_R (1 - \lambda_R)^3} < 0$$

oltre formule su libro

PROBLEMI AEROELASTICI SEZIONI ALARI

DIVERGENZA TORSIONALE



- ORIGINE ASSI: C.T.
- MODA DI TORSIONE K_α

Profilo volo α :

α : INCIDENZA DI PROGETTO

+

θ : ROTAZIONE DELLA SEZIONE

$$x_F < 0$$

$$M_{T \text{ aereo}} = M_{T \text{ elastico}}$$

$$M_{Te} = K_\alpha \cdot \theta$$

$$M_{Ta} = M_F \ominus x_F \cdot L$$

compensa il $x_F < 0$, omk
perché L da momento caproante
rispetto a T.

PRESSIONE DINAMICA

$$p_\infty^0 = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

$$C_L = C_L' (\alpha + \theta)$$

$$M_{Te} = p_\infty^0 l^2 C_{MF} - p_\infty^0 l x_F C_L' (\alpha + \theta)$$

$$\rightarrow K_\alpha \theta = p_\infty^0 l^2 C_{MF} - p_\infty^0 l x_F C_L' (\alpha + \theta)$$

EQ. EQUIL.
TORSIONE
CONFIG.
DEFORMATA

$$\theta = \frac{p_\infty^0 l (l C_{MF} - x_F C_L' \alpha)}{K_\alpha + p_\infty^0 l C_L' x_F}$$

PROBLEMA DI RISPOSTA: date le condizioni di volo si calcola il θ DI EQUILIBRIO STATICO e cui si porta la sezione oltre.

$$(K_{\alpha} + p_{\alpha}^{\circ} l x_F C_L') \theta = p_{\alpha}^{\circ} l (l C_{M_F} - x_F C_L' \alpha)$$

$\neq 0$ per $p_{\alpha}^{\circ} = p_{\beta}^{\circ}$

TERMINE NOTO
↓
INDIPENDENTE DA θ

Se $e = 0$ ↓
l'altro membro è squilibrato!

NON È + POSSIBILE UN EQUILIBRIO STATICO
⇒ INIZIA IL MOVIMENTO, EQ. DINAMICO
Il 2° membro sarà bilanciato da
una COPPIA D'INERZIA.
↳ diventa un problema di stabilità!

Questo ricorda un altro problema strutturale:
ASTA CARICATA DI PUNTA!

→ se termine noto (carico scenterato, imperfezioni di forma) = 0 ⇒ carico critico STABILE

→ se termine noto $\neq 0$ ⇒ CARICO CRITICO INSTABILE

... NEL NOSTRO CASO NON AVREMO MAI IL TERMINE NOTO = 0 !!! $l C_{M_F} - x_F C_L' \alpha$

A meno di non avere momento focale e momento della portanza che si auto-equilibrano.

In quale sezione dove si calcola?

→ All'80% dell'apertura d'ala

PRECISAZIONE:

$$(K_{\alpha} + p_{\alpha}^{\circ} l x_F C_L') \theta = 0$$

$$K_{\alpha} \cdot \theta = - p_{\alpha}^{\circ} l x_F C_L' \theta$$

PARTE "OMOGENEA" DEL MOMENTO AERO RISPETTO A \bar{I} .

$$\text{SE } p_{\alpha}^{\circ} = p_{\beta}^{\circ} = - \frac{K_{\alpha}}{l x_F C_L'}$$

→ LA COPPIA DI REAZIONE ELASTICA $K_{\alpha} \theta$ EQUILIBRA SOLO LA PARTE "OMOGENEA" DEL MOMENTO AERO

NESSUNO! NON C'È + EQ. STATICO! NASCERÀ UNA COPPIA D'INERZIA PICCOLA E POI TUTTO SI SFASCIÀ!

↓
CHI EQUILIBRA LA PARTE DI MOMENTO DATA DA θ ?

NOI VOGLIAMO SAPERE QUANT'È LA RISPOSTA IN TERMINI DI PORTANZA!

$$C_L = \frac{\frac{P_D^0}{P_\infty^0} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{HF}}{\partial \beta}}{\frac{P_D^0}{P_\infty^0} - 1} \beta$$

NUM > 0 : un $\beta +$ mi dà una $L +$

< 0 : un $\beta +$ mi dà una $L -$

$$P_D^0 \frac{\partial C_L}{\partial \beta} = P_\infty^0 \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{HF}}{\partial \beta}$$

STUDIAMO SEGNO DEL NUMERATORE

$$P_R^0 \rightarrow V_R$$

ALLA VELOCITÀ V_R SI INVERTE L'EFFETTO DEGLI ALIETTONI!!!

$$P_R^0 = P_D^0 \frac{x_F}{l} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{HF} / \partial \beta}$$

se $V_\infty > V_R$: REVERSAL

se $V_\infty < V_R$: OK

$$P_D^0 = - \frac{K_\alpha}{l C_L' x_F}$$

sostituendo:

$$P_R^0 = - \frac{K_\alpha}{l C_L' x_F} \frac{x_F}{l} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{HF} / \partial \beta} \rightarrow V_R = \sqrt{\frac{-2 K_\alpha}{\rho_\infty l^2 C_L'} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{HF} / \partial \beta}}$$

SE $V_\infty = V_R \rightarrow P_D^0 = P_R^0 \rightarrow C_L' = 0$

$0 = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cdot \beta + C_L' \cdot \theta' \rightarrow$ porta da altra parte e moltiplico per $P_R^0 \cdot l$

$$-P_R^0 l C_L' \theta' = + P_R^0 l \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta$$

CONTRIBUTO DEFORMAZIONE ALA

CONTRIBUTO ROTAZIONE ALIETTONI SU PROFILO RIGIDO

PORTANZA PRODOTTA DA DEFORMAZIONE DELLA SEZIONE ALARE = PORTANZA PRODOTTA DA DEFLESS. ALIETTONI \Rightarrow EQUILIBRIO DI FORZE AERO A $V_\infty = V_R$

Riprendiamo l'equazione

$$P_R^0 l^2 \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta} \cdot \beta = P_D^0 x_F l_F \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta$$

MOMENTO FOCAL
AGGIUNTIVO

MOMENTO DELLA PORTANZA
AGGIUNTIVA

Sono momenti di corpo rigido!

SE
 $P_R^0 = P_D^0$

NESSUNA DEFORMAZIONE DELL'ALA



NESSUNA INVERSIONE DEL COMANDO

AEROELASTICITÀ 8/10/2014

Ieri abbiamo studiato un profilo bidimensionale piano

$P_R^0 = P_D^0$

$\eta_R = 1$

CONDIZIONE DIFFICILE DA REALIZZARE!

$$P_R^0 = P_D^0 \cdot \frac{x_F}{e} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_M / \partial \beta} \Rightarrow \frac{x_F}{e} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_M / \partial \beta} = 1$$

Formule per volutore $\frac{\partial C_L}{\partial \beta}$
 $\frac{\partial C_M}{\partial \beta}$

FORMULE TEORICHE



$\lambda_R = \frac{l_R}{e}$

$$\frac{\partial C_L}{\partial \beta} = \frac{2}{\pi} C_L' \left[\sqrt{\lambda_R (1 - \lambda_R)} + \arcsen \sqrt{\lambda_R} \right]$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial \beta} = -2 \sqrt{\lambda_R (1 - \lambda_R)^3} < 0$$

$\frac{x_F}{e} = f(\lambda_R)$

Com $\lambda = 0,31$ (deltone = 31% corda \rightarrow è bello grande)

$\rightarrow \frac{x_F}{e} = -0,4$!

Ma $\frac{x_F}{e}$ deve essere circa 0,08 !!!

$F = 0,25 c$ $T = 0,33 c$

NON FATTIBILE, SERVIREBBE UN ALETTONE + LUNGO DELLA CORDA!!!
... SI PUÒ OTTIMIZZARE

IL VORTICE PORTANTE SULL'ALA È LA COMPATTAZIONE DI TUTTA LA VORTICITÀ DELLA SCIA
 [vedi aerodinamica]

I vortici mi spingono il flusso verso il basso, sicché ogni profilo sente un'incidenza in dotta → PROFILO LAVORA A UN'INCIDENZA EFFETTIVA:

$$\alpha_e(\gamma) = \alpha_g(\gamma) - \alpha_i(\gamma) \quad \alpha_g = \text{geometrica}$$

α indotta si calcola con legge di Biot-Savart:

$$\alpha_i(\gamma) = - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_0^b \frac{\gamma(\eta)}{\gamma - \eta} d\eta = - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_0^b \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\gamma - \eta}$$

$$L(\gamma) = \left(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \ell C_L; \alpha_e(\gamma) = \rho V_\infty \Gamma(\gamma) \right)$$

↑
PROFILO

TEOREMA
KUTTA-JOUKOWSKI

$$\rightarrow \alpha_e(\gamma) = \frac{2 \Gamma(\gamma)}{V_\infty \ell C_L}$$

in aerodinamica
si era scritta come
 $\Gamma(\gamma) = \dots$

$$\alpha_g(\gamma) = \frac{2 \Gamma(\gamma)}{V_\infty \ell C_L} - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_0^b \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\gamma - \eta}$$

EQ.
INTEGRO
DIFFERENZIALE
DI PRANDTL

ovviamente $\Gamma(\pm b) = 0$ poiché all'estremità $L=0$.

INCOGNITA: $\Gamma(\gamma)$

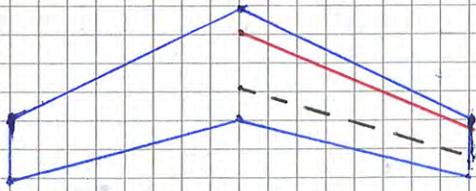
Come ce la vediamo in aerelasticità?

$$L = \rho V_\infty \Gamma = \rho_\infty \ell C_L \rightarrow \text{PARTE VARIABILE DELLA PORTANZA LUNGO L'ALA}$$

$$p(\gamma) = \ell(\gamma) C_L(\gamma) \quad \text{CARICO RIDOTTO}$$

$$\rightarrow \Gamma = \frac{P_\infty}{\rho V_\infty} \cdot p(\gamma) = \frac{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}{\rho V_\infty} p(\gamma) = \frac{V_\infty}{2} p(\gamma)$$

Weissinger (1943)



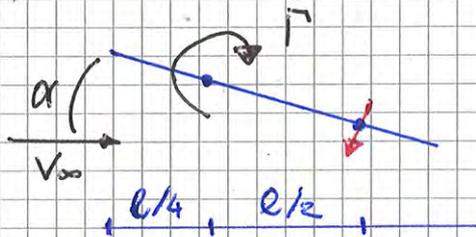
- VORTICE PORTANTE sul quarto anteriore
- CONDIZIONE DI TANGENZA SUL QUARTO POSTERIORE

⇒ errore minimizzato rispetto al calcolo esatto

Con lamina piana: ERRORE NULLO

PRIMA: distribuzione di vortici lungo x $\gamma(x)$

DOPO: unico vortice Γ al quarto anteriore



$$V_{\infty} \cdot \alpha = \frac{\Gamma}{2\pi \frac{l}{2}}$$

$$\Gamma = \pi l V_{\infty} \cdot \alpha \quad C_L' = 2\pi$$

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 l 2\pi \alpha$$

Weissinger arrivò a una soluzione + evoluta rispetto a quella di Multhopp, basandosi sui risultati del Prof. Pistolesi.

$$\{\alpha_g\} = [A] \{p\}$$

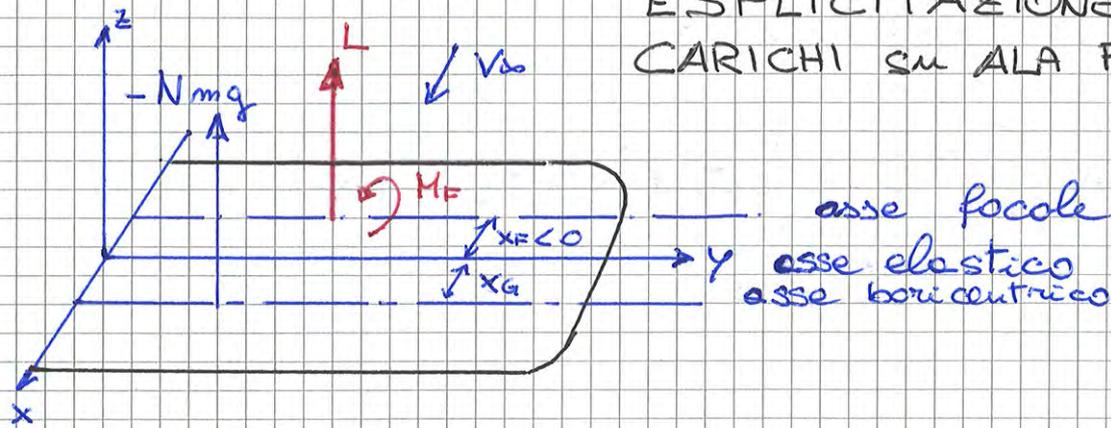
↓
MATRICE DI WEISSINGER, tiene conto dell'ala e freccia

De young & Hopper (USA) calcolarono i coefficienti della matrice [A]

Il metodo migliora anche i risultati per ala dritta.

Teoria BRUTALE ⇒ STRIP THEORY

ESPLICITAZIONE DEI CARICHI SU ALA FINITA



N : fattore di carico a contingenza

CARICO DI MANOVRA → azione inerziale ma con TEMPI CARATTERISTICI MOLTO + LUNGI DELLE DEFORMAZIONI DINAMICHE!

→ c'è un carico inerziale ma è visto come carico STATICO sulla scala dei tempi delle deformazioni

13/10/2014

Esplacitiamo i secondi membri delle equazioni di torsione e flessione

$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right] = -m_T(y)$$

$$m_T(y) = M_F - x_F \cdot L + Nmg \cdot x_G$$

contributo
- $x_F \cdot L > 0$ poiché $x_F < 0$.

$$= P_0^0 \ell^2 C_{M_F} - P_0^0 \ell x_F C_L + Nmg x_G$$

$$\alpha = \alpha_g + \theta$$

$$C_L = C_{L_g} + C_{L_e}$$

MEMO!!!
 $P = \ell C_L$
 $P = P^g + P^e$
GEOM + ELASTICO

$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right] - P_0^0 x_F P^e = \underline{g(y)} \rightarrow \text{NON DIPENDE DA } \theta$$

$$g(y) = -P_0^0 \ell^2 C_{M_F} + P_0^0 x_F P^g - Nmg x_G$$

$$m_T = M_F - X_F \cdot L + N m \cdot g \cdot X_G$$

$$= p_{\infty}^0 l^2 C_{HF} - p_{\infty}^0 l X_F C_L + N m g X_G$$

$$l \cdot C_L = P$$

$P = P^e + P^g$, dove P^g = carico di detto geometrico, non dipende da θ .

$$\alpha = \alpha^g + \theta$$

$$C_L = C_{Lg} + C_{Le}$$

$$\frac{d}{dy} \left[GJ + \frac{d\theta}{dy} \right] = -m_T$$

$$= - \left[p_{\infty}^0 l^2 C_{HF} - p_{\infty}^0 X_F l \cdot C_L + N m g X_G \right]$$

$$= - p_{\infty}^0 X_F (l C_{Lg} + l C_{Le})$$

$$= - p_{\infty}^0 X_F (P^g + P^e)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dy} \left[GJ + \frac{d\theta}{dy} \right] - p_{\infty}^0 X_F P^e = - p_{\infty}^0 l^2 C_{HF} + p_{\infty}^0 X_F P^g + N m g X_G \right]$$

$g(y)$, indipendente da θ

Eq. INTEGRALE EQUILIBRIO ELASTICO ALA

$$\theta = \int_0^b c^{\theta\theta}(y, \eta) m_T(\eta) d\eta$$

$$= \int_0^b c^{\theta\theta}(y, \eta) [p_{\infty}^0 l^2 C_{HF} - p_{\infty}^0 l C_L X_F + N m g X_G] d\eta$$

Partizioniamo a sx tutto quello che dipende da θ :

$$\theta + p_{\infty}^0 \int_0^b c^{\theta\theta}(y, \eta) [\cancel{p_{\infty}^0 l^2 C_{HF}} - p_{\infty}^0 l C_L X_F] d\eta = p_{\infty}^0 \int_0^b c^{\theta\theta}(y, \eta) [l^2 C_{HF} - p_{\infty}^0 X_F] d\eta + N m g X_G$$

PROFILO PER PROFILO

- corda varia
- X_F varia

$$\theta(y,t) = \bar{\theta}(y) e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\theta}(y,t) = -\omega^2 \bar{\theta}(y) e^{i\omega t}$$

L'equazione diventa:

$$\bar{\theta}(y) - \omega^2 \int_0^b c^{(00)}(\cdot) I_{xx} \bar{\theta}(\eta) d\eta = 0$$

NON
DIPENDE +
DAL TEMPO !!!

$$\{\bar{\theta}\} - \omega^2 [c^{(00)}] [I_{xx}] \{\bar{\theta}\} = \{0\}$$

$$[D] = \left([c^{(00)}] [I_{xx}] \right)^{-1} \quad \text{MATRICE DINAMICA}$$

$$\Rightarrow \left([D] - \omega^2 [I] \right) \{\bar{\theta}\} = \{0\}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = \omega^2$$

calcolo gli autovalori
→ LE FREQUENZE PROPRIE

SVANTAGGI:

- SERVONO TANTISSIMI PUNTI
- NON SI HA NESSUNA GARANZIA DI COSA SUCCEDA TRA I PUNTI

2) COLLOCAZIONE A MEZZO DI FUNZIONI DI FORMA

Problema di struttura ed che oscilla

- supponiamo di conoscere un set di funzioni $f_i(x,y)$ tale che rappresentino + o - bene il comportamento che noi ci aspettiamo dall'ala

$$z_c(x,y,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) f_i(x,y)$$

↓
PESO

↓
FUNZIONE DI FORMA, NOTA

$$\theta(y,t) = \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i(y) q_i(t)$$

$$q_i(t) = \bar{q}_i e^{i\omega t}$$

$$\bar{\theta}(y) = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \bar{\theta}_i(y)$$

$$\iint_S \varepsilon(\gamma) \bar{\theta}_j(\gamma) dx dy = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\int_0^{e(\gamma)} dx \int_0^b \varepsilon(\gamma) \bar{\theta}_j(\gamma) dy = 0$$

$$\int_0^b \varepsilon(\gamma) e(\gamma) \bar{\theta}_j(\gamma) dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^n q_i \left\{ \int_0^e \varepsilon(\gamma) \bar{\theta}_i(\gamma) \bar{\theta}_j(\gamma) dy - \omega^2 \int_0^b e(\gamma) \bar{\theta}_j(\gamma) \int_0^b c^{\text{es}}(\gamma, \eta) I_{\alpha}(\eta) \cdot \bar{\theta}_i(\eta) d\eta dy \right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n q_i (S_{ij} - \omega^2 A_{ij}) = 0$$

$$([S] - \omega^2 [A]) \{q\} = \{0\}$$

↓
QUESTO SET DI COEFFICIENTI VA
A MINIMIZZARE L'ERRORE MEDIO

14/10/2014

Quando si fa l'upgrade di un serbo si riusano le FUNZIONI DI FORMA della deformazione della struttura → i suoi modi propri

- ◆ se so che l'ole oscillerà così allora utilizzo i modi propri di vibrazione come funzioni di forma per i nuovi colossi aerelostici

- Oscillazioni proprie di sistema non smorzato
→ eq. algebriche a COEFFICIENTI REALI
 - Oscillazioni di sistema SMORZATO
→ eq. algebriche a COEFF. COMPLESSI
DINAMICA
-

EQUAZIONE OSCILLATORE ARMONICO

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = 0$$

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{y=\pm b} = 0$$

Soluzione:

$$\theta(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y)$$

soluzione generale

$$\theta'(y) = \lambda A \cos(\lambda y) - \lambda B \sin(\lambda y)$$

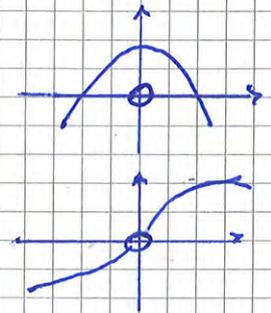
Imponendo condizioni al contorno

$$\begin{cases} 0 = \lambda A \cos(\lambda b) - \lambda B \sin \lambda b \\ 0 = \lambda A \cos(\lambda b) + \lambda B \sin(\lambda b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda A \cos \lambda b = 0 \\ \lambda B \sin \lambda b = 0 \end{cases}$$

devono essere CONTEMPORANEAMENTE SODDISFATTE

$$\begin{cases} A=0 & \text{e} & \sin \lambda b = 0 & \rightarrow & \theta = B \cos \lambda y \\ B=0 & \text{e} & \cos \lambda b = 0 & \rightarrow & \theta = A \sin \lambda y \end{cases}$$



DEFORMATE SIMMETRICHE: soddisfano $\sin \lambda b = 0$
 $\sin \lambda b = 0$

$$\lambda b = m\pi \quad m=1$$

$$\lambda_n = \frac{m\pi}{b}$$

⚠ QUESTA DEFORMAZIONE COMPORTA UNA VARIAZIONE DI ASSETTO DELLA FUSOLIERA visto che $\theta(0) = B$

DEFORMATE ANTISIMMETRICHE

$$\cos \lambda b = 0$$

$$\lambda b = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad n=1, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}$$

AD OGNI λ CORRISPONDE UNA PRESSIONE DINAMICA DI DIVERGENZA. Per tutti questi λ qual è il minimo?

⇒ PER QUALE λ SI HA LA MINIMA VELOCITÀ DI DIVERGENZA? cioè quello per

cui l'ole si sfascia prima

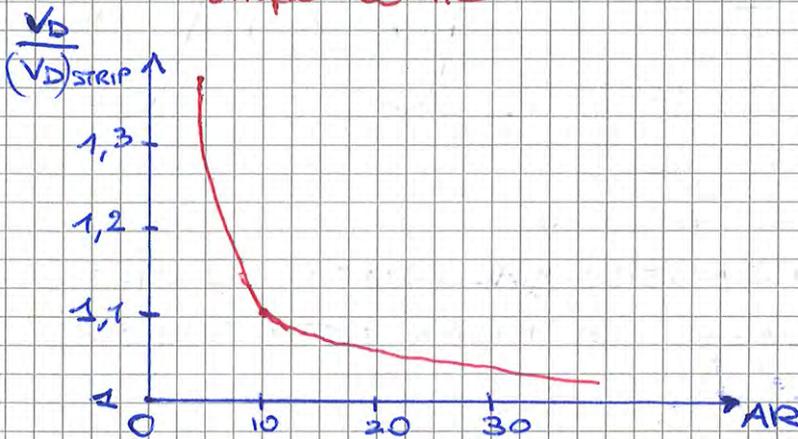
PER λ ANTISIMMETRICA

$$\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 GJr$$

è come una rigidità torsionale equivalente

⚠ MEMO: per avere una V_0 serve $x_F < 0$
 Se $x_F > 0$ (SUPERSONICO)
 → l'equazione di 2° ordine diventa l'EQUAZIONE DELLE ONDE (soluzioni completamente diverse).

● TUTTO QUESTO È CALCOLABILE ANCHE CON LA TEORIA DI PRANDTL [velocità in dotta, ...]
 → l'allungamento dove gioca un ruolo importante



● **ALTO ALLUNGAMENTO:**
 LA STRIP THEORY È MOLTO VALIDA E VICINA ALLA REALTÀ

↓
 effetti di estremità poco influenti

■ **BASSO ALLUNGAMENTO:**

LA $(V_0)_{STRIP}$ È UN TOT % INFERIORE A QUELLA CALCOLATA CON UN METODO + BASSO

⇒ **Strip** → CALCOLO CONSERVATIVO

CI PARIAMO IL CULO!

Va bene, ma non esageriamo!
 Il 30% più basso di quella + realistica è un po' troppo!

■ **ALA REALE:** discontinuità ecc...

$$\theta(y) + p_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (y, \eta) x_F(\eta) p^e(\eta) d\eta = f(y)$$

SI RENDE OMOGENEA

$$p^e = \Theta_A(\theta)$$

$$\theta = \Theta_A^{-1}(p^e)$$

PRANDTL: OPER. INVERSO

Con RAYLEIGH-RITZ:

Divergenza: tutto il lavoro della coppia aerodinamica va ad accumulare energia potenziale di deformazione elastica.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b GJ_T \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \int_0^b P_0^e \theta d\eta$$

LAVORO DELLA SOLA PORTANZA DATA DALLA DEFORMAZIONE ELASTICA

PORTANZA GENERATA DALLA DEFORMAZIONE θ

$$\mathcal{L} = P_0^e \mathcal{L}^*$$

$$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{2} \int_0^b p^e(\eta) x_F(\eta) \theta(\eta) d\eta$$

IN CONDIZIONI DI DIVERGENZA:

$$P_0^e = P_0^o \rightarrow U = P_0^o \mathcal{L}^* \rightarrow P_D^o = \frac{U}{\mathcal{L}^*} = R(\theta)$$

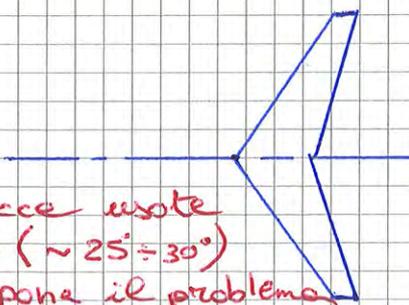
"tra tutte le deformazioni possibili compatibili con i vincoli quella effettiva sarà quella che rende MINIMA L'ENERGIA POTENZIALE"

ALA A FRECCIA

La storia qui è un bel cosino: flessione e torsione accoppiate.

L'eq. che ci dà la θ è del 3° ordine, è proprio BASTARDA"

... e allora formo un discorso qualitativo



DIVERGENZA FLESSO-TORSIONALE

Con freccia $\varphi > 0$:

c'è divergenza SOLO con piccoli angoli di freccia e asse focale SUFFICIENTEMENTE A MONTE ($x_F < 0$) DI QUELLO ELASTICO

Per frecce usate di solito ($\sim 25^\circ - 30^\circ$) non si pone il problema

Galerkin [RIADATTARSELO PER ALA DRITTA] pag. 156

$$\theta(y) = \sum_{i=1}^n q_i \Theta_i(y)$$

$$P^e(y) = \sum_{i=1}^n q_i P_i^e(y) \quad P_i^e = \partial_A(\Theta_i)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i \left\{ \Theta_i(y) + P_{\infty}^0 \int_0^b [X_F(\eta) c^{\theta\theta}(y, \eta) - c^{\theta z}(y, \eta)] \cdot P_i^e(\eta) d\eta \right\} = \varepsilon(y)$$

CONDIZIONI DI GALERKIN

$$\iint \varepsilon(y) \Theta_j(y) dx dy = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\int_0^b \varepsilon(y) \Theta_j(y) dy = 0$$

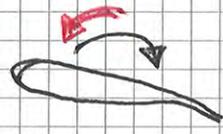
$$\sum_{i=1}^n q_i \left\{ \int_0^b \Theta_i(y) \varepsilon(y) \Theta_j(y) dy + P_{\infty}^0 \int_0^b \varepsilon(y) \Theta_j(y) \int_0^b [X_F(\eta) c^{\theta\theta}(y, \eta) - c^{\theta z}(y, \eta)] \cdot P_i^e(\eta) d\eta dy \right\} = 0$$

↑
[B]

$$\int_0^b \Theta_i \varepsilon \Theta_j dy = S_{ij}$$

$$([S] - P_{\infty}^0 [B]) \{q\} = \{0\}$$

- ALA A FRECCIA NEGATIVA: la ricerca prova ad alleviare i problemi di divergenza usando i materiali compositi, smart structures, ...



Ala tende a torcersi in un verso ma la tessitura delle fibre la fa torcere in verso opposto x compensare e alleviare gli effetti della divergenza.

(2)

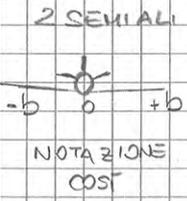
Anni '50 : alla Vought si stabilisce che l'aereo abbia un colettamento dell'ala alla radice che veda e compensa tutte le eventuali deformaz. a torsione lungo l'apertura

OGGI : si implementa la cosa con il FCS
 → alle varie velocità l'aereo cambia assetto → AERO-SERVO-ELASTICITÀ

1. Dato α_g , si vuole $L = NW$

$$NQ = 2p_\infty \int_0^b p \, dy$$

$p^a = \ell C_L \alpha_g$
 $p^e = \ell C_L \vartheta$



$$= 2p_\infty \int_0^b p^a \, dy + 2p_\infty \int_0^b p^e \, dy$$

$$= 2p_\infty \ell b C_L \alpha_g + 2p_\infty \ell C_L \int_0^b \vartheta(y) \, dy$$

NO CALETTAMENTO LUNGO ALA
 $\alpha_g = \text{cost}$

Quindi

$$Q = Mg$$

$$NQ = 2p_\infty \ell b C_L \alpha_g + 2p_\infty \ell C_L \frac{\mu b}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\tan \lambda b}{\lambda b} \right)$$

$\mu(N)$

α_g : incidenza di progetto come se aereo rigido.

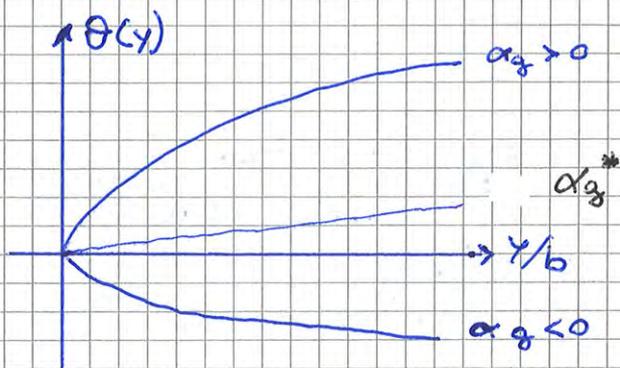
$$N_{\text{rigido}} = \frac{2p_\infty \ell b C_L \alpha_g}{Q}$$

PARAMETRO A CUI CI RIFERIAMO.

$Q = 2mgb$ peso complessivo delle 2 semiali

$$\frac{N}{N_{\text{rig}}} = \frac{\frac{\tan \lambda b}{\lambda b} + \frac{\ell C_{LTF}}{x_F C_L \alpha_g} \left(1 - \frac{\tan \lambda b}{\lambda b} \right)}{\lambda - \frac{Q_w}{Q} \frac{x_a}{x_F} \left(1 - \frac{\tan \lambda b}{\lambda b} \right)}$$

Ovviamente esce fuori un N diverso da quello che si avrebbe se l'aereo fosse rigido e indeformabile.



Il "punto neutro" è α_g^* , non ed $\alpha_g = 0$!

2. PROGETTO

Come posso modificare α_g in modo che ad una generica V_∞ si abbia $N/N_{R1c} = 1$?

→ CALETTAMENTO ALA α_c

Se α_c e θ sommate danno una distrib. di LIFT = 0 allora siamo a posto

[NOI RAGIONIAMO SU UN'ALA NON SVERGOLATA]

Vogliamo determinare α_c tale che

$$2\rho V_\infty^2 b c_L \alpha_c + 2\rho V_\infty^2 c_L \int_0^b \theta(y) dy = 0$$

$$\int_0^b \theta(y) dy + b \alpha_c = 0$$

OCCHIO!!! *
 α_c È EFFICACE PER UN'UNICA VELOCITÀ V_∞ !

⇒ CONVIENE FARE CALCOLO PER α_g e V_∞ DI CROCIERA!!

$$\alpha_c = -\frac{1}{b} \int_0^b \theta(y) dy$$

μ cambia!

$$\rightarrow \mu = -\lambda^2 (\alpha_g + \alpha_c)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta = \mu - \lambda^2 c$$

$$\theta(y) = \frac{\mu - \lambda^2 c}{\lambda^2} (\dots)$$

[...]

$$\alpha_c = \frac{\mu}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda b}{\tan \lambda b} \right) \rightarrow \mu \text{ FISSATO } \alpha_g = \frac{Q \cdot N_{R1c}}{2\rho V_\infty^2 b c_L}$$

Anni '50: α_c per LA Veruise

AEROELASTICITÀ 21/10/2014

Quello che abbiamo visto ieri, cioè la RISPOSTA AEROELASTICA di un'ala di allungamento finito, usa varie semplificazioni

- ALA RETTANGOLARE, OMOGENEA, NON SVERGOLATA
- TEORIA DI STRISCIA

RISPOSTA DI ALA REALE CARICATA SIMMETRICAM.

→ Ala dritta reale: svergolata e con DISCONTINUITÀ
eq. INTEGRALI

$$\theta(y) + p_\infty^\circ \int_0^b c^{\circ\circ} x_r p^e d\eta = f_0(y)$$

$$f_0(y) = - \int_0^b c^{\circ\circ} g_0 d\eta$$

$$g_0(y) = + p_\infty^\circ x_r p^e - p_\infty^\circ l^2 C_{Hr} - mg N x_g$$

ALA REALE → discretizziamo con COLLOCAZIONE DIRETTA

$$[A^s] \{p^e\} + p_\infty^\circ [c^{\circ\circ}] [x_r] \{p^e\} = - p_\infty^\circ [c^{\circ\circ}] [x_r] \{p^e\} +$$

$$+ p_\infty^\circ [c^{\circ\circ}] [l^2] \{C_{Hr}\} + g N [c^{\circ\circ}] [x_g] \{m\}$$

vettore delle masse di ogni troncetto alare

Comprimiamo la scrittura:

$$[B] = - [c^{\circ\circ}] [x_r]$$

$$[F] = [c^{\circ\circ}] [l^2]$$

$$[G] = - [c^{\circ\circ}] [x_g]$$

$$\rightarrow [A^s] \{p^e\} - p_\infty^\circ [B] \{p^e\} = p_\infty^\circ [B] \{p^e\} + p_\infty^\circ [F] \{C_{Hr}\} - g N [G] \{m\}$$

① PROBLEMA DI VERIFICA: α fissata, verifico N

Condizione: TOTAL LIFT = NQ

cioè

$$2 p_\infty \int_0^b p(y) dy = NQ$$

Condizione va posta sulla portanza TOTALE!

$$2\rho_0 L \downarrow \{p\} = NQ \Rightarrow *$$

$$\{p\} = \{p^e\} + \{p^c\}$$

$$[A^s] \{p^c\} = \{\alpha^c\}$$

Nell'equazione c'è $[A^s] \{p^c\}$

→ diventa

$$[A^s] \{p^c\} = [A^s] \{p\} - [A^s] \{p^e\}$$

$$([A^s] - \rho_0 [B]) \{p\} = \{\alpha^c\} + \rho_0 [F] \{C_{MF}\} - g N [G] \{m\}$$

$$* N = \frac{2\rho_0 L \downarrow \{p\}}{Q}$$

sostituiamo

$$([A^s] - \rho_0 [B] + g \frac{2\rho_0 L \downarrow}{Q} [G] \{m\}) \{p\} = \{\alpha^c\} + \rho_0 [F] \{C_{MF}\}$$

? CARICHI TOTALI AERODINAMICI

IN: V_∞, α^c

OUT: $\{p\}$ vettore dei carichi totali

↳ N e "si spera sia soddisfacente"

② PROBLEMA DI PROGETTO: determinare il colettamento dell'ala che compensa le deformazioni

→ VOGLIAMO CHE A UNA DATA VELOCITA'

$N = \text{cost!}$

→ Lift da def. elastica + Lift da colettamento = 0

α^c è costante !!!

$$[A^s] \{p^c\} = \alpha^c \{1\}$$

$$2\rho_0 L \downarrow \{p^{ec}\} = 0$$

con

$$\{p^{ec}\} = \{p^e\} + \{p^c\}$$

PORTANZA DA DEF. ELASTICA + COLETTAMENTO

$$([A^s] - \rho_0 [B]) \{p^e\} = \rho_0 [B] \{p^c\} + \rho_0 [B] \{p^e\} + \rho_0 [F] \{C_{MF}\} - g N [G] \{m\}$$

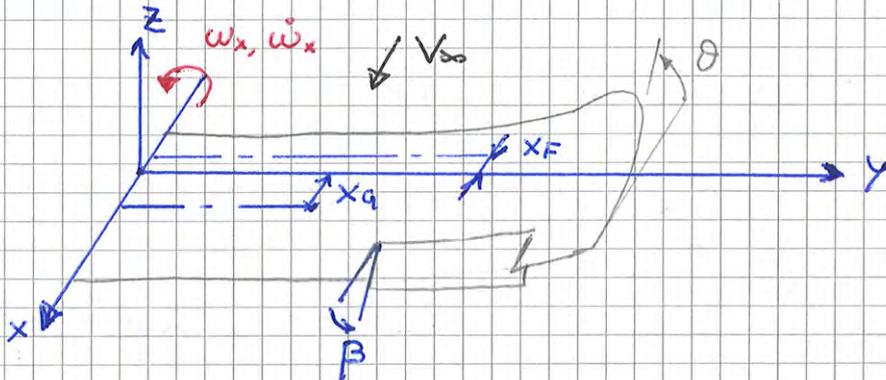
Sommiamo ancora a entrambi i membri $[A^s] \{p^e\} = \alpha^c \{1\}$

RISPOSTA DI ALA CARICATA ASIMMETRICAMENTE

→ ALETONI IN ROLLO

Esempio: BOEING B-47 Ala eccessivamente deformabile (freccia di tip di 11m!)
 → rispondeva moltissimo ai comandi!

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



• SI RISCRIVE L'EQUILIBRIO AEROELASTICO FACENDO COMPARIRE SOLO I CONTRIBUTI DELLE FORZE DOVUTI ALLA DISTRIBUZIONE ANTISIMMETRICA

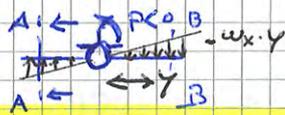
• SI TRASCURANO TUTTI I MOTI DEL VELIVOLO ECCETTO QUELLO DI ROLLO

$$\theta(y) + p_\infty \int_0^b c^{oo} x_f p^e d\eta = f_a(y)$$

$$\alpha(y) = \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \cdot \beta - \frac{\omega_x y}{V_\infty} + \theta(y)$$

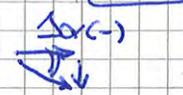
FORMA DEL PROFILO SI MODIFICA → cambia direzione di $C_e = 0$

INCIDENZA CINEMATICA DATA DA ROLLO



$$\Delta \alpha = -\frac{p \cdot (-y)}{V_\infty}$$

$$\Delta \alpha = -\frac{p \cdot (+y)}{V_\infty}$$



$$p(y) = l \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta + p^z(y) + p^e(y)$$

DA ROTAZIONE

$$C_u(y) = \frac{\partial C_u}{\partial \beta} \cdot \beta \quad [\text{è come un } C_{H\beta} \text{, } \bar{e} < 0]$$

$$m_f(y) = -p_\infty x_f \left(l \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta + p^z + p^e \right) + p_\infty l^2 \frac{\partial C_u}{\partial \beta} \cdot \beta + \omega_x y m x_q$$

MOMENTO DELLA FORZA INERZIA

Ora dobbiamo mettere m_f nell'equazione di potenza, cioè:

$$\theta(y) = \int_0^b c^{oo} m_f d\eta$$

EFFICACIA DELLA MANOVRA

→ velocità di rollio

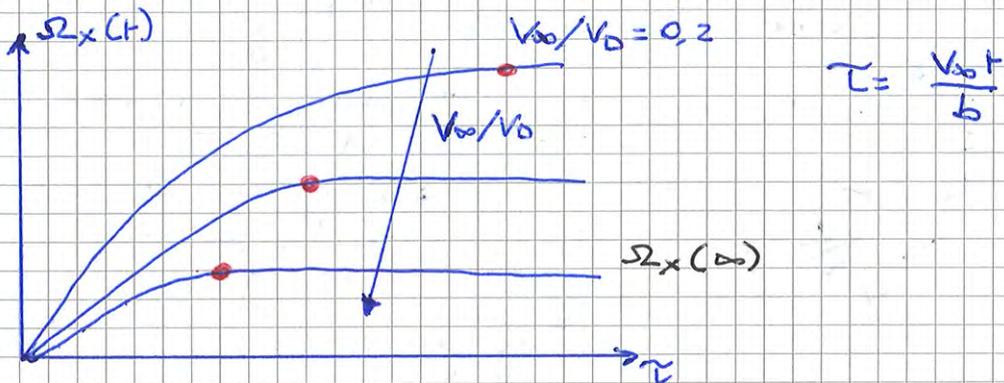
$$\Omega_x = \frac{\omega_x b}{V_{\infty}}$$

Parametro di $\rightarrow \Omega_x (t \rightarrow \infty)$
Confronto

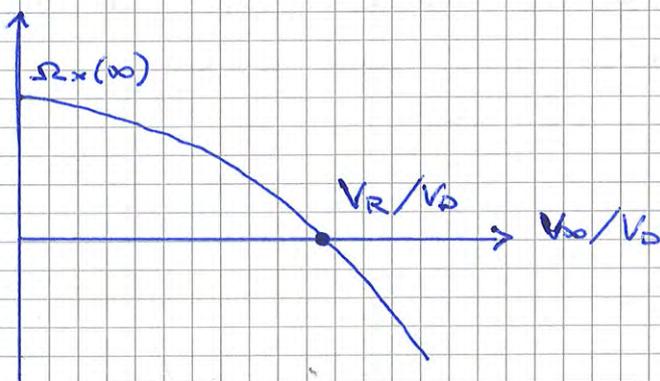
$$E = \frac{\partial \Omega_x(\infty)}{\partial \beta}$$

$\left\{ = 0 \text{ NON PARTE IL ROLLIO!} \right.$

Questo era per un caso reale; vediamo i
RISULTATI DELLA TRATTAZIONE ANALITICA per
la idealizzata



- Per $V_{\infty} \uparrow$ si raggiunge prima la velocità di rollio di regime, però è sempre + basso.



@ $\frac{V_R}{V_0}$ NON SI INNESCA
IL MOTO DI ROLLIO

NON È IDRAULICA STA ROBA!!!



$(\rho_\infty V_\infty) \cdot V_\infty$ è il flusso della quantità di moto attraverso una superficie di controllo!!!

Nelle forze viene usato $\frac{1}{2} \rho V_\infty^2$ SOLO per una questione STORICA!

$$L = \frac{d}{dx} \left[\underbrace{\rho_\infty V_\infty^2 F \cdot \alpha}_{\text{PORTATA DI Q.D.M. ORIZZONTALE}} \right]$$

$\alpha =$ COMPONENTE VERTICALE!

FLUSSO X AREA = PORTATA

PORTANZA SUL CORPO PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO = FORZA

$$L_{tot} = \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^l \frac{d}{dx} (F \cdot \alpha) dx = \rho_\infty V_\infty^2 [F(e)\alpha(e) - \underbrace{F(0)\alpha(0)}_{=0}]$$

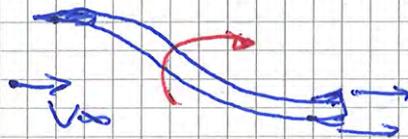
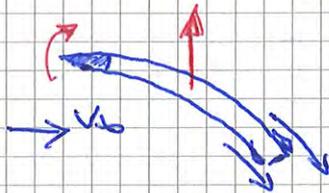
$\rho_\infty F(x) =$ MASSA VIRTUALE

MASSA DI ARIA CONTENUTA IN CILINDRO DI BASE F E ALTEZZA UNITARIA

Alla punta del missile il flusso non viene praticamente deviato

MEMO: PERCHÉ UN CORPO HA PORTANZA?

XX DEFLETTE VERSO IL BASSO IL FLUSSO!



NO LIFT, SOLO MOMENTO!

$$\alpha(x) = \alpha_0 - \frac{dh}{dx} \quad \frac{d^2}{dx^2} [EJ \frac{d^2 h}{dx^2}] = L(x)$$

xx questo meno?!

$$\frac{d^2}{dx^2} [EJ \frac{d^2 h}{dx^2}] - 2 \rho_\infty \frac{d}{dx} [F(x) (\alpha_0 - \frac{dh}{dx})] = 0$$

Perché la def. elastica è alle vianze... mah...

B.C.

$$\frac{d^2 h}{dx^2}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2}(l) = 0$$

MOMENTO NULO AGLI ESTREMI

$$\frac{d^3 h}{dx^3}(0) = 0$$

$$\frac{d^3 h}{dx^3}(l) = 0$$

TAGLIO NULO AGLI ESTREMI

PROBLEMA DI RISPOSTA

$$\int_0^e f_j [F f_i']' dx = [f_j F f_i']_0^e - \underbrace{\int_0^e F f_i' f_j'' dx}_{A_{ij}}$$

\downarrow
 $F(e) f_j(e) f_i'(e)$

PARTICOLARE CASO
IN CUI SI APPLICA
GALERKIN A UNA
EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\sum_{i=1}^n q_i [S_{ij} + 2p^0 A_{ij}] = 0$$

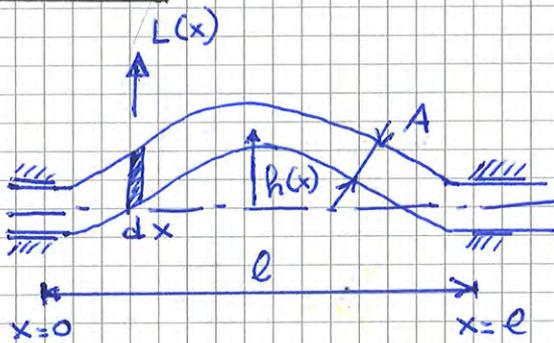
$$([S] + 2p^0 [A]) \{q\} = 0$$

Si calcolano gli autovalori e si trovano le n velocità di divergenza: il + basso sarà la pressione dinamica critica di divergenza

DIVERGENZA IN TUBI PERCORSI DA FLUIDO

pesante (divergenza flessionale ovviamente)

2 appoggi



$$\frac{d}{dx} [-p U^2 A \frac{dh}{dx}] = L(x)$$

$$L(x) = - \frac{d}{dx} [p U^2 A \frac{dh}{dx}]$$

$$L(x) = - p U^2 A \frac{d^2 h}{dx^2}$$

$$EJ \frac{d^4 h}{dx^4} = - p U^2 A \frac{d^2 h}{dx^2}$$

$$\frac{d^4 h}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2 h}{dx^2} = 0$$

$$h(0) = h(l) = 0$$

$$EJ h''(0) = EJ h''(l) = 0$$

CORPO SLENDER E TUBO
FANNO LA STESSA OPERAZIONE
SUL FLUIDO: LO DEVIANO!!!

⇒ FORZA VERTICALE =
VARIAZIONE DELLA C.D.M.
VERTICALE del fluido tra
sezione x e sezione (x+dx)

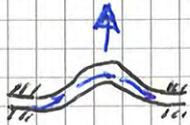
PURO PROBLEMA DI DIVERG!

$$\lambda^2 = \frac{p U^2 A}{EJ} = p^0 \frac{2A}{EJ}$$

$$p^0 = \frac{1}{2} \rho U^2$$

Provando con un estremo incostretto e uno libero NON CI SONO SOLUZIONI SE NON QUELLA BANALE!

FISICAMENTE : un fluido mi percorre un tubo curvo * crea una forza CENTRIFUGA che tende a essere contrastata dalla reazione elastica.



Nel tubo con estremo libero la FORZA CENTRIFUGA RIMETTE IN BASSO IL TUBO E NON PARTE UNA REAZIONE ELASTICA!

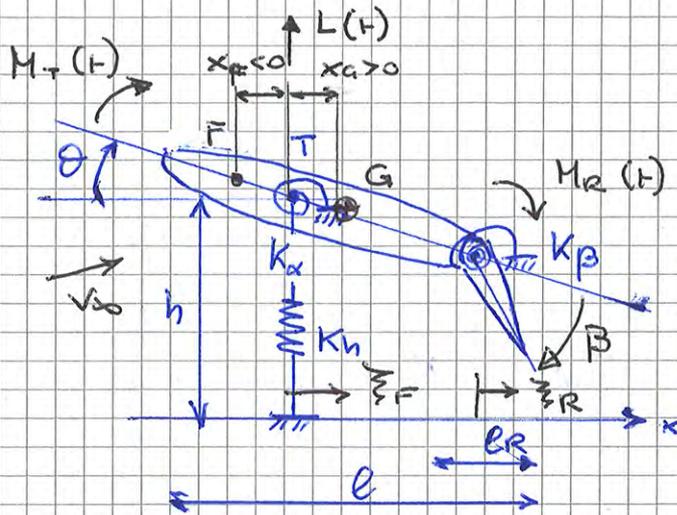


↳ per quello la matematica dice che non ci sono soluzioni!

In realtà è un fenomeno DINAMICO xk il tubo quizza poi e oscilla di continuo
⇒ TUBO DEL GIARDINO DI PAPERINO

* IL TUBO IN ORIGINE È RETTILINEO.

A SEGUITO DI UN DISTURBO SI INCURVA E ALLORA POI DA LÌ HA SENSO PARLARE DELLA DIVERGENZA!



● PARTE FISSA: fin

● \vec{F}_F

● \vec{F}_R

3 GDL: h, β, θ

● L'ALETTONE HA UNA SUA MASSA

STRUMENTO: EQUAZIONI DI LAGRANGE (versione PLV)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = Q_i \quad i = 1, \dots, 3$$

T = energia cinetica del sistema

U = " potenziale " "

q_i = spostamenti generalizzati

Q_i = componenti Lagrangiane delle forze

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3$$

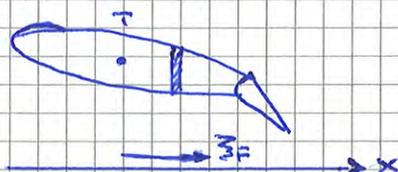
OGNI COMPONENTE DI FORZA LAVORA SOLO CON LO SPOSTAMENTO VIRTUALE CHE GLI COMPETE

Riferendoci al nostro sistema, congelando θ e β l'unica forza che compie lavoro è LIFT su h !

$$\{q_i\} = \{h, \theta, \beta\}$$

$$\{Q_i\} = \{L, M_T, M_R\}$$

$$U = \frac{1}{2} K_h \cdot h^2 + \frac{1}{2} K_x \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} K_\beta \cdot \beta^2$$



▲ LA PINNA È UN CORPO RIGIDO
 → h e θ SONO COSTANTI NELLO SPAZIO!

$$m = m_F + m_R$$

$$S_\alpha = S_F + S_R$$

$$I_\alpha = I_F + I_R$$

SONO SOMMABILI XK MOMENTI
RISPETTO ALLO STESSO ASSE
 → asse del centro di taglio

$$T = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_\alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\beta \cdot \dot{\beta}^2 - S_\alpha h \dot{\theta} - S_\beta h \dot{\beta} + H_\beta \dot{\theta} \dot{\beta}$$

PER QUESTO SISTEMA L'ENERGIA CINETICA
 DIPENDE SOLO DALLA VELOCITA' E NON DALLA
 POSIZIONE

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

• Dobbiamo scrivere ora le 3 eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = h \\ Q_1 = L \end{array} \right\}$$

$$m \ddot{h} - S_\alpha \ddot{\theta} - S_\beta \ddot{\beta} + K_h \cdot h = L(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_2 = \theta \\ Q_2 = M_T \end{array} \right\}$$

$$- S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\theta} + H_\beta \ddot{\beta} + K_\alpha \theta = M_T(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_3 = \beta \\ Q_3 = M_R \end{array} \right\}$$

$$- S_\beta \ddot{h} + H_\beta \ddot{\theta} + I_\beta \ddot{\beta} + K_\beta \beta = M_R(t)$$

FORZE
 AERODINAMICHE
 ↓

ESTERNE + EVENTUALI
 CONTRIBUTI DOVUTI A h, θ, β
 CHE POI SARANNO SPOSTATI A
 PRIMO MEMBRO.

$\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}$ è un termine non lineare!

- SONO 3 EQUAZIONI COMPATTE IN UNA

EQ. ENERGIA

Deriva dal 1° principio della termodinamica

$$de = \delta L + \delta Q, \quad e = c_v T$$

In aerodinamica non ci sono scambi di calore: un flusso esterno a un'ala non vede scambi di calore e poi mai consideriamo FLUIDO IDEALE

(viscosità = 0, conducibilità = 0)

$$de = -p dv = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{De}{Dt} = -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Oppure con l'entalpia:

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{Dh}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{Dh}{Dt} = -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$= -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rightarrow \frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

$$h + \frac{V^2}{2} = h^0$$

ENTALPIA TOTALE SI CONSERVA
ATTRAVERSO UN URTO

$$\frac{Dh}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{Dh^0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$\vec{v} \cdot \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho}$$

SOLO SE $p = f(\rho)$ **ISENTROPICA**

In generale non è soddisfatta
PERÒ un'isentrópica è
anche **BAROTROPICA**

$$\Rightarrow \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t)$$

BERNOULLI GENERALIZZATO
È SOLO FUNZIONE
DEL TEMPO

Come avere $F(t)$? \rightarrow CONDIZIONI DI INFINITO
A MONTE, CHE È PURE
COSTANTE NEL TEMPO!!!

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{V_0^2}{2}$$

$F(t) =$ livello
energetico del campo

CASO INCOMPRESSIBILE:

$$\rho = \text{cost} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

**È STAZIONARIO
E IRROTAZIONALE!**

$$\frac{p}{\rho^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{\gamma}}} \rightarrow p = p_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

RICORRIAMO ALLA
RELAZIONE ISENTROPICA
PER CALCOLARE $\int \frac{dp}{\rho}$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-1/\gamma} dp = \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} \left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Sostituendo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2 - V_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = 0$$

EQUAZIONE
DELLA PRESSIONE
DI
Lord Kelvin

... E RICAVIAMO $p = f(\phi)$

Una volta note ϕ e quindi v dall'eq. del potenziale si
ricava p .

Osserviamo $\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \dots$

- Se $c \uparrow \uparrow \uparrow$ così che le piccole perturbazioni propagano a velocità quasi infinita
 \rightarrow il termine $\frac{1}{c^2}$ ommazza tutto!

e si arriva a $\nabla^2 \phi = 0$

$\Delta c \rightarrow \infty$ è come dire $p = \text{cost}$

- Formalmente scompare la dipendenza dal tempo se $c \rightarrow \infty$!

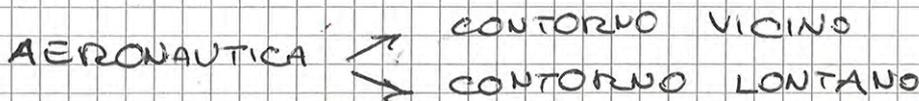
Scompare dalle equazioni MA RESTA NELLE CONDIZIONI AL CONTORNO \Rightarrow VARIANO NEL TEMPO

E IL CAMPO SI ADATTA Istantaneamente alle B.C.

\rightarrow questo è il concetto di incompressibilità

- L'equazione $\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} [\dots]$ è un'equazione d'ONDA \rightarrow propagazione di onde a velocità c .

◆ Condizioni al contorno



- Cont. LONTANO: il disturbo svanisce ^{istantaneamente} se flusso INCOMPRESSIBILE
 $\rightarrow V_\infty, p_\infty, T_\infty$, il campo all'infinito non è influenzato

- COMPRESS: ONDA D'URTO IN FLUSSO IDEALE NON SVANISCE ALL'INFINITO!

CONDIZIONE DI IRRAGGIAMENTO di SOMMERFELD

Bisogna allora porre che la funzione che rappresenta il disturbo sia un'onda che si allontana (campo di moto APERTO)

- Cont. VICINO: CONDIZIONE DI TANGENZA (inviscido) / ADERENZA (viscido)
 $(\vec{v} \text{ normale a superficie} = 0)$
 STAZIONARIO

Ora abbiamo le equazioni

→ LINEARIZZAZIONE

- **PICCOLE PERTURBAZIONI**: $\vec{V} \approx \vec{V}_\infty$ (accetto localmente in punto osservato)

$$\begin{cases} V_x = V_\infty + u \\ V_y = v \\ V_z = w \end{cases}$$

$$\phi = \phi_\infty = V_\infty \cdot x$$

$$(u, v, w) \ll V_\infty$$

$$\phi = \phi_\infty + \varphi$$

$$\vec{\nabla} \varphi = \{u, v, w\}$$

- **PENDENZE PICCOLE DELLA SUPERFICIE**

$$\frac{\partial z^\pm}{\partial x} - \frac{\partial z^\pm}{\partial y} \ll 1$$

- **$c = c_\infty$**

c nel campo di moto ha una variazione molto debole $c \propto \sqrt{T}$.

Nei pressi di $M=1$ però questa cosa non è valido!!!

es. PRANDTL GLAUERT NON VALE PER $M_\infty \approx 1$

TRANSONICO (Gasdinamica) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Per } M_\infty = 1 \text{ le variazioni di velocità} \\ \text{sono dello stesso ordine di } c! \end{array} \right.$

IL TRANSONICO NON SI PUÒ LINEARIZZARE

LINEARIZZANDO

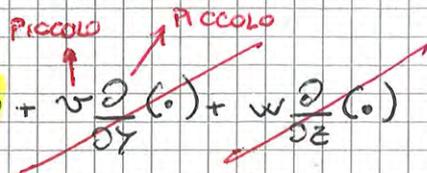
$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = \frac{1}{c_{\infty}^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2V_\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]$$

LINEARE a coefficienti costanti

- **Linearizziamo anche l'operatore di derivata sostanziale.**

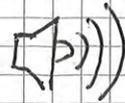
$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(\cdot)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + (V_\infty + u) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \cancel{v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}} + \cancel{w \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}}$$



$$\nabla^2 p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

EQ. ACUSTICA di d'Alembert



$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_0^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]$$

ONDE SONORE + TRASPORTO A VELOCITÀ V_0



$$X = x - V_0 t$$

$$Y = y$$

$$Z = z$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) + V_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) + V_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cdot) + V_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\cdot) + V_0 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (\cdot) + V_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cdot) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cdot) + 2V_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\cdot) + V_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cdot) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

ACUSTICA DI UN MEZZO IN MOTO

Equazione CONVETTIVA delle onde

AEROELASTICITÀ 3/11/2014

LINEARIZZAZIONE CONDIZIONI AL CONTORNO

$$z_c = z_c(x, y, t)$$

$$V_z = \frac{\partial z_c}{\partial t} + V_x \frac{\partial z_c}{\partial x} + V_y \frac{\partial z_c}{\partial y}$$

$$\begin{cases} V_x = V_0 + u \\ V_y = v \\ V_z = w \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{\partial z_c}{\partial t} + (V_0 + u) \frac{\partial z_c}{\partial x} + v \frac{\partial z_c}{\partial y}$$

piccolo piccolo

$$w = \frac{\partial z_c}{\partial t} + V_0 \frac{\partial z_c}{\partial x}$$

CONDIZ. AL CONTORNO LINEARIZZATA (condiz. di tangenza)

$\frac{p}{\rho r} = \frac{p_0}{\rho_0 r}$ isentropica, si assegna a $G(t) \rightarrow \psi_0$

$$\psi - \psi_0 = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Infinito a monte $V_0 = \text{cost} \rightarrow \vec{a} = 0$

$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{\gamma} p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (p-p_0) + \dots$ SVILUPPO TAYLOR TRONCATO A 1° ORDINE

$\rightarrow \psi = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} (p-p_0) \right] = - \frac{p-p_0}{\rho_0}$

$$\psi = - \frac{p-p_0}{\rho_0}$$

POTENZIALE LINEARIZZATO DELL'ACCELERAZIONE

\rightarrow a meno di $\frac{1}{\rho_0}$ questo rappresenta un disturbo di pressione

$$\Delta p = \bar{p} - p^+ = (p^- - p_0) - (p^+ - p_0) = -\rho_0 \psi^- + \rho_0 \psi^+ = -\rho_0 \Delta \psi$$

\rightarrow SALTO DI PRESSIONE TRA VENTRE E DORSO

Bernoulli generalizzata con $F(t) = \frac{V_0^2}{2}$; $G(t) = 0 \rightarrow \psi = - \int \frac{dp}{\rho}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2 - V_0^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \phi = V_0 \cdot x + \psi$$

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(V_0 + u)^2 + v^2 + w^2 - V_0^2}{2}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (V_0^2 + 2V_0 u - V_0^2) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{D\phi}{Dt}$$

$$\psi = \frac{D\phi}{Dt}$$

POTENZIALE DELL'ACCELERAZIONE

↓
DERIVATA LAGRANGIANA DEL POTENZIALE DELLA VELOCITÀ

SOLO SE LINEARIZZIAMO!!!

$$x - V_0(t - \tau) = \xi$$

$$t - \tau = \frac{x - \xi}{V_0} \rightarrow \tau = t - \frac{x - \xi}{V_0} \quad d\tau = \frac{d\xi}{V_0}$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{V_0} \int_{-\xi}^{\xi} \psi(\xi, y, z, t - \frac{x - \xi}{V_0}) d\xi$$

Integrazione spaziale

CAMPI DI MOTO INCOMPRESSIBILI PIANI

CONDIZIONI DI INCOMPRESSIBILITÀ

EQ. QDM

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{IPOTESI } \frac{\partial \rho}{\rho} \ll 1$$

Vogliamo vedere se con questa ipotesi l'eq. conserva i suoi pezzi: **INSTAZIONARIO + CONVEZIONE + PRESSIONI**

Analisi degli ordini di grandezza:

SCALE: U, L, T

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost}} \cdot \nabla \rho = c_0^2 \nabla \rho$$

$$\frac{1}{\rho} c_0^2 \nabla \rho = \frac{c_0^2}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla \rho = \frac{c_0^2}{\rho_0 \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)} \nabla \rho \approx$$

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \approx 1 - \epsilon \quad \left| \quad \approx \frac{c_0^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \nabla \rho$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \rightarrow \frac{U}{T} ; \quad \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \rightarrow \frac{U^2}{L} ; \quad \frac{c_0^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \nabla \rho \rightarrow \frac{\delta \rho}{L}$$

$\hookrightarrow \frac{c_0^2}{L} \frac{\delta \rho}{\rho_0}$

AEROELASTICITÀ 4/11/2014

CAMPI INCOMPRESSIBILI INSTAZIONARI

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Eq. di Laplace → eq. ELLITTICA

SI RISOLVE IMPONENDO
LE CONDIZIONI AL CONTORNO

CONDIZIONI
INCOMPRESSIBILITÀ:
INSTAZIONARIO

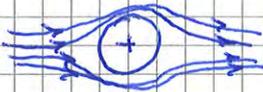
▶ $M^2 \ll 1$

▶ $M \frac{L}{c_0 T} \ll 1$

↳ non entra la variabile
tempo, si adottano
istante x istante

CAMPO DI MOTO ATTORNO A UN CILINDRO

SCARSO INTERESSE PRATICO MA DA QUESTO SI
POSSONO RICAVARE CASI + PRATICI → CAMPI
ATTORNO A UN PROFILO con le trasformazioni conformi



FLUSSO INVISCIDO: $D=0$

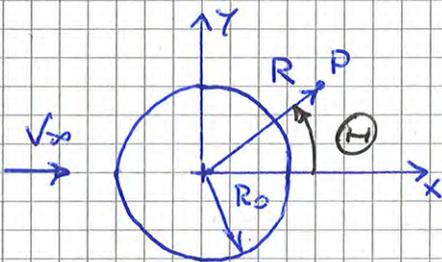
PARADOSSO DI
D'ALEMBERT

$$\nabla^2 \phi = 0$$

È PURA CINEMATICA, UGUALE
ALLO STAZIONARIO

⚠ IN DINAMICA CON LE PRESSIONI
CAMBIA LA STORIA

RICHIAMO SUL CILINDRO



• STAZIONARIO $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = 0$

• Se $V_\infty = \text{cost}$ e indifferente
studiere cilindro fermo investito
da flusso a V_∞ oppure cilindro
IN MOTO con V_∞

TRASFORMAZIONE GALILEIANA

È + comodo tenere corpo fisso

$\nabla^2 \phi = 0$ → SOLUZIONI INDEFINITE:

- POZZI / SORGENTI
- DOPPIETTE

$F_x = - \int \dots d\theta = 0!$ PARADOSSO DI D'ALEMBERT

INSTAZIONARIO

$V_0 = V_0(t)$

2 CASI

- ① CILINDRO FERMO INVESTITO DA CORRENTE CHE ACCELERA
- ② CILINDRO CHE ACCELERA IN UNA CORRENTE FERMA

SONO DUE CASI DIVERSI CHE PORTANO A RISULTATI DIVERSI

NON SI FA UNA TRASFORMAZIONE GALILEIANA XK BISOGNA AGGIUNGERE UNA $V_0(t) \neq \text{cost!}$
 → DIVERSE FORZE D'INERZIA

① Cilindro fermo → SISTEMA DI RIF. INERZIALE

• CINEMATICAMENTE NON CAMBIA NULLA istante per istante

$\nabla^2 \phi(t) = 0$

$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{R \rightarrow 0} = V_0(t) ; \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{R=R_0} = 0$

LA CINEMATICA DI UN MOTO INCOMP. INSTAB. NON È ALTRO CHE UNA SERIE DI STATI STAZIONARI

$\phi(R, \theta, t) = V_0(t) \left(R + \frac{R_0^2}{R}\right) \cos \theta$

• DINAMICA: NON SI PUÒ USARE BERNOULLI STAZ!

$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2} \rho V^2(t) = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \dots$
 ↑
 INFINITO A MONTE Bernoulli generalizzato

$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{R=R_0} = \frac{\partial V_0}{\partial t} \cdot 2 R_0 \cos \theta$ $V_0(t)$ variamente

$p(R_0, \theta, t) - p_0 = \frac{1}{2} \rho V_0^2 - 2\rho V_0^2 \sin^2 \theta - 2\rho \frac{dV_0}{dt} R_0 \cos \theta$

Calcolo della forza F_x

$F_x = - \int_0^{2\pi} (p - p_0) R_0 \cos \theta d\theta$

I primi due termini (STAZIONARI) integrati danno zero. Ma il terzo (instab.) no!

$F_x = 2\rho R_0^2 \frac{dV_0}{dt} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$

CINEMATICA → riferimento mobile solido al cilindro (\vec{e} + facile)

$$\nabla^2 \phi^* = \nabla^2 \phi$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{R \rightarrow \infty} = -V_0(t)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z \rightarrow R_0} = 0$$

$$\phi(r, \theta, t) = -V_0(t) \left(z + \frac{R_0^2}{r} \right) \cos \theta$$

DINAMICA → ci mettiamo nel riferimento inerziale



TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

→ bisogna scrivere Bernoulli nel sistema inerziale

• $t = T$

• $y = Y$

• $X = x + \int_0^t V_0(\tau) d\tau$

• $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}$

• $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}$

• $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \dots \rightarrow \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} - V_0(t) \frac{\partial}{\partial X}$

$$\rho \frac{\partial \phi^*}{\partial T} + P + \rho \frac{V^2}{2} = P_0 + \rho \frac{V_0^2}{2}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial T} - V_0 \frac{\partial}{\partial X} \right) (\phi + V_0 x) + P + \rho \frac{(V_0 + V_x)^2 + V_y^2}{2} = P_0 + \rho \frac{V_0^2}{2}$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho x \frac{dV_0}{dt} - \rho V_0 V_x - \rho V_0^2 + P + \rho \frac{V_0^2 + 2V_0 V_x + V_x^2 + V_y^2}{2} =$$

$$= P_0 + \rho \frac{V_0^2}{2}$$

FLUSSO ACCELERATO
 → CAMPO PRESSIONE AMBIENTE NON UNIFORME
 $m \frac{dv_0}{dt}$
 +
 DISTURBO CILINDRO
 $m \frac{dv_0}{dt}$

$$F_x = m \frac{dv_0}{dt} + m \frac{dv_0}{dt}$$

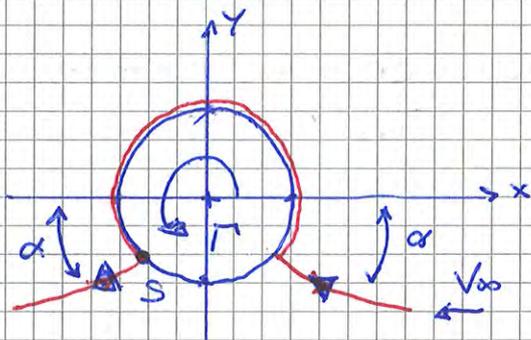
CILINDRO ACCELERATO
 → CAMPO PRESSIONE AMBIENTE È UNIFORME
 p_0 ← ⊙ → p_0
 SOLO DISTURBO CILINDRO

$$F_x = m \frac{dv_0}{dt}$$

Il cilindro così non mi dà portanza, ma in aerelasticità è quello che stiamo cercando

→ CILINDRO + CIRCOLAZIONE = LIFT STAZIONARIO

$$L = \rho V_0 \Gamma$$



$$\phi(r, \theta) = -V_0 \left(r + \frac{R_0^2}{r} \cos \theta \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

- **TERMINE POLIDROMO:** ad ogni giro il θ si incrementa!
- LO SI VUOLE MONODROMO e allora si mette un salto in corrispondenza della linea di uscita

$$\begin{aligned} \ominus &= \pi + \alpha \\ \oplus &= -\pi + \alpha \end{aligned}$$

$$\phi^+ = 2V_0 R_0 \cos(\pi + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} (\pi + \alpha)$$

$$\phi^- = 2V_0 R_0 \cos(-\pi + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} (-\pi + \alpha)$$

$$\phi^+ - \phi^- = \Delta\phi = \Gamma$$

SALTO DEL POTENZIALE

è una condizione al contorno

• S = punto di distacco, punto di arresto posteriore

$$\frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{R_0} = -2 \frac{1}{R_0} R_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R_0}$$

Es: VORTICI DI AVVIO

Quando non c'è + accelerazione non si rilasciano + vortici nella scia.

$$+ \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \theta'(s) ds$$

Riemergono dal passato i peccati del cilindro

MOTO INSTAZIONARIO: IL PASSATO CONTA

TIME HISTORY

→ CORPO PORTANTE CHE ACCELERA VUOLE SCIA VORTICOSA DIETRO DI SE'!

$$V_{\infty} \uparrow \rightarrow \Gamma \uparrow \rightarrow \gamma(s) \uparrow$$

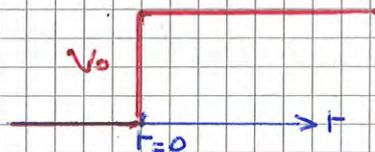
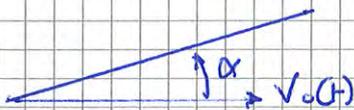
VORTICINI CHE INDUCONO SUL CILINDRO

Non vole poi più Kutta-Joukowski!

MOTI INSTAZIONARI LAMINA PIANA

CAMPO DI MOTO ALL'AVVIO DI UNA LAMINA PIANA A BASSA INCIDENZA

Risultati su studi della lamina piana anni '20

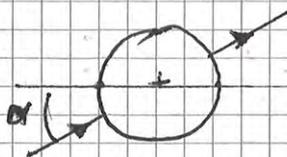


LAMINA PIANA CHE PARTE A SCATTO

Ci piacerebbe conoscere la risposta in portanza di una "MANOVRA" A GRADINO

Uno studente tedesco, WAGNER, risolse cosa Prandtl diceva che non c'era soluzione.

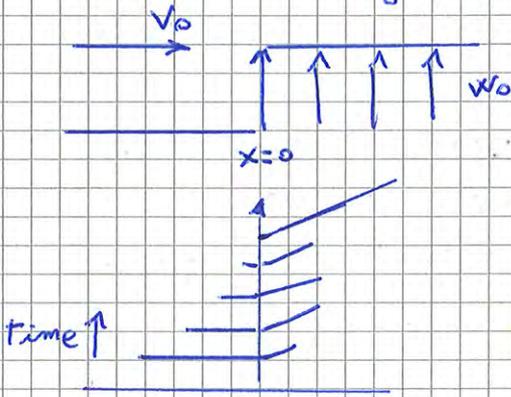
SOVRAPPOSIZIONE DI 2 CAMPI DI MOTO



QUANDO LA CODA VA ALL'INFINITO IL SEGMENTO INTERNO ARRIVA AL CENTRO e si ha $\Gamma = \int \gamma(s) ds$ CIRCOLAZIONE RISULTANTE NULLA.

KÜSSNER → RISPOSTA DI INGRESSO IN UNA RAFFICA A GRADINO

Ogni raffica può essere modellizzata come sovrapposizione di raffiche e gradino

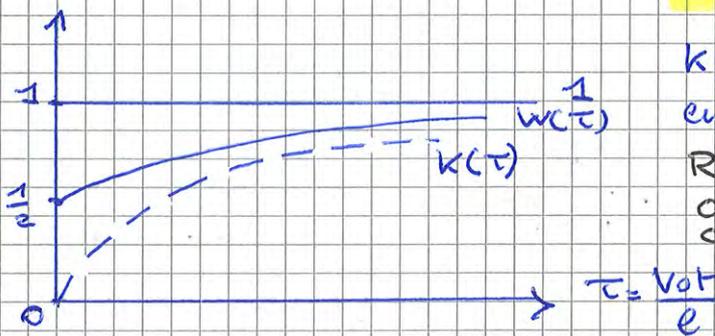


Ingresso graduale in raffica

$$K(\tau) = \frac{L(\tau)}{\pi \rho l v_0^2 \sin \frac{w_0}{v_0}}$$

INCIDENZA CINEMATICA:

$$+ \frac{w_0}{v_0}$$



$k(0) = 0$ poiché L appena entrato in raffica non c'è!

RISPOSTA + DOLCE e causa del tempo finito che impiega la lamina a oltrepassare il fronte di raffica.
(NON È INSTANTANEO!)

τ = distanze in corde percorse dal bordo di fuga della lamina

oppure TEMPO ADIMENSIONALE TRASCORSO DA QUANDO IL BORDO DI ATTACCO HA INCONTRATO IL FRONTE DI RAFFICA

AEROELASTICITÀ 5/11/2014

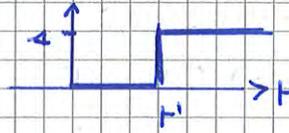
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t') dt' = 1$$

è un input unitario

PROPRIETÀ DI FILTRO

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \delta(t-t') dt'$$

INPUT A GRADINO



Funzione di HEAVISIDE

$$H(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t' \\ 1 & \text{per } t > t' \end{cases}$$

NON È DEFINITA IN t'

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{t=t'} = \delta(t-t')$$

La derivata di H in t' sarebbe +∞ => dal punto di vista matematico è sbagliato... però FUNZIONA!

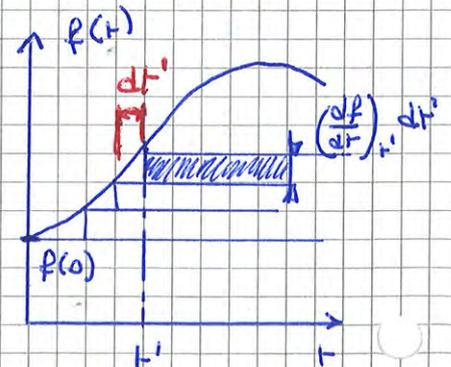
Come si può scomporre una f(t) in una serie di funzioni a gradino?

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t'} dt'$$

Una funzione è = all' integrale della derivata di se stesso + una costante:

QUESTO... LO POSSIAMO DIRE.

$$= f(0) H(t) + \int_0^t \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t'} H(t-t') dt'$$



SOMMA DI GRADINI COLLOCATI DI dt' PIÙ AVANTI E PESATI DALLA DERIVATA

→ INTEGRALE DI DUHAMEL

H(t-t') vale 0 prima di t' e 1 dopo t'

→ SCOMPOSIZIONE IN FUNZIONI A GRADINO

INPUT A DELTA (IMPULSIVO)

(3° METODO)

$S(t) \rightarrow I_{rf}(t)$ risposta IMPULSIVA specifica

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') S(t-t') dt'$$

NON SARA' UN PICCO
MA UNA FUNZIONE
CHE POI SI SMOZZA

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') I_{rf}(t-t') dt'$$

NESSUN EFFETTO PUO' PRECEDERE LA CAUSA

→ non posso calcolare in $t < t'$ e' effetto di un input impulsivo in t' !

⇒ CALCOLO NUMERICO: conviene fare integrale tra 0 e t $\int_0^t dt'$

⚠ 1° METODO: passaggio da dominio del tempo al dominio delle frequenze

Funzioni di risposta specifica

$$H_{rf}(\omega)$$

$$A_{rf}(t)$$

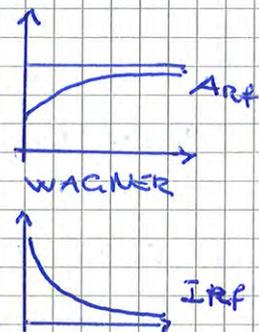
$$I_{rf}(t)$$

NON SONO INDIPENDENTI TRA LORO

$$I_{rf}(t) = \frac{dA_{rf}(t)}{dt}$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$



$S(t) \rightarrow I_{rf}$

$$I_{rf}(t) = \frac{1}{2\pi} \int H_{rf}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$A_{rf}(t) = \int I_{rf}(t) dt$$

10/11/2014

$$\lim_{\substack{x \rightarrow l \\ z \rightarrow 0^+}} \varphi = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow l \\ z \rightarrow 0^-}} \varphi = 2\pi$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \text{arctan} \frac{z}{x-\xi} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \text{arctan} \frac{z}{x-\xi} = 2\pi$$

QUESTI VALORI POSSONO ESSERE ESTRATTI DALL'INTEGRALE

$$\Delta\varphi = \int_0^l \gamma(\xi) d\xi = \Gamma = \varphi(x, 0^+) - \varphi(x, 0^-)$$

SALTO DI POTENZIALE SOPRA-SOTTO

$$u(x, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{z}{(x-\xi)^2 + z^2} d\xi$$

$$w(x, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + z^2} d\xi$$

DOWNWASH $w_c(x) = w(x, 0) = V_\infty \frac{dzc}{dx}$

$$w(x, 0) = w(x) = V_\infty \frac{dzc}{dx} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi}$$

1° MEMBRO NOTO

? quanto è $\gamma(\xi)$

LA RISOLUZIONE ANALITICA PUO' PORTARE A INFINITE $\gamma(\xi)$

QUELLA GIUSTA PERO' SARA' QUELLA = 0 AL TRAILING EDGE

Bordo di fuga:

$$\Delta p(l) = \rho V_\infty \gamma(l) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma(l) = 0}$$

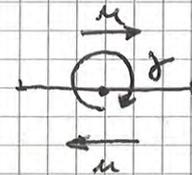
$$C_p = -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{z=0}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = u(x, 0) = \pm \frac{\gamma(x)}{2}$$

IL DISTURBO DI VELOCITA' ORIZZONTALE SUL PROFILO VALE $\frac{1}{2}$ VORTICITA'

$$C_p = \mp \frac{\gamma(x)}{V_\infty}$$

$$c_p = -\frac{2u(x, 0)}{V_\infty}$$



$$\Delta C_p = \frac{2}{V_\infty} \gamma(x)$$

* CONDIZIONE DI KUTTA: $u=0$ AL BORDO DI USCITA $\Rightarrow \gamma(l)=0$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \Delta C_p = \rho V_\infty \gamma(x)$$

KUTTA-JOUKOWSKI LOCALE

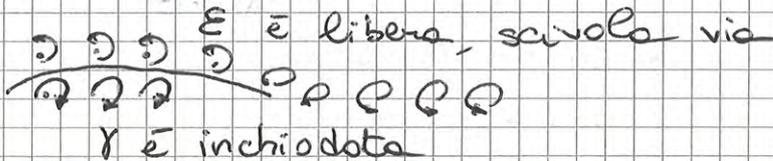
$$L = \int_0^l \Delta p(x) dx = \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx = \rho V_\infty \Gamma$$

2 DISTRIBUZIONI DI VORTICITÀ

- γ : evoluzione di quella stazionaria
- ϵ : rilasciata nell'aria e trascinata a valle

γ = VORTICITÀ ADERENTE

ϵ = "DI SCIA", anche se sta pure sopra al profilo. \rightarrow "VORTICITÀ LIBERA"



$$\Rightarrow w_0(x, t) = \frac{\partial z_c}{\partial t} + V_0 \frac{\partial z_c}{\partial x} = \frac{Dz_c}{Dt}, \quad 0 \leq x \leq l + V_0 t$$

$$w(x, 0, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi, t) + \epsilon(\xi, t)}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+l} \frac{\epsilon(\xi, t)}{x - \xi} d\xi$$

COME LEGARE γ e ϵ ?

Δ : SCIA A VALLE NON INDUCE + SUL PROFILO

in un istante dt a una variazione $d\gamma$ corrisponde una $d\epsilon = -d\gamma$

Δ γ È FISSA SUL PROFILO
 ϵ CI SCORRE SOPRA!

LA VARIAZIONE DI UNA COMPENSA QUELLA DELL'ALTRA

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{D\epsilon}{Dt}$$

Scrivere $\epsilon = f(\gamma)$ significa integrare:

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$\epsilon(x, t) = -\frac{1}{V_0} \int_0^{\min(x, l)} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \left(\xi, t - \frac{x - \xi}{V_0} \right) d\xi$$

\leftarrow INTEGRALE NEL PASSATO

INTEGRALE LAGRANGIANO

DERIVATA VALUTATA NEL POSTO IN CUI ERA NELL'ISTANTE PRECEDENTE

$$= \frac{1}{V_\infty} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{DE}{Dt} \right) = 0$$

POICHÉ $\frac{DE}{Dt} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}$!

Con questo si vede che la $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0$, ma non che $\Gamma = 0$!

Se la derivata rispetto a x è $= 0 \Rightarrow$ la Γ è COSTANTE LUNGO x . Visto che per $x < 0$ non esistono né E né γ né $\Delta p \Rightarrow$ il suo contributo a Δp sarà ZERO ed essendo cost

$$\Delta p(x, t) = \frac{\rho}{V_\infty} \gamma(x, t)$$

lungo x sarà sempre ZERO.

$$\Delta p(x, t) = \rho V_\infty \gamma(x, t)$$

NON È KUTTA-JOUKOWSKI

$$L(t) = \int_0^e \Delta p(x, t) dx = \rho V_\infty \int_0^e \gamma(x, t) dx$$

$$\Delta p(e, t) = 0$$

⚠ Perché la E scompare dalla formula di Δp ?
 \rightarrow "Perché sono foglie al vento", la velocità relativa al vento è zero!

E SI SPOSTANO CON LA V_∞ !!!

$\Rightarrow V - V_\infty = 0 \Rightarrow$ NO PORTANZA

❓ Sembra che Kutta-Joukowski valga ancora, e invece NO! Perché



\rightarrow Se applicassimo KJ rigoroso la circolazione sul profilo sarebbe $\gamma + E$!

$$\Gamma = \int \gamma + E dx$$

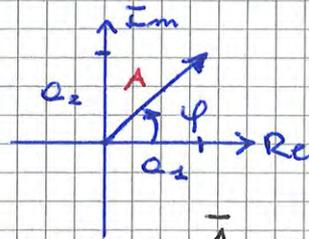
... e invece la formula della LIFT non tiene conto di E !

Dov'è il vantaggio?

- Se nell'equazione ci sono solo derivate
 poi / o di gradi nessuno.

- Se nell'eq. ci sono derivate DI TUTTI GLI
 ORDINI sono pezzi... e
 allora ci servono le grand. complesse

$\bar{A} = A e^{i\varphi}$ $\varphi = \text{fase}$



$\bar{A} = a_1 + i a_2$
 $= A e^{i\varphi}$

AMPIEZZA
 COMPLESSA

↓
 AMPIEZZA REALE + FASE iniziale

▲ ASSUNZIONE DI BASE: LINEARITA' ▲

es. Calcolo dell'energia potenziale elastica

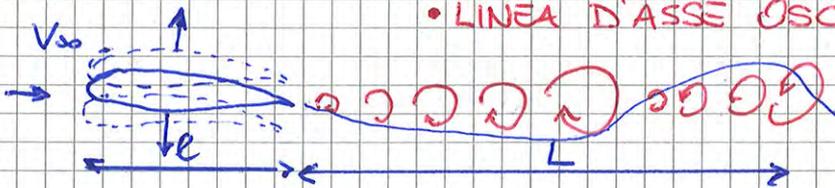
$U = \frac{1}{2} k x^2(t)$

NON SI FA IL QUADRATO DELLA \bar{x} COMPLESSA!
 MA DELLA PARTE REALE!

PROFILI ALARI IN MOTO ARMONICO

$z_c(x, t) = \bar{z}_c(x) e^{i\omega t}$ linea d'asse che si deforma

Moto periodico: in ogni periodo nella scia
 si immette la stessa configuraz.
 di vorticità



• LINEA D'ASSE OSCILLA ARMONICAMENTE

- Periodo T
- Lunghezza periodo: L

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$L = V_{\infty} \cdot T$

$\frac{L}{e} = \frac{V_{\infty} \cdot T}{e} = \frac{V_{\infty}}{e} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega^*}$

$\omega^* = \frac{\omega e}{V_{\infty}}$

FREQ.
 RIDOTTA

$$\bar{\Delta}p(x) = \rho V_{\infty} \bar{y}(x) \quad \Delta p \text{ e } \bar{y} \text{ sono in fase.}$$

Dentro a \bar{w}_e scriviamo $\bar{y}(x) = \frac{\bar{\Delta}p(x)}{\rho V_{\infty}}$

$$\bar{w}_e(x) = - \frac{1}{\rho V_{\infty}} \int_0^l K(x, \xi; \omega) \bar{\Delta}p(\xi) d\xi$$

KERNEL:

$$K(x, \xi; \omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{x-\xi} - \frac{i\omega}{V_{\infty}} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega \frac{\xi'-\xi}{V_{\infty}}}}{x-\xi'} d\xi' \right]$$

$$\bar{y}(l) = 0$$

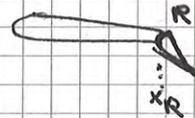
QUESTO SFASA TUTTO!

Come nel caso stazionario K è una funzione di influenza aerodinamica: PER UNA CERTA ω rappresenta il downwash in x prodotto da un Δp unitario in ξ .

$$\bar{L} = \int_0^l \bar{\Delta}p(x) dx \quad \text{PORTANZA COMPLESSA}$$

$$\bar{M}_a = \int_0^l \bar{\Delta}p(x) (x-x_a) dx$$

$$\bar{M}_R = \int_{x_R}^l \bar{\Delta}p(x) (x-x_R) dx$$



MOTO OSCILLATORIO è molto importante in aerostati:

• \bar{L} è la risposta in frequenza → FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

\bar{L} ... flutter]

Come si risolve quell'equazione $\bar{w}_e(x)$?

LA PORTANZA CIRCOLATORIA È SEMPRE APPLICATA A $e/4$ ||

Portanza circolatoria = porzione stretta della portanza stazionaria

PORTANZA NON CIRCOLATORIA applicata a $\frac{e}{2}$

$$\bar{L}_{nc} = \frac{\pi}{4} \rho V_{\infty}^2 \omega^*{}^2 \bar{h}$$



$$L_{nc}(t) = \frac{\pi}{4} \rho V_{\infty}^2 \frac{\omega^2 e^2}{V_{\infty}^2} e^{i\omega t} \cdot h$$

LA PORTANZA NON CIRCOLATORIA NON DIPENDE DA V_{∞}

→ una lamina ferma che oscilla in verticale vede questa portanza?

$$L_{nc}(t) = \rho \frac{\pi}{4} e^2 \omega^2 e^{i\omega t} \cdot \bar{h} = -\rho \frac{\pi}{4} e^2 \ddot{h}(t)$$

$$h = \bar{h} e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{h}(t) = -\omega^2 \bar{h} e^{i\omega t}$$

$$L_{nc} = -\rho \frac{\pi}{4} e^2 \ddot{h} = -M \ddot{h}$$

$M =$ massa apparente

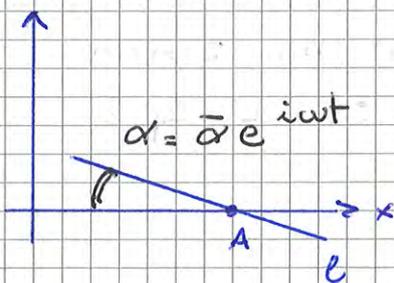
La nostra lamina sbatte l'aria su e giù in maniera ^{NON} uniforme

⇒ effetto equivalente SE SI CONCENTRA LA MASSA IN UN CILINDRO DI $\phi = e$ ACCELERATA IN MODO UNIFORME

LA PORTANZA NON CIRCOLATORIA C'È ANCHE IN ARIA FERMA

È UNA FORZA "VIRTUALE" (cioè inerziale, e c'è veramente)

2. OSCILLAZIONI DI BECCHEGGIO LAMINA PIANA



$$\bar{z}_c(x, t) = -(x - x_A) \alpha(t)$$

$$\bar{z}_c(x) = -(x - x_A) \bar{\alpha} = f(x) !!!$$

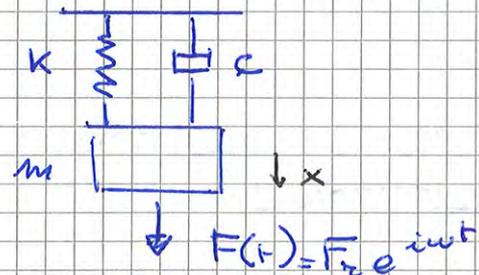
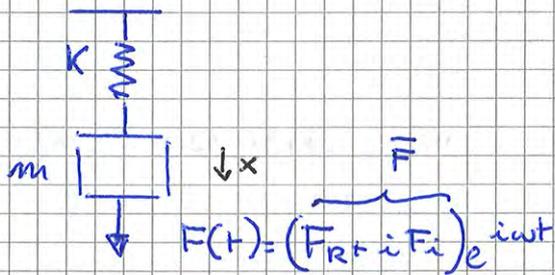
$$\bar{W}_c(x) = i\omega \bar{z}_c + V_{\infty} \frac{d\bar{z}_c}{dx} = -i\omega(x - x_A) \bar{\alpha} - V_{\infty} \bar{\alpha}$$

Vista questa scomposizione rimane comunque valida in parallelo

$$\bar{L} = \bar{L}_{nc} + \bar{L}_c \quad \bar{M}_x = \bar{M}_{x,nc} + \bar{M}_{x,c} \quad \bar{M}_R = \bar{M}_{R,nc} + \bar{M}_{R,c}$$

↑
funzione di Theodorsen

SFASAMENTI TRA FORZE AERODINAMICHE E SPOSTAMENTI

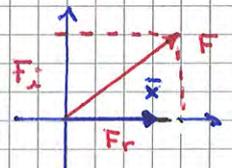


$$-m\ddot{x} - Kx + (F_R + iF_i)e^{i\omega t} = 0$$

F_R : in fase con x
 F_i : in quadratura con x

$$x = \bar{x} e^{i\omega t}$$

\bar{x} reale \rightarrow fase di riferimento



$$(m\omega^2 - K)\bar{x} + F_R + iF_i = 0$$

$$m\omega^2 \bar{x} + iF_i - K\bar{x} = -F_R$$

iF_i sarà smorzante o amplificante

$$-m\ddot{x} - C\dot{x} - Kx + F_R e^{i\omega t} = 0$$

$$m\omega^2 \bar{x} - i\omega C \bar{x} - K\bar{x} = -F_R$$

CONFRONTIAMOLE
eq. con presenza di
SMORZAMENTO C

PARTI IMMAGINARIE \rightarrow QUADRATURA!

iF_i : se $F_i > 0 \Rightarrow$ AMPLIFICATORE
se $F_i < 0 \Rightarrow$ SMORZATORE

$$\text{Im}(\bar{L}) = -\frac{\pi}{4} \rho V_\infty^2 \omega^2 \cdot \frac{4}{\omega^2} \text{Re}[C(\omega^*)] < 0$$

> 0 sempre

SMORZAMENTO AERODINAMICO

\Rightarrow SMORZANTE! \Rightarrow STABILIZZANTE!

OSCILLAZIONI FLESSIONALI NON VEDONO MAI INSTABILITÀ!

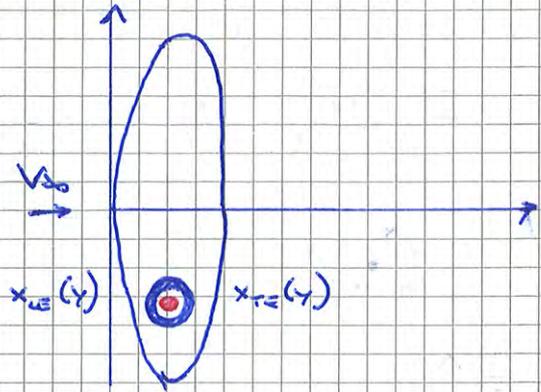
ALI DI ALLUNGAMENTO FINITO IN MOTO INSTAZIONARIO

ALA DI ALLUNGAMENTO FINITO

→ SI TAPPEZZA DI VORTICI LA SUPERFICIE MEDIA

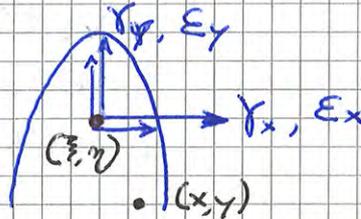
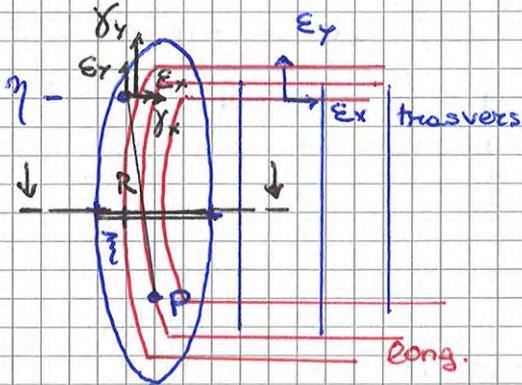
$$w_c(x, y, t) = \frac{\partial z_c}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial z_c}{\partial x}$$

SUPERFICIE $z = z_c(x, y, t)$



Configurazione MOLTO COMPLESSA

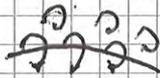
- VORTICI LONGITUDINALI γ_x, ϵ_x
- +
- VORTICI TRASVERSALI ϵ_y, γ_y



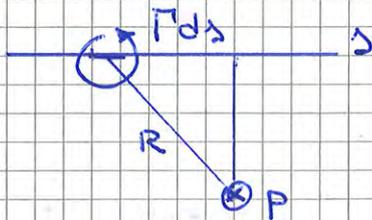
$$R_x = x - \xi$$

$$R_y = y - \eta$$

OGNI VORTICE HA COMPONENTE x e y!



Calcolo induzione in P(x, y): BIOT SAVART



$$dw = \frac{\Gamma ds}{4\pi R^3}$$

Vortici collocati nel generico punto (ξ, η)

$$r = \begin{cases} \text{per } \epsilon_x, \gamma_x \rightarrow y - \eta \\ \text{per } \epsilon_y, \gamma_y \rightarrow x - \xi \end{cases}$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

$$w_c(x, y, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{x_u(y)}^{x_u(y)} \frac{(y - \eta)\gamma_x + (x - \xi)\gamma_y}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta +$$

INDUZIONE di γ

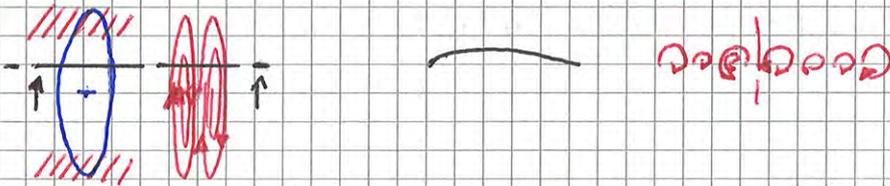
$$\frac{L}{e} = \frac{2\pi}{w^*} \quad w^* = \frac{w e_0}{V_{\infty}}$$

DISTURBO di portanza oscillatorio \rightarrow BILANCIO ZERO
 (poi di base c'è una portanza stazionaria)

Portanza = reazione a uno scorcio di vortici nell'aria

PORTANZA STAZIONARIA: $w^* \rightarrow 0$ perciò $L \rightarrow \infty$
 i vortici si richiudono all'infinito a valle

Se $w \uparrow \Rightarrow L \downarrow$ VORTICI + FI TTI



Se la frequenza è alta la STRIP THEORY dà degli ottimi risultati xk i vortici nello scia sono molto ravvicinati

Riassumendo:

ALA 3D INSTAZIONARIO

• VORTICITÀ ADERENTE + VORTICITÀ LIBERA

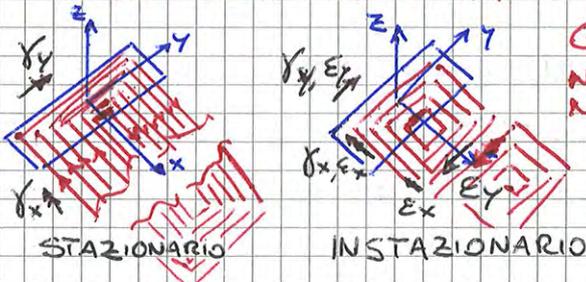
VORTICI LONGITUDINALI γ_x, E_x

" + TRASVERSALI γ_y, E_y

VORTICI DI SCIA: CI SONO QUELLI TRASVERSALI

GIA' A VALLE DELL'ALA!

NON SOLO ALL'INFINITO A VALLE COME NELLA TEORIA DI PRANDTL X LO STABION.



Effetti 3D DIMINUISCONO CON

$w^* \uparrow$

Anelli vorticosi sempre + schiacciati

\rightarrow VISTO IN SEZIONE SI HA UNA VORTICITÀ SOPRATTUTTO PARALLELA ALL'ASSE Y

\Rightarrow POTREMMO TRATTARE ALA COME SERIE DI PROFILI INDIPENDENTI

STRIP THEORY

$$L = -V_{\infty} \frac{d}{dx} \left[m V_{\infty} \left(\frac{dz_c}{dx} \right) \right] = \frac{d}{dx} \left[m V_{\infty}^2 \right]$$

↓

$$\alpha = - \frac{dz_c}{dx}$$

STAZIONARIO

$$L_{TOT} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 F(l) \alpha(l) \pi$$

PROFILI IN MOTO COMPRESSIBILE INSTAZIONARIO

COMPRESSIBILE

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \varphi}{Dt^2}$$

EQUAZIONE
CONVETTIVA DELLE
ONDE

INCOMPRESSIBILE

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Il disturbo generato in un certo punto all'istante t si metterà in un certo Δt ed arriverà in un altro punto.

In $\nabla^2 \varphi = 0$ NON C'È DIPENDENZA DAL TEMPO x, k i disturbi hanno velocità ∞ .

- Legge di Biot-Savart: INDUZIONE ISTANTANEA
 - non tiene conto della convezione!
 - ⇒ VALIDA SOLO NELL'INCOMPRESSIBILE!
 - ⇒ NEL COMPRESSIBILE NON POTENDO + USARE Biot Savart non vedremo + formulazioni con i vortici!

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

ONDA CHE PROPAGA IN UN
FLUIDO A RIPOSO (ACUSTICA)

$$\varphi = \phi$$

$$\phi = \varphi + v_b \cdot x, \text{ se } v_x = 0 \Rightarrow \phi = \varphi$$

CI SONO SOLO PICCOLE PERTURBAZIONI

$$\text{grad } \phi = \vec{v}$$

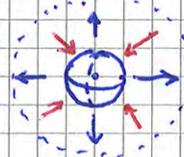
$$c_p = -\frac{2}{v_b} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{v_b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$p - p_0 = \left(\frac{1}{2} \rho v_b^2 c_p \right) = -\cancel{\rho v_b \frac{\partial \varphi}{\partial x}} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad v_b = 0$$

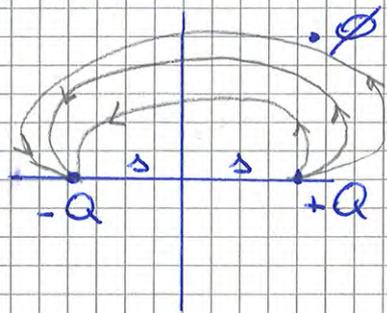
Disturbo di pressione: $p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$

SORGENTE PULSANTE

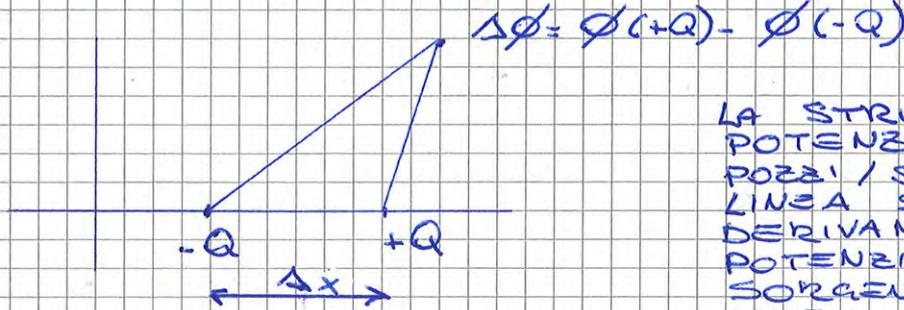
Sfera che periodicamente emette e risucchia portata



DOPPIETA



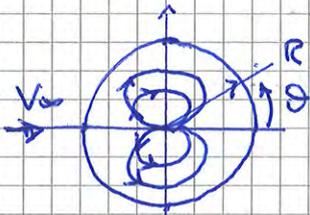
$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \phi_s = \phi_0$$



LA STRUTTURA DEL POTENZIALE DI 2 POZZI / SORGE LUNGO UNA LINEA SI OTTIENE DERIVANDO IL CAMPO POTENZIALE DELLA SORRENTE LUNGO LA LINEA

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\phi_{\text{DIPOLO}} = - \frac{\partial \phi_{\text{sorga}}}{\partial x}$$



$$\begin{aligned} \phi(R) &= V_0 \left(R + \frac{R_0^2}{R} \right) \cos \theta = \\ &= V_0 R \cos \theta + V_0 R_0^2 \frac{\cos \theta}{R} \\ R \cos \theta &= x \end{aligned}$$

$$\phi(R) = V_0 \cdot x + V_0 \left(\frac{R_0^2}{R} \right) x$$

$$\phi_D = - \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = - \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{q}{2\pi} \frac{x}{z^2} = M \frac{x}{z^2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + z^2} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{x}{z}$$

M = momento del dipolo

Qual è il caso non stazionario che noi analizziamo a trattore?

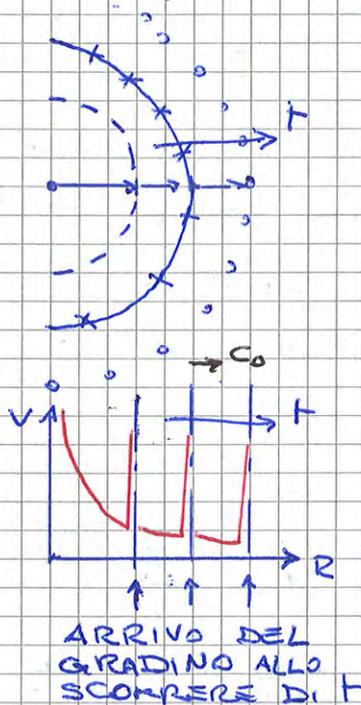
→ SORRENTE SFERICA ATTIVATA A GRADUO

Disturbo di pressione dietro il fronte d'onda è uguale a zero (e pure davanti)

Riassunto

- CAMPO SFERICO A GRADINO
 - disturbo velocità
 - disturbo di pressione

↳ si arriverà a dedurre gli andamenti x sorgente armonica partendo da quella a gradino



- VELOCITÀ DISCONTINUA ATTRAVERSO IL FRONTE D'ONDA, IL QUALE PROPAGA A VELOCITÀ c_0
 - IMPULSO DI VELOCITÀ PROPAGA A c_0 E LASCIA DIETRO DI SE' CAMPO STAZIONARIO
- PRESSIONE: IMPULSO CHE PROPAGA A c_0 E LASCIA LA PRESSIONE INDISTURBATA DIETRO E DAVANTI A SE'.

18/11/2014

$$\phi(R, t) = - \frac{Q}{4\pi R} H\left(t - \frac{R}{c_0}\right)$$

PONENDO $Q=1$ SI OTTIENE LA RISPOSTA INDICIALE

$$A_\phi(R, t) = - \frac{1}{4\pi R} H\left(t - \frac{R}{c_0}\right)$$

$$Q = Q(t)$$

$$\phi(R, t) = Q(0) \cdot A(R, t) + \int_0^t \left(\frac{dQ}{dt}\right)_t \cdot A(R, t-t') dt'$$

Supponiamo che la sorgente inizi ad erogare con $Q(0)=0$

- Ampiezza potenziale \downarrow se $R \uparrow$
- A seconda di R allora il potenziale sarà in quadratura / opposizione di fase!

$$\bar{\phi}(R) = - \frac{\bar{Q}}{4\pi R} e^{-iKR}$$

$$\bar{V}_R(R) = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial R} = \frac{\bar{Q}}{4\pi R^2} e^{-iKR} + \frac{iKR\bar{Q}}{4\pi R} e^{-iKR}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 campo vicino campo lontano

$$P - P_0 = - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\bar{P} - P_0 = i\omega \bar{\phi}(R) = -i\omega \frac{\bar{Q}}{4\pi R} e^{-iKR}$$

ha solo la struttura del campo lontano

→ DECADA LENTAMENTE COME $\frac{1}{R}$

... Questa è pura acustica! Perché c'è un flusso in quiete!

A noi serve AEROELASTICITÀ!

FLUIDO IN MOTO

ACUSTICA: $\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$$

$$P - P_0 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

AEROELASTICITÀ: $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D^2 \varphi}{Dt^2}$

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

(DISTURBI SOVRAPPosti A CAMPO DI FONDO c_∞)

EQUAZIONE DELLE PRESSIONI LINEARIZZATA

$$P - P_\infty = -\rho_\infty V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \rho_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho_\infty \frac{D\varphi}{Dt}$$

Se il fluido è in moto ci si riferisce alle condizioni di ∞ a monte!

SUBSONICO

$$M_\infty < 1$$

$$X = \frac{x}{\beta_\infty} \quad Y = y \quad Z = z$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

$$\phi = - \frac{Q^* \text{ (inc)}}{4\pi \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = - \frac{\beta_\infty Q^* \text{ (comp)}}{4\pi \sqrt{x^2 + \beta_\infty^2 (y^2 + z^2)}} \quad Q = \beta_\infty Q^*$$

* punto in cui calcolo il potenziale:
le 2 sorgenti sono piazzate nella stessa coordinata

Il potenziale di un campo di moto compressibile dato da una sorgente in un punto x, y, z è = al potenziale dato da una sorgente incompressibile nel punto $x, \beta_\infty y, \beta_\infty z$ (inc $Q^* = \frac{Q}{\beta_\infty}$)

A PARITÀ DI PUNTO IL CAMPO COMPRESSIBILE È + INTENSO DI QUELLO INCOMPRESSIBILE

Regola di Prandtl-Glauert

→ INCREMENTO DELLE AZIONI AERODINAMICHE SUL CORPO

$$C_p = \frac{C_{p \text{ inc}}}{\beta_\infty} \quad C_L = \frac{C_{L \text{ inc}}}{\beta_\infty}$$

↳ DEFORMAZIONE DELLA SOLUZIONE INCOMPRESSIBILE

$$\sqrt{x^2 + \beta_\infty^2 (y^2 + z^2)} = R_0 \quad \text{RAGGIO DI AMPIEZZA}$$

È una distanza geometrica DEFORMATA DA β_∞^2

SUPERSONICO

$$M_\infty > 1$$

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \beta_\infty^2 \varphi_{xx}$$

$$\phi = - \frac{Q}{2\pi \sqrt{x^2 - \beta_\infty^2 (y^2 + z^2)}} = - \frac{Q}{2\pi R_0}$$

DA DOVE ARRIVA ?

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \rightarrow \text{CAMBIO VARIABILI}$$

$$X = x \quad Y = iy \quad Z = iz$$

INSTAZIONARIO

⇒ EQUAZIONI IPERBOLICHE

Nel subsonico l'eq. diventa **IPERBOLICA NEL TEMPO!** Non si possono porre condizioni per il futuro!

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \frac{1}{c_{\infty}^2} \varphi_{tt} + \frac{2V_{\infty}}{c_{\infty}^2} \varphi_{tx} + \left(\frac{V_{\infty}}{c_{\infty}}\right)^2 \varphi_{xx}$$

Portando φ_{tt} a 1° membro avrai poi una derivata 2° di segno "-".

PROCESSI NEL TEMPO = FENOMENI IPERBOLICI

Principio di causalità: causa adesso, effetto poi

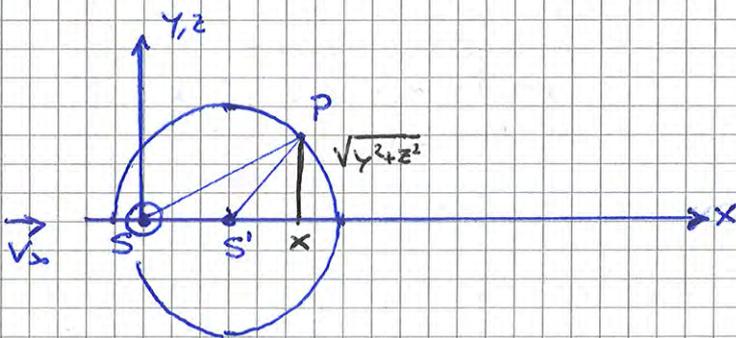
→ IL PASSATO NON È INFLUENZATO

SORGENTE SFERICA ATTIVATA IMPROVVISAM. IN FLUSSO SUBSONICO COMPRESSIBILE

Δ TEMPO DI RITARDO

Sorgente e gradino: passato il gradino dopo si ha un campo stazionario

Subsonico



◦ CAMPO DI MOTO A V_{∞}

Un osservatore in P recepisce il disturbo con un ritardo t_r , cioè quando c'è una sorgente apparente in S'

$$\overline{SS'} = V_{\infty} \cdot t_r$$

$$\overline{SP} = c_{\infty} t_r$$

$$\begin{aligned} c_{\infty}^2 t_r^2 &= (y^2 + z^2) + (x - V_{\infty} t_r)^2 \\ &= x^2 - 2V_{\infty} x \cdot t_r + V_{\infty}^2 t_r^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$(V_{\infty}^2 - c_{\infty}^2) t_r^2 - 2V_{\infty} x t_r + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$(c_{\infty}^2 - V_{\infty}^2) t_r^2 + 2V_{\infty} x t_r - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$r_{r,2} = \frac{M_{\infty} \cdot x \pm \sqrt{M_{\infty}^2 x^2 - \beta_{\infty}^2 (y^2 + z^2)}}{c_{\infty} \beta_{\infty}^2}$$

$$r_{r,2} = \pm \sqrt{\frac{M_{\infty}^2 x^2 - M_{\infty}^2 x^2 + x^2 - \beta_{\infty}^2 (y^2 + z^2)}{c_{\infty} \beta_{\infty}^2}} + M_{\infty} x$$

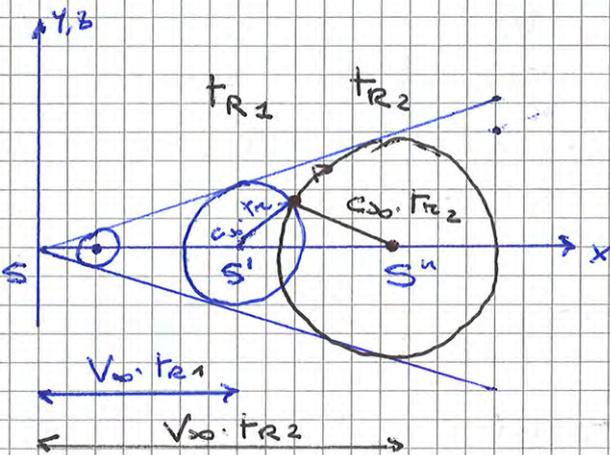
$$r_{r,2} = \frac{M_{\infty} x \pm \sqrt{x^2 - \beta_{\infty}^2 (y^2 + z^2)}}{c_{\infty} \beta_{\infty}^2} = \frac{M_{\infty} x \pm R_e}{c_{\infty} \beta_{\infty}^2}$$

- UNICO RAGGIO DI ALCIEZZA : $R_e = \sqrt{x^2 - \beta_{\infty}^2 (y^2 + z^2)}$
- DUE TEMPI DI RITARDO POSITIVI

$$r_{r,2} = \frac{M_{\infty} x \pm R_e}{c_{\infty} \beta_{\infty}^2} = \frac{R_{f,2}}{c_{\infty}}$$

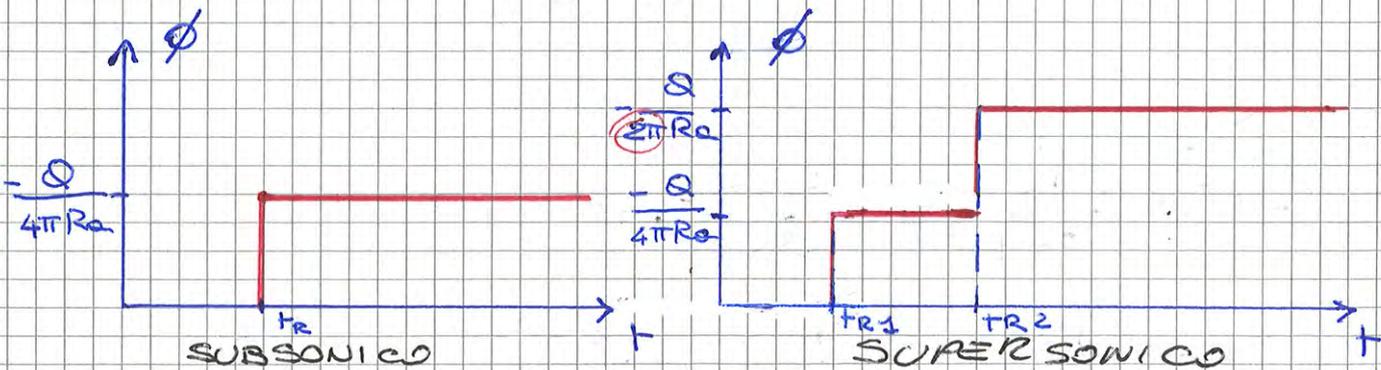
- LO SPAZIO NON È ISOTROPO A CAUSA DELLA CONVEZIONE

PERCHÉ DUE TEMPI DI RITARDO ?



P si becca un doppio impulso! Uno dalla parte anteriore del fronte di S' e una dalla parte posteriore di S''

IL SUPERSONICO È IL MONDO DELLA DOPPIA BOTTA: UNA DAVANTI e UNA DIETRO



AEROELASTICITÀ 19/11/2014

continua

Sorgente attivata a gradino: $Q(t) = \bar{Q} H(t)$

$$\phi(x, y, z, t) = - \frac{\bar{Q}}{4\pi R_0} H\left(t - \frac{R_0}{c_0}\right)$$

↓
AMMETTENZA SPECIFICA

$$A(x, y, z, t) = - \frac{1}{4\pi R_0} H\left(t - \frac{R_0}{c_0}\right)$$

Sorgente con andamento generico → INTEGRALE DI DOUHANDEL

$$\phi(x, y, z, t) = \int_0^t \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=t'} A(x, y, z, t-t') dt'$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= - \frac{1}{4\pi R_0} \int_0^t Q'(t') H\left(t-t' - \frac{R_0}{c_0}\right) dt' = \\ &= - \frac{1}{4\pi R_0} \int_0^{t-R_0/c_0} Q'(t') dt' = - \frac{Q(t-R_0/c_0)}{4\pi R_0} \end{aligned}$$

SORGENTE ARMONICA

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) e^{i\omega t}$$

$$Q(t) = \bar{Q} e^{i\omega t}$$

$$\bar{\phi}(x, y, z) e^{i\omega t} = - \frac{\bar{Q} e^{i\omega(t-R_0/c_0)}}{4\pi R_0}$$

$$\bar{\phi}(x, y, z) = - \frac{\bar{Q}}{4\pi R_0} e^{-i k R_0}$$

PROFILO OSCILLANTE

 $M_\infty < 1$ • SUBSONICO COMPRESSIBILE(x, z) DIPOLO con asse $\uparrow z$

$$\bar{p}_d = \frac{i k \bar{m} \cdot z}{4 \rho_0 \cdot c_0} \cdot e^{i k \mu x} \cdot H_1^{(2)}\left(k \frac{r_0}{R_0^2}\right)$$

• r_0 = raggio d'ampiezza nel piano $x, z = \sqrt{x^2 + \beta_0^2 z^2}$

→ l'equazione scritta per φ_d la possiamo scrivere come $\bar{\psi}_d$

$$\bar{\psi}(x, z) = \frac{i k z}{4 \beta_{\infty}} \int_0^l \bar{m}(\xi) \frac{e^{i k \mu (x - \xi)}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \beta_{\infty}^2 z^2}} H_2^{(2)} \left(\frac{k}{\beta_{\infty}} \sqrt{(x - \xi)^2 + \beta_{\infty}^2 z^2} \right) d\xi$$

$$\psi = \frac{D\varphi}{Dt} \quad \bar{\psi} = i\omega\bar{\varphi} + V_{\infty} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\varphi = \frac{1}{V_{\infty}} \int_x^x \psi(\xi, t - \frac{x - \xi}{V_{\infty}}) d\xi$$

va comunque rispettata la condizione di tangenza

$$\bar{w}_c(x) = i\omega\bar{z}_c + V_{\infty} \frac{d\bar{z}_c}{dx}$$

Leggere sul testo xk non si capisce una sego

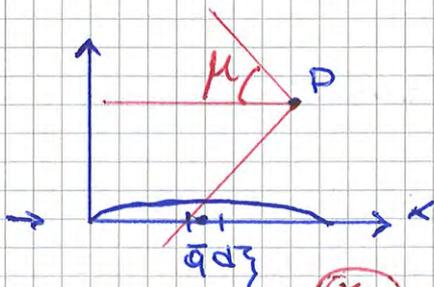
$$\bar{w}_c(x) = -\frac{1}{\beta_{\infty} V_{\infty}} \int_0^l \Delta p(\xi) \cdot K(x, \xi, \omega, M_{\infty}) d\xi$$

SI TROVA DAL POTENZIALE DELL'ACCELERAZIONE
FUNZIONE DI INFLUENZA AERODINAMICA

La stessa cosa può essere fatta per ALA oscillante tappezzando tutta la superficie di riferimento di DIPOLI SPAZIALI OSCILLANTI

POSSIO SUPERSONICO

SIMULA IL FLUSSO CON LE SORGENTI SUPERSONICHE



$$z_c(x, t) = \bar{z}_c(x) e^{i\omega t}$$

$$\bar{w}_c(x) = i\omega\bar{z}_c + V_{\infty} \frac{d\bar{z}_c}{dx}$$

$$\bar{\varphi}(x, z) = -\frac{1}{2\beta} \int_0^{x_m} \bar{q}(\xi) e^{-i k \mu (x - \xi)} J_0 \left(k \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta_{\infty}^2 z^2}}{\beta_{\infty}} \right) d\xi$$

POSSIO "IPERSONICO"

$$M_0 \gg 1$$

$$\beta_{\infty}^2 = M_{\infty}^2 - 1 \gg 1 \quad \beta_{\infty} \rightarrow M_{\infty}$$

$$\Delta \bar{p} = -\rho_{\infty} V_{\infty} \frac{2}{M_{\infty}} \bar{w}_c(x) = -2\rho_{\infty} c_{\infty} \bar{w}_c(x)$$

$$p^+ - p_{\infty} = \rho_{\infty} c_{\infty} \bar{w}_c(x)$$

$$p^- - p_{\infty} = -\rho_{\infty} c_{\infty} \bar{w}_c(x)$$

Avendo il downwash locale si calcola subito la pressione relativa !!!

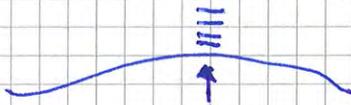


Avendo un pannello e $M_0 \gg 1$ calcoli il campo di pressione

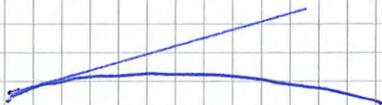
PISTON THEORY

Se un'onda piana $\Delta p = \rho_0 c_0 u$

SUPERFICIE OSCILLANTE: ogni elemento di superficie genera un'onda piana come un pistone, oscilla con velocità verticale \bar{w}_c .



- Se sono ad alti Mach ho delle caratteristiche molto inclinate
- I salti di pressione sono \perp alle linee caratteristiche
- Supponendo orizzontali le caratteristiche



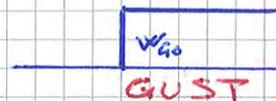
Faccendo l'integrale di D'ALEMBERT otteniamo la risposta INDICIALE → RISPOSTA AD UN'INCIDENZA A GRAD + UN α A GRADINO

$$L(s) = 2\pi \rho_{\infty} l \left\{ \left[\alpha(0) - \frac{\dot{h}(0)}{V_{\infty}} \right] A_{L\alpha}(s) + \int_0^s \frac{d}{d\sigma} \left[\alpha(\sigma) - \frac{\dot{h}(\sigma)}{V_{\infty}} \right] \cdot A_{L\alpha}(s-\sigma) d\sigma \right\} + 2\pi \rho_{\infty} \frac{l^2}{V_{\infty}} \left\{ \dot{\alpha}(0) A_{L\dot{\alpha}}(s) + \int_0^s \frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma} A_{L\dot{\alpha}}(s-\sigma) d\sigma \right\}$$

QUESTO È PER UN PROFILO IN MOTO IN ARIA FERMA

... MA CI SERVE ANCHE IL CASO DI PROFILO FERMO IN ARIA IN MOTO GENERICO!

Raffica a gradino $w_a(x, t) = w_{a0} H\left(t - \frac{x}{V_0}\right)$



→ oltre e ammettenze specifiche

$$A_{LG}(s) = \frac{L(s)}{2\pi \rho_{\infty} l w_{a0}/V_{\infty}}$$

$$A_{w_a}(s) = \frac{H(s)}{2\pi \rho_{\infty} l^2 w_{a0}/V_{\infty}}$$

$$L(s) = 2\pi \rho_{\infty} l \left\{ \frac{w_a(0)}{V_{\infty}} A_{L\alpha}(s) + \int_0^s \left(\frac{dw_a(\sigma)}{d\sigma} \right) A_{L\alpha}(s-\sigma) d\sigma \right\}$$

Queste sono nient'altro che applicazioni dell'integrale di D'Alembert.

→ RISPOSTA AEROELASTICA + RISPOSTA A RAFFICA

Riprendiamo ora il problema aeroelastico dinamico riducendolo a DUE GDL, xk tanto concettualmente è la stessa cosa!

→ RISPOSTA AEROELASTICA A CARICHI AERODINAMICI genericamente variabili nel tempo.

OCCHIO Gli smorzamenti della struttura sono sempre positivi

... SMORZAMENTI AERODINAMICI PER ALCUNE VELOCITA' POTREBBERO DIVENTARE NEGATIVI
 => AMPLIFICARE !!!



$$\theta(0) \quad h(0) \Rightarrow \ddot{\theta}(0) \quad \ddot{h}(0)$$

$$\theta(\Delta t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta}(0) \Delta t^2$$

$$h(\Delta t) = \frac{1}{2} \ddot{h}(0) \Delta t^2$$

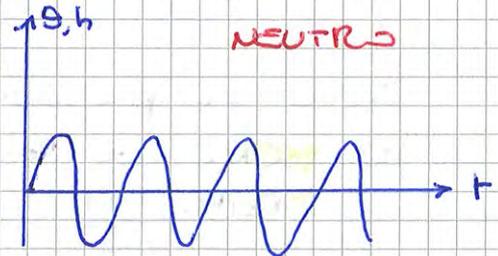
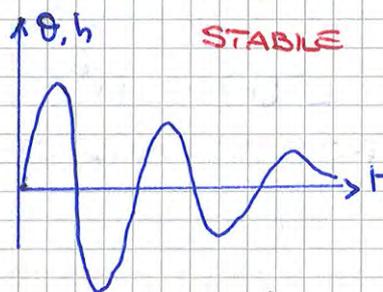
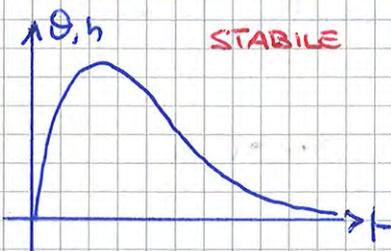
$$\dot{\theta}(\Delta t) = \ddot{\theta}(0) \Delta t$$

$$\dot{h}(\Delta t) = \ddot{h}(0) \Delta t$$

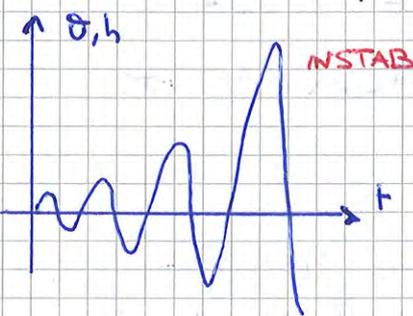
SCHEMA NUMERICO PENOSO

Si calcola step by step l'evoluzione delle grandezze nel tempo

RISPOSTE DIPENDONO DALLA VELOCITA' !



Plot delle risposte una volta FINITA LA RAFFICA



Stabilità → problemi di OSCILLAZIONE LIBERA

Il passaggio da STABILE A INSTABILE non è determinato dalla forma del disturbo (SUFFICIENTEMENTE RICCA IN FREQUENZE DA CONTENERE ANCHÉ QUELLE INSTABILI) MA DALLA VELOCITA' DI VOLO → definisce condizione di stabilità marginale

La w compare in 2 modi:

- NEI TERMINI DI NATURA MECCANICA come w
- " " " " AERODINAMICA come $\frac{w \ell}{v_0}$

Cerchiamo di vedere il problema in termini di **MECCANICA**, azzerando l'aerodinamica.

→ SI ASSEGNA UNA FORZANTE MECCANICA giusto per avere un 2° membro [vogliamo la risposta]

$$L(t) = \bar{L} e^{i\omega t} \quad \bar{M}_T(t) = \bar{M}_T e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} M\ell(\omega_h^2 - \omega^2) & S_\alpha \omega^2 \\ S_\alpha \ell \omega^2 & I_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}/\ell \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M}_T \end{Bmatrix}$$

Coefficienti REALI perché SONO IN FASE

$$\begin{Bmatrix} \bar{a}/\ell \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{aL}(\omega) & H_{hM}(\omega) \\ H_{\alpha L}(\omega) & H_{\alpha M}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M}_T \end{Bmatrix}$$

$$[A] \begin{Bmatrix} \bar{a}/\ell \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M}_T \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{a}/\ell \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M}_T \end{Bmatrix}$$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO MECCANICHE (AMMETTENZE MECCANICHE)

H_{hL} = dà la risposta in termini di ampiezza verticale e una forza imposta L unitoria

$$H_{hL}(\omega) = \frac{I_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2)}{D(\omega)}$$

$$H_{hM}(\omega) = - \frac{S_\alpha \omega^2}{D(\omega)}$$

$$H_{\alpha L}(\omega) = - \frac{S_\alpha \ell \omega^2}{D(\omega)}$$

$$H_{\alpha M}(\omega) = \frac{M\ell(\omega_h^2 - \omega^2)}{D(\omega)}$$

D = determinante matrice

$$D(\omega) = \ell \left[M I_\alpha (\omega_h^2 - \omega^2) / (\omega_\alpha^2 - \omega^2) - S_\alpha^2 \omega^4 \right]$$

Soluzione:

$$\begin{cases} \bar{a}/\ell = H_{aL} \cdot \bar{L} + H_{hM} \cdot \bar{M}_T \\ \bar{\theta} = H_{\alpha L} \cdot \bar{L} + H_{\alpha M} \cdot \bar{M}_T \end{cases}$$

OCCHIO! PERCHÉ C'È $D(\omega)$ A DENOMINATORE?
XX LA MATRICE DELLE H È LA MATRICE INVERSA DI QUELLA CHE C'È SOPRA !!!

TUTTO OK SE $D(\omega) \neq 0$!!!

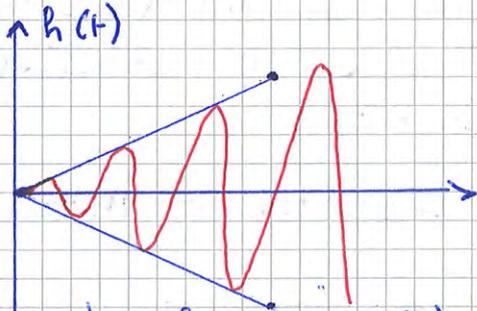
... e se diventa $D(\omega) = 0$?

$$(2M\bar{h}\omega_n \cdot f' - \bar{L}) \cos \omega_n t = 0$$

$$\rightarrow f'(t) = \frac{\bar{L}}{2M\omega_n \bar{h}}$$

⇒ LA RISPOSTA AD UNA FORZANTE ARMONICA CON FREQ. = A UNA DI QUELLE PROPRIE :

$$h(t) = \bar{h} f(t) \sin \omega_n t = \frac{L}{2M\omega_n} \cdot t \cdot \sin \omega_n t$$



QUESTA NON È INSTABILITÀ !!!!!!

È SOLO UNA RISPOSTA AD AMPIEZZA CRESCENTE!

La crescita lineare dell'ampiezza non è rappresentabile con e' esponenziale complesso.

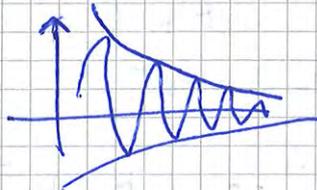
■ Se c'è smorzamento ⇒ COMPAIONO TERMINI CON $i\omega$

Risonanza: INERZIA ed ELASTICITÀ FORZANTE e SMORZAMENTO
⇒ sistema va in quadratura

Oscillazioni meccaniche → SEMPRE STABILI

- RISONANZA
- se smorzato e forzato a tutte le freq. ad ampiezza cost
- se smorzato e non forzato → ampiezza decresce

$$\bar{h} e^{-i(\omega_n + i\omega_i)t}$$



Adesso ritorniamo al caso aeroelastico.

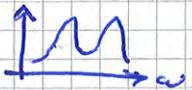
L'effetto smorzamento è dato dall'aerodinamica

• COALESCENZA AVVIENE PER V_{∞}^* PROSSIME A QUELLA PER CUI IL SISTEMA DIVENTA DINAMICAMENTE INSTABILE

AEROELASTICITÀ 1/12/2014

Sistema completo, non omogeneo

SOLUZIONE = INTEGRALE OMOGENEA ASSOCIATA
+
INTEGRALE PARTICOLARE sistema completo

Se io forzo un sistema le mie soluzioni sono:
risposta alla frequenza della forzante 
+
risposta alle frequenze proprie

In un sistema meccanico è sempre STABILE se è smorzato! Le oscillazioni libere, nelle realtà non smorzate non esistono!

Integrale particolare: ampiezza costante se non smorzato.

AEROELASTICITÀ = SONO CAZZI e ci si allontana dal sistema meccanico

→ coalescenza frequenze

LE OSCILLAZIONI AEROELASTICHE LIBERE POSSONO ESSERE AMPLIFICATE

→ INSTABILITÀ sta nella soluzione del sistema omogeneo.

STABILITÀ

$$D(\omega, \omega^*) \equiv D(\omega, V_{\infty}) = 0$$

FORZE AERODINAMICHE OMOGENEE

☐ $V_{\infty} = 0$ $\omega = \omega_{10}, \omega_{20}$

IL SISTEMA SI RIDUCE A QUELLO MECCANICO PURO, PULSAZIONI PROPRIE REALI.

☐ $V_{\infty} > 0$ → determinante e coeff. complessi

→ $V_F = 1,20 V_D$ minimo!
 Se no non ti certificano!!!

Bisogna volare ben al di sotto della V_F !

Come si misura il TASSO DI DECREMENTO dell'ampiezza di un'oscillazione?

$-m\ddot{z} - c\dot{z} - kz = 0$ OSCILLAZIONE LIBERA NON FORZATA

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione propria sistema non smorzato

$\omega_i = \frac{c}{2m}$

Cerchiamo soluzione del tipo $z(t) = \bar{z} e^{i\omega t}$

$\frac{m\omega^2 \bar{z}}{m} - \frac{ic\omega \bar{z}}{m} - \frac{k\bar{z}}{m} = 0$ EQUAZIONE SECOLARE
 → CI DÀ LE FREQUENZE

$\omega^2 - 2i\omega_i \omega - \omega_0^2 = 0$

$\omega_{1,2} = i\omega_i \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega_i^2}$ IPOTESI $\omega_i < \omega_0$

$\text{Im}(\omega_{1,2}) = \omega_i = \frac{c}{2m}$

DECREMENTO LOGARITMICO $\delta = \ln \frac{z(t)}{z(t+T)}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

(è positivo se il rapporto sale)

$\delta = \ln \frac{\bar{z} e^{i\omega t}}{\bar{z} e^{i\omega(t+T)}} = \ln \frac{e^{i\omega t} e^{-\omega_i t}}{e^{i\omega(t+T)} e^{-\omega_i(t+T)}}$

$\omega = \omega_r + i\omega_i$

$e^{i\omega_r t} = e^{i\omega_r(t+T)}$

LA PARTE ARMONICA RIMANE UGUALE DOPO UN PERIODO

$\omega_{reale} \Rightarrow$ OSCILLAZIONI ARMONICHE.

è facilissimo!

Se ho + frequenze proprie basta moltiplicare tutte per $(s+ig)$

AEROELASTICITÀ 2/12/2014

FLUTTER

MODELLO DI Pines (MODELLO SEMPLIFICATO)

$$L^e(t) = p_\infty^e l C_L \theta(t)$$

$$M^e(t) = -p_\infty^e l x_F C_L' \theta(t)$$

STIAMO RICICLANDO EQUAZIONI DELLO STAZIONARIO PER IL NON STAZIONARIO

Non mettiamo meno $-\frac{h'}{V_\infty} \times K$ se no non è + un modello semplice!

Non ci saranno grandezze complesse.

$$\bar{L}^e = p_\infty^e l C_L \bar{\theta}$$

$$\bar{M}^e = -p_\infty^e l x_F C_L' \bar{\theta}$$

$$H_{L\alpha} = p_\infty^e l C_L$$

$$H_{M\alpha} = -p_\infty^e l x_F C_L'$$

} funzioni di trasferimento aerodinamiche, sono solo $f(V_\infty)$

$$D(\omega, V_\infty) = [M e(\omega_n^2 - \omega^2) - H_{L\alpha}(V_\infty)] \cdot [I_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - H_{M\alpha}(V_\infty)] + [S_\alpha \omega^2 - H_{L\alpha}(V_\infty)] [S_\alpha l \omega^2 - H_{M\alpha}(V_\infty)] = 0$$

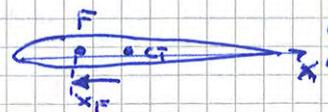
non c'è la dipendenza da h come abbiamo detto all'inizio

$$\mu = \frac{M}{m} ; \frac{\omega_n}{\omega_\alpha} ; \tau_\alpha = \frac{I_\alpha}{M e^2} ; x_\alpha = \frac{S_\alpha}{M e} ; \tilde{x}_F = \frac{x_F}{e}$$

} PARAMETRI ADIMENSIONALI

$$p_\infty^e \text{ rif } p_0^e = -\frac{K_\alpha}{l C_L x_F}$$

$$\tilde{x}_F < 0$$



Otteniamo un'equazione del tipo:

TORNIAKO SUL DISCORSO :

$$\Delta = a \left(\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} \right)^2 + b \left(\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} \right) + c = B^2 - 4AC > 0$$

che deve essere

dove

$$a = \left(1 - \frac{x_{\alpha}}{x_F} \right)^2 > 0$$

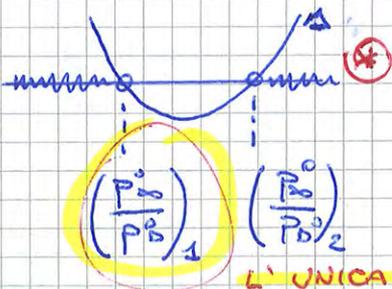
[VALORI REALI X RAPPRESENTARE LE PULSAZIONI DEI NOTI]

valori esterni *

DIRENDANO SOLO DALLA CARATTERISTICHE MECCANICHE E AERODIN.

$$b = -2 \left[\left(1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_a^2} \right) \left(1 - \frac{x_{\alpha}}{x_F} \right) - 2 \frac{\omega_h^2}{\omega_a^2} \left(1 - \frac{x_{\alpha}^2}{z_a^2} \right) \right]$$

$$c = \left(1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_a^2} \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{x_{\alpha}^2}{z_a^2} \right) \frac{\omega_h^2}{\omega_a^2} > 0$$



$$\left(\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} \right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'UNICA CHE CI INTERESSA !

SOLO

$$\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Soddisfa la condizione che $(\frac{\omega^2}{\omega_a^2})_{1,2}$ siano REALI e POSITIVE

LE DUE RADICI CHE SEGNO HANNO ?

- ENTRAMBI > 0 SE $a > 0$ e $c > 0$

se $B < 0$ cioè se $\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} < \frac{1 + \omega_h^2 / \omega_a^2}{1 - \frac{x_{\alpha}}{x_F}} \Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{\omega_a^2} \right) > 0$

$$\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} < \left(\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} \right)_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \left[\frac{P_{\infty}^0}{P_D^0} \right]$$

• A $V_{\infty} = 0$ il sistema converge sul sistema meccanico

• $V_{\infty} \uparrow$: variano a, b, c

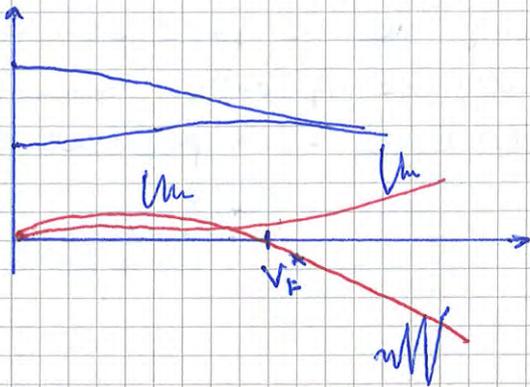
Per $P_{\infty}^0 = P_F^0 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^2 = -\frac{B}{2A}$

2 SOLUZIONI REALI e COINCIDENTI

Il modello di Pines ci dà la coalescenza delle frequenze proprie!

• $V_{\infty} > V_F$: $B^2 - 4AC < 0$

LE ω^2 DIVENTANO COMPLESSE CONIUGATE



NON È UN PROBLEMA DI
RISPOSTA MA DI
OSCILLAZIONI LIBERE!

Essendoci 2 modi (flessionale e torsionale)
se uno va in instabilità poiché hanno frequenze
una vicina all'altra è probabile che
per "risonanza" vada in instabilità pure l'altro
⇒ INSTABILITÀ GLOBALE

Riassumendo PINES:

$$\left(\frac{P_{FF}^0}{P_{DD}^0} \right) \begin{cases} < \text{Re} \\ > 0 \end{cases} \text{ se } \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & (1) \\ B < 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \frac{X_{\alpha}}{\bar{X}_F} \left[\frac{X_{\alpha}}{\bar{X}_F} - 1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_{\alpha}^2} \left(1 - \frac{X_{\alpha} \bar{X}_F}{z_{\alpha}^2} \right) \right] \geq 0$$

$$(2) \rightarrow 1 - \frac{X_{\alpha}}{\bar{X}_F} - \frac{\omega_h^2}{\omega_{\alpha}^2} \left(1 + \frac{X_{\alpha}}{\bar{X}_F} - 2 \frac{X_{\alpha}^2}{z_{\alpha}^2} \right) \geq 0$$

SE UNA DI QUESTE DUE NON È VERIFICATA
ALLORA NON C'È FLUTTER

$$\frac{\omega_h}{\omega_{\alpha}} \approx 0,8 \div 1 \quad \bar{X}_F \text{ sempre } < 0$$

z_{α}^2 momento d'inerzia
del profilo

LEGATE A DUE RIGIDENZE

NON PUOI GIOCARCI
TANTO!

COS'È CHE GIOCA UN RUOLO CHIAVE?

X_{α}

POSIZIONE BARICENTRO PROFILO

→ DEVE ESSERE PIÙ AVANTI POSSIBILE
ALL'ASSE ELASTICO

≡ AIUTA A ALLONTANARE IL FLUTTER

METODO U-g (Smilg - Wassermann)

Non si può estrarre w^* dall'equazione ma
 vuole o introdurre lo **SMORZAMENTO STRUTTURALE**.

Per ogni velocità cerco qual è lo smorz. strutt.
 CHE MANTIENE LE OSCILLAZIONI AD AMPIEZZA
 COSTANTE. (ampiezza costante = CONDIZ. LIMITE)

ALLA VELOCITÀ DI FLUTTER LE OSCILLAZIONI HANNO
 GIÀ DA SOLE AMPIEZZA COSTANTE \rightarrow **ci si sottra**
 SMORZAMENTO $g = 0 \Rightarrow$ **SI RICA VA LA VELOCITÀ**
DI FLUTTER.

$$\frac{w_h^2}{w_a^2} \Rightarrow \frac{w_h^2 (1+ig)}{w_a^2 (1+ig)}$$

$$\frac{w^2}{w_a^2} \rightarrow \frac{w^2}{w_a^2 (1+ig)}$$

quantità immaginarie a denominatore non ci piace

$$\rightarrow \lambda = \frac{w_a^2}{w^2} (1+ig)$$

$$w^* = \frac{w_e}{v_a}$$

$$C(w^*)\lambda^2 + B(w^*)\lambda + A(w^*) = 0$$

Si studia per ogni w^* nel range da 0 a 2

\rightarrow A, B, C e con Theodoresen & C calcolo



$$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$$

NON CONIUGATI (l'eq. non è a
 coeff. Reali)

$$\lambda = \frac{w_a^2}{w^2} (1+ig) = \underbrace{\frac{w_a^2}{w^2}}_{\text{Re}(\lambda)} + \underbrace{ig \frac{w_a^2}{w^2}}_{\text{Im}(\lambda)}$$

SOLUZIONI:

$$\left(\frac{w}{w_a}\right)_{1,2} = \frac{1}{\text{Re}(\lambda)_{1,2}}$$

$$g_{1,2} = \left(\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}\right)_{1,2}$$

$$V_{\infty 1,2} = \frac{(w/w_a)_{1,2}}{w^*}$$

RICAVATA USANDO $w_a^* = \frac{w_e v_a}{w^*} = \frac{w^*}{w/w_a}$

Per ogni w^* si
 tracciano le curve di
 flutter

METODO p-K (Hessig)

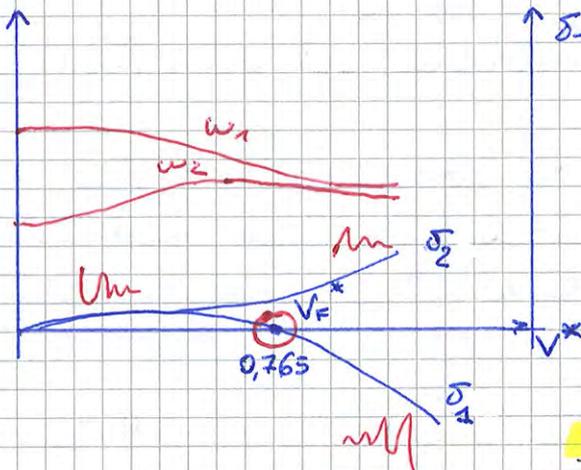
Si forza brutalmente l'equazione: non vuole le pulsazioni immaginarie... e allora ci dà solo la parte reale! [ripetendosi ai TERMINI AERODINAMICI]

IN: $w^* \rightarrow w_{1,2} = (w_r)_{1,2} + i(w_i)_{1,2}$

↓
RIFERISCO
A w_a e
TRACCIO CURVE

↓
DECREMENTO
LOGARITMICO

$$\delta_{1,2} = 2\pi \left(\frac{w_i}{w_r} \right)_{1,2}$$



PROCEDURA

1. ASSEGNI VALORI REALI A w^* PER RISOLVERE LA SOLITA BICADRATICA
2. SI OTTENGONO 4 RADICI COMPLESSE w/w_a
→ RADICI 1,2 A QUELLE CON $Re > 0$

3. DECREMENTO log → $\delta_{1,2} = 2\pi \frac{w_i/w_a}{|w_r/w_a|}$

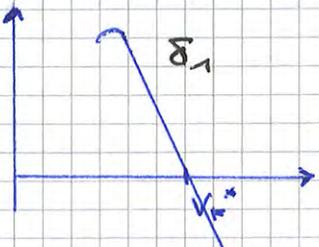
DOVE $\delta = 0 \Rightarrow$ INIZIA FLUTTER

Qual è il vantaggio di questo metodo?
Entrambi convergono al millesimo alla V_F .

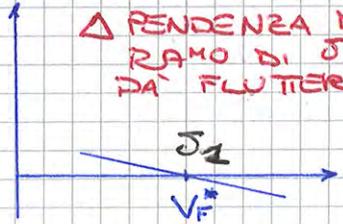
$k = \frac{w_l}{v_a^2}$ $p = i(w_i)$ { DA QUI IL NOME DATO DAGLI INGLESI

VANTAGGIO: DA' L'EVOLUZIONE DI UN UNICO SISTEMA CON LA VELOCITÀ !!! SISTEMA VERO!
sistema con smorzamento strutturale nullo

La soluzione è abbastanza giusta nell'intorno di V_F .



FLUTTER MALIGNO



FLUTTER BENIGNO

PER $V^* > V_F^*$
IL MODO TORSIONALE È AMPLIFICATO
⇒ **FLUTTER TORSIONALE**
... ma è sempre accoppiato!

OCCHIO CHE UN MINIMO INCREMENTO DI VELOCITÀ TI PORTA IN FLUTTER DI SCATTO.

AEROELASTICITÀ 15/12/2014

FILMATI DI FENOMENI AEROELASTICI



• Fl Hex Aliante SB9

PRIMO MODO FLUTTER



1 NODO

$f = 3 \text{ Hz}$ $V = 90 \text{ km/h}$

SECONDO MODO FLUTTER



2 NODI

$f = 5.8 \text{ Hz}$

↪ serve + energia

$V = 140 \text{ km/h}$

Innesco flutter: colpi secchi di dettone

$$\dot{q} = i\omega \bar{q} e^{i\omega t} = i\omega \bar{q} \cos(\omega t) + i\omega \bar{q} \cdot (i) \sin \omega t$$

$$\text{Re}(\dot{q}) = -\omega \bar{q} \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(Q) &= \text{Re}[(\bar{Q}_r + i\bar{Q}_i)(\cos \omega t + i \sin \omega t)] \\ &= \bar{Q}_r \cos \omega t - \bar{Q}_i \sin \omega t \end{aligned}$$

MEMO! $q = \bar{q} e^{i\omega t} = \bar{q} \cos(\omega t + \varphi) + i \bar{q} \sin(\omega t + \varphi)$

Lavoro del ciclo: > 0 IMMETTE ENERGIA
 < 0 ESTRAE ENERGIA

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\omega \bar{q} \int_0^{2\pi/\omega} (\bar{Q}_r \cos \omega t - \bar{Q}_i \sin \omega t) \sin \omega t dt = \\ &= -\bar{q} \int_0^{2\pi} (\bar{Q}_r \cos \omega t - \bar{Q}_i \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= -\bar{q} \bar{Q}_r \int_0^{2\pi} \cos \omega t \sin \omega t d(\omega t) + \bar{q} \bar{Q}_i \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) \end{aligned}$$

$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \omega t \sin \omega t d(\omega t)}_{\text{PRODOTTO DI FUNZ. PARI PER FUNZ. DISPARI DA' FUNZ. DISPARI}} = 0$
 $\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t)}_{\pi}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \pi \bar{q} \bar{Q}_i$
 COMPONENTE FORZA IN QUADRATURA COL MOTO

IL LAVORO DI UN CICLO HA LO STESSO SEGNO DELLA PARTE IMMAGINARIA DELLA FORZA AERODINAMICA

se $\bar{Q}_i > 0 \Rightarrow$ LAVORO + \Rightarrow energia $\bar{E}_k + \bar{E}_p \uparrow$

■ TRASLAZIONE



$$\bar{q} = \bar{h}$$

OSCILLAZIONI AMPLIFICATE

Cos'è che conta?

$$\text{Im}(\bar{L})$$

IMMAGINARIO DELLA PORTANZA COMPLESSA (Theodoresen)

$$\text{Im}(\bar{L}) = -4\omega M V_\infty \frac{\bar{h}}{e} \text{Re}[c(\omega^*)] < 0$$

funzione di Theodoresen SEMPRE > 0

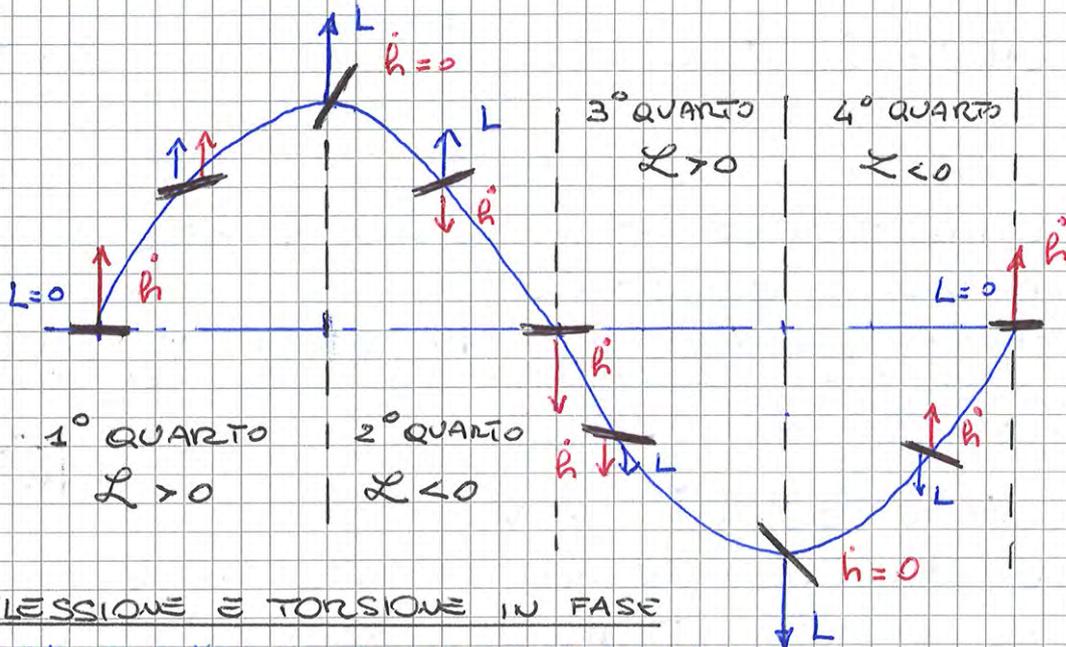
\Rightarrow Le oscillazioni traslatorie (flessionali pure) SONO SEMPRE SMORZATE poiché

$$\text{Im}(\bar{L}) < 0 \Rightarrow \bar{Q}_i < 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{ciclo}} < 0$$

APPROCCIO SEMPLIFICATO concorde con Pines

Immaginiamo di avere portanza quasi stazionaria

MOTO DEL PROFILO



FLESSIONE E TORSIONE IN FASE

↑ Lift deotta in base a incidenza

Modello approx: $L_{TOT} = 0$ se flessione e torsione in fase
 $L_{TOT} = 0$ NO OSCILLAZIONI AUTOECC

TORSIONE IN ANTICIPO DI 90°

TORSIONE \Leftrightarrow PORTANZA. se $\theta > 0 \rightarrow L > 0$, se $\theta < 0 \rightarrow L < 0$



$L > 0$ SEMPRE

POICHE' L e h sono sempre concordi!!!

$L_{TOT} > 0$ OSCILLAZIONI AMPLIFICATE \rightarrow FLUTTER FLESSO-TORSIONALE

TORSIONE IN RITARDO DI 90°

si ha L e h sempre discordi, $\rightarrow L < 0$

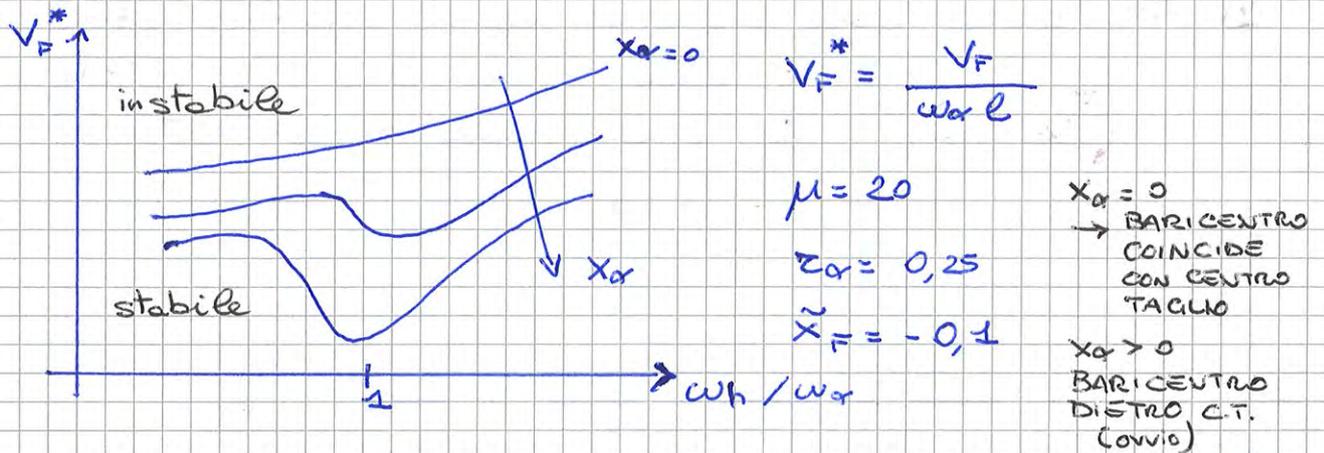
$L_{TOT} < 0$ OSCILLAZIONI POTENTEMENTE SMORZATE

FLUTTER \Leftrightarrow RAPPORTI DI FASE (SFASAMENTI)

evd

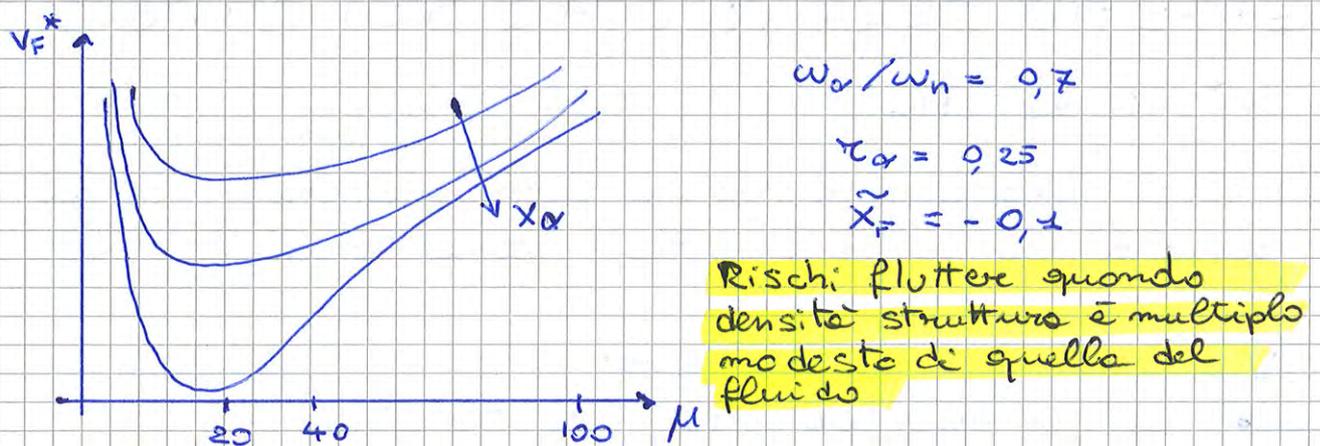
Parametri che influenzano il flutter

- MOMENTO STATICO
- PULSAZIONI INIZIALI PROPRIE disaccoppiate



Con lo spostarsi a valle del baricentro la velocità critica di Flutter scende!! \Rightarrow MALISSIMO!

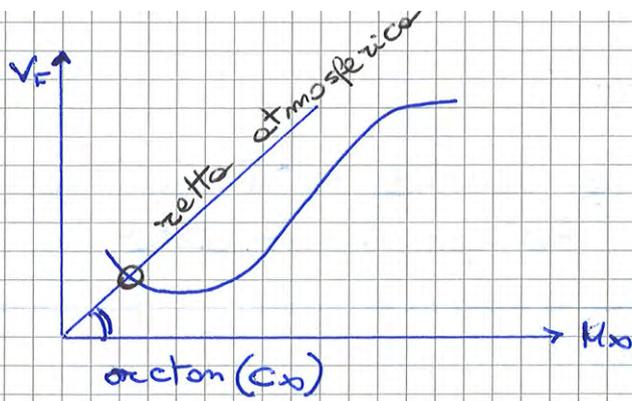
- METTERE IL PIÙ POSSIBILE DAVANTI IL BARICENTRO
- EVITARE LA VICINANZA DELLE FREQUENZE PROPRIE



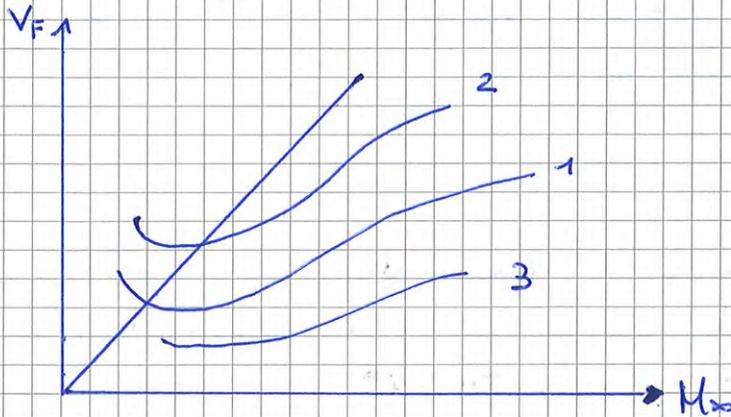
MOMENTO STATICO TROPPO POSITIVO (baricentro troppo a valle di asse elastico) PORTA DANNO.

- Un aereo normale sta per $\mu > 40$
- IDROELASTICITÀ: dov'è che si trovano oli in acqua ($\mu = 20$)?

→ ALISCAFO!

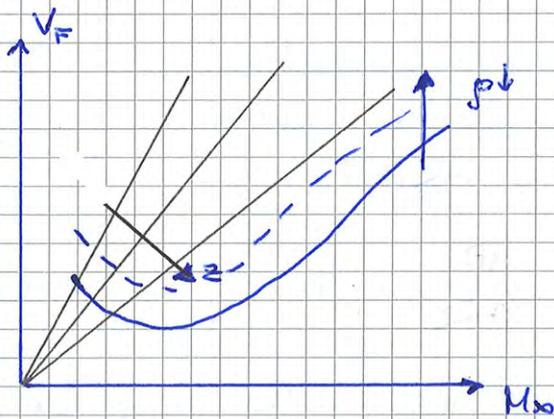


$$M_{\infty} = \frac{V_{\infty}}{c_0}$$



Casi 1, 2, 3:
potrebbero capitare
casi (ovviamente
ne esce una sola)

- CASO 3: per quella
quota ($c_D = \text{cost}$)
SI È FLUTTER-FREE



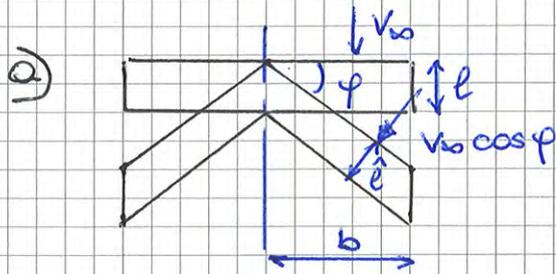
FLUTTER → dato da forze
aerodinamiche

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$$

$$z \uparrow \quad p \downarrow \Rightarrow V \uparrow$$

per dare stessa
forza

Come quota di calcolo va benissimo la
quota zero poiché lì si ha massima densità
e quindi si calcolerà la MINIMA VELOCITÀ
A CUI SI PUÒ AVERE FLUTTER.



$$AR = \frac{2b}{l}$$

$$\hat{AR} = \frac{2\hat{b}}{\hat{l}}$$

$$\hat{b} = \frac{b}{\cos \varphi}$$

$$\hat{l} = l \cos \varphi$$

Vediamole come 2 ali dritte ma una investita da $V_{\infty} \cos \varphi$

$$\hat{AR} = \frac{AR}{\cos^2 \varphi}$$

PROPRIETÀ ADIMENSIONALI SONO LE STESSA

→ possiamo applicare

$$\frac{V_{F1}}{V_{F2}} = \frac{AR_2}{AR_1}$$

$$\frac{V_F}{\hat{V}_F \cos \varphi} = \frac{\hat{AR}}{AR} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$\hat{V}_F = V_F \cos \varphi$$

A parità di AR

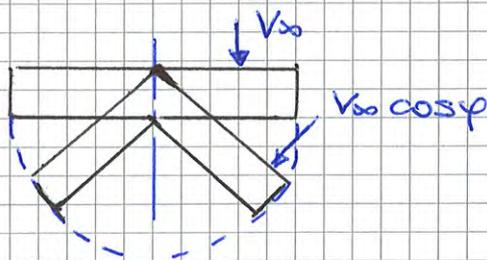
la freccia abbassa

$V_F \downarrow$

ps. Sperimentalmente

$$\hat{V}_F = V_F \sqrt{\cos \varphi}$$

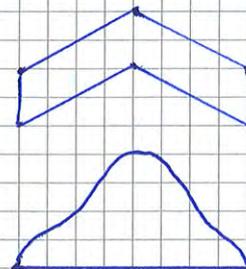
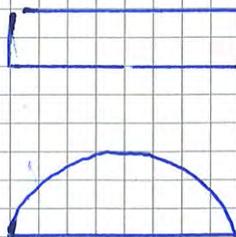
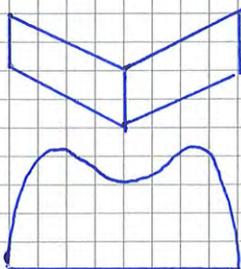
5) Ala a freccia variabile AR ↓



$$\hat{V}_F \cos \varphi = V_F$$

$$\hat{V}_F = \frac{V_F}{\cos \varphi}$$

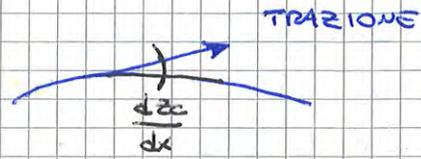
La freccia sul flutter non ha comunque un effetto potente come sulla divergenza



$$D \frac{\partial^2 z_c}{\partial x^2} = M_p(x, t)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\frac{dM_p}{dx} = T + N \frac{dz_c}{dx}$$



$$\frac{dT}{dx} = -\mu_s \dot{z}_c + \Delta p(x, t)$$

$\mu_s =$ MASSA STRUTTURA
X UNITÀ DI SUPERFICIE
[kg/m²]

Deriviamo la 1^a equazione:

$$D \frac{\partial^3 z_c}{\partial x^3} = T + N \frac{dz_c}{dx}$$

$$D \frac{\partial^4 z_c}{\partial x^4} = -\mu_s \ddot{z}_c + \Delta p(x, t) + N \frac{d^2 z_c}{dx^2}$$

EQUAZIONE
DI EQUILIBRIO
PIASTRA

Ci calcoliamo il Δp con la PISTON THEORY

$$\Delta p(x, t) = -\rho_0 c_0 w_c(x, t) = -\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial z_c}{\partial t} + V_0 \frac{\partial z_c}{\partial x} \right)$$

$$z_c(x, t) = \bar{z}_c(x) e^{i\omega t}, \quad \bar{z}_c = \text{ampiezza complessa}$$

$$D \frac{d^4 \bar{z}_c}{dx^4} - N \frac{d^2 \bar{z}_c}{dx^2} + \rho_0 c_0 V_0 \frac{d \bar{z}_c}{dx} - \mu_s \omega^2 \bar{z}_c + i \rho_0 c_0 \omega = 0$$

$$\omega = \omega_r + i \omega_i$$

POSSIAMO LAVORARE CON
PULSAZIONI COMPLESSE

VERA
FREQUENZA
DI OSCILLAZIONE

SMORZAMENTO / AMPLIFICAZIONE

$$\eta = \frac{x}{l}$$

$$\bar{z}_c = \frac{\bar{z}_c}{l}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{D}{\mu_s}}$$

PULSAZ. NAT.
1^o ARMONICA
DEL PANNELLO

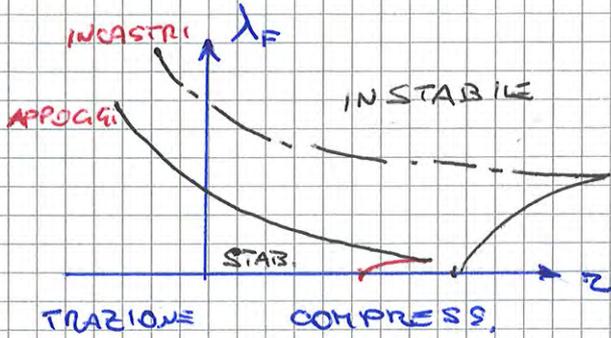
$$z = -\frac{Ne^2}{D} \quad \text{PRECOMPRESSIONE, quello che conta}$$

$$\bar{z}_c = -N^4$$

$$\lambda = \frac{\rho_0 c_0 V_0 l^3}{D} = \frac{z l^3}{\mu_s D} \rho_0^0$$

PARAMETRO
CHE CONTIENE
LA VELOCITA'
DI FLUTTER

COALESCENZA FREQUENZE È PERFETTA KK ABBIAMO
USATO LA PISTON THEORY (semplice)



Perché la linea non scende fino all'asse x?

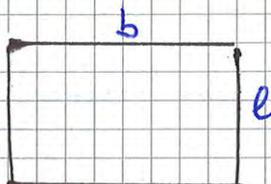
- A un certo punto c'è il limite di BUCKLING, il quale va a convergere sul limite di flutter.
- LO STATO DI PRECOMPRESSIONE NON CI PIACE!
Sarebbe meglio uno STATO DI TRAZIONE
AEREI COMMERCIALI → PRESSURIZZAZIONE!

↓
mette fusoliera
in pre-trazione

- IL RISCALDAMENTO non ci piace!!!
Pannello dilata → va in compressione!
contro il frame

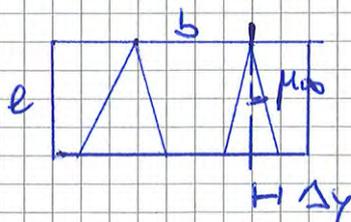
PANNELLO DI ALLUNGAMENTO FINITO

(E)

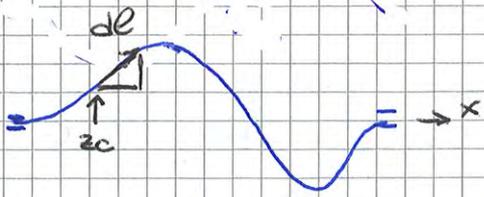


- 4 INCASTRATI ⇒ + RIGIDO
- ANALISI MODALE + COMPLESSA!
Servono 7 ÷ 8 armoniche

Posso usare ancora la PISTON THEORY?
Se il cono di Mach è stretto sì.



$$\Delta \gamma = e \tan \mu_0 \approx e \sin \mu_0 = \frac{e}{M_0}$$



$$\Delta e = \int_0^l \sqrt{dz_c^2 + dx^2} - l$$

$$= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2} dx - l$$

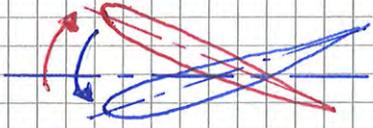
$$\Delta e = \int_0^l \left[\cancel{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2 \right] dx - \cancel{l} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2 dx$$

TAYLOR

$$N = ER \Delta e = \frac{1}{2} ER \int_0^l \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2 dx$$

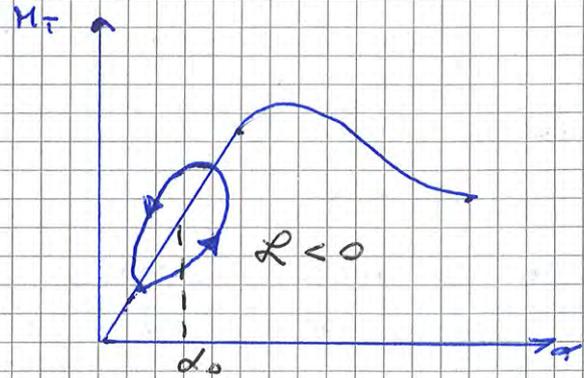
NON LINEARITÀ HARDENING

■ CICLO OSCILLATORIO PROFILO



FASE DI SALITA:
 $M_T < M_{T \text{ STAZ.}}$

FASE DI DISCESA
 $M_T > M_{T \text{ STAZ.}}$



- Ellisse di isteresi collocabile con le funzioni di trasferimento dell'aerodinamica instazionaria.

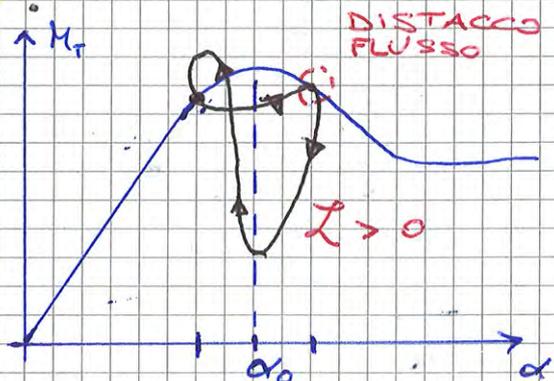
LAVORO:

$$L = \oint M_T d\alpha < 0$$

NON DA FLUTTER CLASSICO

Cosa succede se $\alpha_0 = \alpha_{ST}$?

Il momento compie un ciclo annodato

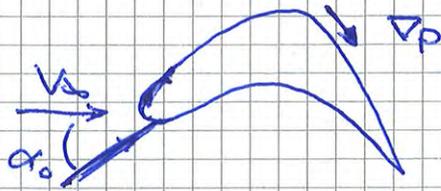


LAVORO COMPIUTO SULLA STRUTTURA:

$L > 0 \rightarrow$ AMPLIFICA OSCILLAZIONE

PUNTO DI DISTACCO:

- CORSA DI SALITA: FLUSSO SEPARA PER $\alpha_0 \uparrow$ rispetto allo stazionario
- CORSA DI DISCESA: FLUSSO riattacca per $\alpha_0 \downarrow$



Gradiente di pressione
inverso: pressione \uparrow
lungo la corda
 \rightarrow INSTABILIZZA STRATO
LIMITE!

MEMO: FATTORI CHE INFLUENZANO STRATO LIMITE

FATTORI CHE STABILIZZANO
STRATO LIMITE LAMINARE

- CORRENTE ACCELERATA
- PARETE RAFFREDDATA (GAS)
- ASPIRAZIONE

FATTORI CHE INSTABILIZZANO
S.L.L. MA FAVORISCONO SLT

- CORRENTE DECELERATA
- PARETE SCALDATA
- SOFFIATURA

→ si calcola uno St per il profilo ALARE

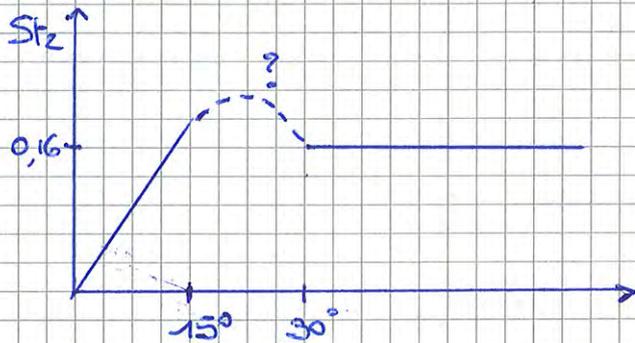
1) $\alpha < 15^\circ$ $St_1 = \frac{w l}{V_b} = 0,55$

Incidenza bassa: si prende la corda

2) $\alpha > 30^\circ$ $St_2 = \frac{w l \sin \alpha}{V_b} = 0,16$

Incidenza alta: è l'ingombro frontale che conta!

$St_2 = St_1 \sin \alpha$



IL BUFFETING SI INNESCA QUANDO LA PULSAZIONE DEI VORTICI

COINCIDE CON QUELLA PROPRIA DEI PIANI DI CODA

$$\rightarrow V_B = \begin{cases} \frac{w_T l}{0,55} \\ \frac{w_T l \sin \alpha}{0,16} \end{cases}$$

Questa w è quella attorno a cui si concentra la MASSIMA ENERGIA RILASCIATA DAI VORTICI DELL'ALA.

⚠ Questa w deve essere LONTANA dalle pulsazioni proprie dei piani di coda!!!

COME RISOLVERE ?

1) IRRIGIDIRE PIANI DI CODA: $w_{proprie} \uparrow$

2) EVITARE CHE PIANI DI CODA FINISCANO IN SCIA DELL'ALA → coda a T
(pfff... finisce lo stesso in scia come MD-80)

3) FAR SI CHE ALA RILASCI UNA SCIA MENO VORTICOSA

- ESTREMITÀ: non influisce così tanto sui piani di coda

• INCASTRO ALA-FUSOLIERA!

Buffeting transonico = oscillazione avanti e indietro dell'onda d'urto!

OSCILLAZIONE ONDA D'URTO

OSCILLAZIONE DI ΔC_p

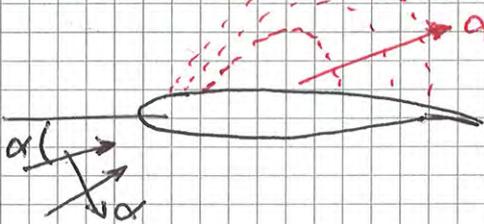
\downarrow
L
 \downarrow
M_T



Questo è un problema di STABILITÀ

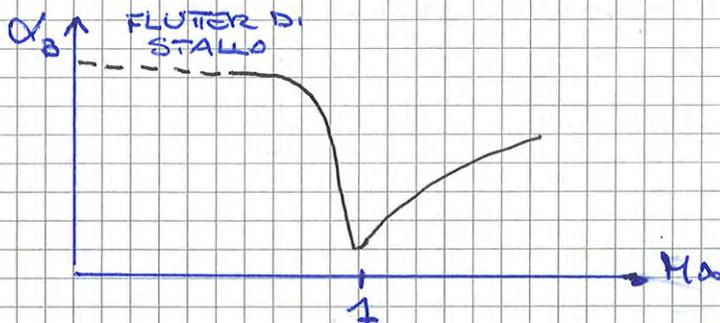
- NON LINEARITÀ AERODINAMICA e FORZE, non della struttura!

Il buffeting transonico è un flutter transonico a un solo g.d.e. (torsionale):



- se $\alpha \uparrow$ bolle supersuoniche si ingrandiscono
- URTO PIÙ FORTE
- VARIAZIONI di L... + forti

Per ogni velocità si trova l'incidenza α a cui si manifesta il buffeting (MISURE STAZIONARIE IN GALLERIA DEL VENTO)



Per $Ma \ll 1$ non c'è l'onda d'urto ma per $\alpha \uparrow$ c'è il flutter di stallo!

Confine incerto tra le 2 cose in basso subsonico

TIPO A: l'oscillazione dell'onda d'urto rimane sempre sull'ala.
 $M = 0,75 \div 0,9$
 INIZIO: Alettone verso basso, profilo + inarcato, flusso accelera bolle + grande.



Alettone verso alto, flusso decelera, bolle + piccola, urto torna avanti.

OSCILLAZIONE URTO \rightarrow CAMBIA CAMPO A VALLE \rightarrow CAMBIA M_R !
 ΔM_R è in controfase con $\beta(f)$ \rightarrow SI STORCIA!

CONTROFASE = STABILIZZAZIONE

All'aumentare di w dell'oscillazione possono nascere componenti IMMAGINARIE di ΔM_R ! \Rightarrow QUADRATURA con $\beta(f)$

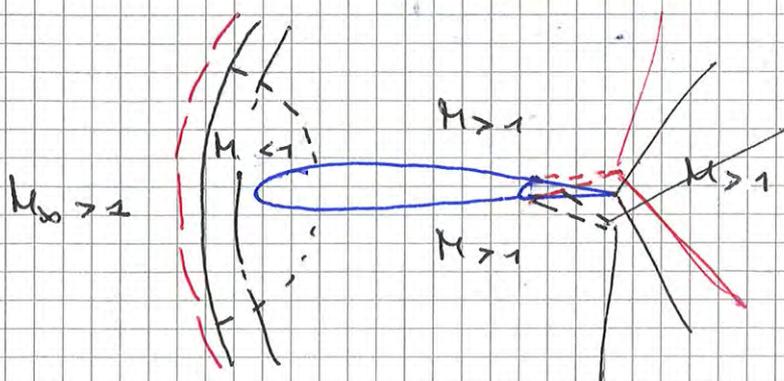
\downarrow
 AMPLIFICA O MANTIENE

Oscillazione di tipo armonico fino a 10° di ampiezza!!!! 

TIPO B: avviene per $M_\infty \rightarrow$ bolle + grande
 $M = 0,9 \div 1,0$ \rightarrow quando l'alettone si muove l'onda d'urto FINISCE SULL'ALETTONE!!!

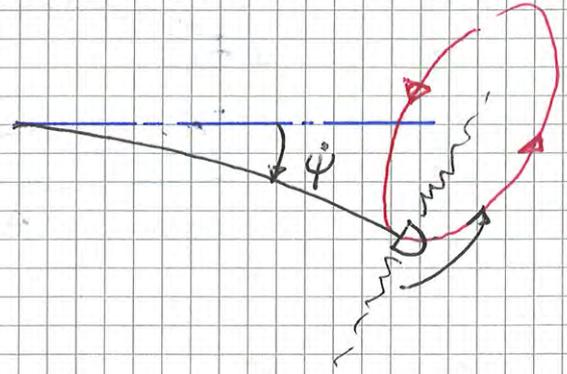
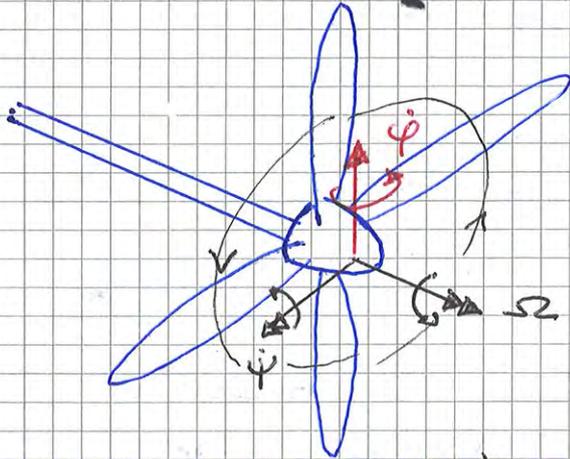
Oscillazione STOCASTICA: 
 L'alettone oscilla da panico

TIPO C: avviene per $M_\infty > 1$ ma è comunque transonico



- ROUNDED LEADING EDGE
- BOW SHOCK
- Se alettone oscilla \rightarrow TUTTO PULSA!

ALBERO ACCETTANTE LUNGO
→ FLESSIONE



Conservazione momento angolare [PURA MECCANICA]

→ MOMENTO GIROSCOPICO

DELL'ELICA

⇒ ELICA DESCRIVE UN'ELLISSE NEL PIANO

MOTO DI WHIRL

→ RETROGRADO: verso percorrenza DISCORDE DA Ω
→ PROGRESSIVO: CONCORDE CON Ω

... e nel vuoto questo è un moto stabile

In aria: FORZE AERODINAMICHE

SMORZANTI

AMPLIFICANTI



... e avere un'elica pesante in moto di whirl ti scotafascia l'aereo!!!

Whirl-flutter nasce quando si aggiunge V_0 al moto dell'elica

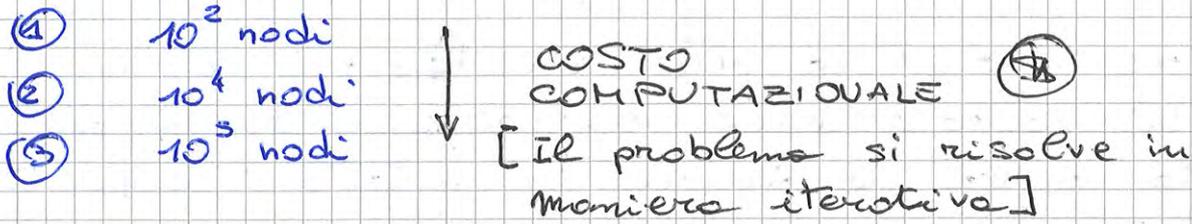
MOTO DI WHIRL → PERIODICHE VARIAZIONI DI INCIDENZA DELLE PALE → FORZE AERODINAMICHE INSTABILI

Interviene la solita V_F :

- $V_0 < V_F$: FORZE AERODINAMICHE SMORZANO E L'ELLISSE DIVENTA UNA SPIRALE CHE SI CHIUDE SU SE STESSA
- $V_0 > V_F$: AMPLIFICANTI

WHIRL RETROGRADO se la frequenza dell'oscillazione è bassa. WHIRL PROGRESSIVO se è alta.

Crescendo l'accuratezza cresce anche la dimensione del sistema da risolvere!



Vediamo ora in aerelasticità:

$$\{F\} = \{F_M\} + \{F_a\}$$

MECCANICHE
→ PESI
→ CARICHI CONCENTRATI

AERODINAMICHE

↓
ⓧ
COME SCHEMATIZZARLE

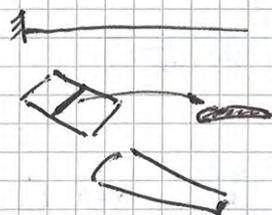
→ DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE SULLA SUPERFICIE



Il modello migliore per vedere le distribuzioni di pressione è il 3D! Devo vedere il profilo!

... anche in aerodinamica però ci sono dei modelli:

- SEGMENTO PORTANTE ①
- LAMINA PIANA ②
- Modello 3D ③



I modelli 1 e 2 come fanno a tenere in conto della deformazione del profilo?



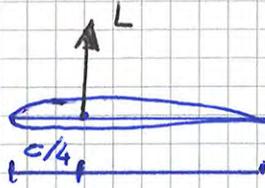
NASTRAN → MODELLO ②

VORTEX LATTICE
DOUBLET LATTICE

metodo dei pannelli

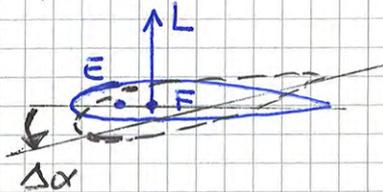
Noi useremo modello ① per la parte strutturale e il ② per la parte aerodinamica,

⊕ ALA DRITTA



il profilo da che parte ruoterà?
DIPENDE DA DOVE È L'ASSE ELASTICO!

● Asse elastico ANTERIORE al fuoco



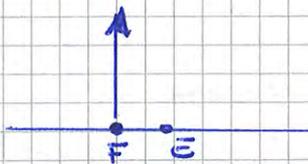
$\Delta\alpha < 0$

[ACCOPPIAMENTO AERODINAMICO]

STABILE dal punto di vista aeroelastico

$\Delta\alpha_a$ = dipende da posizione relativa di E e F!

● Asse elastico POSTERIORE al fuoco



$\Delta\alpha > 0 \rightarrow L \uparrow \rightarrow \alpha \uparrow$

DIVERGENZA!!!

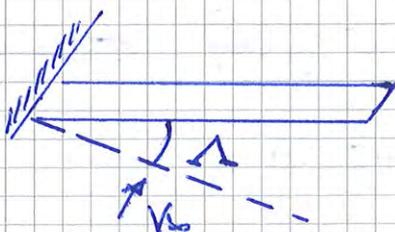
Portanza fa aumentare l'incidenza, che fa di nuovo aumentare la portanza ecc!

NON È UN PROBLEMA COSÌ GRANDE MA
BISOGNA FARE UN'ALA PIÙ RIGIDA !!!

ALA INSTABILE dal punto di vista aeroelastico...
... però è la condizione TIPICA!

L'asse elastico non lo puoi mettere dove vuoi!

■ ALA A FRECCIA



[ACCOPPIAMENTO GEOMETRICO]

Lift ci dà una flessione accoppiata a una torsione

$\rightarrow \Delta\alpha_g \neq 0$

In dinamica si introduce anche \rightarrow distribuzione mosse, accoppiamenti d'inerzia... $\rightarrow \Delta \alpha_i$

PROBLEMA AEROELASTICO FEM DINAMICO

$$[K]\{q\} + [D]\{\dot{q}\} + [M]\{\ddot{q}\} = \{F(t)\}$$

RIGIDEZZA SMORZAM. INERZIA

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

Problema di risposta: nota la forzante si calcola la $\{q\}$ della struttura

◆ VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE

$$\{F(t)\} = 0$$

$$[K]\{q\} + [D]\{\dot{q}\} + [M]\{\ddot{q}\} = \{0\}$$

$$[D] = a[K] + b[M]$$

è molto difficile determinare lo smorzamento di una struttura

\rightarrow sperimentalmente si dà $[D]$ come combiaz. di rigidzze e inerzie.

Deformandosi l'la cambiano le frequenze di vibrazione

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t}$$

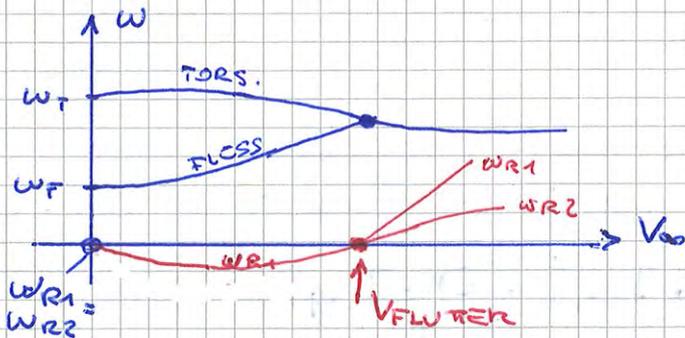
Si calcolano tante frequenze quante sono i gdl del sistema.

$$\omega_i \quad \text{con } i = 1, \dots, N \text{ DOF}$$

◆ VIBRAZIONI NON SMORZATE

$$[D] = 0$$

$$[K]\{q\} + [M]\{\ddot{q}\} = \{0\}$$



• $V_0 = 0$: frequenza flessionale $\omega_F \approx 1 \text{ Hz}$ } FREQ. PROPRIE
 " torsionale

• $V_0 \uparrow$: SI ATTIVANO LE MATRICI AERODINAMICHE

• $[D] = 0$

• $V_0 \uparrow$: si attiva lo smorzamento ω_{R1}, ω_{R2}

Quando l'equilibrio diventa instabile?

QUANDO LO SMORZAMENTO DIVENTA ZERO!

→ VELOCITÀ DI FLUTTER

→ Instabilità quando le freq. flessionale e torsionale tendono a mescolarsi ed è PERICOLOSO!

⚠ Se non ci fosse il mescolamento ci sarebbe comunque l'instabilità data dal cambio di segno dello smorzamento. DI FATTO AVVENGONO ALLA STESSA VELOCITÀ

Quale ole si piace di + ?



Quella con le frequenze flessionali e torsionali + lontane !!

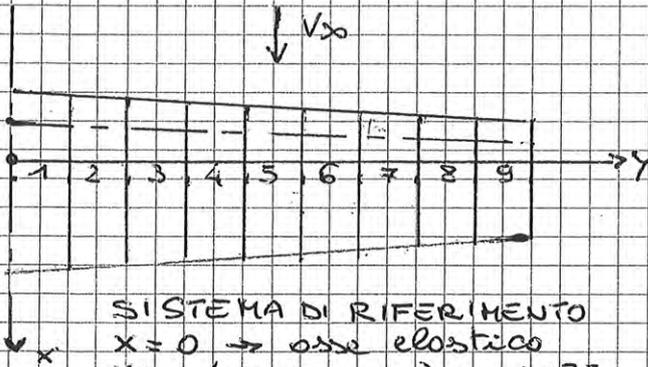
$$\frac{\omega_F - \omega_T}{\omega_F}$$

è importante

Prove di flutter → PROVE IN VOLO e si misurano le frequenze

ESERCIZIO 2.1

CALCOLO DELLA VELOCITÀ DI DIVERGENZA DI UN'ALA CON IL METODO DELLA SEZIONE RAPPRESENTATIVA



SISTEMA DI RIFERIMENTO
 $x=0 \rightarrow$ asse elastico
 $\frac{x_F}{l} = -(\beta \cdot 0,385 - 0,25) = -0,135$

- ASSE FOCALE: $\frac{x_F}{l} = 0,25$
- ASSE ELASTICO: $\frac{x_{el}}{l} = 0,385$
- $C_L = 5,1 \text{ rad}^{-1} = \text{cost}$
- $l_7 = 1,462 \text{ m}$
- $l_8 = 1,34 \text{ m}$
- SEZIONE RAPPRESENTATIVA POSTA AL $70 \div 80\%$ D
 \rightarrow sez. n° 8

MATRICE DEI COEFFICIENTI DI INFLUENZA DI DEFORMABILITÀ A TORSIONE

$c^{00} \times 10^5 \text{ [rad/Nm]} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.254190	0.254190	0.254190	0.254190	0.254190	0.254190	0.254190	0.254190	0.254190
2	0.254190	0.586236	0.586236	0.586236	0.586236	0.586236	0.586236	0.586236	0.586236
3	0.254190	0.586236	0.944982	0.944982	0.944982	0.944982	0.944982	0.944982	0.944982
4	0.254190	0.586236	0.944982	0.179514	0.179514	0.179514	0.179514	0.179514	0.179514
5	0.254190	0.586236	0.944982	0.179514	0.309083	0.309083	0.309083	0.309083	0.309083
6	0.254190	0.586236	0.944982	0.179514	0.309083	0.474310	0.474310	0.474310	0.474310
7	0.254190	0.586236	0.944982	0.179514	0.309083	0.474310	0.630466	0.630466	0.630466
8	0.254190	0.586236	0.944982	0.179514	0.309083	0.474310	0.630466	0.893863	0.893863
9	0.254190	0.586236	0.944982	0.179514	0.309083	0.474310	0.630466	0.893863	0.125349

Metodo della sezione rappresentativa (anni '30):
 si calcola V_0 per una sezione e lo si ritiene valido per l'ala intera

$$p_0^0 = - \frac{K_\alpha}{l x_F C_L}$$

$K_\alpha =$ RIGIDEZZA TORSIONALE

Le sezioni adiacenti conferiscono rigidità torsionale alla sezione studiata

$c^{00}(i, j)$: angolo di torsione prodotto in i da una coppia unitaria applicata in j

$K^{00}(i, j)$: coppia applicata in i che dà angolo di torsione unitario in j .

$$K^{00}(i, j) = \frac{1}{c^{00}(i, j)}$$

ESERCIZIO 2.2

CALCOLO DELLA VELOCITÀ DI DIVERGENZA DELLA STESSA ALA CON METODO DI COLLOCAZIONE DIRETTA SU 3 SEZIONI

Equazione integrale equilibrio aerostatico

$$\theta(y) + p_{\infty} \int_0^b c^{oo}(y, \eta) x_F(\eta) p^e(\eta) d\eta = 0$$

COLLOCAZIONE DIRETTA

$$p^e = O_A(\theta) \rightarrow \theta = O_A^{-1}(p^e)$$

BISOGNA FARE UN'INVERSIONE NUMERICA DELL'OPERATORE AERODINAMICO

STRIP THEORY: $p^e = l C_L^e$

Matrice aerodinamica $[A] = \frac{1}{c_l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\{\theta\} = [A] \{p^e\}$$

L'equazione integrale viene discretizzata:

$$[A] \{p^e\} + p_{\infty} [c^{oo}] [x_F] \{p^e\} = 0$$

$$([A] + p_{\infty} [c^{oo}] [x_F]) \{p^e\} = 0$$

$$([c^{oo}] [x_F])^{-1} ([A] + p_{\infty} [I]) \{p^e\} = 0$$

$$([D] + p_{\infty} [I]) \{p^e\} = 0$$

Calcolare le V_D delle sezioni = calcolare gli autovalori di $[D]$

$$\{l\} = \begin{Bmatrix} 2,100 \\ 1,936 \\ 1,886 \\ 1,728 \\ 1,670 \\ 1,562 \\ 1,452 \\ 1,340 \\ 1,256 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n^{\circ} 2 \\ \\ \\ \leftarrow n^{\circ} 5 \\ \\ \\ \leftarrow n^{\circ} 8 \end{matrix}$$

$$[c^{oo}] = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0,586236 & & \\ & 0,309083 & \\ & & 0,8938 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \{l\} = \{1,936 \quad 1,670 \quad 1,340\}^T$$

$$[x_F] = 1 - 0,135 \cdot \text{diag}(l)$$

Gli autovalori di $[D]$ danno $p_{\infty}^D \rightarrow V_D = \sqrt{\frac{2 p_{\infty}^D}{\rho}}$

VEDI SCRIPT + RISULTATI MATLAB

ES.2.2 RESULTS

%ESERCITAZIONE AEROELASTICITA' 28/10/2014
 %Esercizio con collocazione diretta

```
ro = 1.226;
CL_alfa = 5.1;
l = [1.996 1.670 1.340];
x_T_perc = 0.385;
x_F_perc = 0.25;

A = diag((1/CL_alfa)*(1./l))
x_F = -(x_T_perc - x_F_perc)*diag(l)
```

```
c_tt = 10^-5*0.5862*ones(3,3);
c_tt(2,2) = 10^-5*0.3091;
c_tt(2,3) = c_tt(2,2);
c_tt(3,2) = c_tt(2,3);
c_tt(3,3) = 10^-5*0.8939;
c_tt
```

```
D = (inv(c_tt*x_F))*A
```

```
lambd = eig(D)
```

```
v_D = ((2/ro)*lambd).^0.5
*****
```

```
A =
    0.0982    0    0
         0    0.1174    0
         0    0    0.1463
```

```
x_F =
   -0.2695    0    0
         0   -0.2255    0
         0    0   -0.1809
```

```
c_tt =
  1.0e-05 *
    0.5862    0.5862    0.5862
    0.5862    0.3091    0.3091
    0.5862    0.3091    0.8939
```

```
D =
  1.0e+05 *
    0.6937   -1.5725    0.0000
   -1.5725    0.9889    1.1099
         0    1.1099   -1.3832
```

```
lambd =
  1.0e+05 *
    2.5973
   -0.3137
   -1.9841
```

```
v_D =
  1.0e+02 *
    6.5093
    0.0000 + 2.2622i
    0.0000 + 5.6893i
```

} qui qualcosa non quadra! ☺

PRESSIONI DINAMICHE DI DIVERGENZA
 NEGATIVE => VELOCITÀ NON REALI

⇒ NON CI SARÀ MAI DIVERGENZA
 IN QUELLE DUE SEZIONI!

$$V_0 = \frac{\pi}{2b} \sqrt{-\frac{2 GJ_T}{E x_F C_l' P_{00}}} = \underline{\underline{368,50 \text{ m/s}}}$$

NOTA: $\frac{\pi}{2b} = \lambda_1$, cioè il parametro che dà esattamente la minima pressione di divergenza (minimo autovalore) e porta una deformata $\theta = \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$

Per confrontare il risultato usiamo il METODO DI RAYLEIGH-RITZ [RAGIONA SU ALA COMPLETA]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b GJ_T \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 dy$$

ENERGIA POTENZIALE DI DEF. ELASTICA

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} P_{00} \int_0^b P^e(y) x_F(y) \theta(y) dy$$

LAVORO DELLA PORTANZA DATA DA DEF. ELASTICA

In condizioni di divergenza:

$$P_D^0 = \frac{U}{\mathcal{L}^*} \quad \text{con} \quad \mathcal{L}^* = -\frac{1}{2} \int_0^b P^e x_F \theta dy$$

• TEORIA AERODINAMICA DI STRISCIA

$$P^e(y) = \ell(y) C_l'(y) \cdot \theta(y)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^* = -\frac{1}{2} \int_0^b \ell(y) C_l' \theta^2(y) x_F(y) dy$$

INTEGRALI \rightarrow METODO DEI TRAPEZI

$$S = \int_a^b f(y) \cdot g(y) dy = \{g\}^T [W] \{f\}$$

$1 \times n \quad n \times p \quad p \times 1 = 1 \times 1$

perciò

$$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{2} C_l' \{e\}^T [W] \{\theta \cdot x_F\}$$

con $\theta = \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$, deformazione esatta

$$[W] = \frac{b-a}{\sum w_i} \begin{bmatrix} 1/2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{\pi}{2b} \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$$

```

%ESERCITAZIONE AEROELASTICITA' 28/10/2014
%Calcolo della velocità di divergenza di un'ala con Rayleigh - Ritz
ro = 1.225;
cr = 5.70;
ct = 2.55;
b = 12.70;
CL_alfa = 4.15;
y = [0 2.54 5.08 7.62 10.16 12.70];
GJt = 10^7*[7.601 7.634 7.601 5.740 2.296 1.148];
l = cr-((cr-ct)/b)*y

Wm = diag(ones(length(l),1));
Wm(1,1) = 0.5;
Wm(length(l),length(l)) = Wm(1,1);
W = ((b-0)/sum(sum(Wm)))*Wm

teta_1 = sin(pi*y/(2*b));
teta_2 = (y/b);
teta_3 = (y/b).^2;
dteta_dy_1 = (pi/(2*b))*cos(pi*y/(2*b));
dteta_dy_2 = (1/b)*ones(1,length(y));
dteta_dy_3 = (2*y/b^2);

T = [teta_1;teta_2;teta_3]
DT = [dteta_dy_1;dteta_dy_2;dteta_dy_3]

for i = 1:3
    L_star(i) = -0.5*CL_alfa*l*W*((T(i,:).^2).*(-0.1*1))';
    U(i) = 0.5*GJt*W*(DT(i,:).^2)';
    pD(i) = U(i)/L_star(i);
    VD(i) = (2*pD(i)/ro)^0.5;
    eval(['VD_' num2str(i) '=VD(i)'])
end
*****
l =
    5.7000    5.0700    4.4400    3.8100    3.1800    2.5500
W =
    1.2700         0         0         0         0         0
         0    2.5400         0         0         0         0
         0         0    2.5400         0         0         0
         0         0         0    2.5400         0         0
         0         0         0         0    2.5400         0
         0         0         0         0         0    1.2700
T =
         0    0.3090    0.5878    0.8090    0.9511    1.0000
         0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000
         0    0.0400    0.1600    0.3600    0.6400    1.0000
VD_1 = 587.6619
VD_2 = 593.6884
VD_3 = 747.9832

```

ESERCIZIO 5

CALCOLARE LA LUNGHEZZA DI UN TUBO PER CORSO DA ACQUA PER CUI QUESTO VA IN DIVERGENZA FLESSIONALE

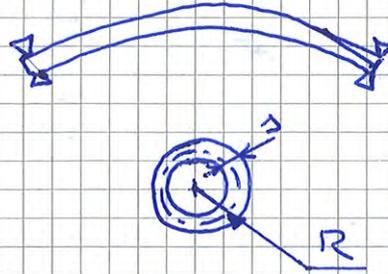
• ESTREMI APPOCCIATI

$$R = 5 \text{ cm}$$

$$\delta = 0,5 \text{ mm}$$

$$U = 2 \text{ m/s}$$

$$E = 600 \text{ MPa [POLIETILENE]}$$



$$P_D^0 = \frac{\pi^2 E J}{2 A l^2}$$

[MEMO: IL CARICO CHE PORTA A DIVERGENZA FLESSIONALE È 1/2 CARICO CRITICO EULERIANO (È un caso)]

$$J_p = 2\pi R \cdot \delta \cdot R^2$$

$$J_x = \pi R^3 \delta = 1,96 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^4$$

$$A = \pi R^2$$

$$\frac{1}{2} \rho_{H_2O} U^2 = \frac{\pi^2 E J}{2 A l^2} \rightarrow l = \sqrt{\frac{\pi^2 E J}{2 A \rho_{H_2O} U^2}}$$

$$\rightarrow l = \sqrt{\frac{\pi^2 E \pi R^3 \delta}{\pi R^2 2 \rho U^2}} = \underline{\underline{6,08 \text{ m}}}$$

1 Esercizio 1: Analisi statiche con “Refined Beam Models”

Per le analisi statiche effettuate è stata utilizzata una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro, con una lunghezza $L = 10$ [m] e una sezione rettangolare con dimensioni di base $b = 0.25$ [m] e altezza $h = 0.1$ [m].

Questa trave è sollecitata da un carico concentrato $F_z = -20$ [N] posto nel punto con coordinate $x = b$, $y = L$, $z = h/2$.

Il materiale è supposto isotropo con un modulo di Young $E = 73$ [GPa] e un coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$.

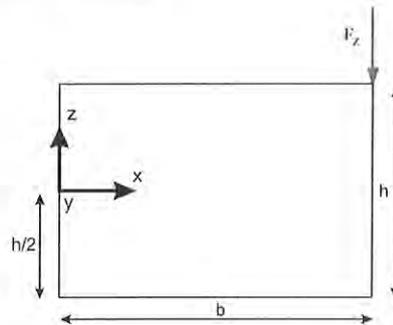


Figura 1: Sezione libera della trave con sistema di riferimento, dimensioni e carico

1.1 Validazione del modello agli elementi finiti

La validazione del modello agli elementi finiti è stata effettuata confrontando lo spostamento u_z (dovuto alla flessione dell'ala all'estremità libera causato dalla forza applicata), calcolato con il codice MUL2_1D e modello EULE (Eulero-Bernoulli) e con la relazione analitica $u_z = \frac{FL^3}{3EI}$ dove $I = \frac{1}{12}h^3b$ è il momento d'inerzia della sezione.

In particolare sono stati usati 10 elementi finiti B4 come mesh strutturale della trave.

I risultati ottenuti sono mostrati nella tabella seguente tabella, è mostrano una perfetta corrispondenza, fino all'ottava cifra decimale, dei due differenti modelli.

MUL2_1D EULE	$\frac{FL^3}{3EI}$
$u_z = -0.00438356$ [m]	$u_z = -0.00438356$ [m]

Tabella 1: Confronto tra i due spostamenti trasversali u_z

nel successivo raddoppio da 10 a 20 si ottiene una riduzione solamente del 20% della differenza relativa. Va quindi stabilito fino a che punto sia conveniente infittire la mesh. In questo particolare caso, visti i ridotti tempi di calcolo per l'esecuzione del codice si è optato per utilizzare mesh con 50 elementi per la prossima parte dell'esercizio.

1.3 Studio degli effetti delle teorie di diversi ordini

Lo studio degli effetti delle varie teorie sugli spostamenti e le rotazioni della sezione all'estremità libera della trave è stata effettuata con la mesh strutturale composta da 50 elementi B4. Tale configurazione è stata preferita rispetto a quella con 20 elementi B4 poichè, anche considerando i ridotti miglioramenti di precisione della soluzione, i tempi di esecuzione del codice sui calcolatori utilizzati sono rimasti comunque più che accettabile. Si è quindi preferito, a quasi parità di tempo impiegato, mantenere una accuratezza maggiore.

La nuova configurazione dei carichi ne prevede 2 concentrati $F_z^1 = -1000 [N]$ posto nel punto con coordinate $x = b$, $y = L$, $z = h/2$ ed $F_z^2 = 980 [N]$ posto nel punto con coordinate $x = 0$, $y = L$, $z = -h/2$.

I punti in cui sono stati valutati gli spostamenti u_z e l conseguenti rotazioni della sezione sono $P1$ e $P2$ rispettivamente con coordinate $x = 0$, $y = L$, $z = -h/2$ e $x = b$, $y = L$, $z = -h/2$.

La seguente figura rappresenta la sezione libera e la posizione dei carichi concentrati.

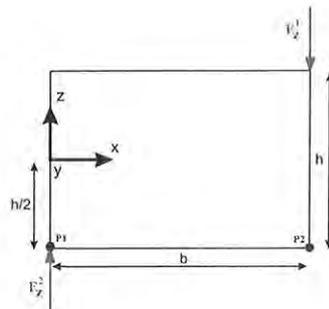


Figura 3: Sezione con carichi e punti utilizzati per gli spostamenti

Le differenti teorie utilizzate sono:

- Eulero-Bernoulli (EULE);
- Timoshenko (FSDT);
- EDTN 1;
- EDTN 2;

2 Analisi statica e aeroelastica di un profilo alare

Si consideri una semiala modellata come una trave incastrata avente come sezione il profilo alare mostrato in figura e le seguenti caratteristiche: $L = 6$ [m], $b = 1$ [m], $h = 0.15$ [m].

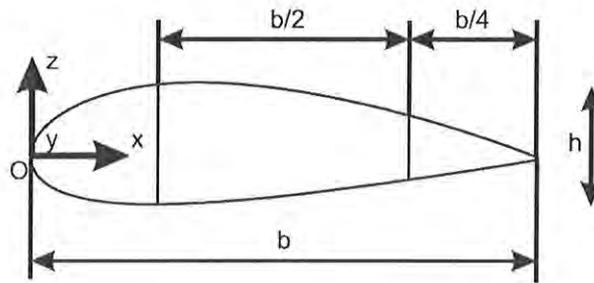


Figura 1: Sezione alare

Sono introdotti due materiali.

Materiale 1 (isotropo): $E = 75$ GPa, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700$ Kg/m³.

Materiale 2 (ortotropo): $E_{33} = 20.5$ GPa, $E_{22} = E_{11} = 10$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5$ GPa, $\rho = 1600$ Kg/m³.

I risultati devono essere valutati nei seguenti punti appartenenti alla sezione di estremità (tip): A[0,6,0], B[0.5,6,0], C[1,6,0]. Si utilizza una mesh strutturale con 10 elementi B4.

La semiala è esposta ad un flusso d'aria a velocità V_∞ , densità $\rho = 1.225$ Kg/m³ e con incidenza $\alpha = 4$ deg. Si considera la semiala esposta alle seguenti velocità $V_\infty = 30, 60, 90, 120, 150$ m/s per effettuare le analisi strutturali statiche e aeroelastiche.

2.1 Confronto tra teoria EULE e EDTN =4

Una volta impostata sul software una mesh aerodinamica 4X40 (cioè una mesh effettuata con 160 pannelli, 4 lungo la corda su 40 sezioni lungo l'apertura), utilizzando il materiale 1 è stato effettuato il calcolo degli spostamenti dei punti A, B, C con l'analisi strutturale statica (SSA 102) e con quella aeroelastica (SAA 144) utilizzando prima la teoria EULE e poi EDTN = 4.

Poichè la forza aerodinamica che si sviluppa sul profilo ha componenti x e y trascurabili rispetto a quella z, nelle tabelle vengono solo riportati gli spostamenti verticali w dei punti della sezione. I risultati per gli spostamenti

EDTN4 (102)	A	B	C		
V [m/s]	w [m]	w [m]	w [m]	$\tan(\theta)$	θ [deg]
30	0.008465	0.008438	0.008412	-0.000053	-0.003025
60	0.033859	0.033754	0.033648	-0.000211	-0.012100
90	0.076184	0.075946	0.075708	-0.000475	-0.027225
120	0.135438	0.135015	0.134593	-0.000845	-0.048401
150	0.211621	0.210962	0.210301	-0.001320	-0.075626

Tabella 3: Analisi strutturale statica, teoria EDTN 4

EDTN4 (144)	A	B	C		
V [m/s]	w [m]	w [m]	w [m]	$\tan(\theta)$	θ [deg]
30	0.008472	0.008446	0.008420	-0.000053	-0.003026
60	0.033979	0.033874	0.033768	-0.000211	-0.012108
90	0.076792	0.076554	0.076316	-0.000476	-0.027267
120	0.137364	0.136940	0.136517	-0.000847	-0.048530
150	0.216337	0.215675	0.215011	-0.001325	-0.075936

Tabella 4: Analisi aeroelastica, teoria EDTN 4

Commento dei risultati Dalle analisi svolte con la teoria di Eulero (vedi Tabella e tabella 1) si può notare che gli spostamenti verticali w dei punti A, B, C sono identici: questo non sorprende poichè la teoria della trave di Eulero-Bernoulli permette di descrivere solamente la flessione e non la torsione.

Osservando invece i risultati delle analisi con la teoria EDTN 4 si riscontrano degli angoli di torsione θ negativi, il che con il sistema di riferimento preso significa che il profilo si torce a cabrare: questo non sorprende poichè la portanza, situata nel fuoco x_F ha un braccio rispetto al centro di taglio della sezione x_{CT} in quanto il fuoco è posto anteriormente al centro di taglio.

2.2 Confronto tra analisi strutturale e aeroelastica al variare di V_∞

Sulla base degli spostamenti calcolati nell'esercizio 2.1, utilizzando la teoria EDTN 4 viene diagrammato lo spostamento verticale w del punto B (il quale fornisce lo spostamento verticale della sezione alare di tip dato dalla flessione dell'ala) e la rotazione della sezione al variare della v_∞ . Come si può notare dai grafici al crescere della velocità aumenta la differenza tra i risultati dell'analisi strutturale statica (SSA - 102) e dell'analisi aeroelastica (SAA - 144).

EDTN4	(SSA - 102)	(SAA - 144)	errore ass.	errore rel.
V [m/s]	θ [deg]	θ [deg]	[deg]	[-]
30	-0.003025	-0.003026	-0.000001	0.02%
60	-0.012100	-0.012108	-0.000008	0.07%
90	-0.027225	-0.027267	-0.000041	0.15%
120	-0.048401	-0.048530	-0.000129	0.27%
150	-0.075626	-0.075936	-0.000310	0.41%

Tabella 6: Rotazione della sezione θ , confronto tra analisi 102 e 144

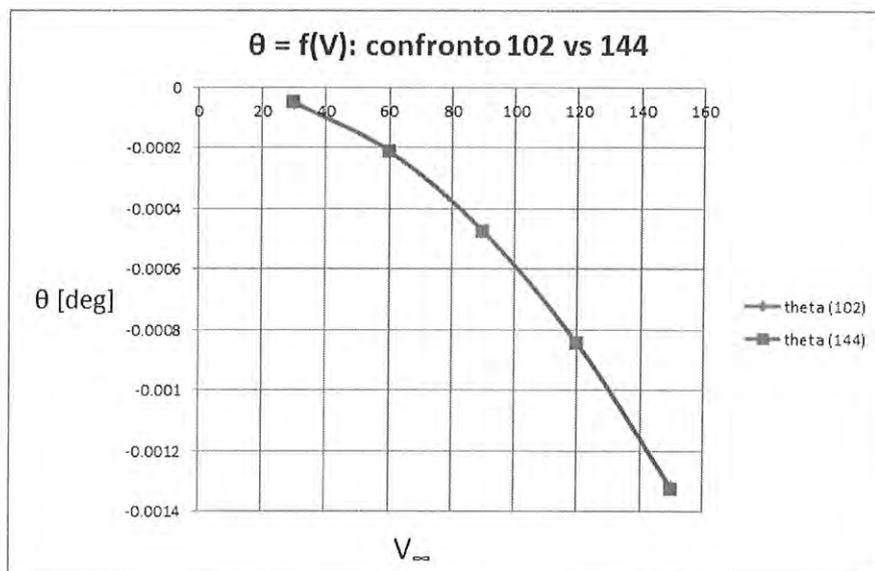


Figura 3: Rotazione della sezione $\theta = f(V_\infty)$

Da Tabella 6 e Figura 3 si nota invece che c'è un minimo scostamento tra la torsione calcolata con l'analisi statica e quella aeroelastica.

Grafici molto simili xk ala corta e rigida e basse velocità di volo.

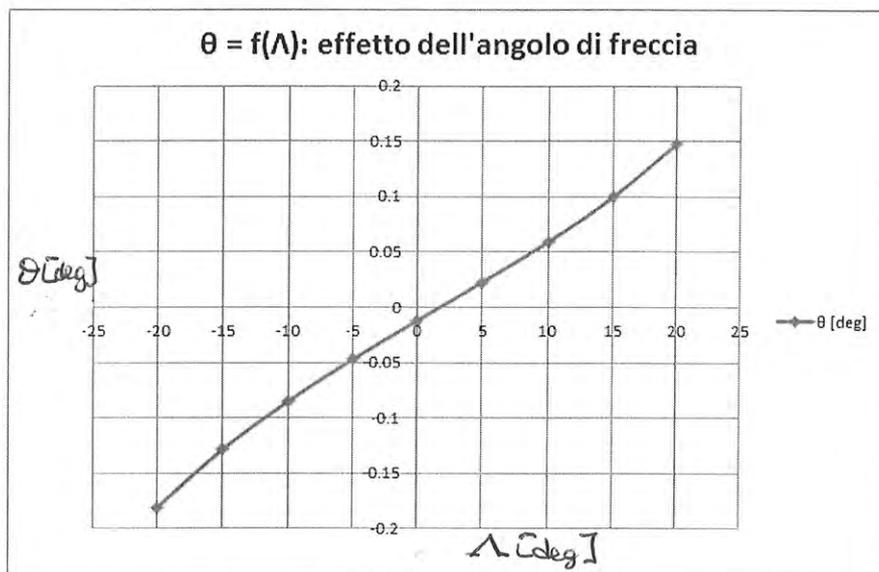


Figura 4: Rotazione della sezione $\theta = f(\Lambda)$

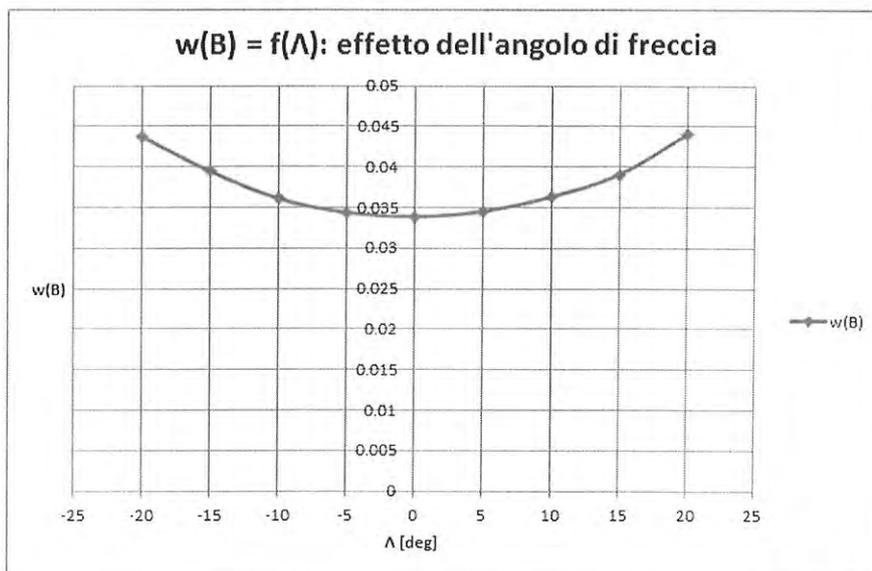


Figura 5: Spostamento trasversale della sezione $w_B = f(\Lambda)$

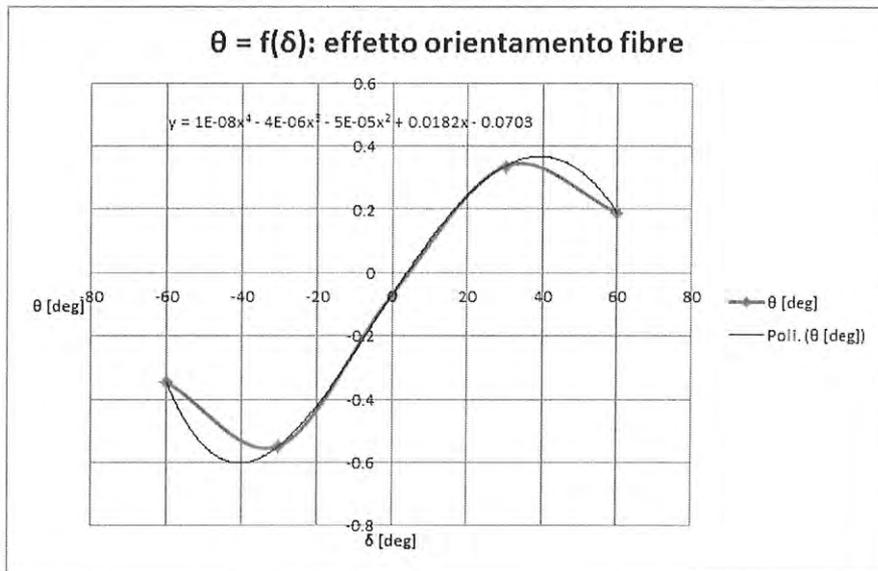


Figura 6: Rotazione della sezione $\theta = f(\delta)$

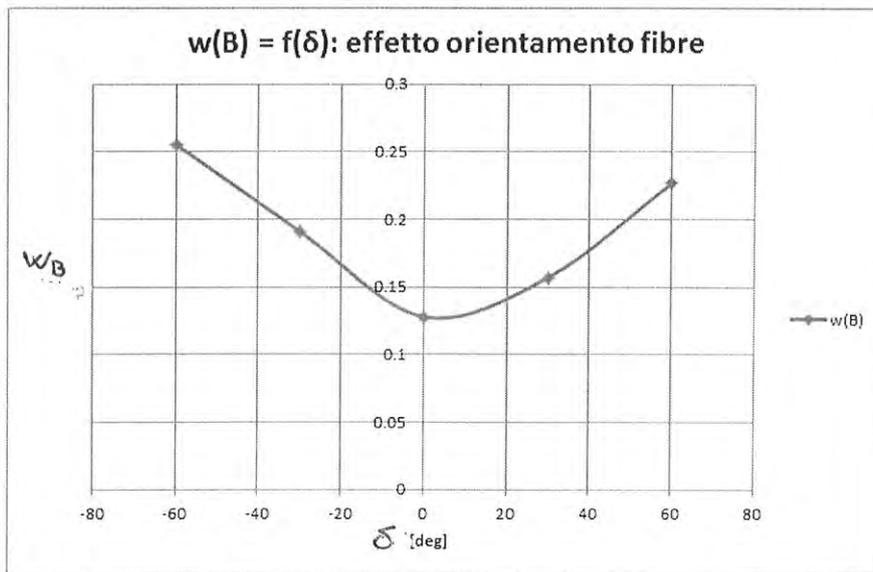


Figura 7: Spostamento trasversale della sezione $w_B = f(\delta)$

aprire il file DATA e considerare gli spostamenti dei punti 1351, 1354, 1357 cioè i punti al tip dell'ala secondo la seguente schematizzazione. Infatti, se si presenta divergenza, lo farà sicuramente prima al tip dell'ala prima di ogni altro punto.

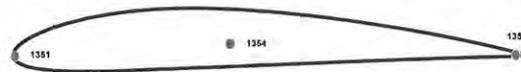


Figure 2: Sezione al tip

Parte 1

In questa prima parte dell'esercizio si vuole valutare qual è l'effetto del modello strutturale utilizzato, tra tutti quelli a disposizione nel software, considerando un angolo di freccia nullo e un angolo di laminazione nullo.

In particolare, il confronto è stato fatto tra le teorie di Eulero Bernoulli (EULA), Timoshenko (FTSD), e la teoria con polinomi di Taylor per vari ordini (EDTN); impostando i vari parametri nel file di pre-input, dopo il post-processing si ottengono i seguenti risultati in termini di velocità di divergenza; è importante ricordare che il software ottiene più velocità di divergenza poiché le calcola lungo l'apertura dell'ala, ma l'importante è considerare quella più bassa, al tip.

VELOCITA' DI DIVERGENZA [m/s]					
EULA	FSDT	EDTN 1	EDTN 2	EDTN 3	EDTN 4
/	/	1056.86	214.00	213.67	211.31

Figure 3: Velocità di divergenza

Come si può notare, le prime due teorie non sono in grado di cogliere la rotazione della sezione, quindi non si avrà nessun incremento nell'incidenza di volo e la divergenza non potrà avere luogo. Negli altri casi invece viene sempre rilevata una velocità di divergenza, visibilmente più elevata nel primo caso poiché evidentemente i polinomi di primo grado non riescono a cogliere il fenomeno nella sua completezza e quindi sovrastimano di molto la velocità di divergenza; per quanto riguarda gli altri modelli invece, ci si attesta chiaramente su un livello stabile della velocità di divergenza che si presume a questo punto sia quella corretta.

Domande per esame orale 2014-15

Principali regole d'esame e criteri per la sua preparazione:

- Lo studente si deve presentare all'esame provvisto delle esercitazioni svolte.
- Vengono poste due domande tratte dall'elenco che segue: la prima è sorteggiata dallo studente, la seconda è a discrezione dall'esaminatore. In alternativa a quelle dell'elenco, la seconda domanda può vertere sulle esercitazioni svolte in aula.
- Le risposte alle domande devono essere puntuali e strettamente limitate all'oggetto delle stesse. Evitare premesse, divagazioni e ampliamenti del tema che sono invece oggetto di domande simili. In qualche caso la risposta può anche risultare molto breve: ciò non deve preoccupare.
- Non è richiesta l'esposizione dettagliata delle dimostrazioni e dei loro passaggi. Importante è che lo studente abbia chiari i punti di partenza e di arrivo del discorso e alcuni essenziali elementi intermedi. La selezione di tali elementi è affidata allo studente e alla sua capacità di sintesi, che costituisce elemento di giudizio.

Elenco delle domande

- 1) Diagrammi funzionali per fenomeni aeroelastici statici e dinamici: problemi di stabilità e di risposta
- 2) Il Galloping: equazioni generali ed equilibrio dinamico alla velocità critica.
- 3) Vibrazioni indotte da vortex shedding, il fenomeno del lock-in
- 4) Sistema di riferimento per lo studio aeroelastico di un'ala allungata.
- 5) Comportamento elastico statico di un'ala a freccia: accoppiamento flessione-incidenza
- 6) Accoppiamento dinamico flessione – torsione in un ala diritta con assi baricentrico ed elastico distinti.
- 7) Risposta aeroelastica statica di un profilo alare elasticamente supportato ad un'assegnata velocità
- 8) Divergenza torsionale di un profilo alare elasticamente supportato
- 9) Velocità d'inversione d'effetto di un profilo alare elasticamente supportato con superficie mobile
- 10) Carichi di manovra e loro inserimento nell'equazione dell'equilibrio aeroelastico statico di un'ala diritta.
- 11) Carichi di manovra e loro inserimento nell'equazione integrale dell'equilibrio aeroelastico statico di un'ala a freccia.
- 12) Divergenza torsionale in un'ala rettangolare omogenea: modello analitico.
- 13) Divergenza torsionale in un'ala reale: applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz
- 14) Divergenza torsionale in un'ala reale: applicazione del metodo di Galerkin
- 15) Comportamento a divergenza delle ali a freccia
- 16) Risposta statica di un'ala ad allungamento finito soggetta a carico simmetrico: lineamenti del modello analitico con riferimento al problema di verifica
- 17) Risposta statica di un'ala ad allungamento finito soggetta a carico simmetrico: lineamenti del modello analitico con riferimento al problema di progetto/controllo.
- 18) Risposta statica di un'ala ad allungamento finito soggetta a manovra degli alettoni (carico antisimmetrico): lineamenti del modello analitico e risultati
- 19) Teoria dello slender body in un moto stazionario
- 20) Divergenza flessionale in missili e fusoliere
- 21) Divergenza flessionale in tubi flessibili percorsi da fluido pesante

- 50) Oscillazioni aeroelastiche libere ed effetto della velocità di volo. Instabilità aeroelastica e sua differenza concettuale rispetto al fenomeno della risonanza aeroelastica.
- 51) Oscillazioni con smorzamento: definizione di decremento logaritmico e modello dello smorzamento strutturale.
- 52) Modello di Pines per un flutter binario: ipotesi semplificative e risultati in termini di evoluzione delle frequenze proprie e dei tassi di smorzamento. Limiti e pregi del modello.
- 53) Metodo U-g per il calcolo del flutter in una struttura reale.
- 54) Metodo p-k per il calcolo del flutter in una struttura reale
- 55) Spiegazione energetica del flutter.
- 56) Parametri fisici influenti sulla velocità di flutter e conseguenti misure di prevenzione.
- 57) Considerazione della compressibilità del fluido ed effetto della quota di volo sulla velocità di flutter.
- 58) Effetto della pianta a freccia sulla velocità di flutter
- 59) Il flutter dei pannelli: descrizione qualitativa del comportamento di un pannello piano con allungamento infinito, limiti di stabilità, parametri influenti.
- 60) Il flutter dei pannelli: effetto dell'allungamento finito e della curvatura ed effetti non lineari
- 61) Il flutter di stallo: spiegazione fisica, domini tecnici in cui si manifesta.
- 62) Il buffeting dei piani di coda
- 63) Il buffeting transonico e il buzz transonico degli alettoni: descrizione e differenze
- 64) Fenomeni aeroelastici nei sistemi rotanti: turbomacchine e whirl flutter.
- 65) Classificazione delle non linearità aeroelastiche e difficoltà caratteristiche dell'aeroelasticità non lineare.

② GALLOPING: EQUAZIONI GENERALI E EQUILIBRIO DINAMICO ALLA VELOCITÀ CRITICA

PREMESSA COMUNE A VORTEX SHEDDING

- CORPI TOZZI
- FLUSSO TURBOLENTO
- FLUSSO STACCATO A VALLE
- APPROCCIO QUASI STAZIONARIO
- PARAMETRI CONCENTRATI

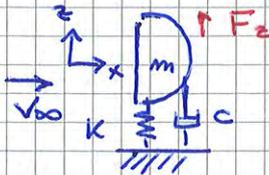
• PULSAZIONE RIDOTTA $w^* = \frac{\omega l}{V_{\infty}}$ $w^* = \begin{cases} 0,1 & \text{GALLOPING} \\ 1 & \text{VORTEX SHEDDING} \end{cases}$

□ GALLOPING: OSCILLAZIONE AUTOECCITATA

○ VORTEX SHEDDING: NASCE COME RISONANZA E DIVENTA POI INSTABILITÀ

GALLOPING

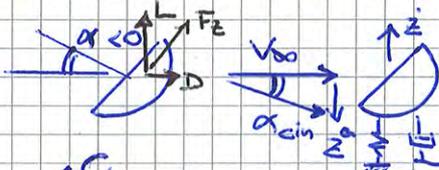
FENOMENO DI INSTABILITÀ DINAMICA



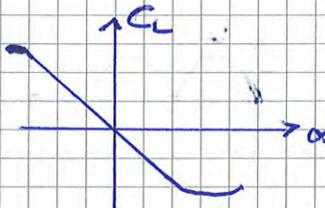
$$-m\ddot{z} - c\dot{z} - kz + F_z(t) = 0$$

F_z dovuta a deformazioni del sistema, non è forzante esterna

CORPO IN GALLERIA DEL VENTO



$$\alpha_{cinematica} = -\frac{\dot{z}}{V_{\infty}}$$



$$CL_{\alpha} < 0!$$

PARTICOLARE FORMA TOZZA CHE DA' UN C_L negativo E' IMPORTANTE!

$$L = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \cdot \alpha$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d C_{D0}$$

$$F_z(t) = L \cos \alpha + D \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 d \left[-\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \frac{\dot{z}}{V_{\infty}} - C_{D0} \cdot \frac{\dot{z}}{V_{\infty}} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \rho V_{\infty} d \dot{z} \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_{D0} \right]$$

EQ. DI EQUILIBRIO [MEMO: F_z forza interna, dipende da \dot{z}]

$$m\ddot{z} + \left[c + \frac{1}{2} \rho V_{\infty} d \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_{D0} \right) \right] \dot{z} + K \cdot z = 0$$

C_{TOT}

$$m\ddot{z} + C_{TOT} \dot{z} + K \cdot z = 0$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$z(t) = z_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t)$$

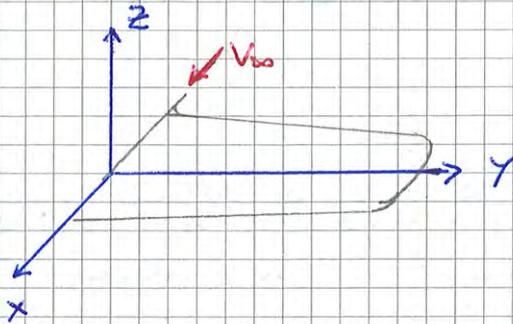
$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{C_{TOT}}{2m} \right)^2}$$

△ QUANDO $C_{TOT} = 0 \rightarrow$ OSCILLAZIONE NON SMORZATA !!

$$V_G = -\frac{2c}{\rho d \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_{D0} \right]}$$

HA SENSO SOLO SE $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} < 0$!!!

4 SISTEMA DI RIFERIMENTO PER LO STUDIO AEROELASTICO DI UN'ALA ALLUNGATA



TERNA DESTROSA X-Y-Z

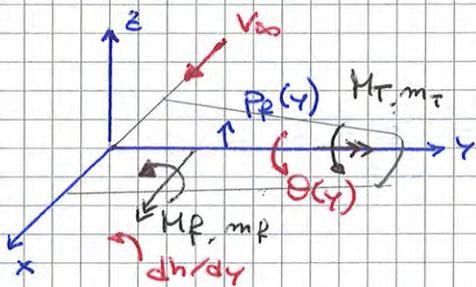
- x: diretto come V_0
 - z: da ventre a dorso
 - y: ASSE ELASTICO DELL'ALA
- } PRINCIPALI D'INERZIA PER NON AVERE FLESSIONI ACCOPPIATE

WOGO DEI PUNTI DEI CENTRI DI TAGLIO DELLE VARIE SEZIONI

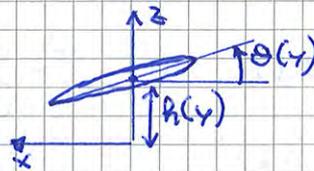
→ UN CARICO PER C.T. DA FLESSIONE PURA MA NON TORSIONE E VICEVERSA A MENO CHE LA SEZIONE NON ABBI

△ C.T. NON COINCIDE CON G A MENO CHE LA SEZIONE NON ABBI DUE ASSI DI SIMMETRIA

CARICHI SU ALA



CARICHI E MOMENTI LI CONSIDERIAMO AGENTI SU ASSE ELASTICO



- ESCLUDIAMO FLESSIONE PIANO X-Y
- FLESSIONE PIANO Y-Z
- $\frac{dh}{dy}$ → ROTAZIONE

FORZE AERODINAMICHE SU ASSE ELASTICO → DISACCOUPLAMENTO DI FLESSIONE E TORSIONE

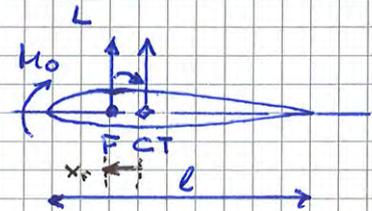
- DI SOLITO LA LIFT E M_0 SI DANNO NEL FUOCO → MOMENTO DI TRASPORTO

$$x_{CT} \approx 0,33$$

$$x_F \approx 0,25$$

Distanze DIETRO CT: z_0
DAVANTI CT: c_0

$$x_F < c_0$$



$$M_T = M_0 - x_F \cdot L$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI (ole omogenee)

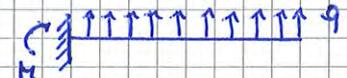
$$EJ \frac{d^2 h}{dy^2} = M_f + \int_y^b m_f(\eta) d\eta$$

$$M_f(y) = \int_y^b P_f(\eta) (\eta - y) d\eta$$

$$\frac{d M_f(y)}{dy} = \int_y^b P_f(\eta) d\eta$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dy^2} \left[EJ \frac{d^2 h}{dy^2} \right] = P_f(y) + \frac{d m_f}{dy}$$

FLESSIONE



$$M = EJ w_{,yy}$$

$$\frac{d^2 M}{dy^2} = q$$

$$EJ w_{,yyyy} = q$$

EQUILIBRIO AGLI SPOSTAMENTI

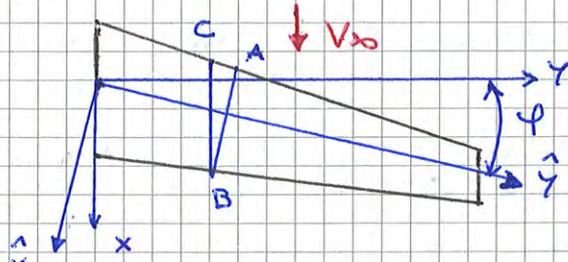
EQ. DELLA LINEA ELASTICA

TORSIONE

$$\frac{d}{dy} \left(G J_T \frac{d\theta}{dy} \right) = -m_T(y)$$

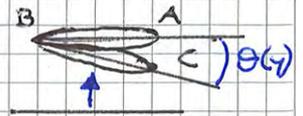
DURANTE LA DEFORMAZIONE C'È UN ACCUMULO DI ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

5) **COMPORTAMENTO ELASTICO STATICO DI UN'ALA A FRECCIA: ACCOPPIAMENTO FLESSIONE - INCIDENZA**



- SI PERDE IL DISACCOPPIAMENTO FLESSIONE - TORSIONE
- CARICO VERTICALE SU \hat{y}
- FLESSIONE ATTORNO A \hat{x}
- NO TORSIONE ATTORNO \hat{y}
- ... MA TORSIONE ATTORNO A \hat{y} !!!

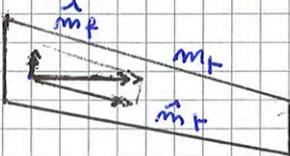
AB SI SOLLEVA DELLA STESSA QUOTA, MA C SI SOLLEVA DI MENO! **TORSIONE DEI PROFILI AB VS BC!**
 → TORSIONE $\theta(y)$ ATTORNO A \hat{y}



TORSIONE $\theta(y) =$ ROTAZIONE PROFILO NEL PIANO DEL VENTO

↓
 MOMENTO TORCENTE AERO

CAMBIA INCIDENZA LOCALE!



$$\hat{m}_R(\hat{y}) = m_T(\hat{y}) \sin \varphi$$

$$\hat{m}_T(\hat{y}) = m_T(\hat{y}) \cos \varphi$$

EQ. DIFFERENZIALI

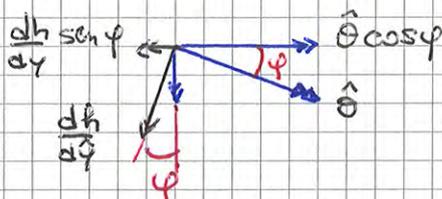
$$\frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left[EJ \frac{d^2 h}{d\hat{y}^2} \right] = P_f(\hat{y}) - \frac{d\hat{m}_R(\hat{y})}{d\hat{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left[EJ \frac{d^2 h}{d\hat{y}^2} \right] = P_f(\hat{y}) + \frac{d\hat{m}_T}{d\hat{y}} \sin \varphi$$

$$\frac{d}{d\hat{y}} \left[GJ_T \frac{d\hat{\theta}}{d\hat{y}} \right] = -\hat{m}_T(\hat{y})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\hat{y}} \left[GJ_T \frac{d\hat{\theta}}{d\hat{y}} \right] = -m_T(\hat{y}) \cos \varphi$$

ANGOLI DI ROTAZIONE: **BISOGNA RIFERIRE $\hat{\theta}$ AL PIANO DEL VENTO → θ**



$$\Rightarrow \theta(\hat{y}) = \hat{\theta} \cos \varphi - \frac{dh}{d\hat{y}} \sin \varphi$$

FRECCIA POSITIVA: ($\sin \varphi > 0$)
 $h > 0$ (flessione ovviamente verso d'alto)
 È ALLEVIANTE ⇒ STABILITÀ ↑

FRECCIA NEGATIVA ($\sin \varphi < 0$)
 $h > 0 \Rightarrow (-) = +$
 $\alpha \uparrow \Rightarrow$ INSTABILITÀ

$$\frac{d}{d\hat{y}} \left[GJ_T \frac{d}{d\hat{y}} \left(\frac{\theta}{\cos \varphi} + \tan \varphi \frac{dh}{d\hat{y}} \right) \right] = -m_T(\hat{y}) \cos \varphi$$

6 ACCOPPIAMENTO DINAMICO FLESSIONE-TORSIONE IN ALA DRITA CON BARICENTRO DISTINTO DA C.T.

DINAMICA = AZIONI INERZIALI ACCELERAZIONI NELLE DEFORMAZIONI, NON DELL'AEREO (sono 2 scale temporali completamente diverse)

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT:

EQ. DINAMICA = EQ. STATICA + TERMINI DI INERZIA

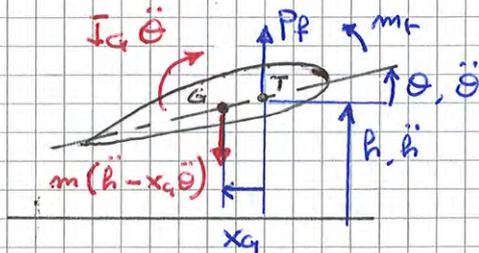
■ ASSE ELASTICO \neq ASSE BARICENTRICO \Rightarrow EQUAZ. ACCOPPIATE

$$m(y) = \int_A \rho \, dA \quad [\text{kg/m}]$$

$$I_x(y) = \int_A \rho_s z^2 \, dA$$

$$I_\alpha(y) = \int_A \rho_s (x^2 + z^2) \, dA$$

MOMENTO POLARE D'INERZIA ATTORNO ASSE ELASTICO



■ AZIONI INERZIALI RIDOTTE AL BARICENTRO

$$m(\ddot{h} - x_G \ddot{\theta})$$

$$I_G \ddot{\theta}$$

• Flessione dinamica

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[E J \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] = P_f(y, t) - m(\ddot{h} - x_G \ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[E J \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] = P_f(y, t) - m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\theta}$$

$$m x_G = S_\alpha$$

MOMENTO STATICO DEL PROFILO

• Torsione dinamica

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[G J_T \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = - \left[m_t - I_G \ddot{\theta} + m x_G (\ddot{h} - x_G \ddot{\theta}) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[G J_T \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = - \left[m_t(y, t) + S_\alpha \ddot{h} - I_\alpha \ddot{\theta} \right]$$

EQUILIBRIO DINAMICO ATTORNO A T!

$I_G + m x_G^2 = I_\alpha$
MOMENTO D'INERZIA PROFILO TRASPORTATO SU C.T.

▲ S_α È IL RESPONSABILE DELL'ACCOPPIAMENTO.

EQ. INTEGRALI DINAMICHE

$$h(y, t) = \int_0^b c^{zz}(y, \eta) \left[P_f(\eta, t) - m \ddot{h}(\eta, t) + S_\alpha \ddot{\theta}(\eta, t) \right] d\eta$$

$$\theta(y, t) = \int_0^b c^{\theta\theta}(y, \eta) \left[m_t(\eta, t) + S_\alpha \ddot{h} - I_\alpha \ddot{\theta} \right] d\eta$$

Per forze gli spessi

EQ. INTEGRALI DINAMICHE ALA A FRECCIA

$$h(y, t) = \int_0^b c^{zz}(y, \eta) \left[P_f(\eta, t) - m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\theta} \right] + c^{z\theta}(y, \eta) \left[m_t(\eta, t) + S_\alpha \ddot{h} - I_\alpha \ddot{\theta} \right] d\eta$$

$$\theta(y, t) = \int_0^b c^{\theta\theta}(y, \eta) \left[m_t(\eta, t) + S_\alpha \ddot{h} - I_\alpha \ddot{\theta} \right] + c^{\theta z}(y, \eta) \left[P_f(\eta, t) - m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\theta} \right] d\eta$$

→ DIVERGENZA TORSIONALE C'È SOLO IN SUBSONICO

$$p_{\infty}^0 = p_D^0 = -\frac{K_{\alpha}}{l C_L' x_F} \rightarrow V_D = \sqrt{-\frac{2K_{\alpha}}{\rho_{\infty} l C_L' x_F}}$$

Approfondiamo un ottimo ragionando sui MOMENTI:

$$M_{Te} = K_{\alpha} \cdot \theta$$

$$M_{Te} = p_{\infty}^0 l^2 C_{M\theta} - p_{\infty}^0 l x_F C_L' (\alpha + \theta)$$

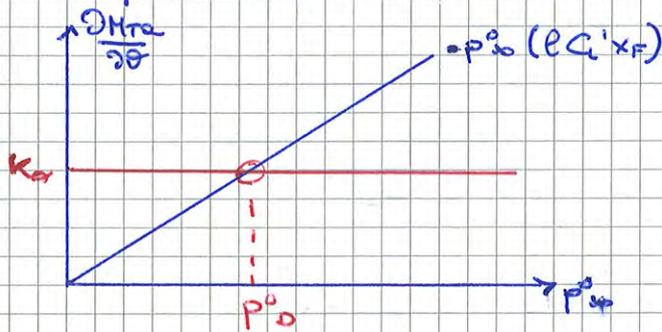
RIGIDEZZA STRUTTURALE

$$\frac{\partial M_{Te}}{\partial \theta} = K_{\alpha}$$

RIGIDEZZA AERODINAMICA

$$\frac{\partial M_{Te}}{\partial \theta} = -p_{\infty}^0 l x_F C_L' > 0$$

Graficamente



- $V_{\infty} < V_D$: IL MOMENTO ELASTICO RICHIAMA LA DEFORMAZIONE
- $V_{\infty} > V_D$: L'INCREMENTO DEL MOMENTO AERODINAMICO SOVRAPSTA QUELLO DELLA COPPIA DI REAZIONE ELASTICA → LA DEF. CRESCE RAPIDAMENTE

$$V_{\infty} = V_D \quad (p_{\infty}^0 = p_D^0) : (K_{\alpha} + p_{\infty}^0 l x_F C_L') \theta = 0$$

$$\rightarrow K_{\alpha} \cdot \theta = -p_{\infty}^0 l x_F C_L' \theta$$

LA COPPIA DI REAZIONE ELASTICA EQUILIBRA SOLO LA PARTE OMOGENEA DEL MOMENTO AERO (cioè quella data da θ)

⇒ NON C'È + UN EQUILIBRIO STATICO!
 LA PARTE DI MOMENTO AERO DATO DA α SBILANCIA IL SISTEMA.
 → EQUILIBRIO DINAMICO e poi si SFASCIA TUTTO.

SI È INTERESSATI ALLA RISPOSTA IN TERMINI DI PORTANZA

$$C_L = C_L' \cdot \theta' + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta =$$

SOSTITUENDO QUANTO TROVATO PER θ'

$$= \cancel{C_L'} \cdot \frac{1}{\cancel{C_L'}} \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta}}{\left(\frac{p_D^0}{p_{D0}^0} - 1\right)} \cdot \beta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta$$

$$= \frac{\cancel{\frac{\partial C_L}{\partial \beta}} + \frac{p_D^0}{p_{D0}^0} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \cancel{\frac{\partial C_L}{\partial \beta}} - \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta}}{\left(\frac{p_D^0}{p_{D0}^0} - 1\right)} \cdot \beta$$

$$\rightarrow C_L' = \frac{\frac{p_D^0}{p_{D0}^0} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta}}{\left(\frac{p_D^0}{p_{D0}^0} - 1\right)} \cdot \beta$$

PERDITA DI EFFICACIA DELL'ALETONE QUANDO $C_L = 0$

\Rightarrow NUM = 0. Succede per una certa $p_D^0 = p_R^0$

$$\frac{p_D^0}{p_{D0}^0} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta} = 0 \rightarrow p_D^0 \frac{\partial C_L}{\partial \beta} = p_R^0 \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow p_R^0 = p_D^0 \frac{x_F}{l} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{MF} / \partial \beta}$$

- $V_{\infty} < V_R$ OK
- $V_{\infty} = V_R$ REVERSAL OF AILERONS' EFFECT!
- $V_{\infty} > V_R$ LA DEFORMAZIONE DELLA SUPERFICIE FISSA È TALE DA INVERTIRE L'EFFETTO DEL COMANDO

$$p_R^0 = - \frac{K_{\alpha}}{l C_L' x_F} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{MF} / \partial \beta}$$

$$\Rightarrow V_R = \sqrt{- \frac{2 K_{\alpha}}{\rho_{\infty} l^2 C_L'} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{MF} / \partial \beta}}$$

• $V_{\infty} = V_R \rightarrow p_D^0 = p_R^0 \rightarrow C_L' = 0$

$$0 = C_L' \cdot \theta' + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta$$

MULTIPLICHIAMO TUTTO PER $p_R^0 \cdot l$

$$-p_R^0 l C_L' \theta' = p_R^0 l \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta$$

Equilibrio di forze
zero a $V_{\infty} = V_R$

CONTRIBUTO DEFORMAZIONE ALLA

CONTRIBUTO ROTAZIONE ALETTONE SU PROFILO RIGIDO

EFFICACIA DELL'ALETONE

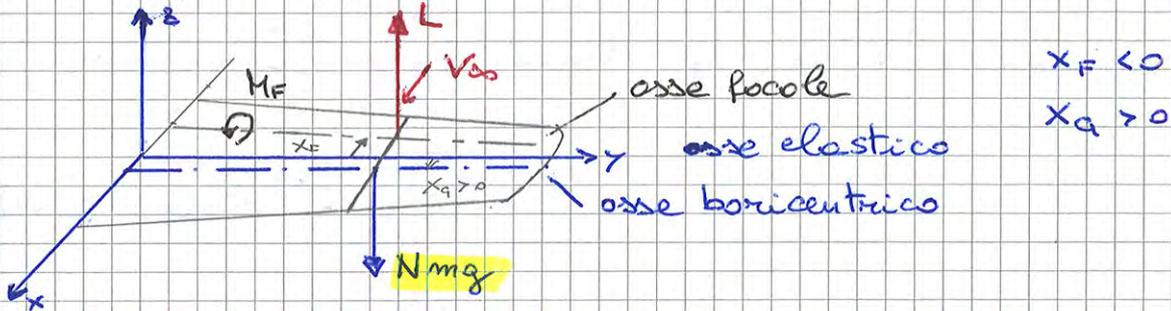
$$\eta_R = \frac{C_L'}{C_L \text{ RIGIDO}}$$

10 CARICHI DI MANOVRA e loro inserimento nell'eq. di equilibrio statico di un'ala dritta

⇒ ESPLICITAZIONE DEI CARICHI p_F e m_T SULL'ALA

Partiamo dalle eq. di equilibrio a flessione e torsione

$$\frac{d^2}{dy^2} [EJ \frac{d^2 h}{dy^2}] = p_F(y) \quad \frac{d}{dy} [GJ \frac{d\theta}{dy}] = -m_T(y)$$



CARICO DI MANOVRA → N = fattore di carico a contingenza

→ AZIONE INERZIALE HA VIENE VISTA COME CARICO STATICO sulle scale dei tempi delle accelerazioni delle deformazioni

TEMPI DINAMICA DEL VOLO >> TEMPI DINAMICA STRUTTURE

EQUILIBRIO AEROELASTICO ⇒ eq. della TORSIONE

Come è fatto $m_T(y)$?

$$m_T(y) = M_F - x_F \cdot L + Nmg \cdot x_A$$

$$= \rho_{\infty} l^2 C_{MF} - \rho_{\infty} l x_F C_L + Nmg x_A$$

$$\rightarrow \frac{d}{dy} [GJ \frac{d\theta}{dy}] = - [\rho_{\infty} l^2 C_{MF} - \rho_{\infty} l x_F C_L + Nmg x_A]$$

CARICO RIDOTTO : $p = l \cdot C_L$ $C_L = C_L^e + C_L^g$

$$p = p^e + p^g$$

g : GEOMETRICO = NON DIPENDE DA DEFORMAZIONE θ

e : ELASTICO = DIPENDE DA θ

$$-\rho_{\infty} l C_L x_A = -\rho_{\infty} x_F (l C_L^g + l C_L^e) = -\rho_{\infty} x_F (p^e + p^g)$$

CARICHI ELASTICI e 1° membro

$$\frac{d}{dy} [GJ \frac{d\theta}{dy}] = - [\rho_{\infty} l^2 C_{MF} - \rho_{\infty} x_F p^e - \rho_{\infty} x_F p^g + Nmg x_A]$$

$$\frac{d}{dy} [GJ \frac{d\theta}{dy}] - \rho_{\infty} x_F p^e = - \rho_{\infty} l^2 C_{MF} + \rho_{\infty} x_F p^g - Nmg x_A$$

EQ. DIFF. ALA DRITTA

$g_\theta(y)$, indipendente da θ

42) DIVERGENZA TORSIONALE SU ALA FINITA OMOGENEA: modello analitico

→ **PROBLEMA DI STABILITÀ (statica) DELLA CONFIGURAZIONE DEFORMATA**

Col profilo era stato facile: c'era un'eq. algebrica
Ora abbiamo un'equazione differenziale!

$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right] - p^e x_F p^e = q_\theta(y)$$

QUI BISOGNA CALCOLARE GLI AUTOVALORI: NEL PROFILO CE N'ERA 1 SOLO, QUI CE NE SONO INFINITI
MA SOLO IL + BASSO AVRA' SIGNIFICATO PRATICO

→ LA MINIMA V_0 PER CUI SI AVRA' DIVERGENZA

■ **SI RENDE OMOGENEA L'EQ. DI EQUILIBRIO**

$$\frac{d}{dy} \left[GJ_T \frac{d\theta}{dy} \right] - p^e x_F p^e = 0$$

$$\frac{GJ_T}{GJ_T} \frac{d^2\theta}{dy^2} - \frac{p^e x_F l C_L'}{GJ_T} \theta = 0$$

- ALA OMOGENEA e DRITTA
- CORDA COSTANTE

$$C_L', GJ_T, l, x_F = \text{cost}$$

- **TEORIA AERODINAMICA DI STRISCIA**

$$p^e = l \cdot C_L' \cdot \theta$$

$$\lambda^2 = - p^e \frac{l x_F C_L'}{GJ_T} > 0$$

- **OSCILLATORE ARMONICO**

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta = 0$$

$$\text{D.C. } \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_{y=\pm b} = 0$$

SOLUZIONE GENERALE:

$$\theta(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y)$$

IMPONIAMO CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\theta'(y) = \lambda A \cos(\lambda y) - \lambda B \sin(\lambda y)$$

Deve essere contemporaneamente soddisfatto

$$\begin{cases} 0 = \lambda A \cos(\lambda b) - \lambda B \sin(\lambda b) & [y = +b] \\ 0 = \lambda A \cos(\lambda b) + \lambda B \sin(\lambda b) & [y = -b] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda A \cos(\lambda b) = 0 \\ \lambda B \sin(\lambda b) = 0 \end{cases} \quad \text{PER SODDISFARE ENTRAMBE}$$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ e } \sin \lambda b = 0$$

$$\rightarrow \theta = B \cos \lambda y \rightarrow \text{DEFORMATA SIMMETRICA}$$

$$\Rightarrow B = 0 \text{ e } \cos \lambda b = 0$$

$$\rightarrow \theta = A \sin \lambda y \rightarrow \text{DEFORMATA ANTISIMMETRICA}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi (2n-1)}{2b}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{b}$$

43) DIVERGENZA TORSIONALE DI ALA REALE : metodo di Rayleigh-Ritz

ALA REALE : DISCONTINUITÀ ecc \Leftrightarrow METODI INTEGRALI DISCRETI

$$\theta(y) + p_{\infty}^0 \int_0^b c^{\infty}(y, \eta) x_F(\eta) p^e(\eta) d\eta = 0$$

- IL CARICO RIDOTTO È UN OPERATORE AERODINAMICO
 $p^e = O_A(\theta) \rightarrow \theta = O_A^{-1}(p^e)$ PRANDTL \rightarrow OPERATORE INVERSO
- INVERSIONE NUMERICA DELL'OPERATORE \Rightarrow MATRICI!
 $\{\theta\} = [A] \{p^e\}$

Metodo di collocazione diretta:

$$[A] \{p^e\} + p_{\infty}^0 [c^{\infty}] [x_F] \{p^e\} = \{0\}$$

$$([A] + p_{\infty}^0 [c^{\infty}] [x_F]) \{p^e\} = \{0\}$$

$$[B] = - [c^{\infty}] [x_F] \text{ MATRICE STRUTTURALE}$$

$$\rightarrow ([A] - p_{\infty}^0 [B]) \{p^e\} = \{0\}$$

GLI AUTOVALORI p_{∞}^0 DEL SISTEMA SONO LE n PRESSIONI DI DIVERGENZA DEL SISTEMA (n TRONCHETTI ALARI IN CUI SI È DISCRETIZZATO IL PROBLEMA)

\rightarrow CI INTERESSA LA + BASSA

Metodo di RAYLEIGH-RITZ

TUTTO IL LAVORO DELLA COPPIA AERODINAMICA VA AD ACCUMULARE ENERGIA POTENZIALE DI DEFORMAZIONE ELASTICA

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b GJ_T \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy$$

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{2} p_{\infty}^0 \int_0^b p^e(y) x_F(y) \theta(y) dy$$

LAVORO DELLA SOLA PORTANZA DATA DALLA DEFORMAZIONE ELASTICA

$$\mathcal{L} = p_{\infty}^0 \mathcal{L}^*$$

IN CONDIZIONI DI DIVERGENZA

$$p_{\infty}^0 = p_D^0 \rightarrow U = p_D^0 \mathcal{L}^* \rightarrow p_D^0 = \frac{U}{\mathcal{L}^*}$$

p_D^0 è così calcolata con il quoziente di Rayleigh

- CONVERGENZA SUL MINIMO:

tra tutte le deformazioni possibili compatibili con i vincoli quella effettiva sarà quella che RENDE MINIMO IL POTENZIALE TOTALE"

④ RISPOSTA STATICA DI ALA SOGGETTA A CARICO SIMMETRICO: problema di verifica

• DISTRIBUZIONE DI CARICO SIMMETRICA



$$\frac{d}{dy} [GJ_T \frac{d\theta}{dy}] - P_{\infty} x_F p^e = g_0(y)$$

$$g_0(y) = P_{\infty} x_F p^g - P_{\infty} l^e C_{HF} - \frac{1}{2} N m g x_1$$

EQUAZIONE LA SCRIVIAMO IN FORMA

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta = \mu \quad \lambda = -P_{\infty} \frac{l^e x_F C_1}{GJ_T}$$

$$\theta(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y + \frac{\mu}{\lambda^2}$$

• θ deforma ole e la portanza potrebbe istantaneamente variare segno $N = \frac{L}{w}$

• PROBLEMA DI VERIFICA

- ASSEGNATA α_g e V_{∞} quale N si avrà?

$$NQ = 2 P_{\infty} \int_0^b p dy$$

$$Q_w = 2 m g b \text{ PESO ALI (e)}$$

$$p = p^e + p^g$$

$$p^e = l C_1 \theta$$

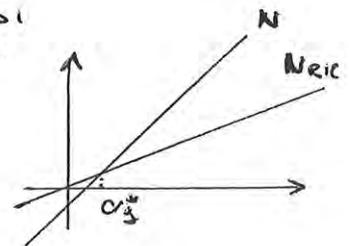
$$p^g = l C_1 \alpha_g$$

$$NQ = 2 P_{\infty} \int_0^b p^g dy + 2 P_{\infty} \int_0^b p^e dy$$

$$= 2 P_{\infty} l b C_1 \alpha_g + 2 P_{\infty} l C_1 \int_0^b \theta(y) dy$$

$$N_{RIGIDO} = \frac{2 P_{\infty} l b C_1 \alpha_g}{Q}$$

PARAMETRO DI RIFERIMENTO



$$\frac{N}{N_{RIG}} \neq 1 \text{ ovviamente}$$

PER UNA CERTA α_g^* $\frac{N}{N_{RIG}} = 1$

→ NON SI SENTE EFFETTO DEFORMABILITÀ E QUINDI POTREBBE DIVENTARE α DI DESIGN

α_g^* INDIPENDENTE DA P_{∞}

$$\alpha_g^* = \frac{C_{HF}}{C_1} \left(\frac{x_F}{l} - \frac{Q_w x_1}{Q l} \right)^{-1}$$

~ ordine di $1-2^\circ$

Se $\alpha = \alpha_g^* \rightarrow \mu = 0 \rightarrow$ è come studiare eq. divergenza

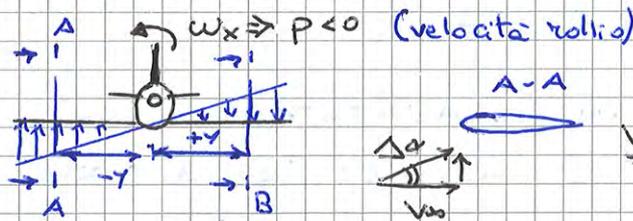
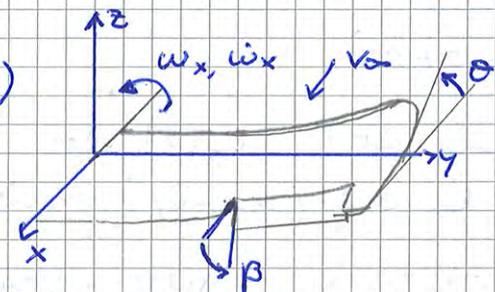
* MA QUINDI SE $P_{\infty} \neq P_{\infty}$ ALLORA SI PUÒ SOLO AVERE $\theta(y) = 0$, CHE È quello che vogliamo

18) RISPOSTA STATICA DI UN'ALA DI ALLUNGAMENTO FINITO SOGGETTA A MANOVRA DEI ALETONI (corico antisimmetrico) lineamenti del modello omotico e risultati

BOEING B-47 : ALA ECCESSIVAMENTE DEFORMABILE RISPONDE MALE AI COMANDI

- SI RISCRIVE EQUILIBRIO ELASTICO FACENDO COMPARIRE SOLTO I CONTRIBUTI DOVUTI ALLA DISTRIBUZ. ANTISIMMETRICA
- SI TRASCURANO TUTTI I MOTI DEL VELIVOLO TRANNE ROLLIO

$$\Theta(y) + p_{\infty}^{\circ} \int_0^b c^{\circ\circ}(y, \eta) x_F p^e d\eta = p_e(y)$$



$$\Delta\alpha(+)= -\frac{p \cdot (-y)}{V_{\infty}}$$

$$\Delta\alpha(-)= -\frac{p(y)}{V_{\infty}}$$

INCIDENZA CINEMATICA INDOTTA DA ROLLIO

CONSIDERANDO ALA DESTRA

$$\alpha(y) = \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} \cdot \beta - \frac{w_x \cdot y}{V_{\infty}} + \Theta(y)$$

$$p(y) = l \cdot \frac{\partial C_L}{\partial\beta} \cdot \beta + p^r(y) + p^e(y)$$

DA ROTAZIONE $p^r(y) = O_A(\alpha_{kin})$

$$C_M(y) = \frac{\partial C_M}{\partial\beta} \cdot \beta(y)$$

$$m_f(y) = -p_{\infty}^{\circ} x_F \left(l \frac{\partial C_L}{\partial\beta} \cdot \beta + p^r + p^e \right) + p_{\infty}^{\circ} l^2 \frac{\partial C_M}{\partial\beta} \cdot \beta + m \dot{w}_x \cdot y \cdot x_a$$

L'ACCELERAZIONE ANGOLARE DI ROLLIO CAUSA UNA DISTRIBUZIONE DI FORZE D'INERZIA

$m \dot{w}_x \cdot y$ LUNGO L'ASSE BARICENTRICO, QUESTE DANNO MOMENTO RISPETTO ALL'ASSE ELASTICO.

⇒ Ora si sostituisce tutto in $\Theta(y) = \int c^{\circ\circ}(y, \eta) m_f(\eta) d\eta$

EQUAZIONE CHE CHIUDE IL PROBLEMA

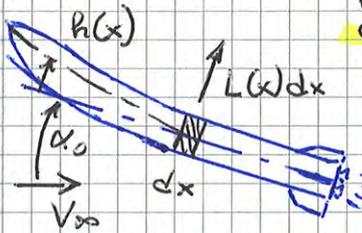
w_x e \dot{w}_x non sono note xk dipendono da distribuzione di L

19 TEORIA DELLO SLENDER BODY IN MOTO STAZIONARIO

IPOTESI

$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$: L'EVOLUZIONE DI QUALUNQUE GRANDEZZA LUNGO X È MENO RAPIDA DI QUELLA LUNGO Y e Z

→ CAMPO DI MOTO ATTORNO A CORPO ALLUNGATO PUÒ PENSARSI COME SUCCESSIONE DI CAMPI BIDIMENSIONALI PIANI



CAMPI SEMPRE INCOMPRESSIBILI INDIPENDENTEMENTE DA M₀ (velocità trasversali piccole)

→ CAMPI DI MOTO A FETTE SUBSONICI

Portanza prodotta da un segmento

$$L(x) = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \frac{d}{dx} [F(x) \alpha(x)]$$

$\alpha(x)$: incidenza locale

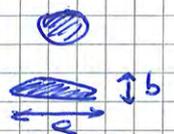
$F(x)$: funzione di AREA

AREA EQUIVALENTE IN CUI LA QDM È INFLUENZATA DAL CORPO

MEMO
AL DI LA' DI TUTTE LE PUTANATE MATEMATICHE UN CORPO HA PORTANZA SOLO SE DEFLETTE IL FLUSSO VERSO IL BASSO!!!

CIRC: $\frac{\pi}{4} d^2(x)$

ELLITTA: $\frac{\pi}{4} a b$



$$\Delta p V_{\infty}^2 = (\rho V_{\infty}) \cdot V_{\infty}$$

FLUSSO DELLA QUANTITÀ DI MOTO ATRAVERSO UNA SUPERFICIE DI CONTROLLO

$$L(x) = \frac{d}{dx} [\rho_{\infty} V_{\infty}^2 F \cdot \alpha]$$

PORTANZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

PORTATA DI QUANTITÀ DI MOTO ORIZZ.

PORTATA DI QDM NORMALE ALL'ASSE

Da sezione x a x+dx LA COMPONENTE VERTICALE DELLA PORTATA DELLA QDM VARIA

⇒ VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO = FORZA

$$L_{TOT} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_0^l \frac{d}{dx} [F(x) \cdot \alpha(x)] dx$$

$$= \rho_{\infty} V_{\infty}^2 [F(l) \alpha(l) - F(0) \alpha(0)]$$

$\rho_{\infty} F(x)$ = MASSA VIRTUALE
→ MASSA DI ARIA IN UN CILINDRO DI BASE F E ALTEZZA UNITARIA

Punta del missile: il flusso non viene praticam. deviato

$$L_{tot} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 F(l) \alpha(l) = 2 \rho_{\infty} F(l) \alpha(l)$$

$$\int_0^l \left(\frac{d^2}{dx^2} [EJ f_i''] \right) f_j dx = \text{viene + comodo scrivere le derivate come opici ora}$$

$$= \int_0^l [EJ f_i'']'' f_j dx = \left[f_j (EJ f_i''') \right]_0^l - \int_0^l f_j' [EJ f_i'']' dx$$

PER PARTI \downarrow $f_i'''(0) = f_i'''(l) = 0$ \uparrow PER PARTI
 $f_i'''(0) = f_i'''(l) = 0$

$$= - \left[f_j' (EJ f_i'') \right]_0^l + \int_0^l f_j'' f_i'' EJ dx$$

$f_i''(0) = f_i''(l) = 0$ S_{ij}

NOTA: f_i, f_j SONO FUNZIONI DI FORMA DA NOI SCELTE E LE SAPPIAMO SIA INTEGRARE SIA DERIVARE!

$$\int_0^l [F(x) f_i'] f_j dx = \left[f_j \cdot F \cdot f_i' \right]_0^l - \int_0^l f_j' \cdot f_i \cdot F(x) dx$$

PER PARTI \uparrow \downarrow
 $F(l) f_i'(l) f_j(l)$
 A_{ij}

→ SISTEMA OMOGENEO DI n equaz. in n incognite

$$([S] - p^{\infty} [B]) \{q\} = \{0\}$$

22 EQUAZIONE DI BERNOULLI GENERALIZZATA \bar{e}

EQ. DI LORD KELVIN: espressione e condizioni
x scrittura

FLUSSO IRROTAZIONALE $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$

→ EQUAZIONE POTENZIALE

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad \text{con} \quad \begin{aligned} V_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ V_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ V_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}$$

*EQ. QDM

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \vec{V} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

SI COSE FLUSSO È IRROTAZ:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$

→ eq. QDM:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

→ Riduce incognite da 6 a 4: Φ, p, ρ, τ

servono ancora 2 equazioni
x chiudere il problema

eq. di stato + isentropic

$$\frac{p}{\rho} = R^* T, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = e^{s/cv} = \text{cost}$$

EQUAZIONE DELLE PRESSIONI

EQ. QDM*

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

EQ. DELLE PRESSIONI
+
EQ. DEL POTENZIALE
[n° 23]

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \int \frac{dp}{\rho}$$

POSSIAMO DIRLO SOLO SE
 p È SOLO FUNZIONE DI ρ
 $p = f(\rho)$

→ FLUIDO BAROTROPICO

(un'isentrofica è anch' barotropica)

→ $\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$ integriamo sullo spazio

⇒ $\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t) \right]$ BERNOULLI GENERALIZZATO

$F(t)$ = livello energetico del campo

↳ CONDIZIONI DI ∞ A MONTE, \bar{e} cost nel tempo pure

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \frac{V_0^2}{2}$$

CASO INCOMPRESSIBILE e STAZIONARIO

$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \rho = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$

[23] EQ. DEL POTENZIALE MOTI COMPRESSIBILI INSTAZIONARI
CONDIZIONI * ESISTENZA

... continua da 22

• $\nabla \times \vec{v} = 0$ FLUSSO IRROTAZIONALE

EQ. DI CONTINUITÀ

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla^2 \phi$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi + \vec{v} \cdot \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Da EQ. QDM per flussi irrotazionali si può dire che:

$$\text{EQ. QDM} \quad \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s \rightarrow \boxed{\nabla p = c^2 \nabla \rho}$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} c^2 \nabla \rho$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) = -c^2 \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)$$

$$\rightarrow \vec{v} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right)$$

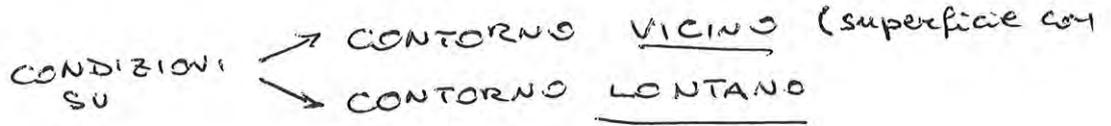
$$= -\frac{1}{c^2} \left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \right]$$

immagino sia $\frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$

24 CONDIZIONI AL CONTORNO PER MOTO INSTAZIONARIO

Compo aeronautico: 2 tipi di condizioni al contorno



LONTANO

INCOMP: disturbo svanisce istantaneamente

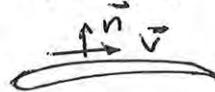
COMP: onda d'urto in flusso ideale non svanisce all'infinito!

⇒ IL DISTURBO DEVE ESSERE RAPPRESENTATO DA UN'ONDA CHE SI ALLONTANA (condizione di IRRACCIAMENTO di SEMMERFELD)

VICINO (su superficie del corpo)

→ impone condizione di TANGENZA / ADERENZA

STAZIONARIO: $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$

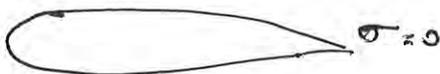


$$\frac{dy^+}{dx} = \alpha + \frac{v^+}{V_0}$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{w'}{V_0} \right]$$

INSTAZIONARIO: la componente di \vec{V} + alla superficie in un punto deve essere uguale alla velocità della superficie in quel punto

⇒ VELOCITÀ NORMALE RELATIVA AL CORPO = 0



$\sigma = 0$ FUNZIONE ANDAMENTO SUPERFICIE

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \sigma = 0$$

LA PARTICELLA DEVE STARE TANGENTE ALLA SUPERFICIE

$$z^+ = z^+(x, y, t) \quad z^- = z^-(x, y, t) \quad \sigma(x, y, z, t) = z - z^+(x, y, t) = 0$$

$$\frac{D\sigma}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial z^+}{\partial t} + V_x \frac{\partial z^+}{\partial x} + V_y \frac{\partial z^+}{\partial y} + V_z \frac{\partial z^+}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \left[V_z = \frac{\partial z^+}{\partial t} + V_x \frac{\partial z^+}{\partial x} + V_y \frac{\partial z^+}{\partial y} \right]$$

CONDIZ. TANG. INSTAZ. (5)

Aerodinamica INSTAZIONARIA = PROPAGAZIONE DI
delle piccole perturbazioni ONDE SONORE

EQUAZIONE
DELLE ONDE
CLASSICA

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

PROPAGAZIONE ONDE IN MEZZO A RIPOS.

EQUAZIONE
CONVETTIVA
DELLE ONDE

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2_\infty} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 V_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]$$

→ propagazione
di onde in mezzo
in moto a V_∞

TRASFORMAZIONE GALILEIANA

$$\begin{aligned} X &= x - V_\infty t \\ Y &= y \\ Z &= z \\ t &= t \end{aligned}$$

$$\frac{D^2 \varphi}{Dt^2}$$

seconda
DERIVATA LAGRANGIANA LINEARIZZATA

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2}(\cdot) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + V_\infty \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + V_\infty \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \right) \\ &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2} + 2 V_\infty \frac{\partial(\cdot)}{\partial x \partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2_\infty} \frac{D^2 \varphi}{Dt^2} \right]$$

Da Bernoulli generalizzato

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2 - V_{\infty}^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0$$

con $F(t) = \frac{V^2}{2}$ $G(t) = 0$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = -\psi$$

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2 - V_{\infty}^2}{2} = \text{LINEARIZZANDO}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(V_{\infty} + u)^2 + v^2 + w^2 - V_{\infty}^2}{2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (V_{\infty}^2 + 2V_{\infty}u - V_{\infty}^2)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + V_{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{D\phi}{Dt}$$

SE SI LINEARIZZA IL POTENZIALE DELLE ACCELERAZ. È LA DERIVATA LAGRANGIANA DEL POTENZIALE DELLE VELOCITÀ

$$\psi = \frac{D\phi}{Dt}$$

VANTAGGI RISPETTO A POTENZIALE DELLE VELOCITÀ:

Derivando l'eq. convettiva delle onde si ottiene

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \psi}{Dt^2}$$

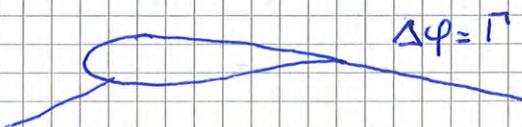
Sia ϕ che ψ soddisfanno la stessa equazione indefinita e

TUTTE LE SOLUZIONI GIÀ DISPONIBILI PER ϕ SONO USABILI PER ψ (sorgenti, vortici, doppiette)

➔ CAMBIANO LE CONDIZIONI AL CONTORNO E QUI CI SONO I VANTAGGI DI USARE ψ .

ϕ : DISCONTINUITÀ NEL CAMPO DI MOTO, per esempio nel bordo di fuga del profilo

ψ : PROPORZIONALE AL DISTURBO DI PRESSIONE ED È CONTINUO IN TUTTO IL CAMPO



$\Delta \psi = \Gamma$ → DISCONTINUITÀ VA IMPOSTA IN B.C. MA NELL'INSTAZIONARIO LA LINEA DI DISCONTINUITÀ NON È NOTA A PRIORI!!

STAZ: LINEA DI DISCONTINUITÀ FISSA

IN STAZ: " " " QUIZZA e si muove

ψ essendo continuo SEMPLIFICA IL PROBLEMA

CAMPI DI MOTO INCOMPRESSIBILI PIANI

30) CONDIZIONI PER INCOMPRESSIBILITÀ MOTI INSTAZIONARI

EQ. QDM $\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$

IPOTESI $\frac{\delta p}{\rho_0} \ll 1$

SI VUOL FARE UN'ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA: SOTTO QUALI CONDIZIONI L'EQUAZIONE CONSERVA I SUOI TERMINI CON L'IPOTESI CHE $\delta p \ll \rho_0$?

$\vec{\nabla}_p = \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_{is} \cdot \vec{\nabla}_p = c_0^2 \cdot \vec{\nabla}_\rho$

pedice "0":
CONDIZIONE DI RIFERIMENTO

$\rho = \rho_0 + \delta \rho$

$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_p = \frac{1}{\rho} c_0^2 \vec{\nabla}_\rho = \frac{c_0^2}{\rho_0 + \delta \rho} \vec{\nabla}_\rho = \frac{c_0^2}{\rho_0 (1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0})} \vec{\nabla}_\rho$

$\approx \frac{c_0^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \vec{\nabla}_\rho$

$\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \approx -\frac{c_0^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \vec{\nabla}_\rho$

SCALE U, L, T

$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{c_0^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \frac{\delta \rho}{L} \approx \frac{c_0^2 \delta \rho}{L \rho_0}$

L'EQUAZIONE CONSERVA TUTTI I SUOI TERMINI SOLO SE QUESTI SONO DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA

3° vs 2°

$\frac{c_0^2 \delta \rho}{L \rho_0} \approx \frac{U^2}{L} \rightarrow \frac{\delta \rho}{\rho_0} \approx \left(\frac{U^2}{c_0^2} \right) \downarrow M^2$

3° vs 1°

$\frac{c_0^2 \delta \rho}{L \rho_0} \approx \frac{U}{T} \rightarrow \frac{\delta \rho}{\rho_0} \approx \left(\frac{U}{c_0^2} \frac{L}{T} \right) = \left(M \frac{L}{c_0 T} \right)$

Per avere $\frac{\delta \rho}{\rho_0} \ll 1$ BISOGNA AVERE

$M^2 \ll 1$

$M \frac{L}{c_0 T} \ll 1$

NON BASTA $M < 1$. SI VUOLE ANCHE CHE IL TEMPO $\frac{L}{c_0}$ IMPIEGATO DAL DISTURBO AD ATTRAVERSARE IL CAMPO SIA PICCOLO RISPETTO AL PERIODO DI VARIAZ. DEL CAMPO. SE $\frac{L}{c_0 T} > 1$ ma M basso è cmq COMPRESSIBILE!!!

$$F_x = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R_0 \cos \Theta d\Theta$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R_0 \sin \Theta d\Theta$$

L'integrazione dei termini stazionari dà zero
MA IL 3° TERMINE DÀ UN RISULTATO $\neq 0$!

$$F_x = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R_0 \cos \Theta d\Theta = + \int_0^{2\pi} \left(\rho \frac{dV_0}{dT} \right) R_0 \cos \Theta \cdot R_0 \cos \Theta d\Theta$$

$$= 2 \rho R_0^2 \frac{dV_0}{dT} \int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta d\Theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta d\Theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta) d\Theta = \pi$$

$$\rightarrow \boxed{F_x = 2\pi \rho R_0^2 \frac{dV_0}{dT}}$$

$$F_y = 0$$

FLUSSO ACCELERATO

$$\frac{dV_0}{dT} > 0 \rightarrow F_x = \text{DRAG}$$

FLUSSO DECELERATO

$$\frac{dV_0}{dT} < 0 \rightarrow F_x = \text{ASPIRAZIONE}$$

- NON C'È + IL PARADOSSO DI D'ALEMBERT
- È UNA FORZA PURAMENTE INERZIALE, no viscosità!

$$F_x = \underbrace{2\pi R_0^2 \rho}_{2M} \cdot \frac{dV_0}{dT}$$

$$M = \pi R_0^2 \cdot \rho = \text{AREA CILINDRO} \times \text{DENSITÀ ARIA}$$

↳ MASSA EQUIVALENTE

M subisce tutta insieme uniformemente la stessa accelerazione, COME UN MATTONI

Risultato cilindro accelerato in flusso in quiete

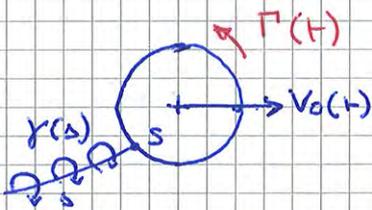
■ RIFERIMENTO INERZIALE \rightarrow non solido o cilindro in moto accelerato

● Problema: eq. Bernoulli generalizz. vale nel riferimento assoluto \Rightarrow BISOGNA RISCRIVERLA IN UN RIFERIMENTO MOBILE \times CALCOLARE LE PRESSIONI SUL CILINDRO

32 DESCRIZIONE QUALITATIVA DEL CAMPO DI MOTO INTORNO A UN CILINDRO CHE ACCELERA IN FLUIDO IDEALE INCOMPRESSIBILE SVILUPPANDO CIRCOLAZIONE

STAZIONARIO: solite cose e puttanote $\rightarrow \Gamma = 4\pi V_0 R_0 \sin \alpha$
 Kutta - Joukowski $L = \rho V_0 \Gamma$ $D = 0$

INSTAZIONARIO



$V_0(t)$: CAMBIA $V_0(t) \rightarrow$ CAMBIA $\Gamma(t)$

LAGRANGE - THOMSON

SE NASCE $+\Gamma$ SUL CILINDRO, DOVRA' NASCERE DA QUALCUN' PARTE UN $-\Gamma$ CHE COMPENSI

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

VORTICITÀ $-\Gamma$ NASCE SUL CILINDRO MA NON PUO' DIFFONDERE ALL'ESTERNO XK NON C'E' LA VISCOSITA'

\rightarrow LA VORTICITÀ $\gamma(s)$ VIENE TRASCINATA VIA DALLA LINEA DI CORRENTE \rightarrow CHE SI STACCA DA S

$$\int \gamma(s) ds = -\Gamma(t)$$

S: imposto essere punto di arresto posteriore

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{r=R_0} = 0 \text{ per } \theta = \pi + \alpha$$

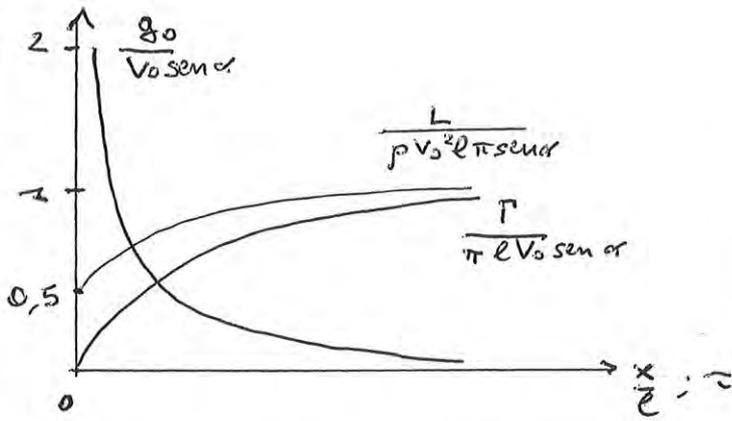
VORTICI DI SCIA INDUCONO VELOCITA' SUL CILINDRO

\rightarrow CONTA LA TIME HISTORY!

$$V_0 \uparrow \rightarrow \Gamma \uparrow \rightarrow \gamma(s) \uparrow$$

$$\phi(r, \theta, t) = -V_0(t) \left(r + \frac{R_0^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \theta + \int_s \frac{\gamma(\lambda, t)}{2\pi} \theta' d\lambda$$

CONTRIBUTO NON STAZIONARIO AL POTENZIALE DELLA VELOCITA'



DA WAGNER CHE NON
DANNO IL RAPPORTO
TRA LA LIFT
ISTANTANEA E
QUELLA DI REGIME

- MASSIMA DENSITÀ DI VORTICITÀ NELL'INTORNO DEL PUNTO DI PARTENZA
- TRASCORSO UN TEMPO $\infty \rightarrow$ STAZIONARIO
 \Rightarrow NON È STATA + IMMESA VORTICITÀ IN SCIA e quella abbandonata all'avvio NON INDUCE PIÙ VELOCITÀ SULLA LAMINA
- PORTANZA: PICCOLO ALL'INIZIO E UN Istante + TARDI È AL 50% DI QUELLA A REGIME
 \rightarrow NON VALE + KUTA JOUKOWSKI

Howe: FUNZIONE DI WAGNER

=
RISPOSTA in termini di LIFT ad una portanza a gradino della lamina piana.

KÜSSNER

\rightarrow RISPOSTA in termini di LIFT all'ingresso ~~o gradino~~ in una soffice a gradino

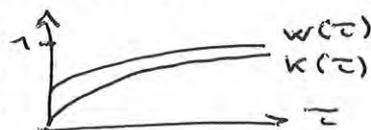


- SI TRASCURA IL TEMPO FINITO $\frac{l}{V_0}$ CHE LA LAMINA INTERA IMPIEGA A SUPERARE IL FRONTE DI RIFLESSA
- \rightarrow È COME SE ACQUISISSE Istantaneamente UNA

$\alpha_{cinematica} = \frac{w_0}{V_0}$

In realtà non si può trascurare: $\tau = \frac{V_0 t}{l} =$ TEMPO ADIMENS.
TRA SCORSO DA QUANDO IL BORDO DI ATTACCO HA SUPERATO IL FRONTE

$K(0) = 0$ non c'è Lift appena entrati!



$K(\tau) = \frac{L}{\rho V_0^2 l \sin(\frac{w_0}{V_0})}$

35

PROFILI SOTTILI IN REGIME INSTAZIONARIO; DISTRIBUZIONI VORTICOSE NECESSARIE E LORO LEGAME

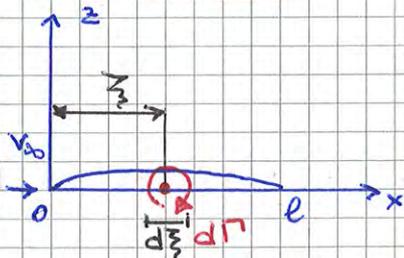
Modellizzare il campo di moto intorno al profilo

→ SI POTREBBERO USARE LE TRASFORMAZIONI CONFORMI COME HA FATTO WAGNER PER PASSARE DA CILINDRO A LAMINA PIANA PERO' QUESTO APPROCCIO SI LIMITA AL 2D

⇒ usiamo **METODO DELLE SINGOLARITA' DISTRIBUITE** (metodo delle piccole perturbazioni) → SI ESTENDE POI ANCHE AL 3D

Stazionario

INCOMPRESSIBILE]



$\nabla^2 \phi = 0$ → si cerca come soluzioni

• CONDIZ. TANGENZA: $w_c(x) = V_{\infty} \frac{dz_c}{dx}$

• LINEA D'ASSE MODELLIZZATA COME VORTICE

$d\Gamma = \gamma_y(\xi) \cdot d\xi$; $w_c(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi}$

[...]

$\Delta C_p = 2 \frac{\gamma_y(x)}{V_{\infty}}$

$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \Delta C_p = \rho V_{\infty} \gamma_y(x)$

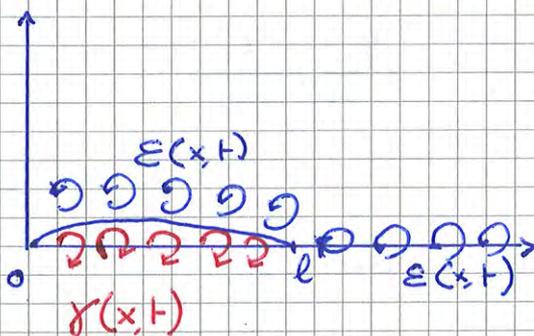
KUTTA JOUKOWSKI

$L = \int \Delta p(x) dx = \rho V_{\infty} \int_0^l \gamma_y(x) dx = \rho V_{\infty} \Gamma$

Instazionario

→ PROFILO CHE AVANZA CON V_{∞} COMPIENDO MOTI (OSCILLATORI) DI PICCOLA AMPIEZZA
 → TRASLAZIONI $\perp V_{\infty}$
 → ROTAZIONI ATTORNO A UN PUNTO A } FLUIDO IN QUIETE

$V_{\infty} = \text{cost}$ → trasformazione Galileiana



• **ACCELERAZIONE**

↳ **CIRCOLAZIONE VARIABILE SUL PROFILO $\gamma(t)$**

Lagrange-Thomson: $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$

⇒ **NASCE UN CONTRO-VORTICE $E(t)$**

- $\gamma(t)$ VARIA Istante x Istante
- RILASCIATA ELEMENTI VORTICOSI $E(t)$ UGUALI IN MODULO MA DI VERSO OPPOSTO CHE VENGONO CONVOGLIATI A VALLE DA V_{∞} A FORMARE LA SCIA

⇒ 2 DISTRIBUZIONI DI VORTICITA'

$\gamma(x,t)$: **VORTICITA' ADERENTE**, evoluzione di quella stazionaria

$E(x,t)$: **VORTICITA' LIBERA**, sta sul profilo e poi pure sulla scia

36 PROFILI SOTILI REGIME STAZIONARIO:
 LEGAME TRA ΔC_p E VALORE LOCALE DELLA VORTICITÀ

Equazione delle pressioni linearizzata

$$p - p_{\infty} = -\rho_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho_{\infty} V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\rightarrow C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} = -\frac{2}{V_{\infty}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{2}{V_{\infty}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$C_p = -\frac{2}{V_{\infty}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{V_{\infty}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\Delta C_p = -\frac{2}{V_{\infty}} \frac{\partial (\Delta \varphi)}{\partial x} - \frac{2}{V_{\infty}^2} \frac{\partial (\Delta \varphi)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial (\Delta \varphi)}{\partial x} = \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \Delta u = -\gamma - \varepsilon$$

DISTURBO LOCALE DI VELOCITÀ: DATO DA $\gamma + \varepsilon$

$$\Rightarrow -\frac{2}{V_{\infty}} \Delta u = -\frac{2}{V_{\infty}} (-\gamma - \varepsilon)$$

Perciò:

$$\Delta C_p = \underbrace{\frac{2\gamma(x,t)}{V_{\infty}}}_{\text{COME STAB.}} + \left[\frac{2}{V_{\infty}} \left[\varepsilon(x,t) - \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial (\Delta \varphi)}{\partial t} \right] \right]$$

Dimostriamo che [...] è nullo:

• DERIVATA RISPETTO A X DI [...]

$$\frac{\partial}{\partial x} [] = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$\Delta u = -\gamma - \varepsilon$$

$$= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u$$

$$= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{V_{\infty}} \left(V_{\infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow = \frac{1}{V_{\infty}} \left(\frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \quad \text{MA} \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [] = 0 \Rightarrow$ COSTANTE LUNGO X. VISTO CHE PER $x < 0$ γ e ε mancano esistono $\Rightarrow [\dots]$ sono nulle ovunque

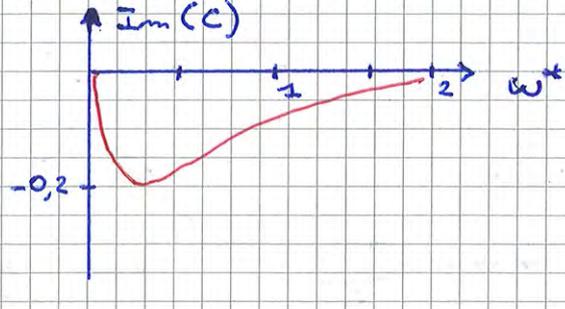
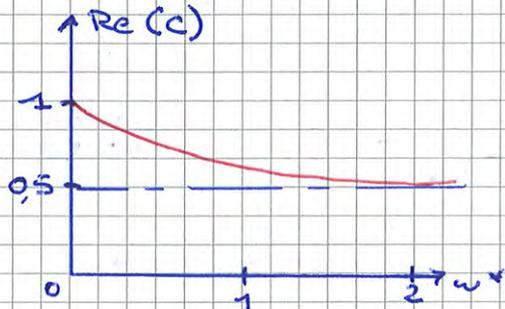
$$\rightarrow \Delta C_p = \frac{2\gamma(x,t)}{V_{\infty}}$$

che ha risolto il problema partendo dalle trasformazioni conformi.

Funzione di Theodorsen

$$C(w^*) = \frac{1 + T(w^*)}{2}$$

SERVE PER CALCOLARSI LA RISPOSTA IN FREQUENZA IN TERMINI DI FORZE AERODINAMICHE! (circolatorie)



AERONAUTICA: $w^* = 0 \div 2$

Re(c): SEMPRE > 0 , asintotico con $= 0,5$

Im(c): SEMPRE < 0 .

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO AERODINAMICHE

Considerando l'ala con 3 GDL: \bar{h} , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$

3 INPUT, 3 OUTPUT \rightarrow 9 FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Risposte in frequenza SPECIFICHE

$$\bar{L} = H_{Lh}(w^*) \frac{\bar{h}}{e} + H_{L\alpha}(w^*) \bar{\alpha} + H_{L\beta}(w^*) \bar{\beta}$$

$$\bar{M}_A = H_{MAh}(w^*) \frac{\bar{h}}{e} + H_{MA\alpha}(w^*) \bar{\alpha} + H_{M\beta}(w^*) \bar{\beta}$$

$$\bar{M}_R = H_{Rh}(w^*) \frac{\bar{h}}{e} + H_{R\alpha}(w^*) \bar{\alpha} + H_{R\beta}(w^*) \bar{\beta}$$

$$H_{Lh}(w^*) = \frac{\bar{L}}{\bar{h}/e}$$

Resta comunque valido che:

$$\bar{L} = \bar{L}_{nc} + \bar{L}_c$$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_{Anc} + \bar{M}_{Ac}$$

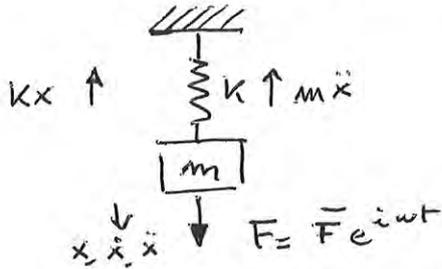
$$\bar{M}_R = \bar{M}_{Rnc} + \bar{M}_{Rc}$$

↑
FUNZIONE DI THEODORSEN

(39) IMPORTANZA DELLE PARTI IMMAGINARIE DELLE FORZE AERODINAMICHE AI FINI DI AMPLIFICAZIONE / SMORZAMENTO OSCILLAZIONI

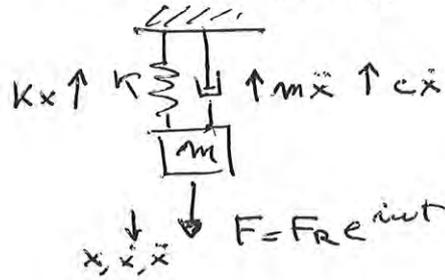
CONFRONTO TRA 2 SISTEMI:

NON SMORZATO CON FORZANTE COMPLESSA



$$F = (F_r + i F_i) e^{i\omega t}$$

SMORZATO CON FORZANTE REALE



EQUAZIONI DEL LOTO

$$-m\ddot{x} - Kx + (F_r + i F_i) e^{i\omega t} = 0 \quad | \quad -m\ddot{x} - c\dot{x} - Kx + F_r e^{i\omega t} = 0$$

$$x = \bar{x} e^{i\omega t}$$

$$\dot{x} = i\omega \bar{x} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \bar{x} e^{i\omega t}$$

$$m\omega^2 \bar{x} - K\bar{x} + i F_i \bar{x} + F_r = 0 \quad | \quad m\omega^2 \bar{x} - i\omega c \bar{x} - K\bar{x} + F_r = 0$$

PARTI IMMAGINARIE
 QUADRATURA DI FASE
 → fungono da SMORZATORE / AMPLIFICATORE

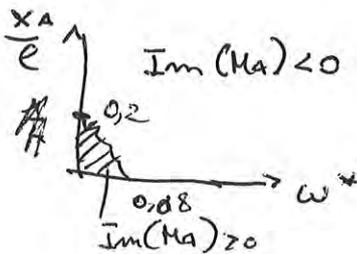
$$i F_i = -i\omega c \bar{x} \Rightarrow \begin{cases} F_i > 0 & \text{AMPLIFICA} \\ F_i < 0 & \text{SMORZA} \end{cases}$$

($F_i > 0 \rightarrow c < 0$)

Esempio oscillazioni verticali pure

$$\text{Im}(\bar{L}) = - \dots \text{Re}[c(\omega^*)] < 0 \Rightarrow \text{OSCILLAZIONI VERTICALI PURE (1 GD)} \\ > 0 \text{ sempre} \Rightarrow \text{SONO SEMPRE SMORZATE}$$

Oscillazioni di beccheggio puro



INSTABILITÀ SOLO SE
 • Punto rotazione A è vicino a leading edge
 • $\omega^* < 0,1$ (molto basse)

CAMPI COMPRESSIBILI IN STAZIONARI FLUIDO IN QUIETE

42 CAMPO GENERATO DA SORGENTE DI PORTATA VARIABLE IN MEZZO COMPRESSIBILE IN QUIETE, TEMPO DI RITARDO

FLUIDO IN QUIETE

$\phi = \varphi$ $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ $v_x = 0$

EQ. DELLE ONDE

$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t^2}$

$C_p = -\frac{z}{v_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{z}{v_\infty^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$

DISTURBO DI PRESSIONE

$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 C_p = -\rho v_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow p - p_0 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$

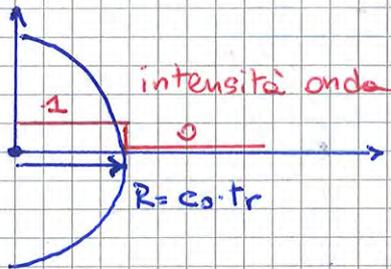
SOLUZIONE EQ. ONDE \rightarrow POTENZIALE SORGENTE SFERICA ATTIVATA A GRADINO

$\phi(R, t) = -\frac{Q}{4\pi R} H\left(t - \frac{R}{c_0}\right)$ $H\left(t - \frac{R}{c_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < R/c_0 \\ 1 & \text{se } t > R/c_0 \end{cases}$

$t_r = \frac{R}{c_0} =$ tempo di ritardo

\Rightarrow tempo che il disturbo generato nell'origine

IMPIEGA AD ARRIVARE A UN OSSERVATORE IN R

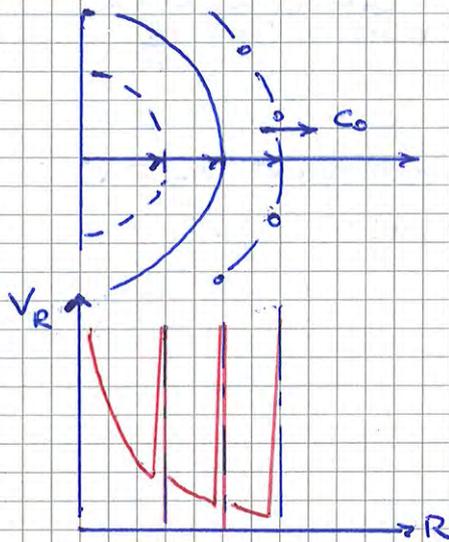


CAMPO STAZIONARIO

FRONTE D'ONDA CHE AVANZA

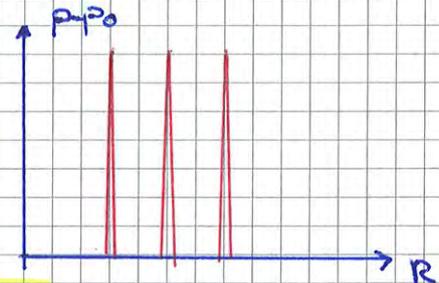
ZERO DISTURBO

CAMPO DI VELOCITÀ



DISTURBO DI PRESSIONE

$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$
 $= -\rho \frac{Q}{4\pi R} \delta\left(t - \frac{R}{c_0}\right)$



$v_R(R) = \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{Q}{4\pi R c_0} \delta\left(t - \frac{R}{c_0}\right) + \frac{Q}{4\pi R^2} H\left(t - \frac{R}{c_0}\right)$

- VELOCITÀ DISCONTINUA A TRAVERSO FRONTE D'ONDA, IL QUALE PROPAGA A VELOCITÀ c_0
- IMPULSO DI VELOCITÀ, LASCIA DIETRO CAMPO STAZIONARIO
- PRESSIONE: IMPULSO CHE PROPAGA A c_0 e LASCIA PRESSIONE INDISTURBATA DIETRO e DAVANTI A SE

DA QUESTI SI DEDUCE IL CAMPO X LA SORGENTE ARMONICA

43 CARATTERISTICHE DEL CAMPO DI UNA SORGENTE IMPROVVISAMENTE ATTIVATA IN UNA CORRENTE COMPRESSIBILE SUBSONICA

L'ONDA DEL DISTURBO ORA È TRASCINATA A VALLE DA V_0

→ EQ. CONVETTIVA DELLE ONDE

[Istazionario]

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\beta_\infty = \begin{cases} \sqrt{1 - M_\infty^2} & \text{se } M_\infty < 1 \\ \sqrt{M_\infty^2 - 1} & \text{se } M_\infty > 1 \end{cases}$$

SUBSONICO

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

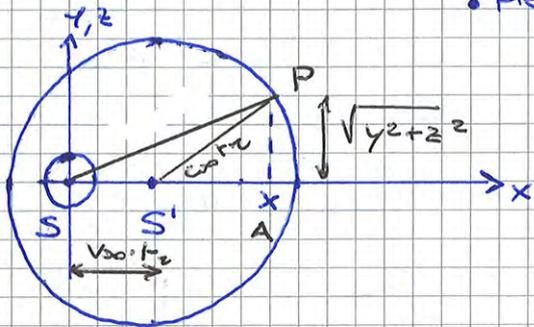
EQ. ELLITTICA

SUPERSONICO

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

EQ. IPERBOLICA

INSTAZIONARIO ⇒ È SEMPRE UN'EQUAZIONE IPERBOLICA
• PRINCIPIO DI CAUSALITÀ



■ ONDA AVANZA CON VELOCITÀ c_0 ED È TRASCINATA DA V_0
⇒ CONVEZIONE

• OSSERVATORE IN P RICEVE IL DISTURBO DOPO UN TEMPO DI RITARDO

$$t_r \neq \frac{R}{c_0}$$

! DIVERSO DA PRIMA XK C'È PURA V_0 !

• Per P è come se la sorgente fosse in S'.

■ COSTRUZIONE:

$$SP'^2 = \sqrt{AS'^2 + AP^2} \Rightarrow SP'^2 = AS'^2 + AP^2$$

$$c_0^2 t_r^2 = (x - V_0 t_r)^2 + y^2 + z^2$$

$$= x^2 - 2V_0 t_r x + V_0^2 t_r^2 + y^2 + z^2$$

$$(V_0^2 - c_0^2) t_r^2 - 2V_0 t_r x + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$\frac{(c_0^2 - V_0^2) t_r^2}{c_0^2} + \frac{2V_0 t_r x}{c_0^2} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{c_0^2} = 0$$

$$= (1 - M_\infty^2) t_r^2 + 2 \frac{M_\infty}{c_0} t_r x - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{c_0^2} = 0$$

EQ. ALGEBRICA DI 2° GRADO IN t_r .

SUBSONICO ≠ CALCOLO DEL TEMPO DI RITARDO ≠

$$+ \beta^2 t_r^2 + 2 \frac{M_\infty}{c_0} x t_r - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{c_0^2} = 0$$

$$t_{r,1,2} = - \frac{2 M_\infty x}{2 \beta^2 c_0} \pm \frac{1}{2 \beta^2} \sqrt{\frac{4 M_\infty^2 x^2}{c_0^2} + \frac{4 \beta^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{c_0^2}}$$

COME PRIMA... STAVOLTA PERÒ SI HANNO 2 TEMPI DI RITARDO POSITIVI!!!

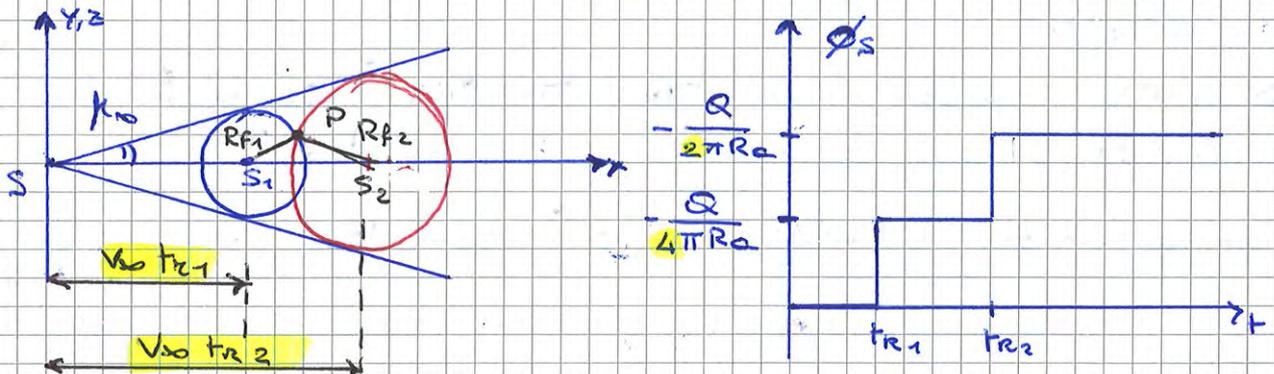
$$t_{r_{1,2}} = \frac{2M_0 x}{\beta_{\infty}^2 c_0} \pm \sqrt{\frac{4M_0^2 x^2 - 4\beta^2(x^2 + y^2 + z^2)}{4\beta_{\infty}^2 c_0^2}}$$

$$= \frac{M_0 \cdot x \pm \sqrt{x^2 - \beta^2(y^2 + z^2)}}{\beta_{\infty}^2 c_0}$$

$$R_0 = \sqrt{x^2 - \beta^2(y^2 + z^2)}$$

$$t_{r_{1,2}} = \frac{M_0 \cdot x \pm R_0}{\beta_{\infty}^2 c_0} = \frac{R_{P_{1,2}}}{c_0}$$

2 TEMPI DI RITARDO: 1° IL FRONTE PRENDE FRONTALMENTE IL PUNTO P
 2° IL FRONTE COLPISCE POSTERIORMENTE P MENTRE FINISCE DI ATTRAVERSARLO



$$\phi_s(x, y, z, t) = -\frac{Q}{4\pi R_0} \left[H\left(t - \frac{R_{P1}}{c_0}\right) + H\left(t - \frac{R_{P2}}{c_0}\right) \right]$$

Perché il potenziale del campo dopo t_{r2} vale il DOPPIO? $\frac{1}{2\pi}$ invece di $\frac{1}{4\pi}$?

⇒ PERCHÉ HA SENTITO DUE VOLTE LO STESSO SEGNALE E L'INTENSITÀ DEL CAMPO RISULTA DOPPIA!!!

AEROELASTICITÀ DINAMICA

46 RISPOSTA AEROELASTICA DI PROFILO SOTTILE AD INPUT AERODINAMICO GENERICO: inerzia, rigidità, smorzamento aerodinamici

DISTURBO GENERICO

COSTRUZIONE DI RISPOSTE INDICIALI ALLE PERTURBAZIONI

2 GDL: $\begin{matrix} h(t) \\ \alpha(t) \end{matrix} \rightarrow \text{INPUT} \quad \left. \begin{matrix} \alpha - \frac{h}{V_{\infty}} \int_1^1 \\ \dot{\alpha} \int_1^1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 4 \text{ funzioni di} \\ \text{trasporto} \\ (\text{ammoltenze specifiche}) \end{matrix}$

$\Delta = \frac{V_{\infty} \Gamma}{e}$ VARIABILE TEMPORALE ADIMENSIONALE

$A_{L\alpha}(\Delta)$: RISPOSTA IN TERMINI DI PORTANZA ALL'ASSEGNAZIONE DI UN' INCIDENZA (unitaria) A GRADINO

$\begin{matrix} A_{h\alpha}(\Delta) \\ A_{L\dot{\alpha}}(\Delta) \\ A_{h\dot{\alpha}}(\Delta) \end{matrix} + \begin{matrix} A_{L\alpha} \\ A_{M\dot{\alpha}} \end{matrix} \text{ (Risposta a raffica)}$

Integrale di Duhamel \rightarrow RISPOSTE INDICIALI

EQUILIBRIO DINAMICO AEROELASTICO 2 GDL

$$\begin{cases} M\ddot{h} - S_{\alpha} \ddot{\theta} + K_R \cdot h = L(t) \\ I_{\alpha} \ddot{\theta} - S_{\alpha} \dot{h} + K_{\alpha} \cdot \theta = M_T(t) \end{cases}$$

PORTANZA NEL CENTRO DI TAGLIO
MOMENTO ATTORNO ASSE ELASTICO

⚠ MOMENTI VANNO CALCOLATI ATTORNO AL C.T. MA LE AMMETTENZE SPECIFICHE LI DANNO ATTORNO AL GENERICO PUNTO A \neq C.T.

\Rightarrow Momento di trasporto

$M_T(t) = M_A(t) + L(t)(x_{ct} - x_A)$

$(A_{M_T})_{ct} = (A_{M_A})_A + A_{L\alpha}(\bar{x}_{ct} - \bar{x}_A) \quad \bar{x} = \frac{x}{c}$

$(A_{M_{\dot{\alpha}}})_{ct} = (A_{M_{\dot{\alpha}}})_A + A_{L\dot{\alpha}}(\bar{x}_{ct} - \bar{x}_A)$

$|S_{\alpha}|$: ACCOPPIAMENTO DI MOTO VERTICALE E ROTAZIONE

CARICHI:

$$\begin{matrix} L(t) = |L^e(t)| + |L^g(t)| \\ M(t) = |M^e(t)| + |M^g(t)| \end{matrix}$$

e = elastici

g = geometrici

\rightarrow INDIPENDENTI DA DEFORMAZIONI

TERMINI NOTI \rightarrow FORZANTI

VANNO AL 1° MEMBRO XX DIPENDONO DA $\theta, \dot{\theta}, h, \dot{h}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{h} - S_{\alpha} \ddot{\theta} + K_R \cdot h - L^{(e)}(t) = L^g(t) \\ I_{\alpha} \ddot{\theta} - S_{\alpha} \dot{h} + K_{\alpha} \cdot \theta - M_T^{(e)}(t) = M^g(t) \end{cases}$$

47 RISPOSTA AEROELASTICA A INPUT ARMONICO:
funzioni di trasferimento aeroelastiche

CARICHI ARMONICI

$$\begin{cases} M\ddot{h} - S_\alpha \ddot{\theta} + K_h \cdot h = L^e(t) + L^g(t) \\ I_\alpha \ddot{\theta} - S_\alpha \ddot{h} + K_\alpha \cdot \theta = M^e(t) + M^g(t) \end{cases}$$

→ $L^e = \bar{L}^e e^{i\omega t}$ $M^e(t) = \bar{M}^e e^{i\omega t}$ $h(t) = \bar{h} e^{i\omega t}$ $\theta(t) = \bar{\theta} e^{i\omega t}$
 $[\dots]$ $\dot{h}(t) = i\omega \bar{h} e^{i\omega t}$
 $\ddot{h}(t) = i^2 \omega^2 \bar{h} e^{i\omega t} = -\omega^2 \bar{h} e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} -M \omega^2 \bar{h} e^{i\omega t} + S_\alpha \omega^2 \bar{\theta} e^{i\omega t} + K_h \bar{h} e^{i\omega t} = \dots \\ -I_\alpha \omega^2 \bar{\theta} e^{i\omega t} + S_\alpha \omega^2 \bar{h} e^{i\omega t} + K_\alpha \bar{\theta} e^{i\omega t} = \bar{M}_T e^{i\omega t} \end{cases}$$

si semplifica $e^{i\omega t}$ e si passa al dominio delle frequenze

$$\begin{aligned} (K_h - \omega^2 M) \bar{h} + \omega^2 S_\alpha \bar{\theta} - \bar{L}^e &= \bar{L}^g \\ \omega^2 S_\alpha \bar{h} + (K_\alpha - I_\alpha \omega^2) \bar{\theta} - \bar{M}_T^e &= \bar{M}_T^g \end{aligned}$$

LE AMPIEZZE DEI CARICHI AERODINAMICI OMOGENEI SI ESPRIMONO IN TERMINI DI FUNZIONI DI TRASFERIMENTO AERODINAMICHE

$$\begin{aligned} \bar{L}^e &= H_{Lh}(\omega^*) \frac{\bar{h}}{e} + H_{L\alpha}(\omega^*) \bar{\theta} \\ \bar{M}_T^e &= H_{Mh}(\omega^*) \frac{\bar{h}}{e} + H_{M\alpha}(\omega^*) \bar{\theta} \end{aligned} \quad \omega^* = \frac{\omega l}{V_\infty}$$

INTRODUCENDO LE PULSAZIONI NATURALI DEL SISTEMA NON SKORZATO

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{M} \quad \omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{I_\alpha}$$

CARICHI AERODINAMICI ESTERNI (→ QUST)

$$\begin{aligned} \bar{L}^g &= H_{Lg}(\omega^*) \frac{w_{Q0}}{V_\infty} \\ \bar{M}_T^g &= H_{Mg}(\omega^*) \frac{w_{Q0}}{V_\infty} \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{bmatrix} Ml(\omega_h^2 - \omega^2) - H_{Lh}(\omega^*) & S_\alpha \omega^2 - H_{L\alpha}(\omega^*) \\ S_\alpha l \omega^2 - H_{Mh}(\omega^*) & I_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - H_{M\alpha}(\omega^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{Lg}(\omega^*) \\ H_{Mg}(\omega^*) \end{bmatrix} \frac{w_{Q0}}{V_\infty}$$

in *aerodinamica* contamina la *meccanica*

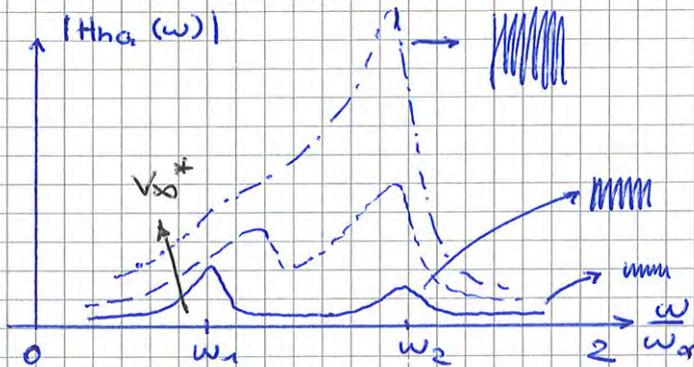
Segue divagazione sul sistema meccanico puro...

MINIMI DI $D(\omega, \omega^*) \rightarrow$ MASSIMI DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO AEROELASTICHE

\rightarrow RISONANZA AEROELASTICA

Δ Le pulsazioni proprie DIPENDONO DA V_{∞} !!!

IL SISTEMA CAMBIA NATURA CON V_{∞} !!! non \downarrow dello smorzamento



$\frac{\omega_h}{\omega_a} =$ RAPPORTO PULSAZIONI DEI MOTI DISACCOPIATI NEL VUOTO

$V_{\infty}^* = \frac{V_{\infty}}{c \cdot \omega_a}$

$V_{\infty} \uparrow$: COALESCENZA DELLE PULSAZIONI PROPRIE

La velocità intorno alla quale coalescono è prossima a quella per cui il sistema diventa DINAMICAMENTE INSTABILE

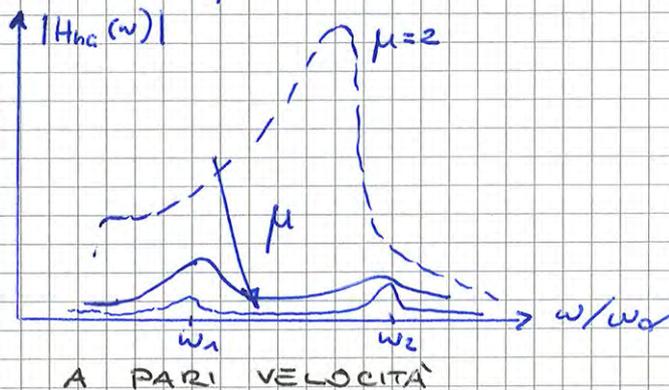
$\mu = \frac{M}{m}$ RAPPORTO TRA MASSA DELLA STRUTTURA E MASSA VIRTUALE DEL FLUIDO CIRCOSTANTE

μ alto = MASSA STRUTTURA INFLUISCE MOLTO PIU' DI QUELLA DEL FLUIDO.

\rightarrow RISPOSTA + DEBOLE

AEREO $\mu > 40$

ALISCAFO $\mu \approx 20$



LA COALESCENZA DELLE PULSAZIONI PROPRIE E' FORTEMENTE ANTICIPATA (\rightarrow a velocità + bassa) SE LA MASSA DEL FLUIDO E' PARAGONABILE A QUELLA DELLA STRUTTURA.

EFFETTI SIMILI CON

- VELOCITA' \uparrow
- oppure
- FLUIDO + PESANTE

CRESCe IMPORTANZA DEI CARICHI AERODINAMICI

! $D(\omega, \omega^*) = 0$

$D \rightarrow$ coeff. complessi : LE CONDIZIONI DI ANNULLAMENTO VANNO CERCATE SEPARATAMENTE PER Re e Im

\rightarrow CI VOGLIAMO 2 VARIABILI INDIPENDENTI : (ω, V_{∞})

\rightarrow COMBINAZIONI CRITICHE (ω, V_{∞}) non valori separati:

$V_b = V_f$ $\omega_i = 0$ $\omega_R = \omega_f$ **CONDIZIONE CRITICA**

RISONANZA: RISPOSTA A UNA FORZANTE CON AMPIEZZA SEMPRE CRESCENTE

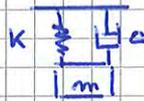
INSTABILITÀ: "RISPOSTA" AMPLIFICATA AD OSCILLAZIONI AUTOECCITATE! → il sistema si auto-distrugge, non c'è una forzante esterna

↳ **OSCILLAZIONE LIBERA AD AMPIEZZA CRESCENTE ⇒ AMPLIFICATA**

51 OSCILLAZIONI CON SMORZAMENTO: decremento logaritmico e modello di smorzamento strutturale.

OSCILLAZIONE LIBERA SMORZATA

$-m\ddot{z} - c\dot{z} - kz = 0$



MECCANICA DELLE VIBRAZIONI
→ SMORZAMENTO VISCOSO O DISSIPATIVO PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_i = \frac{c}{2m}$

• CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO $z(t) = \bar{z} e^{i\omega t}$

$\frac{m\omega^2 \bar{z}}{m} - \frac{ic\omega \bar{z}}{m} - \frac{k\bar{z}}{m} = 0$

→ $\omega^2 - 2i\omega_i \omega - \omega_0^2 = 0$ **EQUAZIONE SECOLARE**

$\omega = \omega_R + i\omega_i$ PULSAZIONE COMPLESSA

Sono possibili moti con ampiezza \bar{z} non nulla solo se ω soddisfa l'eq. secolare.

$\omega_{1,2} = i\omega_i \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega_i^2}$

$\text{Im}(\omega_{1,2}) = \omega_i = \frac{c}{2m}$

$\omega_i > 0$ SE $c > 0$

DECREMENTO LOGARITMICO

$\delta = \ln \frac{z(t)}{z(t+T)}$

RAPPORTO TRA LE AMPIEZZE DOPO UN PERIODO

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\delta = \ln \frac{\bar{z} e^{i\omega t}}{\bar{z} e^{i\omega(t+T)}} = \ln \frac{e^{i\omega t} \cdot e^{-\omega_i t}}{e^{i\omega(t+T)} \cdot e^{-\omega_i(t+T)}}$
 $\omega = \omega_R + i\omega_i$

LA PARTE ARMONICA RESTA UGUALE DOPO UN PERIODO
 $e^{i\omega t} = e^{i\omega(t+T)}$

FLUTTER

52 MODELLO DI PINES PER FLUTTER BINARIO: IPOTESI SEMPLIFICATIVE, RISULTATI IN TERMINI DI EVOLUZIONE DELLE FREQ. PROPRIE, TASSI DI SMORZAMENTO, LIMITI E PRECI DEL MODELLO.

IPOTESI

- FLUSSO INCOMPRESSIBILE
- UTILIZZO FORMULAZIONI QUASI-STAZIONARIO
- NO GRANDE ZEE COMPLESSE

MODELLO ULTRA SEMPLIFICATO

$$\bar{L}^e = p_{\infty}^0 l C_L^e \bar{\theta}$$

$$\bar{M}_T^e = -x_F L^e = -p_{\infty}^0 l x_F C_L^e \bar{\theta}$$

• NON C'È $-\frac{h}{V_{\infty}}$

$\alpha(t) = \alpha - \frac{h}{V_{\infty}}$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO AEROELASTICHE SONO SOLO PIÙ $f(V_{\infty})$

$$H_{L\alpha} = p_{\infty}^0 l C_L^i$$

$$H_{M\alpha} = -p_{\infty}^0 l x_F C_L^i$$

NON DIPENDONO + DA w^* PERCHÉ PER LA FORMULAZ. STAZIONARIA $w = 0$!

$$D(w, V_{\infty}) = 0$$

$$[M_e(w_h^2 - w^2) - H_{Lh}(V_{\infty})][I_{\alpha}(w_{\alpha}^2 - w^2) - H_{M\alpha}(V_{\infty})] + [S_{\alpha} w^2 - H_{L\alpha}(V_{\infty})][S_{\alpha} l w^2 - H_{Mh}(V_{\infty})] = 0$$

NON C'È MOTO h

SI NORMALIZZA CON UN PO' DI PARAMETRI VARI:

$$x_{\alpha} = \sqrt{\frac{I_{\alpha}}{M_e}}$$

RAGGIO INERZIA ADIMENS.

$$x_{\alpha} = \frac{S_{\alpha}}{M_e} = \frac{x_F}{c}$$

POSIZIONE BARICENTRO = MOM. STATICO ADIMENS.

p_{∞}^0 normalizzata con $p_D^0 = -\frac{K_{\alpha}}{l C_L^i x_F}$

$x_F < 0$

Mostrò: SI ARRIVA A UN'EQUAZIONE BIQUADRATICA

$$A \left(\frac{w}{w_{\alpha}}\right)^4 + B \left(\frac{w}{w_{\alpha}}\right)^2 + C = 0$$

MODELLO DI PINES ⇒ SI RIDUCE A UN SEMPLICE STUDIO DELL'EQUAZIONE DELLE FREQUENZE

$$\left(\frac{w}{w_{\alpha}}\right)_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$\Delta > 0$ PER AVERE

PULSAZIONI REALI

⇒ QUELLE CHE CI INTERESSANO

$$B^2 - 4AC = a \left(\frac{p_{\infty}^0}{p_D^0}\right)^2 + b \left(\frac{p_{\infty}^0}{p_D^0}\right) + c > 0$$

Delle 2 soluzioni solo quella con il "-" fa sì che le $\left(\frac{w}{w_{\alpha}}\right)_{1,2}$ siano reali

$$\rightarrow \frac{p_F^0}{p_D^0} \equiv \left(\frac{p_{\infty}^0}{p_D^0}\right)_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Riassumendo

$$\left(\frac{P_F^0}{P_D^0} \right) \begin{cases} \nearrow \text{Re} \\ \searrow > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & (1) \\ B < 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \frac{x_a}{x_p} \left[\frac{x_a}{x_F} - 1 + \frac{w_h^2}{w_a^2} \left(1 - \frac{x_a \tilde{x}_F}{z_a^2} \right) \right] > 0$$

$$(2) \rightarrow 1 - \frac{x_a}{x_p} - \frac{w_h^2}{w_a^2} \left(1 + \frac{x_a}{x_p} - 2 \frac{x_a^2}{z_a^2} \right) > 0$$

C'È FLUTTER \iff ENTRAMBE SONO VERIFICATE

$\frac{w_h}{w_a} \approx 0,8 \approx 1$ $\tilde{x}_F < 0$ SEMPRE x_G DEVE ESSERE
+ AVANTI POSSIBILE
RISPETTO ALL'ASSE ELASTICO

\rightarrow SE $x_a < 0$ SI
SCONGIURA IL FLUTTER
(ma tanto si ha sempre $x_a > 0$)

VANTAGGI e SVANTAGGI PINES

- : approssimato e non adatto a calcoli applicativi

+ : DIMOSTRA LA NON CASUALITÀ DEL LEGAME TRA
 v_F E LA COALESCENZA DELLE FREQUENZE

+ : Si possono fare dei ragionamenti molto significativi
sui parametri geometrici

$$A(\omega^*) \left(\frac{\omega^4}{\omega_0^4} \cdot \frac{1}{(1+ig)^2} \right) + B(\omega^*) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{(1+ig)} \right) + C(\omega^*) = 0$$

Per togliere le quantità immaginarie del denominatore si fa così

$$\lambda = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+ig) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} g$$

$$\rightarrow A(\omega^*) \frac{1}{\lambda^2} + B(\omega^*) \frac{1}{\lambda} + C(\omega^*) = 0$$

$$\Rightarrow A(\omega^*) + B(\omega^*) \lambda + C(\omega^*) \lambda^2 = 0$$

Si studia per $\omega^* = 0 \div 2$: l'eq. è algebrica di 2° grado in λ con 2 soluzioni indipendenti $\lambda_{1,2}$ complesse:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)_{1,2} = \frac{1}{\text{Re}(\lambda)_{1,2}}$$

PULSAZIONI REALI DEI MOTI ARMONICI

$$g_{1,2} = \frac{\text{Im}(\lambda)_{1,2}}{\text{Re}(\lambda)_{1,2}}$$

COEFF. DI SMORZAMENTO NECESSARI A TENERE AMPIEZZA COST

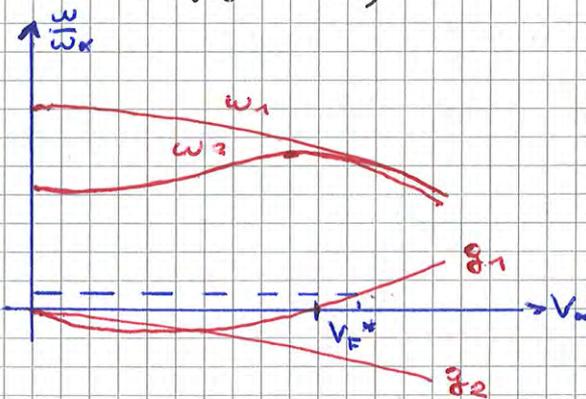
A questo punto si ricorre la V_{00}

$$\omega^* = \frac{\omega l}{V_{00}} = \frac{\omega^*}{\omega/\omega_0} \rightarrow$$

$$V_{00,1,2} = \frac{(\omega/\omega_0)_{1,2}}{\omega^*}$$

Commenti

- SE FOSSE NOTO g_{eff} LA VELOCITÀ CRITICA POTREBBE ESSERE DOVE $g = g_{eff}$ (dove $g=0$ è + cautelativo, e g effettivo non è noto)



- $V_F^* = 0,765$; Pines dà $V_F^* = 0,57$

→ SI VEDE QUANTO È IMPORTANTE MODELIZZARE CORRETTAMENTE X NON AVERE RISULTATI TROPPO CONSERVATIVI (Pines)

◦ COALESCENZA PULSAZIONI NON È COSÌ NETTA

■ A $V_{00} = 0$ NON SI HANNO LE PULSAZIONI PROPRIE PURE DEL SISTEMA MECCANICO XK BISOGNA TENER CONTO DELLE FORZE AERODINAMICHE NON CIRCOLATORIE (che ci sono ank in aria ferma)

△ INTERPRETAZIONE CURVE: NON È L'EVOLUZIONE DI UN UNICO SISTEMA AEROELASTICO MA LA SOVRAPPOSIZ. DI 2 SISTEMI DISTINTI OGNIUNO CON IL SUO g .

$g < 0$ NON SONO SMORZAMENTI REALI! → SMORZAMENTO FIZIZIO (→ semplifico XK $g < 0$) PER TENERE AD AMPIEZZA COSTANTE UN' OSCILLAZIONE CHE IN REALTÀ È GIÀ SMORZATA!

⇒ RISULTATI AFFIDABILI SOLO IN PROSSIMITÀ DI $V_{00} = 0$ e V_F

• MOTI IN θ e ϕ HANNO SMORZAMENTI DIVERSI → CONSIDERARE UN UNICO g È SCORRETTO (NELL'EQUAZIONE)

55 SPIEGAZIONE ENERGETICA DEL FLUTTER

UN' OSCILLAZIONE AUTOECCITATA PUÒ SOSTENERSI SOLO SE C'È UNA SORGENTE DI ENERGIA.

- NO FORZE ESTERNE
- SISTEMA A + GDL, FORZE TRA LORO SFASATE

FORZE AERO, ELASTICHE, INERZIALI

- ▶ LAVORO > 0 SU SISTEMA = OSCILL. AMPLIFICATE
- ▶ LAVORO < 0 SU SISTEMA = OSCILL. SMORZATE !!

Forze inerziali e elastiche → CONSERVATIVE

LAVORO SU CICLO = 0

FORZE AERODINAMICHE → NON CONSERVATIVE

LAVORO SU CICLO ≠ 0



SORGENTE DI ENERGIA

Δ ENERGIA È INIETTABILE SE

- SFASAMENTI OPPORTUNI TRA FORZE E SPOSTAMENTI
- MOTI SIMULTANEI CON + GDL

1 GDL VERIFICA CHE SI HA $\mathcal{L} = 0$

SPOSTAM. ARMONICI $q(t) = \bar{q} e^{i\omega t}$
 $\bar{q} \in \mathbb{R}$

FORZE AERO ARMONICHE $Q(t) = \bar{Q} e^{i\omega t}$
 $\bar{Q} \in \mathbb{C}$

• Lavoro di UN CICLO

$$\mathcal{L} = \int_0^T \text{Re}(Q) \dot{q} dt = \int_0^T \text{Re}(Q) \cdot \text{Re}(\dot{q}) dt$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= i\omega \bar{q} e^{i\omega t} \\ &= i\omega \bar{q} \cos \omega t + i\omega \bar{q} \cdot (i) \sin \omega t \\ &= \underbrace{-\omega \bar{q} \sin \omega t}_{\text{Re}(\dot{q})} + i\omega \bar{q} \cos \omega t \end{aligned}$$

LAVORO DEL CICLO

$\mathcal{L} > 0$ IMMETTE ENERGIA

$\mathcal{L} < 0$ ESTRAE ENERGIA

$$\begin{aligned} \text{Re}(Q) &= \text{Re}[(Q_R + iQ_i)(\cos \omega t + i \sin \omega t)] \\ &= Q_R \cos \omega t - Q_i \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}(Q) \cdot \text{Re}(\dot{q}) dt = -\omega \bar{q} \int_0^{2\pi} (Q_R \cos \omega t - Q_i \sin \omega t) \sin \omega t dt \\ &= -\bar{q} \int_0^{2\pi} \dots d(\omega t) = -\bar{q} Q_R \int_0^{2\pi} \cos \omega t \sin \omega t dt + \bar{q} Q_i \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \pi \bar{q} \bar{Q}_i$$

IL LAVORO DI UN CICLO HA LO STESSO SEGNO DELLA PARTE IMMAGINARIA DELLA FORZA AERODINAMICA

56 PARAMETRI FISICI INFLUENTI SU VELOCITÀ DI FLUTTER

FLUTTER CLASSICO È CONTROLLATO DA QUESTI PARAMETRI ADIMENSIONALI:

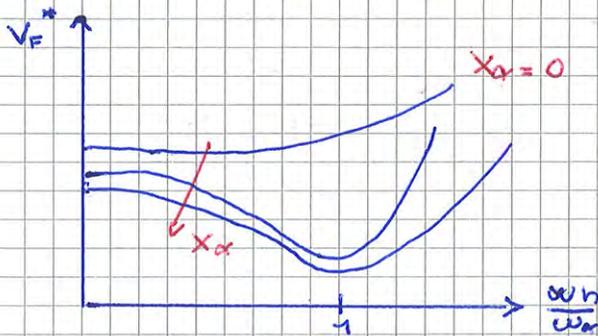
$$\mu = \frac{M}{m}$$

$$X_\alpha = \frac{S_{\alpha\alpha}}{Mc} = \frac{X_G}{c}$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_\alpha}$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{ME^2}}$$

$$\tilde{X}_F = \frac{X_F}{e}$$



IL PROGETTISTA NON CI PUÒ GIOCARE TANTO

SOPRA CURVA: instabile
SOTTO CURVA: stabile

MOMENTO STATICO X_α

→ POSIZIONE BARICENTRO RISPETTO C.T.

• $X_\alpha = 0$ NO ACCOPPIAMENTO FLESSIONE-TORSIONE = NO FLUTTER

$$V_{\alpha}^* = \frac{V_{\infty}}{\omega_\alpha \tau_\alpha}$$

• $X_\alpha > 0$ ↑ (e verso bordo uscita): $V_F^* \downarrow$ → SI RESTRINGE CAMPO DI STABILITÀ!

È opportuno mettere X_G + VICINO POSSIBILE A C.T.

→ I MOTORI DAVANTI ALL'ALA AIUTANO!

FREQUENZE PROPRIE $\frac{\omega_n}{\omega_\alpha}$

LA RESTRIZIONE DEL CAMPO

DI STABILITÀ È + MARCATA DOVE $\omega_n / \omega_\alpha \approx 1$

→ CIOÈ DOVE PULSAZIONI DEI MOTI PROPRI DISACCOPPIATI SONO PARECCHIO VICINE!

È OVVIO CHE SE GIÀ ALL'INIZIO LE FREQUENZE PROPRIE SONO VICINE LA LORO COALESCENZA ARRIVERÀ PRIMA!!!



RAPPORTO DI MASSA μ

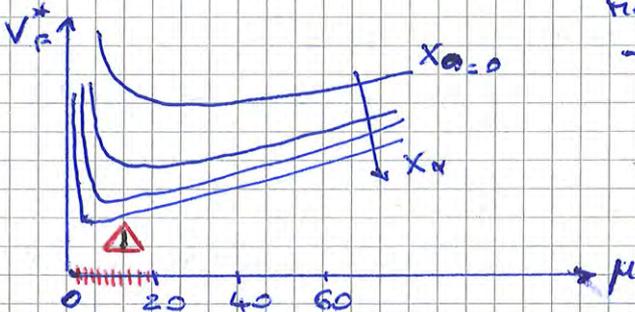
L'EFFETTO DI RESTRIZIONE DEL CAMPO DI INSTABILITÀ È ANCORA + MARCATO PER BASSI μ

→ MASSA FLUIDO IMPORTANTE RAPPORATA ALLA STRUTTURA

AERONAUTICA: $\mu > 40$

ALISCAFO: $\mu \approx 20$

ALI IN ACQUA!



→ SOLUZIONE: METTERE ANCORAGGIO (baricentro) IN PROSSIMITÀ DEL C.T. IN MODO DA AVERE $X_\alpha \approx 0$

Buone regole costruttive

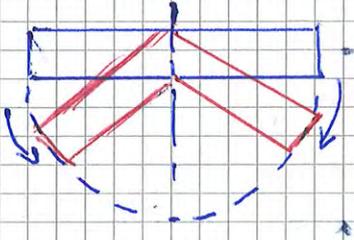
- 1) EVITARE VICINANZA PULSAZIONI PROPRIE DISACCOPPIATE
- 2) SPOSTARE BARICENTRO IL + POSSIBILE A MONTE DEL C.T.
- 3) BILANCIAMENTO STATICO DEGLI ALETTONI

L'ala a freccia costi ottenuta è meno rigida $\rightarrow V_F \downarrow$

SPERIMENTALMENTE

$$\hat{V}_F = V_F = V \cos \varphi$$

b) ALA A FRECCIA VARIABILE (tipo Tornado, F-111, F-14)



• STESSO ALLUNGAMENTO AERODINAMICO E STRUTTURALE

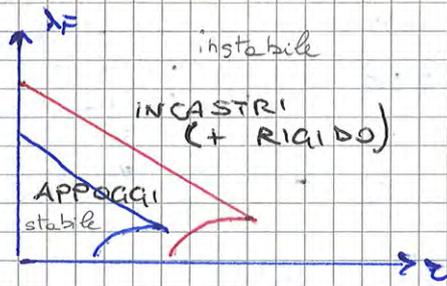
• Nell'ala a freccia la V_{∞} NORMALE all'asse elastico

è $V_{\infty} \cos \varphi \rightarrow \hat{V}_F = \cos \varphi = V_F$

$$\hat{V}_F = \frac{V_F}{\cos \varphi}$$

FORTE INFLUENZA DELLA PRECOMPRESSIONE!

Cresce la precompressione $\tau \uparrow \Rightarrow$ FLUTTER ANTICIPATO $\times \downarrow$

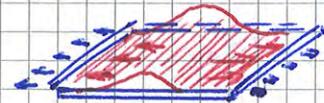


• A un certo punto:

$\tau \uparrow \Rightarrow (N \uparrow) \Rightarrow$ PANNELLI VANNO IN BUCKLING!

• Preferibile uno stato di TRAZIONE \Rightarrow pressurizzazione (prevenzione del flutter)

- ▲ PERICOLO DILATAZIONI TERMICHE DIFFERENZIALI TRA PANNELLO E STRUTTURA
- Se pannello si dilata + del frame si comprime e va in buckling!
- \rightarrow RISCALDAMENTO INSTABILIZZA



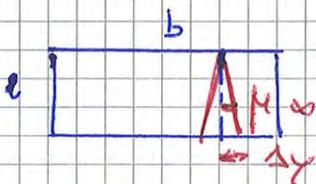
Parametri che influenzano

- STATO TENSIONALE PANNELLO
- FENOMENI TERMICI
- SORSA MENTO STRUTTURALE
- VINCOLI
- Pressione in-out
- CURVATURA E ALLUNGAMENTO PANNELLO

60 FLUTTER DEI PANNELLI: ALLUNGAMENTO FINITO, CURVATURA, NON LINEARITÀ

• VALIDITÀ PISTON THEORY: alti M_{∞} , i CONI DI MACH DEVONO ESSERE STRETTI PER NON PERTURBARE ZONE ADIACENTI

• OGNI PUNTO DEVE ESSERE INFLUENZATO SOLO DA CIÒ CHE STA A MONTE



$$\Delta y = l \tan \mu_{\infty} \approx l \sin \mu_{\infty} = \frac{l}{M_{\infty}}$$

$$\text{MEMO: } \mu = \arcsin \frac{1}{M_{\infty}}$$

$$\frac{\Delta y}{b} = \frac{l/b}{M_{\infty}} \ll 1$$

per la validità della piston si vuole $\Delta y \ll b$
 $\rightarrow M_{\infty} \gg \frac{l}{b}$

$$\rightarrow \left| M_{\infty} \gg \frac{l}{b} \right|$$

$\frac{b}{l}$ basso: + RIGIDEZZA $\rightarrow \lambda_F \uparrow$

• CURVATURA: verrebbe da dire "RIGIDEZZA SALE"... MA NON È DETTO!

CURVATURA CILINDRICA, irrigidimento si ripercuote in MODO DIVERSO SUI MODI PROPRI

$w_1 \uparrow \uparrow$ ma $w_2 \uparrow \Rightarrow$ SI FAVORISCE COALESCENZA!

\rightarrow curvatura semplice: favorisce flutter

\rightarrow CURVATURA DOPPIA: PREVALE L'IRRIGIDIMENTO GLOBALE E SI HA + STABILITÀ

• NON LINEARITÀ DELLA STRUTTURA