



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1568A -

ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Cane

MATERIA: Scienza delle Costruzioni + Riassunti. Prof. Chiaia-Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

I materiali hanno comportamenti diversi a seconda delle loro caratteristiche, ad esempio la snellezza.

Una cupola, lavorando a gravità, cioè essendo stabile grazie al suo peso proprio, ha meno problemi per quanto riguarda il vento di una torre che si eleva in altezza.

Competenze che verranno acquisite, man mano nel corso:

- 1) MODELLAZIONE DELLA STRUTTURA
- 2) " DEL VINCOLI
- 3) " DELLE SOLLECITAZIONI (Guidata dalle normative)
- 4) " DEL MATERIALE

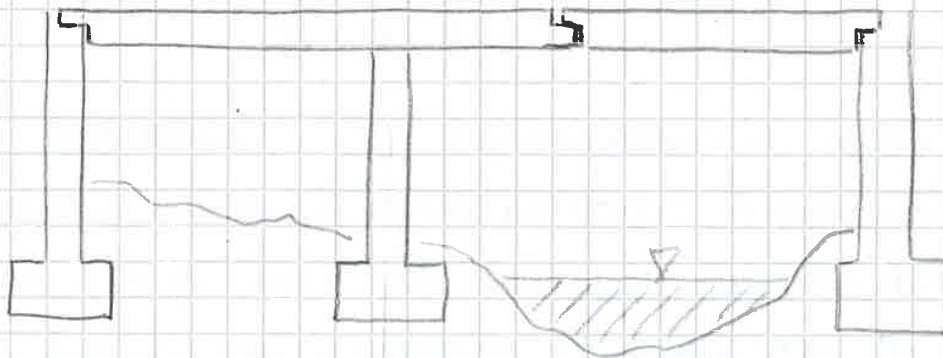
## MODELLAZIONE STRUTTURA

In questo corso studieremo la statica dei modelli monodimensionali. Ci interesserà sapere:

- Area, momento d'inerzia, momento d'inerzia torsionale

## MODELLAZIONE VINCOLI

A: Perché non posso trasportare travi di lunghezza eccessiva, quindi inserirò tra una parete e l'altra un vincolo interno



B: Ho utilizzato un cernello ad esempio per problemi legati alla dilatazione termica

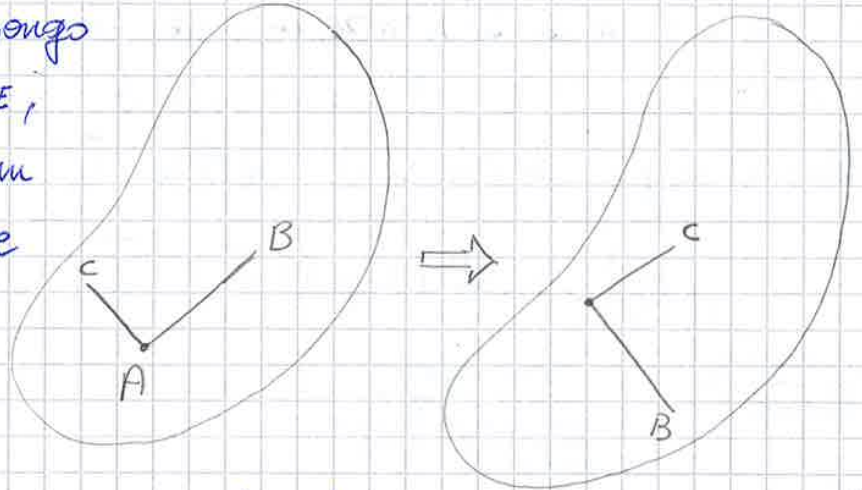
molto limitato

I cosiddetti materiali ELASTO-PLASTICI sono quelli che superato il livello di elasticità non si rompono ma cedono modificandosi con deformazione DOTTILE

TESTI DI RIFERIMENTO: A. CARPINTERI - SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

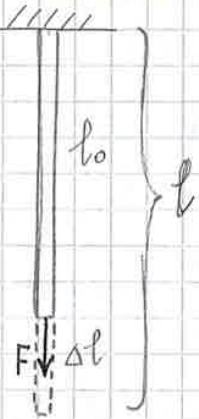
► ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

Se ad un corpo lo ponga soggetto a ROTOTRASLAZIONE, due vettori applicati in un punto non subiscono né CAMBIAMENTI ANGOLARI né CAMBIAMENTI DI LUNGHEZZA



possiamo descrivere la

DEFORMAZIONE come l'allungamento di una barra soggetta ad una forza applicata lungo il suo asse principale che provoca un allungamento  $\Delta l$ . Chiamiamo DEFORMAZIONE ( $\epsilon$ ) la VARIAZIONE di LUNGHEZZA RAPPORATA alla LUNGHEZZA INIZIALE



$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \frac{[m]}{[m]} = \text{N}^\circ \text{ PURO}$$

↑  
DEFORMAZIONE (NOMINALE)

Consideriamo altre deformazioni:

DEFORMAZIONE NATURALE:  $\epsilon_{NAT} = \frac{\Delta l}{l}$

DEFORMAZIONE LOGARITMICA:  $\int_0^\epsilon d\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}$

LUNG. FINALE  
↓  
l  
↑  
l\_0  
LUNG. INIZIALE

Vediamo un esempio di deformazione:

Componenti di  $M_a$

Ma allora posso dire che le componenti di  $\{M_a\}$  sono uguali alle componenti di  $P$  sommate allo Jacobiano in  $dx dy dz$  che chiameremo  $\{dr\}$ :

$$\{M_a\} = \{M_p\} + [J_p] \cdot \{dr\}$$

(Deformazione  
Rototraslazione)

PARTE RESPONSAB.  
DELLA PURA  
TRASLAZIONE

PARTE RESPONSAB.  
DELLA PURA  
ROTAZIONE  
E DEFORMAZIONE

► ROTAZIONE PURA (con deformazione)

L'equazione per una rotazione pura è del tipo:

$$\{M_a\} = \{M_p\} + [Y_p] \{dr\}$$

↑  
MATRICE ANTISIMMETR.

Ricordando quello che ci dice l'algebra, sappiamo che: ciascuna matrice  $A$  è data da:

$$[A] = [A_{\text{SIMM}}] + [A_{\text{ANTISIMM}}]$$

Quindi lo Jacobiano lo posso scrivere:

$$J_p = \frac{1}{2} \left( [J_p] + [J_p]^T \right) + \left( [J_p] - [J_p]^T \right)$$

LA PARTE SIMMETRICA (OSSIA QUELLA CON IL +) È UNA MAT. SIMMETRICA E INDICA LA MATRICE DI DEFORMAZIONE

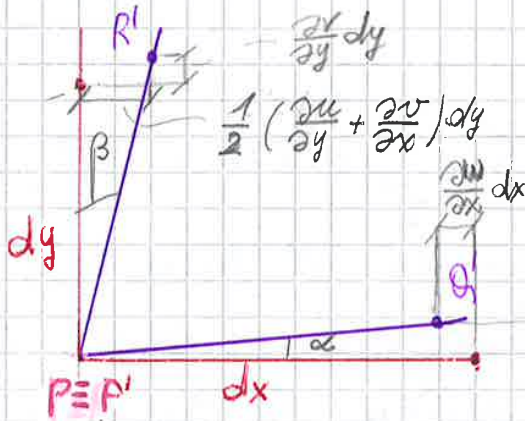
LA PARTE ANTISIMMETRICA (OSSIA QUELLA CON IL -) INDICA LA MATRICE DI ROTAZIONE (CHE È ANTISIMMETRICA)

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Andiamo ora a scrivere la matrice di deformazione:

- 1° Scelgo una terna e individuo  $dx dy$  ( $dz$  uscente)
- 2° Traslo  $R$  e  $Q$  e individuo  $R'$  e  $Q'$  (arbitrariamente)
- 3° Individuo l'angolo  $\vartheta < 90^\circ$  (ang. iniziale)
- 4° Individuo le varie derivate parziali

### DEFORMAZIONE PURA



- 1) Idem
- 2) Individuo  $\alpha, \beta$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

Le dilatazioni  $E$  sono POSITIVE se di ALLUNGAMENTO  
 Gli scontrimenti angolari  $\gamma$  sono POSITIVI se RIDUCONO  
 L'ANGOLO RETTO

Riassumendo, volemmo correlare lo spostamento di  $Q$  in funzione di  $P$ . Infatti fissato un p.to  $P$  e un suo intorno, (all'interno dell'elemento considerato) individuo  $Q$  tramite uno spostamento  $dz$  di direzione arbitraria. Quindi fosse scrivere:

$$\{ \eta \}_Q = \{ \eta \}_P + [J]_P \{ dz \} + [E]_P \{ dz \}$$

$$[J]_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_P$$

Avevamo detto che la parte simmetrica, l'avremmo chiamata MATRICE DI DEFORMAZIONE e la indicheremo come

$$\frac{1}{2} ([J]_P + [J]_P^T)$$

3) Arbitrariamente trovo il p.to  $a$  e lo proietto su entrambi i sistemi:

4) Traccio una direzione assolutamente a scelta con origine in  $a$  e la chiamerò  $m_a$

Posso dire che

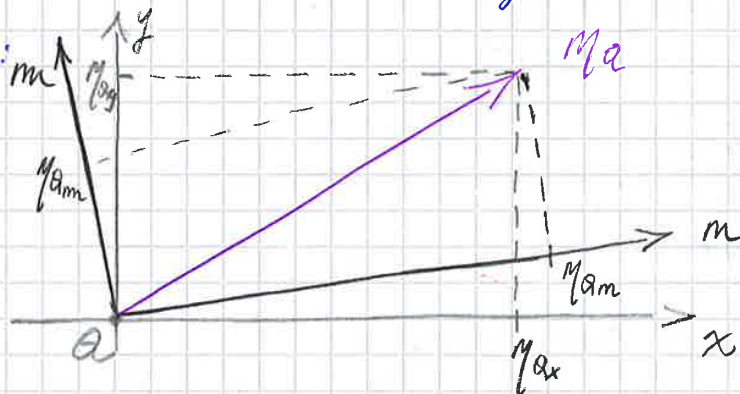
$$\begin{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}_{xyz} = [N] \begin{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}_{mml}$$

ESATTAMENTE LA STESSA RELAZIONE VISTA PRIMA, APPLICATA AD UNA DIREZIONE E NON A UN PUNTO

Quindi

$$\begin{Bmatrix} m_a \end{Bmatrix}_{xyz} = [E_p]_{xyz} \begin{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}_{xyz}$$

Concentriamoci su  $a$ . Rifa il disegno per renderlo più chiaro:



Quindi Skrup:

$$\begin{Bmatrix} m \end{Bmatrix}_{xyz} = [N] \begin{Bmatrix} m \end{Bmatrix}_{mml}$$

Ricapitolando le equazioni che abbiamo:

i)  $\begin{Bmatrix} m \end{Bmatrix}_{xyz} = [E]_p \begin{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}_{xyz}$

ii)  $\begin{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}_{xyz} = [N]_{xyz} \begin{Bmatrix} dz \end{Bmatrix}_{mml}$

iii)  $\begin{Bmatrix} m_a \end{Bmatrix}_{xyz} = [N] \begin{Bmatrix} m_a \end{Bmatrix}_{mml}$

DIMOSTRAZIONE DA SAPERE PER L'ESAME!

Dall'equazione (i) posso moltiplicare entrambi i membri

Sostituisco le equazione del p.to 2 in 3 e ottengo:

$$M_{mm} = \{m\}^T \cdot [E]_p \{m\} \quad \text{e} \quad M_{mm} = \{m\}^T [E_p] \{m\}$$

Analogamente ottengo per  $M_{mm}$  e  $M_{mm}$

$$M_{mmm} = \{m\}^T \cdot [E]_p \{m\} \quad \text{e} \quad M_{mmm} = \{m\}^T [E]_p \{m\}$$

Sviluppando i calcoli otterremmo che

$$M_{mmm} = M_{mmm}$$

Non importa quale direzione considero, le due distanze rimangono le medesime

$$[E]_{p, mmm} = [N]^T [E]_{p, xyz} [N]$$

La matrice di deformazione la chiameremo **TENSORE DELLA DEFORMAZIONE**

► **DEFORMAZIONI PRINCIPALI**

Consideriamo sempre il p.to P nel medesimo modo.

Sapendo che la matrice di DEFORMAZIONE E':

$$[E] = \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & E_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & E_z \end{bmatrix}$$

Posso scrivere

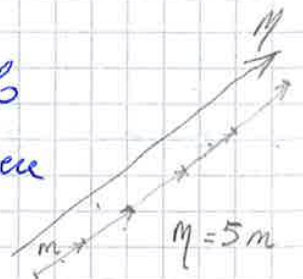
$$\{M\} = [E] \{m\} \quad (1)$$

$$\{M\} = E_m \cdot \{m\} \quad (2)$$

↑ UNO SCALARE

Dato che  $M$  è multiplo di  $m$ , è possibile ottenere  $M$  come  $m \cdot E_m$

↑ SCALARE



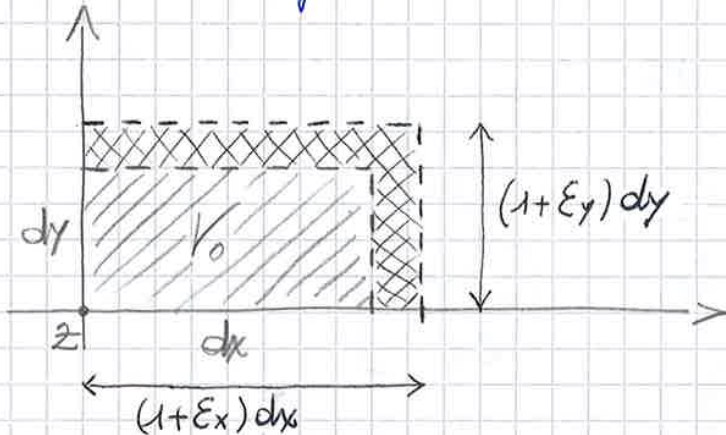


$J_3 =$  Determinante di  $[\epsilon]$

Trovo le 3 soluzioni e le metto in ordine

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3 \quad \text{con } \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$$

Torniamo sul piano e visualizziamo una deformazione



Il volume iniziale è  
 $dV_0 = dx dy dz$

Però il volume in configurazione deformata sarà:

$$dV = (1 + \epsilon_x) dx \cdot (1 + \epsilon_y) dy \cdot (1 + \epsilon_z) dz \quad \text{che posso anche scrivere come:}$$

$$dV = (1 + \epsilon_x) \cdot (1 + \epsilon_y) \cdot (1 + \epsilon_z) dx dy dz$$

Relazione il volume iniziale con quello finale ricavando la VARIAZIONE DI VOLUME:

$$\frac{\Delta V}{dV_0} = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1$$

$$= 1 + J_1 - J_2 + J_3 - 1$$

Sapendo che

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad J_2 = -\epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_x \epsilon_z - \epsilon_y \epsilon_z$$

$$J_3 = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$$

## ► 6 EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ

Senza dimostrazione intento non è da portare all'esame.

$$1) \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2) \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2}$$

$$3) \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}$$

$$4) 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$5) 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$6) 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}$$

Vediamo un esempio di applicazione delle EQUAZ. DI COM.  
PATIBILITÀ

ESM:

Dato un campo di spostamento

$$u = \left[ \left( \frac{1}{\text{m}^2} \right) x^3 - 6y + 2(\text{m}) \right] \times 10^{-3}$$

$\nwarrow$   
 METRO<sup>2</sup>

$$v = \left[ -3 \left( \frac{1}{\text{m}} \right) x^2 + 3y - 4(\text{m}) \right] \times 10^{-3}$$

$$w = -1 \left( \frac{1}{\text{m}^2} \right) z^3 \times 10^{-3}$$

Ricavo la Jacobiana.

$$[E]_P = \begin{bmatrix} \emptyset & -3 & \emptyset \\ -3 & 3 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -3 \end{bmatrix}$$

Dove in nero rispettivamente dall'alto sono  $\frac{1}{2} \gamma_{xz}$  e  $\frac{1}{2} \gamma_{yz}$  mentre in viola  $\frac{1}{2} \gamma_{zx}$  e  $\frac{1}{2} \gamma_{zy}$   
 L'ASSE Z è un ASSE PRINCIPALE

Sostituisco in:

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \text{Simmetrica} & \epsilon_y - \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ & & \epsilon_z - \epsilon_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \emptyset - \epsilon_m & -3 & \emptyset \\ -3 & 3 - \epsilon_m & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -3 - \epsilon_m \end{bmatrix}$$

Otengo

$$\epsilon_{m,1} = \frac{3}{2} (1 + \sqrt{5}) \times 10^{-3} \simeq 4,85 \cdot 10^{-3} \text{ ALLUNGAMENTO}$$

$$\epsilon_{m,2} = \frac{3}{2} (1 - \sqrt{5}) \times 10^{-3} \simeq -1,85 \times 10^{-3} \text{ CONTRAZIONE}$$

$$\epsilon_{m,3} = -3 \times 10^{-3} \longrightarrow \text{CONTRAZIONE}$$

### ANALISI DELLA TENSIONE

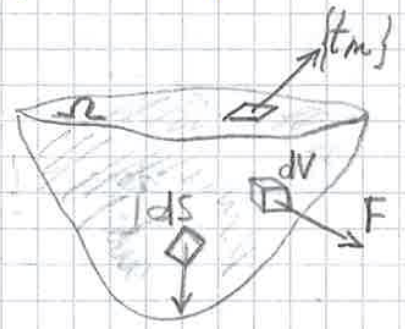
Cominciamo, con il dire che la tensione non esiste, infatti è immisurabile fisicamente. Quello che possiamo concretamente misurare e quantificare, è la deformazione.

Noi siamo molto legati alla tensione, perché è direttamente collegata con le forze.

Quando abbiamo studiato la deformazione, abbiamo ricavato  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ed  $\epsilon_z$  (adimensionati) e successivamente  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  infine abbiamo ricavato  $\epsilon_1$  (MAX DEFORMAZ. IN P.)

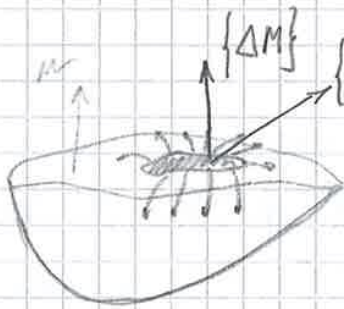
Oggi ci vogliamo occupare di osservare cosa capita all'interno del punto P, se sono presenti delle forze e

Devo considerare agenti su  $\Omega$  delle forze definite VETTORI TENSIONE che riequilibrano l'intero sistema. Intuitivamente le due parti si scambiano le forze  $t_m$  uguali ma con verso opposto. Una volta si collegano le "due metà" otteniamo che le  $t_m$  vanno a  $\infty$  elidendosi a vicenda. Naturalmente se tagliassi l'oggetto con un piano  $m$  diverso da  $m$  (piano fin qui considerato) i VETTORI DI TENSIONE risulteranno diversi  $\{t_m\}$  non è detto che debba essere ortogonale al piano di separazione. Il vettore tensione dimensionalmente è una forza per unità di superficie ( $MPa \sim F/\Omega$ )



se tagliassi l'oggetto con un piano  $m$  diverso da  $m$  (piano fin qui considerato) i VETTORI DI TENSIONE risulteranno diversi  $\{t_m\}$  non è detto che debba essere ortogonale al piano di separazione. Il vettore tensione dimensionalmente è una forza per unità di superficie ( $MPa \sim F/\Omega$ )

### ► LIMITE DEL VETTORE DI TENSIONE



Quando parliamo di vettore di tensione, lo definiamo aventi 2 caratteristiche che

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\{ \Delta R \}}{\Delta\Omega} = \{ t_m \}; \quad \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\{ \Delta M \}}{\Delta\Omega} = \{ 0 \}$$

In solidi con questi due limiti, diciamo che in  $P$  c'è soltanto il vettore di tensione ( $\{t\}$ ) mentre abbiamo assenza di MICRO COPPIE che tenderebbero a generare dei momenti.

Come ogni vettore anche per  $\{t_m\}$ , possiamo dire che nello spazio ha 3 componenti:  $\{t_m\} = t_{mx} \hat{i} + t_{my} \hat{j} + t_{mz} \hat{k}$  per i nostri scopi però, si preferisce sempre  $\{t_m\}$  lungo

- 1) Su ciascuna faccia ho definito un vettore tensione  $t_x, t_y, t_z$ , considerati con il meno, perché la normale ha direzione uscente.
- 2) Le 4 facce hanno un  $\{t_m\}$  generico non per forza  $\parallel \vec{a}_m$
- 3) Le forze di volume non sono state indicate, perché risultano essere infinitesimi di ordine superiore su  $d\Omega$  quindi perfettamente trascurabili

Abbiamo dunque le componenti dei vettori agenti

$$\{t_x\} = (\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$$

$$\{t_y\} = (\tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}) \quad \text{mentre} \quad \{t_m\} = (t_{m,x}; t_{m,y}; t_{m,z})$$

$$\{t_z\} = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz})$$

- 4) Servo l'equilibrio nelle tre direzioni coordinate  $xyz$

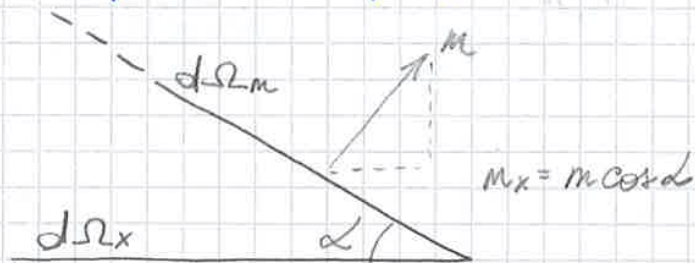
$$\{t_m\} d\Omega_m - \{t_x\} d\Omega_x - \{t_y\} d\Omega_y - \{t_z\} d\Omega_z = 0$$

- 5) Consideriamo che

$$d\Omega_x = m_x \cdot d\Omega_m$$

$$d\Omega_y = m_y \cdot d\Omega_m$$

$$d\Omega_z = m_z \cdot d\Omega_m$$



- 6) Sostituisco nella formula 4) i  $d\Omega$  in 5)

$$\boxed{\{t_m\} = \{t_x\} m_x + \{t_y\} m_y + \{t_z\} m_z} \quad \text{RELAZIONE DI CAUCHY}$$

- 7) Posso scrivere tutto in forma matriciale, e noto subito la somiglianza con la matrice di deformazione  $\epsilon$ ; la chiameremo MATRICE DELLE TENSIONI

$\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  = passano per  $C_x$  per cui agendo sull'asse sono influenti

Rimangono  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zy}$

Per cominciare a equilibrare, devo moltiplicare le  $\tau$  per l'elementino a cui sono applicate, ottenendo una forza successivamente per il braccio ed equilibrio i momenti

$$\Rightarrow \tau_{zy} \cdot d\Omega_z \cdot \frac{dz}{3} - \tau_{yz} \cdot d\Omega_y \cdot \frac{dy}{3} = 0$$

$\uparrow$                      $\uparrow$                      $\uparrow$   
 TENSIONE    ELEMENTINO    BRACCIO

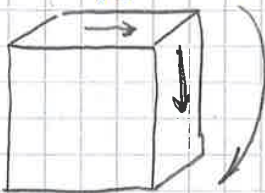
Essendo il volume del tetraedro  $\frac{1}{3} A_{BASE} \cdot h_{ALTEZZA} = dV$   
 allora:  $\frac{1}{3} d\Omega_y dy = \frac{1}{3} d\Omega_z dz = dV$

Otteniamo

$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}} \quad \text{c.v.d.}$$

Se effettuo l'equilibrio attorno agli altri assi, ottengo la medesima situazione.

Siamo in una situazione di "RECIPROCA' DELLE TENSIONI TANGENZIALI" infatti hanno stesso modulo ma verso opposto, altrimenti il cubo ruoterebbe



Errata situazione

Dimostrato ciò, vogliamo capire se siamo in grado di scrivere la matrice delle tensioni  $[\tau_{ep}]$  secondo un'altra generica terna  $\neq$  da  $x, y, z$ .

$$\Rightarrow [\tau_{ep}]_{xyz} \rightarrow [\tau_{ep}]_{mml} \quad (\text{CAMBIARE ORIENTAM. AL TETRAEDRO})$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det([\sigma] - \mathbb{1} \cdot \sigma_m) = 0$$

$$\sigma_m^3 - T_1 \sigma_m^2 - T_2 \sigma_m - T_3 = 0$$

Dove  $T_1, T_2, T_3$  sono gli INVARIANTI DELLA TENSIONE

Avremo

$$T_1 = (\text{INVARIANTE LINEARE}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (\text{TRACCIA})$$

$$T_2 = (\text{INVARIANTE QUADRATICO}) = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$T_3 = (\text{INVARIANTE CUBICO}) = \det[\sigma_p]$$

Gli invarianti si chiamano così perché non dipendono dal sistema di riferimento

$\Rightarrow \det[A]$  è un'equazione del 3° grado  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  li inserisco nella matrice sostituendoli ai coeff.  $\sigma_m$  e ricavo gli autovettori:  $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$

Quindi

$$\sigma_1 \rightarrow m_1$$

$$\sigma_2 \rightarrow m_2$$

$$\sigma_3 \rightarrow m_3$$

↓  
TENSIONI  
PRINCIPALI

↓  
DIREZIONI  
PRINCIPALI

Se faccio coincidere le linee principali con  $m_1, m_2, m_3$  ottengo una matrice di tensione in  $P$  del tipo:

$$\sigma_p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Le sollecitazioni possono essere scomposte in due parti

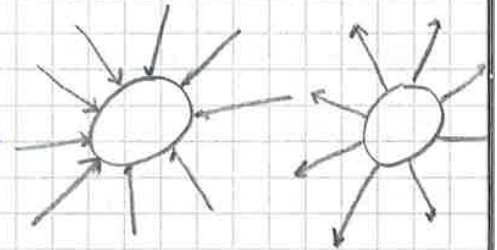
$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

TENSORE IDROSTATICO

TENSORE DEVIATORIO

Vediamo la loro definizione:

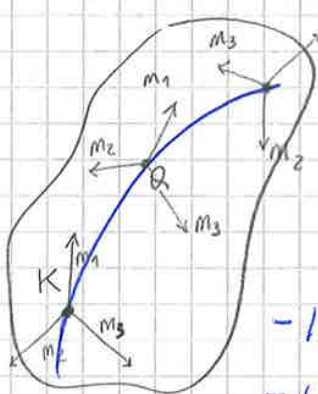
$$[\sigma^i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{LEGATO SOLO ALLE VARIAZIONI DI VOLUME}$$



$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \dots \\ \dots & \sigma_y - \bar{\sigma} & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{LEGATO ALLE DISTORSIONI E AI CAMBIAMENTI DI FORMA}$$

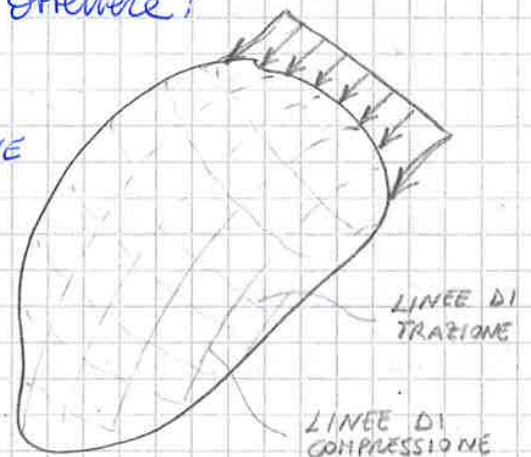
### LINEE ISOSTATICHE

È possibile percepire e mettere in relazione gli auto-  
vettori (LINEE IDEALI DI FLUSSO DELLE TENSIONI) che otterremo, con la caratteristica di essere tangente ad una direzione principale. Vediamo che potremo ottenere:



- ISOSTATICHE DI TRAZIONE
- ISOSTATICHE DI COMPRESSIONE

Tra loro ortogonali.



### TEOREMA DI MICHELL

Strutture di minimo peso come reticoli di aste ortogonali.

Pensiamo a tutte quelle strutture che non sono piene, talvolta ricordano la tela del ragno, Michell si accorse che non è necessario riempire per sostenere. Infatti è sufficiente costruire lungo le curve isostatiche e la struttura risulta più leggera e resistente.



$$M_1^2 = \frac{\tau_m^2 + (\tau_m - \tau_2)(\tau_m - \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)}$$

$$M_2^2 = \frac{\tau_m^2 + (\tau_m - \tau_1)(\tau_m - \tau_3)}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)}$$

$$M_3^2 = \frac{\tau_m^2 + (\tau_m - \tau_2)(\tau_m - \tau_1)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}$$

}  $> 0$

Se  $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$

Si capisce che il I e il III denominatori sono positivi mentre il II denominatore è negativo

per essere  $> 0$   $\frac{N(+)(-)}{D(+)(-)} \Rightarrow > 0$

Scrivo il numeratore  $\geq 0$

$$\tau_m^2 + (\tau_m - \tau_2)(\tau_m - \tau_3) \geq 0$$

$$\tau_m^2 + (\tau_m - \tau_1)(\tau_m - \tau_3) \geq 0$$

$$\tau_m^2 + (\tau_m - \tau_2)(\tau_m - \tau_1) \geq 0$$

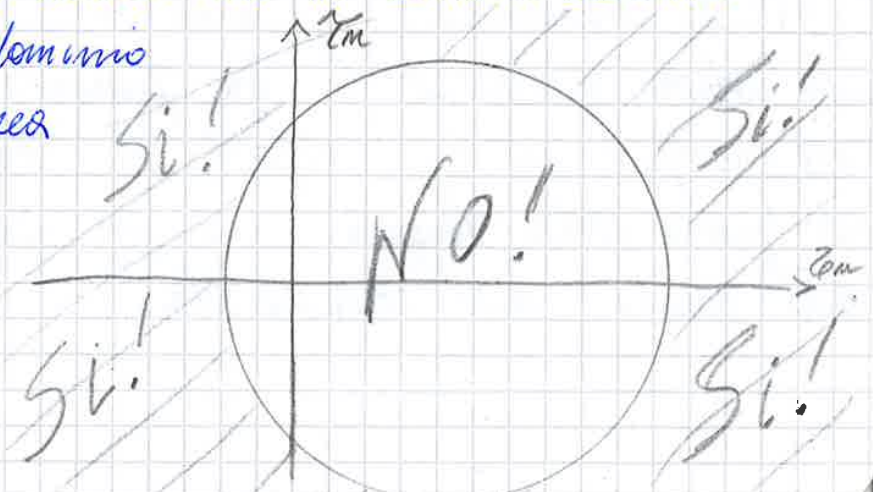
Trovo dunque i domini dei numeratori, sviluppando i prodotti riusciamo a ricavare

equazioni in  $\tau$  e  $\tau$ . Ad esempio troviamo:

$$\tau_m^2 + \left(\tau_m - \frac{\tau_2 + \tau_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\tau_2 - \tau_3}{2}\right)^2$$

essendoci il  $\geq$  dobbiamo considerare il DOMINIO ESTERNO

Quindi in un ipotetico dominio dovremmo considerare l'area esterna



Cosa significa  $\sigma_3 = 0$ ? In forma matriciale significa:

$$\sigma_3 = 0 : \begin{bmatrix} t_{m_1} \\ t_{m_2} \\ t_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \Rightarrow t_{m_3} = 0$$

Questo mi comporta che il  $\det = 0$

Infatti anche se posiziono il giunto in maniera che generi delle  $\tau$  ( $\Rightarrow$  non nelle direzioni principali)

il DETERMINANTE È COMUNQUE  $= 0$ ,  
infatti se ho una riga nulla,  
per definizione di determinante,  
questo è pari a 0

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = 0$$

Per la ricerca delle tensioni principali, ricorriamo sul problema degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = 0$$

se  $\sigma_m = 0$  si ha TENSIONE PRINCIPALE NULLA ( $\sigma = 0$ )

$$\sigma_m^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma_m + (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

$T_1 =$  TRACCIA

$T_2 = \sum \det(\text{minori } [\sigma])$

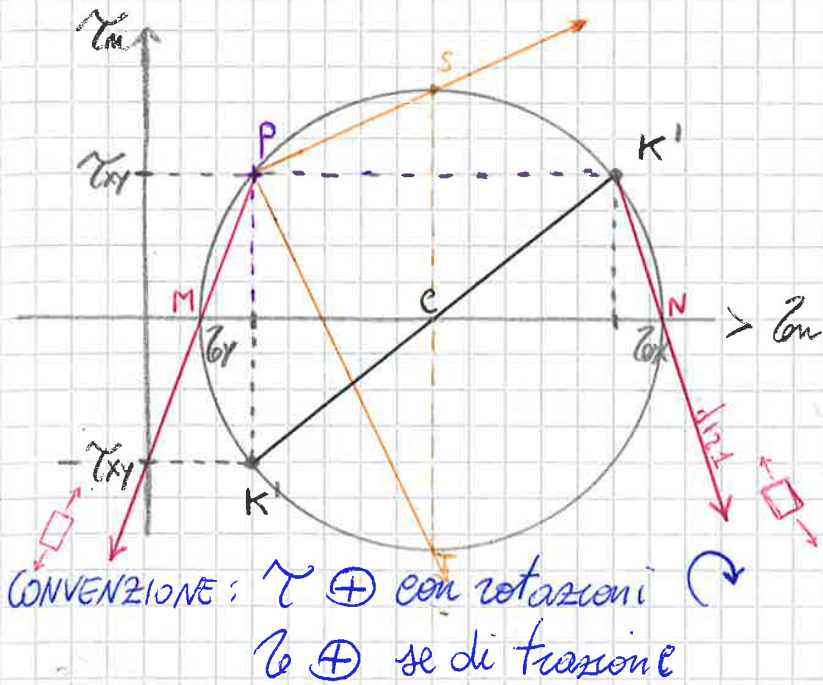
Le due tensioni principali risolvendo l'equazione di 2° grado:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

ASCISSA DEL CENTRO C

DIAMETRO DEL CERCHIO

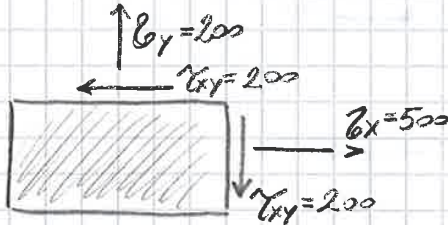


- 2) Unisco i p.ti K e K'
- 3) Individuo il p.to "e"
- 4) Individuo il p.to "P"
- 5) con apertura CP traccio il cerchio puntando in c
- 6) Individuo le direzioni principali secanti il cerchio partenti da P in direzione PM e PN

- 7) Essendo entrambe sul lato delle asse positive, per la convenzione sono di trazione
- 8) Proietto e verticalmente e individuo due p.ti S e T in cui passano le direzioni principali del taglio

ES 1 Vediamo un esercizio numerico

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 200 \text{ MPa} \\ \sigma_x &= 500 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 200 \text{ MPa} \end{aligned}$$



$\sigma_x \text{ e } \sigma_y > 0 \Rightarrow$  TRAZIONI  
 $\tau_{xy} > 0 \Rightarrow$  ROTAZ. ORARIE

Determinare Tensioni principali  
 Direzioni principali

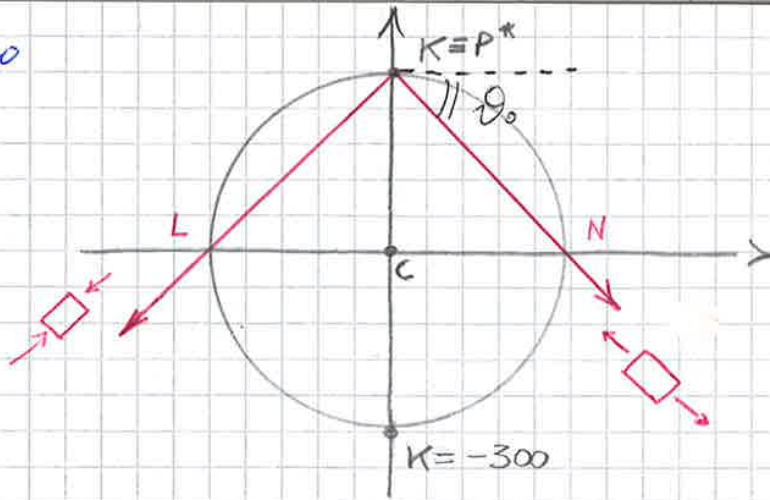
CALCOLO ANALITICO

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

Basta sostituire e ottergo:

$$\sigma_1 = 600 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = 100 \text{ MPa}$$

Avremo

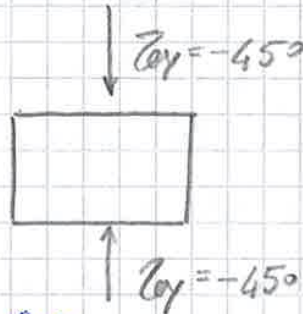


- STATO MONOASSIALE -

$$\sigma_y = -450 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$



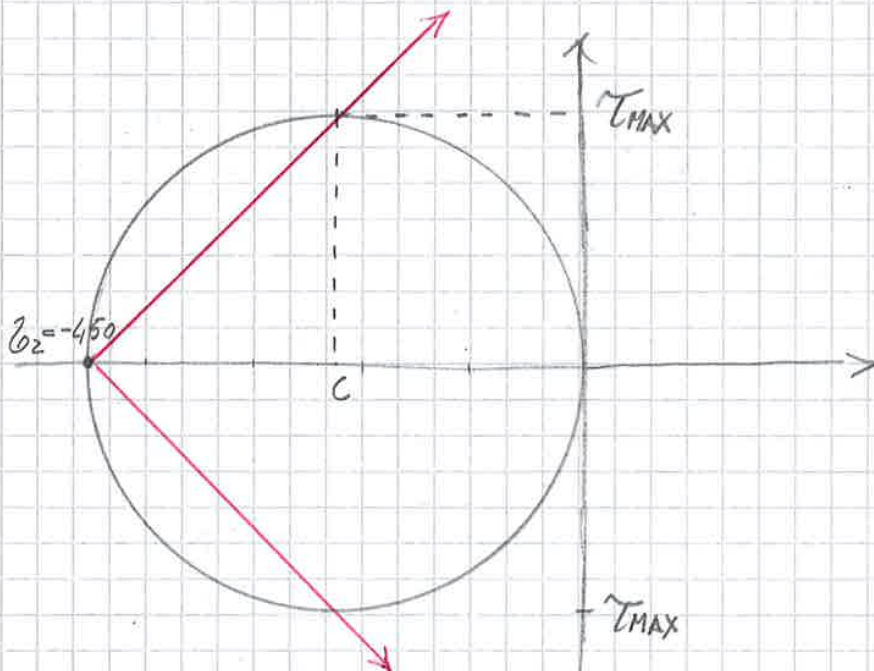
potrebbe essere il caso di un PILASTRO COMPRESSO

L'esercizio è già risolto infatti  $\sigma_x = 0$   $\tau_{xy} = 0$  le direzioni sono già principali (infatti  $\tau_{xy} = 0$ )

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

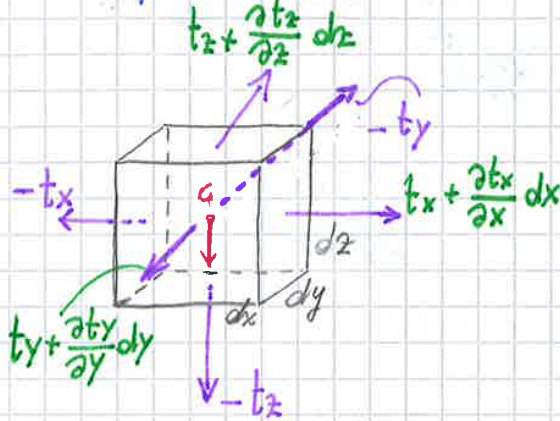
$$= \begin{cases} 0 \\ -450 \end{cases}$$

e  $\theta_0 = 90^\circ$  con  $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_y}{2} = \pm 225$



## EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Fino ad ora ci siamo occupati di capire cosa accade in un p.to P quando la struttura veniva sollecitata. Con le equazioni indefinite finite ci occuperemo di capire il collegamento che intercorre tra il tensore  $[C_P]$  e un generico tensore  $[C_Q]$  di un p.to Q, per capire cioè, consideriamo un cubetto infinitesimo



con le facce parallele agli assi x y e z e con la forza peso applicata in G. Su ogni faccia saranno presenti i rispettivi vettori tensione con segno negativo perché opposti a x y z. Avremo dunque  $-t_x, -t_y$  e

$-t_z$ ; specularmente sull'altra faccia avremo lo stesso vettore (con segno positivo, perché il verso ora è concorde) + un addendo dato dallo spostamento infinitesimo rispetto alla posizione precedente (nel caso del tensore x avremo  $t_x + \frac{\partial t_x}{\partial x} dx$ ).

Come già sappiamo a noi piace ragionare su forze, quindi per trasformare le tensioni in forze è sufficiente moltiplicarle per l'area di dove sono applicate.

$$\Rightarrow \vec{F} = \left( \frac{\partial t_z}{\partial z} dz \right) \underbrace{dx dy}_{\text{AREA}} \underbrace{1}_{\text{VOLUME}}$$

Quando procederemo con il bilancio, rimarranno vive solo le variazioni infatti  $t_x, t_y, t_z$

Si elideranno. Diciamo inoltre che LE FORZE DI VOLUME (f. peso) NON È TRASCURABILE come quando consideravamo un generico punto P.

$$(Z) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

Queste appena scritte prendono il nome di EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA per il parallelepipedo infinitesimo.

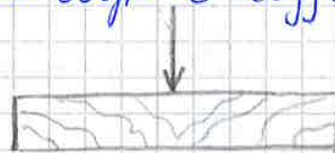
Sostanzialmente:  $\boxed{\text{div} [\sigma] = -\{F\}}$  Si hanno 3 equazioni in 6 incognite  $\Rightarrow$  3 gradi di iperstaticità. Questo ci suggerisce che per risolvere i problemi del continuo, non mi basta sapere le 3 equazioni per le 3 dimensioni cartesiane  $(x, y, z)$ , devo anche avere informazioni sul materiale di cui è fatto l'oggetto che considero.

### 2 Considerazioni:

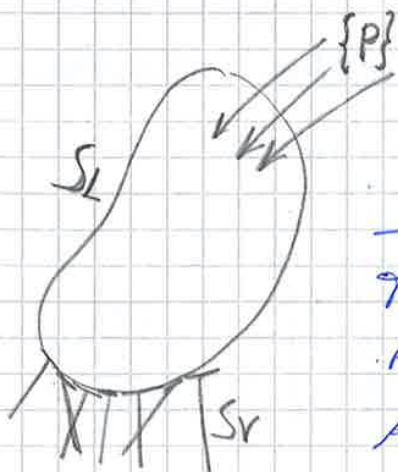
Se  $\{F\} = 0 \Rightarrow \text{div} [\sigma] = 0$  significa che non vi sono sorgenti di tensione interne quindi il materiale avrà le linee di flusso:



Se  $\{F\} \neq 0 \Rightarrow \text{div} [\sigma] = -F$  quindi il corpo è soggetto ad una forza esterna avremo che



### ► EQUAZIONI DI EQUIVALENZA SULLA FRONTIERA



Chiamerò  $S_L$  = superficie libera e  $S_r$  = superficie vincolata

Sugli elementi superficiali il vettore tensione in ogni punto coincide con il vettore  $P$  applicato.

Avremo quindi:

**PER RICORDARE:** GUARDA LE DERIVATE, PRIMA HAI QUELLA IN X POI IN Y POI IN Z INCOLONNATE IN APPUNTO X Y Z; SUCCESSIVAMENTE HAI  $\gamma_{xy}$  QUINDI SCRIVERAI LE DERIVATE DI X SULLA COLONNA Y ED Y SULLA COLONNA X E COSÌ VIA. NON È DIFFICILE!

Moltiplico righe per colonne e ottengo

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

e così via...

Calcolo ora  $[E]_{3 \times 6}^T \cdot \{\epsilon\}_{6 \times 1} + \{F\}_{3 \times 1} = \{0\}_{3 \times 1}$

Detto in parole rimane la TRASPOSTA DI  $[E] \times [\epsilon] + [F] = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

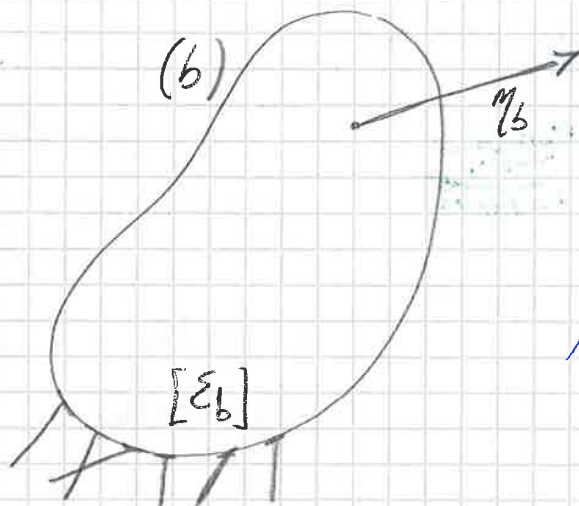
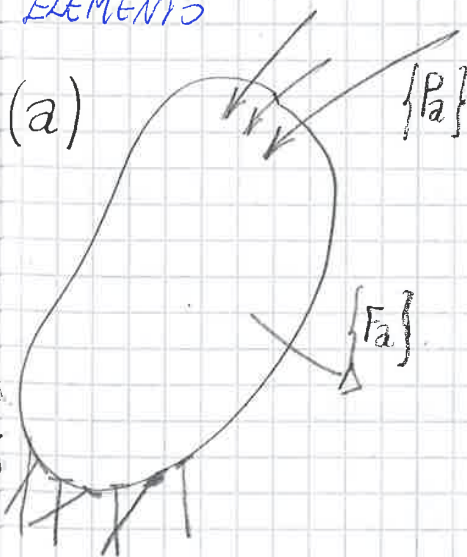
Detto in 2 righe, capiremo che il LAVORO PRODOTTO dalle  $E$  e dalle  $\epsilon$  equivale al LAVORO PRODOTTO DALL' ELEMENTO

Consideriamo il caso (a) in cui le  $\epsilon$  sono in equilibrio con le forze di volume  $a$  e di superficie  $P_a$

Consideriamo anche il caso (b), in cui

lo stesso corpo viene sottoposto ad un sistema di spostamento

$\mu_B$



$$\Rightarrow \overline{\tau}_{xy}^{(a)} \cdot \gamma_{xy}^{(b)} \cdot dV$$

Lavoro interno

Per ricavare il lavoro interno totale, complessivo in tutti i punti del corpo devo ricorrere all'integrale, sul volume  $V$ .

$$L_{\text{INTERNO}}^* = \int_V \{ \sigma_a \}^T \cdot \{ \epsilon_b \} dV$$

Quindi:

LAVORO INTERNO DI DEFORMAZIONE VIRTUALE	=	PRODOTTO SCALARE TRA IL VETTORE DELLE TENSIONI ED IL VETTORE DELLE TENSIONI INDIPENDENTI.
---	---	---

Lavoro esterno

Analogamente si ha:

$$\int_V \{ F_a \}^T \cdot \{ m_b \} dV + \int_{S_L} \{ P_a \}^T \cdot \{ m_b \} dS$$

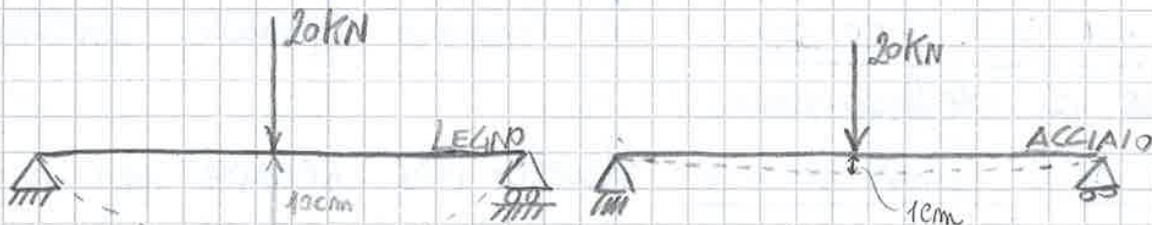
$$\text{LAVORO VIRTUALE ESTERNO} = \text{LAVORO VIRTUALE INTERNO}$$

$$\int_V \{ F_a \}^T \cdot \{ m_b \} dV + \int_{S_L} \{ P_a \}^T \cdot \{ m_b \} dS = \int_V \{ \sigma_a \}^T \cdot \{ \epsilon_b \} dV$$

$$\text{ESTERNO} = \text{INTERNO}$$

È importante legare assieme il  $\sigma$  (TENSIONI) e le  $\epsilon$  (DEFORMAZIONI) studiando il tipo di materiale scelto, questo definisce il LEGAME COSTITUTIVO DEI MATERIALI

Vediamo un esempio banale:





punti locali.

PRINCIPIO DELL'INDIFFERENZA MATERIALE: la risposta del materiale è indipendente dall'osservatore.

► TEORIA DELL'ELASTICITÀ

Diremo che un corpo è deformabile quando  $\epsilon$  è funzione di  $E$ . Invece quando  $\epsilon$  è funzione direttamente bivariata del campo di deformazione  $[\epsilon]$

$$\Rightarrow \epsilon = \epsilon([\epsilon])$$

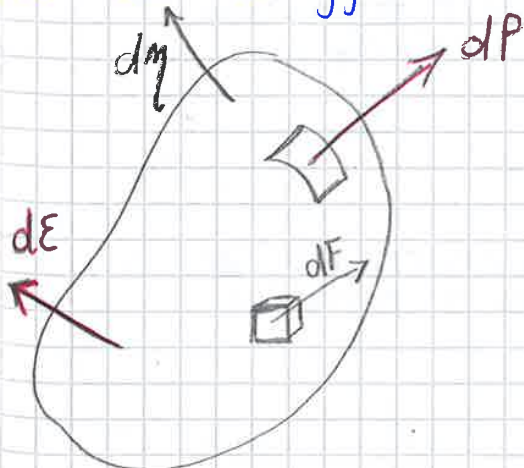
► IPERELASTICITÀ

Si definisce così un corpo, di cui la sua energia di deformazione cioè il lavoro eseguito per portarlo così NON DIPENDE DAL PROCESSO DI CARICO (come viene caricato)

MA SOLO DALLO STATO FINALE (E DA QUELLO INIZIALE). Un tavolo per essere iperelastico, non deve subire danneggiamenti se lo carichi ad esempio di 250 daN in 10 secondi piuttosto che in 2 secondi.

Si capisce dunque che l'ENERGIA DI DEFORMAZIONE è una funzione di stato avente differenziale esatto. In altre parole UN MATERIALE ELASTICO NON HA MEMORIA DEI CARICHI A CUI È STATO SOTTOPOSTO NEL TEMPO.

Considero l'oggetto



Scrivo il PLV

$$\{F\}, \{P\} \rightarrow \{\epsilon\}$$

con l'incremento (quando ci ho applicato)  $dE$  e  $dP$

$$\{dm\} \rightarrow \{dE\}$$

Posso riservare tutto in modo più ordinato.

$$d\phi = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

Confrontando le due espressioni possiamo ottenere:

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_y} ; \quad \sigma_z = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xy}} ; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xz}} ; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}}$$

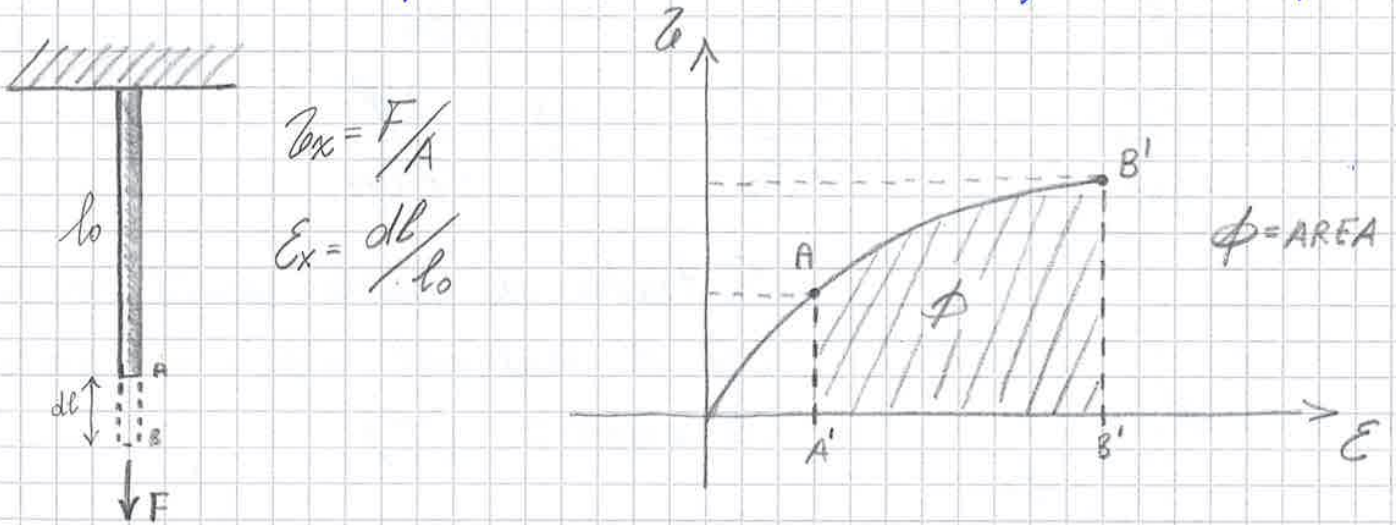
Nel caso monoassiale avremo:

$$\phi = \phi(\epsilon_x)$$

$$\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$$

Tutte le altre  
non esistono

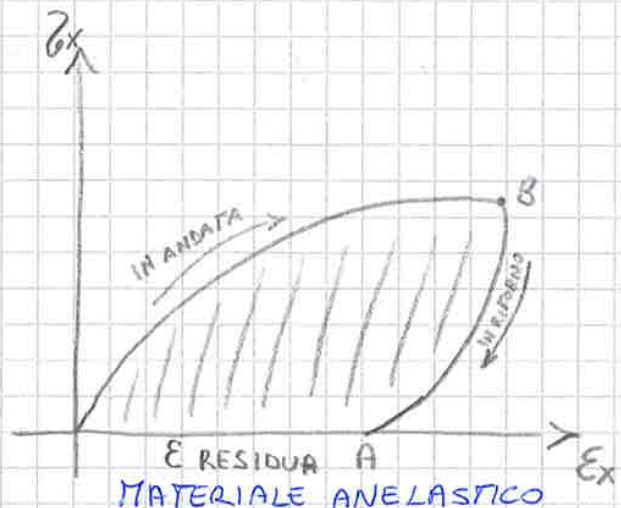
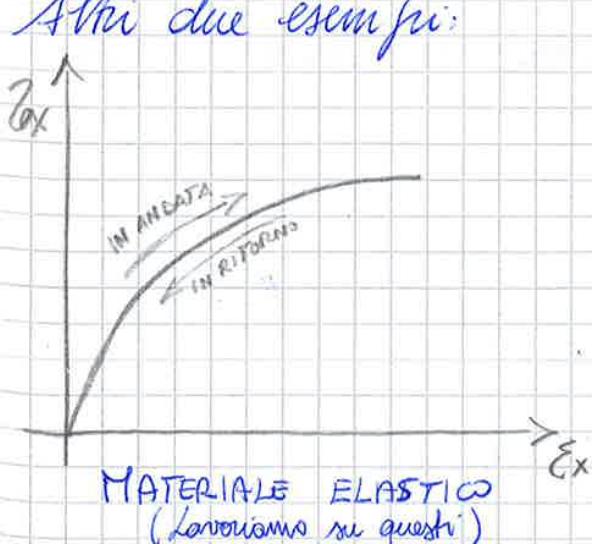
Vediamo un esempio con il relativo diagramma di sforzo



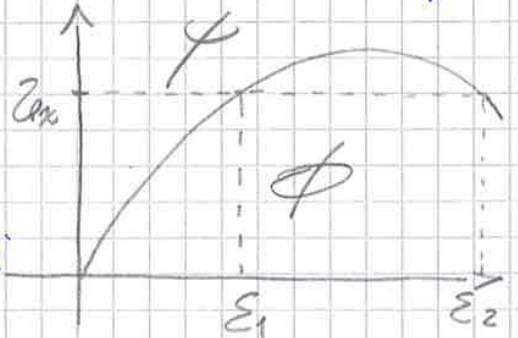
$$dL_{A \rightarrow B} = \phi_B - \phi_A$$

Altri due esempi:

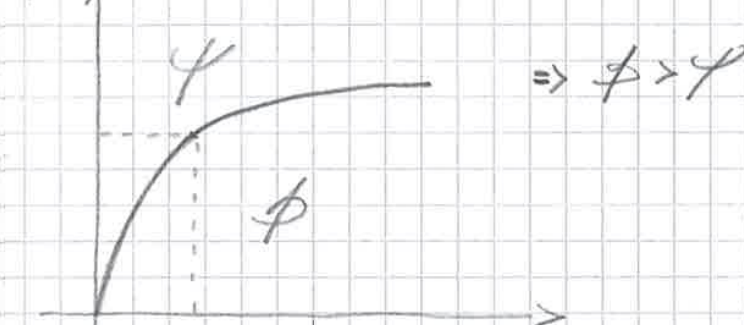
NON DIPENDE DALL' ENERGIA DI CARICO



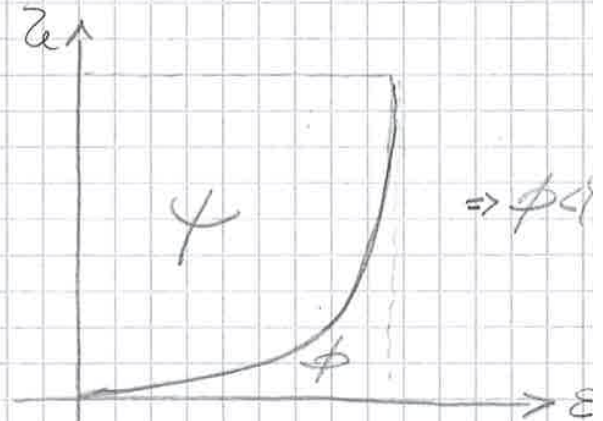
I grafici  $\sigma = \varepsilon$  che considereremo, sono quelli che associamo ad un valore di  $\sigma_x$  un valore di  $\varepsilon$ . In pratica potremmo avere grafici come quello a fianco in cui in alcuni valori di  $\sigma_x$  corrispondono due valori di  $\varepsilon$ . Questo sarebbe un assurdo infatti sarebbe come se per aumentare la deformazione ( $\varepsilon$ ) di un materiale io dovessi diminuire il carico. In generale ogni materiale ha una curva diversa dunque un  $\phi$  e un  $\psi$  diversi, vediamo alcuni:



$\sigma_x = \frac{F}{A}$  GOMMA

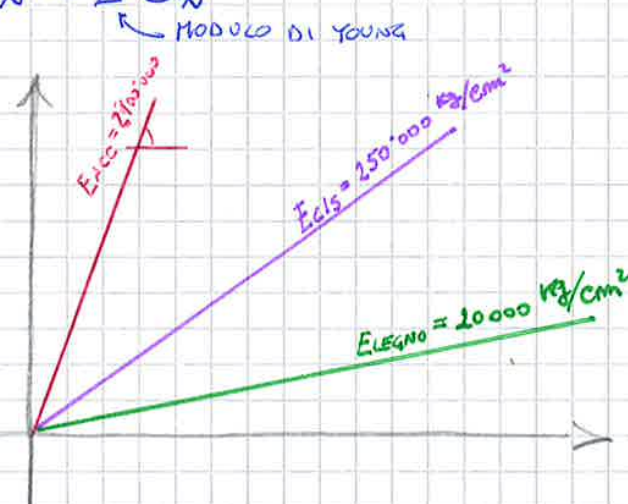


Dopo un certo punto  $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}$  per avere molta deformazione mi basta un carico ridotto



Materiale inizialmente molto deformabile, poi grande carico per piccole deformazioni (CARATTERISTICA DEI MATERIALI BIOLOGICI)

I materiali da costruzione sono una via di mezzo in quanto hanno una diagramma di tipo lineare. in cui  $\sigma_x = E \varepsilon_x$



$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

MPa      ADIMENSIONO

oppure  $\text{kg/cm}^2$

MPa  $\rightsquigarrow$   $\text{kg/cm}^2$   
AGGIUNGO UNO ZERO

Osservo che: Se il materiale è a rifso nell'origine cioè quando è serico il  $\phi(0) = 0$ , specularmente anche le derivate prime si annullano e restano solo le derivate seconde. Quindi:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x} \right) \Big|_0 = \tau_{xx}(0) = 0; \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xz}} \right) \Big|_0 = \tau_{yz}(0) = 0$$

Matrice Hessiana del potenziale elastico

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2} \Big|_0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} \Big|_0 & \dots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_x} \Big|_0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y^2} \Big|_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_x} \Big|_0 & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz}^2} \Big|_0 \end{bmatrix} \quad \text{--- Simmetrica ---}$$

Nota che a due a due sono uguali per ciò possiamo dire che abbiamo 21 COSTANTI INDIPENDENTI (Numeri)

Fondamentalmente l'Hessiana mi fornisce come si allungano le fibre in x y e z; qual è la resistenza e in che modo si distorce il materiale... per fare ciò ho bisogno di 21 costanti!

È possibile scrivere in forma matriciale compatta il POTENZIALE ELASTICO.

$$\phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [H] \{ \epsilon \}$$

Analogia con la forma quadratiche della molla

$$\phi = \frac{1}{2} K x^2$$

Se derivo l'equazione matriciale compatta ottengo:

Manipolandole otteniamo:

$$[\partial]^T \{ \varepsilon \} = - \{ F \}$$

$$[\partial]^T [H] \{ \varepsilon \} = - \{ F \}$$

$$[\partial]^T [H] [\partial] \{ M \} = - \{ F \} \leftarrow$$

INTRODUCENDO  $M$ , E UTILIZZANDO LE DERIVATE, DIMINUISCO IL NUMERO DELLE INCOGNITE. PAGO QUESTA COMODITÀ CON UN AUMENTO DEL GRADO DI DERIVAZIONE

Equazione operatoriale di Lamé

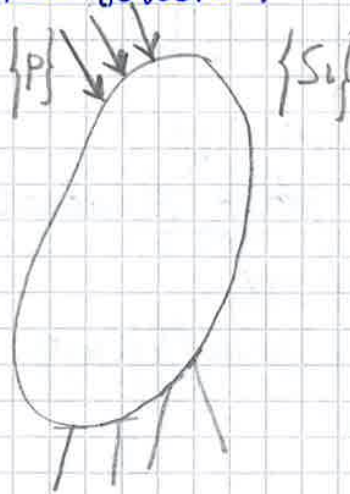
$$([\partial]^T [H] [\partial]) \{ M \} = - \{ F \}$$

$$[L] \{ M \} = - \{ F \}$$

$L$  è una matrice  $6 \times 6 \Rightarrow 36$  costanti

$\Rightarrow$  DERIVATE DI  $x, y, z; u, v, w$

Diciamo inoltre che quando in ogni  $\partial$  del volume del solido:



1) VALE L'EQUAZIONE DI LAMÉ:

$$[L] \{ M \} = - \{ F \}$$

2) VETTORE TENSIONE  $\equiv$  VETTORE F. SUPERFICI

$$([N]^T [H] [\partial]) \{ M \} = \{ P \} \quad \forall P \in S_0$$

$\uparrow$  in cui ho inserito  $\partial$  invece di  $\partial H$  e  $\varepsilon$  invece di  $m$

$$3) \{ M \} = \{ M_0 \} \quad \forall P \in S_0$$

Posso trovare una soluzione alla matrice di 6 incognite

Ma cosa se ne fa l'ingegnere del vettore  $\{ M \}$

$$\{ M \} \Rightarrow [\partial] \{ M \} = \{ \varepsilon \}$$

$3 \times 1$

## 2° PRINCIPIO (TEOREMA DI KIRCHHOFF)

Dato la solida figura e assegnati  $\{F_A\}$ ,  $\{P_A\}$ ,  $\{M_0 A\}$



Se esiste la soluzione  $\{M_A\}$   $\exists$  ed  $\bar{\epsilon}$   
UNICA in termini di:

$$\{M_A\}, [E_A], [Z_A]$$

Dimostrazione per assurdo

Immaginiamo che l'equazione di Lamé ammetta due soluzioni: A e B  $\Rightarrow \{M_A\}, [E_A], [Z_A]; \{M_B\}, [E_B], [Z_B]$

Se applico il PLV

$$\int_V \underbrace{\{\sigma\}^T}_{\substack{\uparrow \\ \text{INIZIALMENTE} \\ \text{FERMO}}} \cdot \{\Delta M\} dV + \int_{S_1} \{\sigma\}^T \cdot \{\Delta M\} dS + \\ + \int_{S_2} \{\Delta R\}^T \cdot \{\sigma\} dS = \int_V \{\Delta Z\}^T \cdot \{\Delta E\} dV$$

con  $\Delta R$  differenza delle reazioni vincolari

L'integrale a 2° membro:

$$\int_V \{\Delta Z\}^T \cdot \{\Delta E\} dV$$

risulta essere il doppio del potenziale elastico  $\Phi$

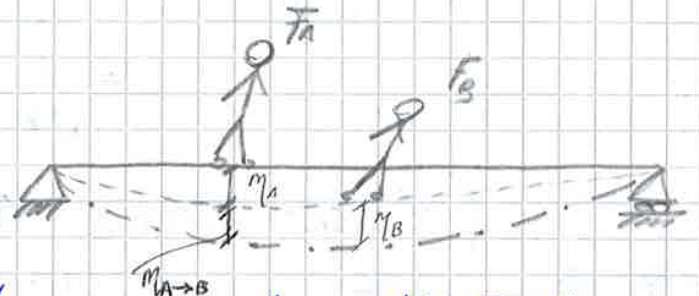
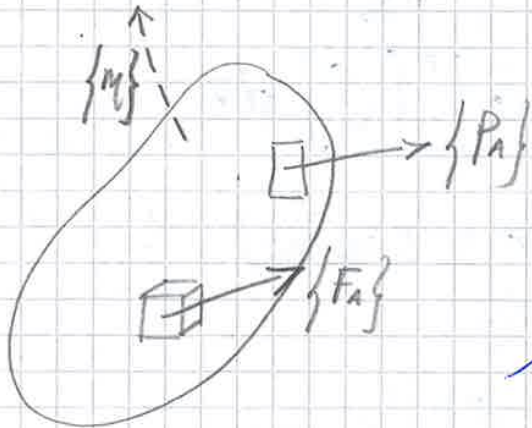
$$\Rightarrow 2 \int_V \Phi (\Delta E_x, \Delta E_y, \dots, \Delta \gamma_{yz}) dV$$

L'integrale si annulla  $\Leftrightarrow E_A = E_B \Rightarrow$  le loro variazioni sono nulle perciò le SOLUZIONI A e B COINCIDONO!

Se abbiamo a che fare con forze fortemente impulsive (proiettili) l'energia in surplus o diventa energia cinetica (fa scattare la trave) o è adoperata per la rottura della stessa

### 4° PRINCIPIO (TEOREMA DI BETTI)

Non è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti in caso di lavoro mutuo



Avremo:

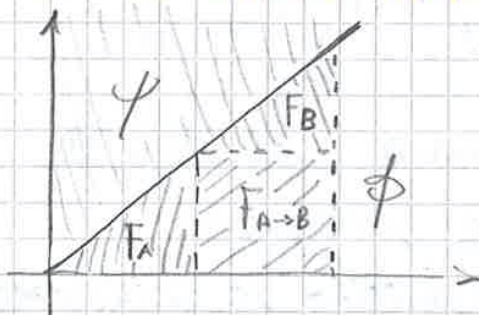
$$L_A = \frac{1}{2} F_A \cdot M_A$$

$$L_B = \frac{1}{2} F_B \cdot M_B$$

Anche se il carico è applicato in B ( $\neq A$ ) anche A ha risentito della seconda sollecitazione

$$\Rightarrow L_{A \rightarrow B} = F_A \cdot M_{A \rightarrow B}$$

Non metto  $\frac{1}{2}$  perché non è più l'area di un triangolo in cui la trave partiva da scario, ma risulta essere un rettangolo in cui la trave è carica prima che  $F_B$  sia applicato. Vedi grafico.



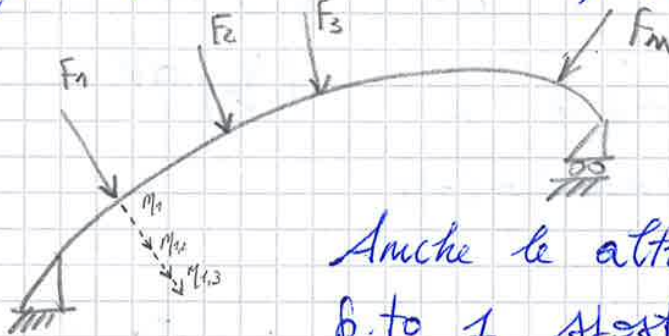
Riferendoci al corpo avremo una situazione tipo:

## 5° PRINCIPIO (TEOREMA DI CASTIGLIANO)

Ci consente di calcolare gli spostamenti statici alternativamente al PLV

$$\eta_i = \sum_{j=1}^m \psi_{ij} F_j \quad \text{con } i = 1, 2, \dots$$

Con  $\eta_i$  = spostamenti duali;  $\psi_{ij}$  = coefficienti d'influenza



Anche le altre f. agiscono sul p.to 1 spostandolo

$$L_{DEF.} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m F_i \eta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i F_j \psi_{ij}$$

Derivando il lavoro di deformazione rispetto a ciascuna forza:

$$\frac{\partial L_{DEF.}}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^m \psi_{ij} F_j \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Quindi:

$$\frac{\partial L_{DEF.}}{\partial F_i} = \eta_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

La derivata del lavoro di deformazione (energia immagazzinata) rispetto al modulo di una forza è UGUALE allo spostamento elastico globale duale rispetto alle forze stesse.



Definisco ora  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  che rappresenta il potenziale elastico complementare nel caso di elasticità lineare e isotropa

Ricordando la definizione degli invarianti come

$$T_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad ; \quad T_2 = - [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + (\epsilon_2 \cdot \epsilon_3) + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)]$$

Ricavo tutte le componenti della deformazione e ottengo la seguente matrice ( $\epsilon_{xx} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{xx}} \dots$ )

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & & & \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & & & \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & & & \\ & & & 1/G & & \\ & & & & 1/G & \\ & & & & & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Le condizioni sufficienti e necessarie per cui i minori estratti siano positivi e perché anche l'hesseiano lo sia sono:

$$\begin{cases} 1/G > 0 \quad ; \quad 1/E > 0 \quad ; \quad 1/E^2 - \nu^2/E^2 > 0 \\ \frac{1}{E^3} (1 - \nu^3 - \nu^3 - \nu^3 - \nu^2 - \nu^2 - \nu^2) = (\det 1^o \text{ sottomat.}) > 0 \\ \quad = \frac{1}{E^3} (1 - 3\nu^2 - 2\nu^3) > 0 \end{cases}$$

Dalle equazioni Memorino che:

$$\begin{aligned} \nu &> -1 \\ E &> 0 \\ -1 &< \nu < 1 \end{aligned}$$

$\nu < 1/2$  NB. cioè che  $\nu$  è sempre una quantità limitata

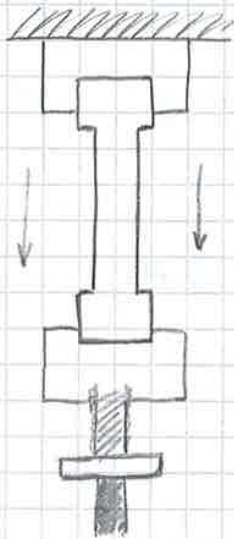
Alcuni dati:

	$E$	$\nu$
CLS	20 ÷ 25 GPa	0,15
ACCIAIO	210 GPa	0,30

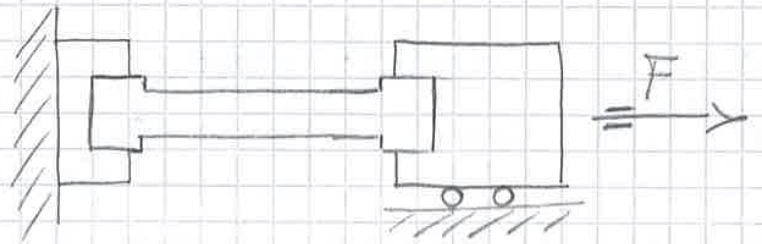
► COMPORTAMENTO DEI MATERIALI

Prova di trazione

PROVA A CONTROLLO DI DEFORMAZIONE



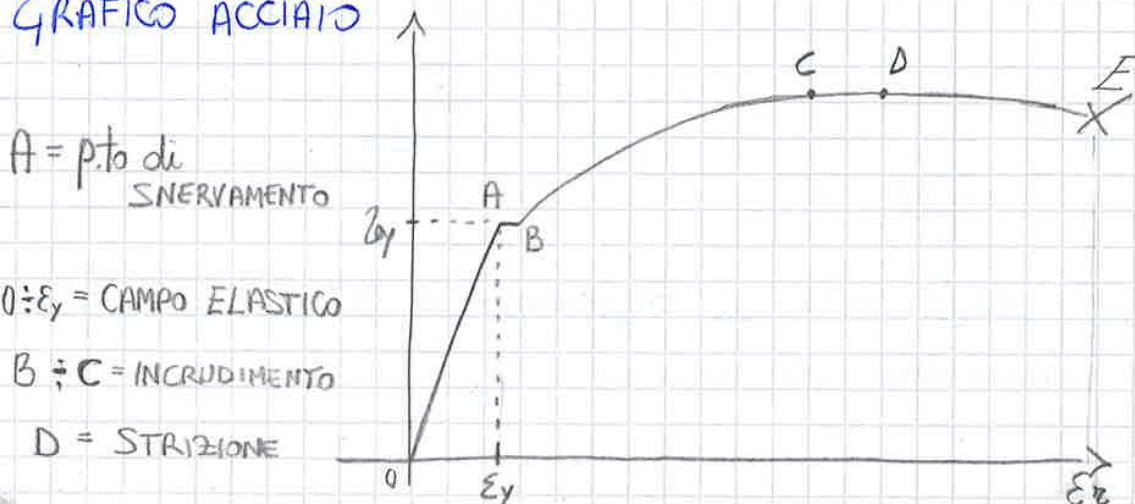
PROVA A CONTROLLO DI CARICO



Qui misuriamo la DEFORMAZIONE

Qui misuriamo la FORZA APPLICATA

GRAFICO ACCIAIO



# CRITERI DI RESISTENZA PER MATERIALI FRAGILI

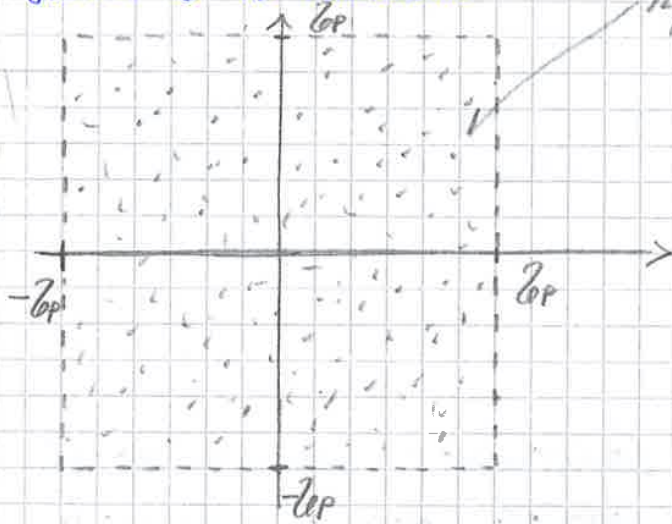
Esistono 2 metodi

1. Rankine (o delle max tensioni normali)
2. Mohr-Coulomb

Diciamo che un materiale è di QUALITÀ se nel tempo è in grado di mantenere le sue caratteristiche

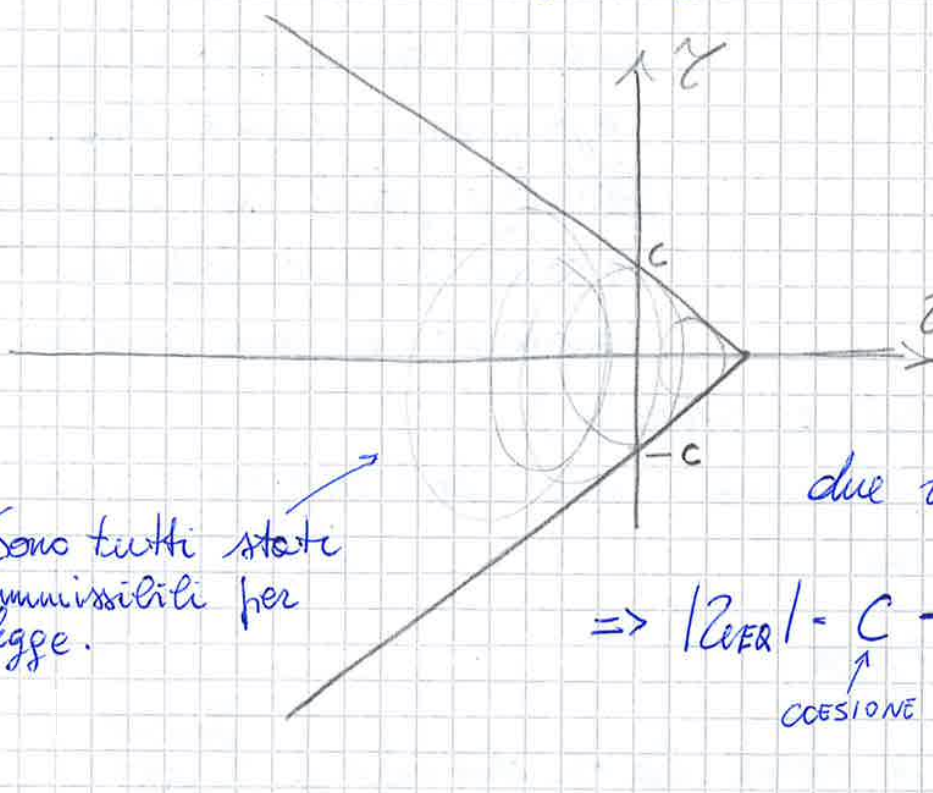
## RANKINE

Utilizziamo un materiale con uguale resistenza a compressione e a trazione



$$\text{Cui } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

## MOHR-COULOMB



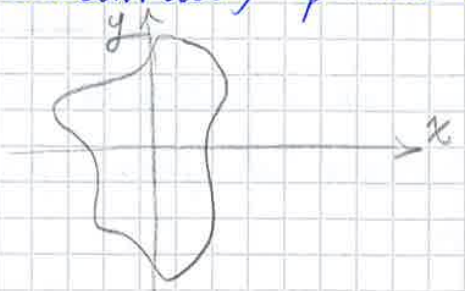
Le zone di resistenza sono rappresentate dai cerchi contenuti all'interno delle due rette (tangenti)

$$\Rightarrow |\sigma_{\text{FER}}| = c - \mu \tau$$

$\uparrow$  COESIONE                       $\uparrow$  ANGOLO DI ATTRITO INTERNO

## Ipotesi Th. S-V

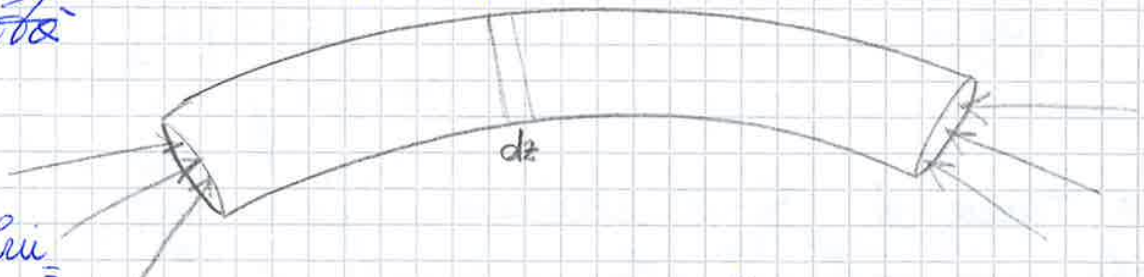
- 1)  $x$  e  $y$  devono essere assi centrali (baricentrici) quindi con momento centrifugo d'inerzia pari a 0 ( $I_{xy} = 0$ )
- 2) Il materiale è elastico, lineare, omogeneo e isotropo
- 3) Modulo Elastico (o di Young) [ $\frac{N}{mm^2}$ ]:  $E$
- 4) Coeff. di Poisson [adimensionale]:  $\nu$
- 5) Modulo di rigidità [ $\frac{N}{mm^2}$ ]:  $G$
- 6) Si assumono nulle le forze di superficie  $\{P\} = \{0\} \forall P \in \partial V$
- 7) Si assumono nulle le forze di volume  $\{F\} = \{0\} \forall P \in S$



Il cilindro considerato dunque può essere caricato solo alle estremità

Infatti un ipotetico

carico distribuito



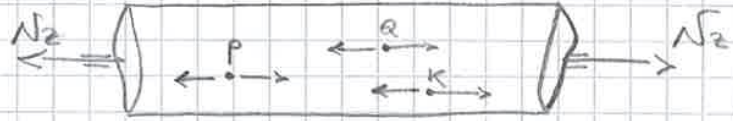
di  $dz$  un contributo irrilevante rispetto a MNT, per questo assumiamo ogni elemento  $dz$  scarico

Principio fondamentale

possiamo dire però che, queste azioni sulle estremità possono essere cariche fin che si vuole, ma ad una certa distanza (detta DISTANZA DI OMOGENEIZZAZIONE) possiamo semplificare e dire che incidono solo la reazione  $\{M\}$  e  $\{R\}$

Principi

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad \forall P \in V \\ \tau_{zz} = \text{costante} \end{aligned} \right\}$$

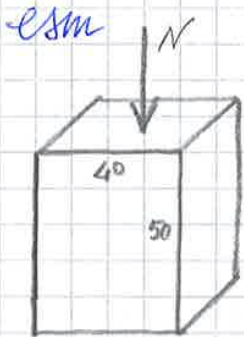


Adesso verifico che sia una soluzione valida, sostituisco

$$N = \int_{A_1} \tau_{zz} dA = c \cdot A \Rightarrow c = \frac{N}{A} \equiv \tau_{zz} = \frac{N}{A}$$

$\uparrow$  se costante posso  
 e chiamarlo  $c$

Si dimostra che è proprio così!

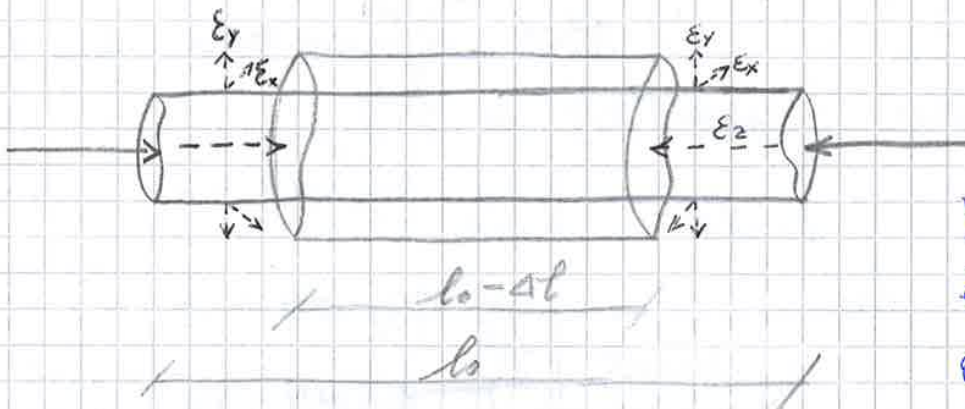


$$A = 2000 \text{ cm}^2 \Rightarrow \tau_{zz} = \frac{20000 \text{ kg}}{2000 \text{ cm}^2} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$N = 20 \text{ ton}$

Quunque da ciò capiamo che lo SFORZO NORMALE è comandato dall'area.

Consideriamo ora lo stato deformativo:



Vediamo che se  $\epsilon_z$  è di accorciamento allora  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  sono di accrescimento

Allora:

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$

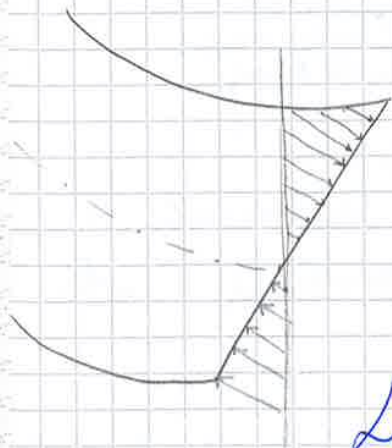
$\uparrow$  MODULO DI YOUNG      $\uparrow$  AREA  
 $\rightarrow$  RIGIDEZZA ESTENSIONALE della sezione

essendo un eq di 1° grado il campo di spostamento di  $W$  è lineare. Mentre la deformazione assiale è data da:

$$\epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \chi_x}{\partial z} \cdot y$$

e la curvatura attorno a  $x$

$$\epsilon_z = - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \cdot y$$



Le fibre su baricentro non hanno sollecitazione alcuna  $\Rightarrow$  avranno derivate nulle (ASSE NEUTRO)

Se piglio la deformazione  $\epsilon$  e la moltiplico per il modulo di Young  $E$  ottengo  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot \left( - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \cdot y$$

Come ricavo  $\chi_x$ ? Esplicito tutto in funzione di  $W$

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \quad (\sigma_z \cdot dA = F \Rightarrow F \cdot y = M)$$

$$M_x = \int_A E \cdot \left( - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \cdot y^2 dA$$

$$M_x = E \cdot \left( - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \cdot \int_A y^2 dA$$

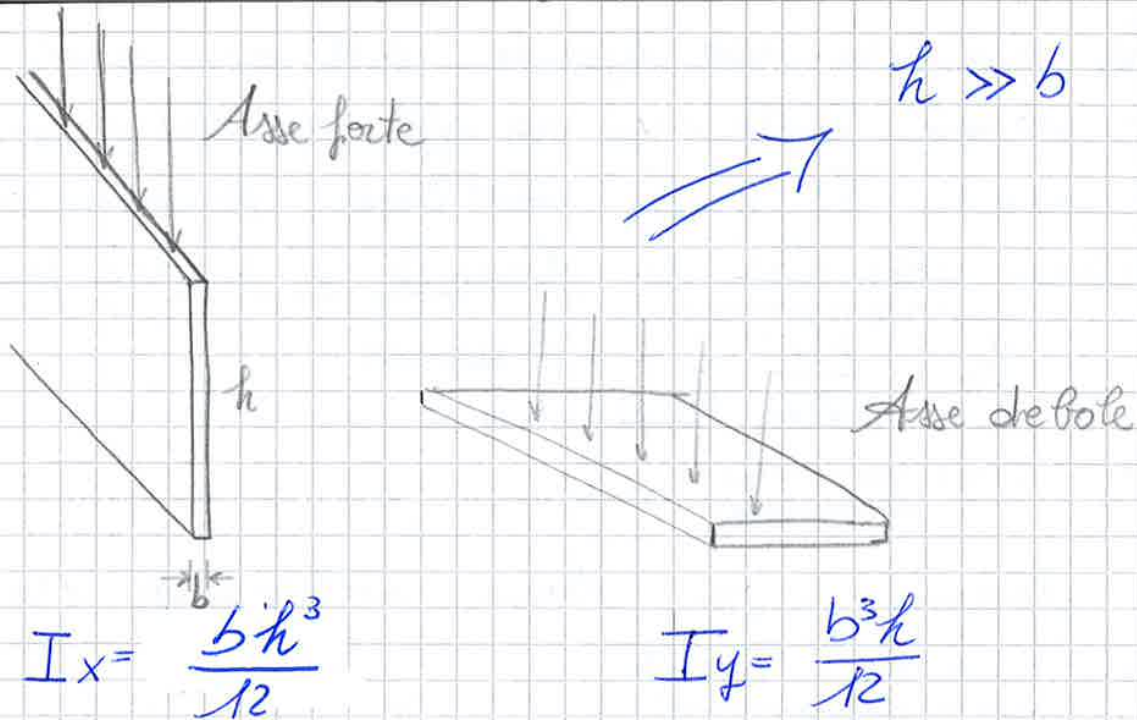
$$M_x = E \cdot \left( - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \cdot I_x$$

$\hookrightarrow$  CURVATURA  $\chi_x = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$

Da cui appunto

$$\chi_x = - \frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

CURVATURA FLESSIONALE

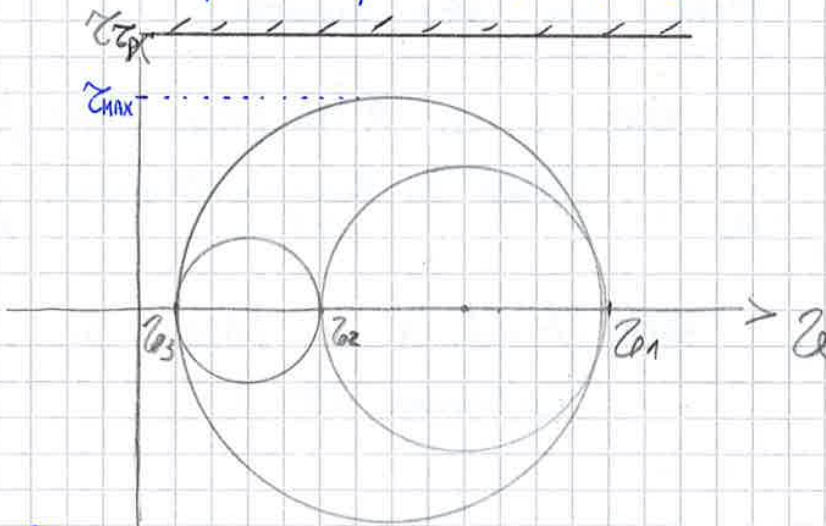


► CRITERIO DI TRESCA (x materiali duttili) (1868)

Il nostro scopo è trovare un'area particolare in cui i punti compresi, sono ammissibile cioè non provocano snervamento al materiale

$\Rightarrow \tau_{\text{eq}} = \tau_{\text{eq}}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  con  $\tau_{\text{eq}} < \tau_{\text{ep}}$

τ DI SNERVAMENTO



Vediamo la relazione che lega  $\tau_{\text{MAX}}$  a  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ .

$\tau_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} \max(|\tau_1 - \tau_2|, |\tau_1 - \tau_3|, |\tau_2 - \tau_3|)$

Quindi dato che il  $\tau_{\text{MAX}}$  tiene conto del MASSIMO i tre cerchi degenerano in uno solo cioè quello di raggio maggiore:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 - \bar{\epsilon} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \epsilon_2 - \bar{\epsilon} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \epsilon_3 - \bar{\epsilon} \end{bmatrix}$$

Si ottiene:  $\phi = \frac{1}{2E} (J_I^2 + 2(1+\nu) J_{II})$

↑  
MODULO DI  
POISSON

$$\varphi_{DEV} = \frac{1+\nu}{E} J_{II DEV}$$

Con

$$J_{II DEV} = - [ (\epsilon_1 - \bar{\epsilon})(\epsilon_2 - \bar{\epsilon}) + (\epsilon_1 - \bar{\epsilon})(\epsilon_3 - \bar{\epsilon}) + (\epsilon_2 - \bar{\epsilon})(\epsilon_3 - \bar{\epsilon}) ]$$

$$= [ (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3) - 2\bar{\epsilon}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 3\bar{\epsilon}^2 ]$$

$$= - [ (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3) - 3\bar{\epsilon}^2 ] =$$

$$= J_{II} + \frac{3 J_I^2}{9}$$

$$= \frac{1}{3} [ 3 J_{II} + J_I^2 ] \quad \text{Annundi:}$$

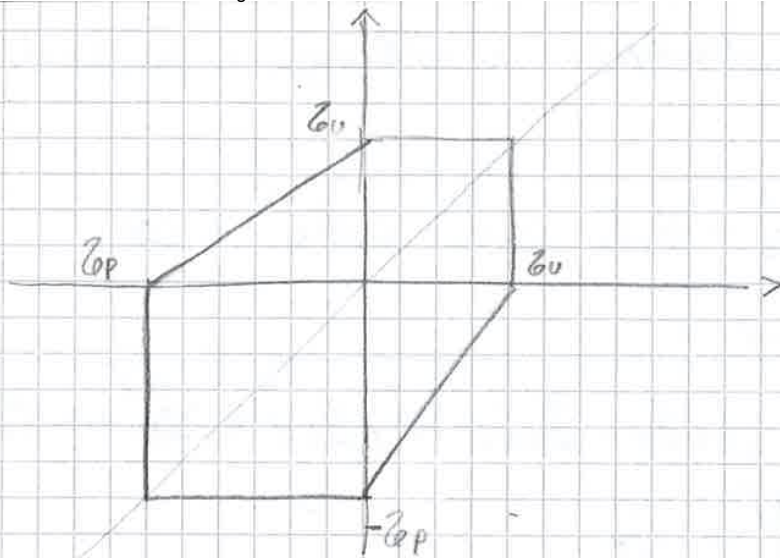
$$\varphi_{DEV} = \frac{(1+\nu)}{3E} (J_I^2 + 3 J_{II})$$

$$= \frac{(1+\nu)}{3E} [ (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 - 3(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3) ]$$

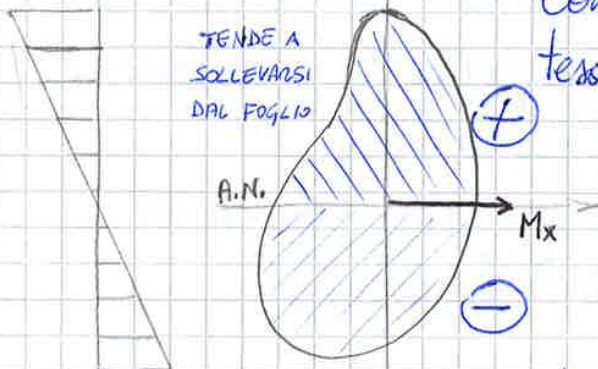
$$= \frac{1+\nu}{3E} [ \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 - \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_2 \epsilon_3 ]$$

$$\Rightarrow \varphi_{DEV P} = \frac{(1+\nu)}{3E} \epsilon_{OP}^2$$





Considero l'oggetto.



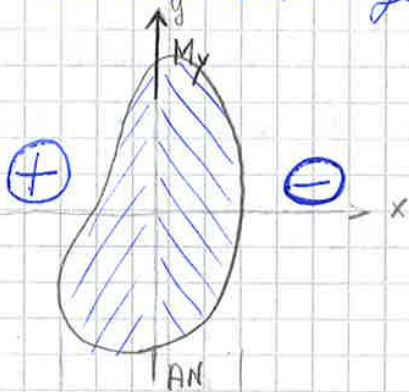
Come si può capire qual è la parte tesa e qual è la parte compressa?

Sapendo la direzione del momento e sapendo che si considera positiva la portazione in trazione se infatti una rotazione antioraria

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$



Se il momento agente invece fosse  $M_y$ :



Stesso procedimento in quanto è sufficiente applicare la regola della mano destra correttamente.

Devo INSERIRE IL MENO perché le tensioni positive (cioè a sinistra) le avrei per x negative => perché il tutto sia coerente, inserisco un MENO

$$\sigma_z = - \frac{M_y}{I_y} x$$

NB

D. EXAM: COME TRACCIO LE TENSIONI ?

Trovo l'equazione dell'asse neutro:  $\frac{2}{17a^4} y - \frac{2}{5a^4} x = 0$

Essendo che il sistema è principale è sufficiente sostituire le coordinate

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{17}{5} x}$$

$$A = \left( \frac{3}{2} a, \frac{a}{2} \right) = \sigma_{zA} = -0,383 \text{ M/a}^3$$

$$B = \left( \frac{1}{2} a, -\frac{5}{2} a \right) = \sigma_{zB} = -0,349 \text{ M/a}^3$$

$$C = \left( -\frac{3}{2} a, \frac{3}{2} a \right) = \sigma_{zC} = 0,549 \text{ M/a}^3$$

Quindi di fessure ma la situazione "fessure" la riserchio in A. Abbiamo dunque disegnato l'andamento delle tensioni  $\{\sigma_z\}$

CONTINUA

↳ QUADERNO 2

di

$$I_{ez} = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{A \rho_x^2} y + \frac{N e_x}{A \rho_y^2} x$$

Raccoglie

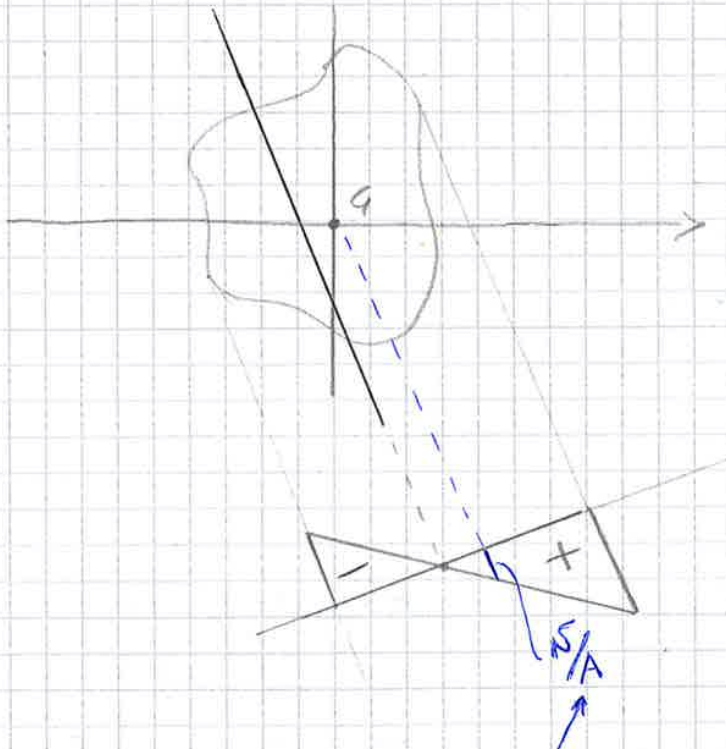
$$\Rightarrow I_{ez} = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x \right) =$$

Oramai  $I_{ez} = 0$  se la (...) è = 0

per questo l'asse neutro ha equazione implicita

$$1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x = 0$$

→ Sarà una retta  
NON PASSANTE per G  
in quanto c'è il  
termine 1 + ...



PERCHÈ IL BRACCIO È NULLO PERCIÒ  
NON SI PRODUCE MOMENTO

(N) → TENSO FLESSIONE se  $N > 0$  (Trazione)  
→ PRESSO FLESSIONE se  $N < 0$  (Compressione)

Se A.N. è esterno implica o tutta TRAZIONE o tutta COMPRESSIONE

$$1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x = 0 \quad ?$$

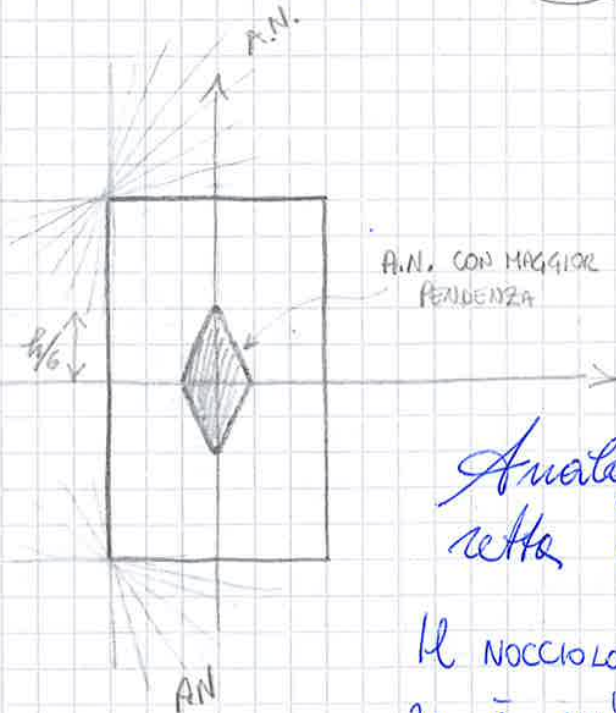
$$\frac{h}{2} + y + 0x = 0$$

$$1 + \frac{2}{h} y + 0x = 0$$

Quindi:  $\frac{e_y}{\rho_x^2} = \frac{2}{h}$  ;  $\frac{e_x}{\rho_y^2} = 0$

$$\Rightarrow e_y = \frac{\rho_x^2 \cdot 2}{h} \quad e_x = 0$$

$$= \frac{h^2}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{h}{6}$$



Analogamente per la  
retta  $b: x = -\frac{b}{2}$

Il nocciolo di una circonferenza è un'altra circonferenza di raggio  $r < R_{\text{nuovo}}$ .

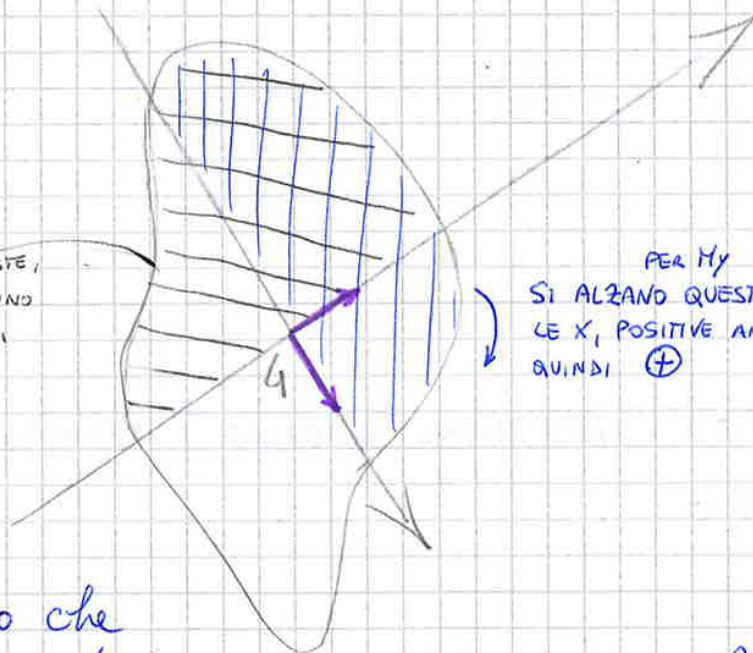


DOMANDA D'EXAM

Quanto vale  $z_c$  se il sistema di riferimento è posto ...

Segno  $\oplus$

PER  $M_x$   
SI ALZANO QUESTE,  
GUARDO LE  $y$  SONO  
NEGATIVE QUINDI  
 $\ominus$



PER  $M_y$   
SI ALZANO QUESTE, GUARDO  
LE  $x$ , POSITIVE ANCHE LORO  
QUINDI  $\oplus$

Sappiamo che le componenti sono... ma i segni?

$$z_c = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x =$$

## CALCOLO IL MOMENTO CENTRIFUGO

$$I_{xy} = \frac{1}{72} 10^2 20^2 + \frac{1}{2} 10 \cdot 20 \cdot (y_{G1} - y_G)(x_{G1} - x_G)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Vedi conversione triangoli

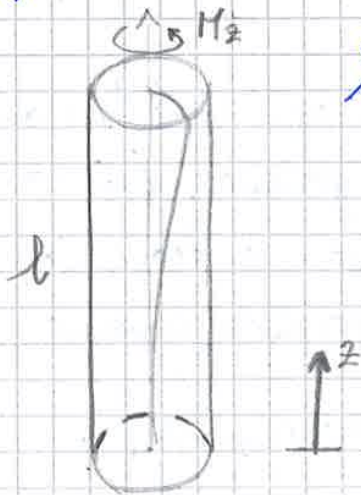
$$I_{\xi} = 0,123 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{\eta} = 0,827 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{I_{\xi}} \eta - \frac{M_{\eta}}{I_{\eta}} \xi$$

$$\text{con } M_{\xi} = N e_{\eta} \quad \text{e} \quad M_{\eta} = -N e_{\xi}$$

applicato il momento, più ci si allontana (in profondità) più il suo contributo si dissol<sub>u</sub>ve. Perciò quello che veramente ci interessa, è la variazione di  $\varphi$  lungo la direzione  $z$ , dunque:  $\vartheta = \frac{d\varphi}{dz}$ . L'unico asse che non è soggetto ad alcuna variazione è l'asse  $z$  (fibra baricentrica).



$$\varphi_z^{(MAX)} = \varphi(z=l) = \vartheta \cdot l$$

Si avrà uno stato di deforma<sub>z</sub>zione pari a:

$$u = -\vartheta \cdot z \cdot y$$

$$v = \vartheta \cdot z \cdot x$$

$$w = 0$$

$$\hookrightarrow \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

Per ciò  $\gamma_{zx} = -\vartheta \cdot y$  e  $\gamma_{zy} = \vartheta \cdot x$

Ripetendo il concetto, l'unico punto in cui  $\gamma$  sono 0 è il punto delle fibre baricentriche.

Nota  $\gamma$  è sufficiente moltiplicarlo per  $G$  (modulo di rigidità) per ricavare  $\tau$

$$\Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{zx} = -G \cdot \vartheta \cdot y$$

$$\tau_{zy} = G \cdot \vartheta \cdot x$$

$$\Rightarrow \tau_z(r) = G \cdot \vartheta \cdot r$$

$$M_z = \int_A \{r\} \wedge \{\tau_z\} dA \neq 0$$

$$= \int_A (x \cdot \tau_{zy} - y \cdot \tau_{zx}) dA$$

$$\Rightarrow M_z = G \vartheta \int_A r^2 dA = G \vartheta \cdot I_p$$

MOMENTO D'INERZIA POLARE  
 ↳ SÌ DEI DUE MOM. D'INERZIA ASSIALI

↳ RELAZIONE TRA  $M_z$  E L'ANGOLO DI TENSIONE  $\vartheta$

$$\vartheta = \frac{M_z}{G \cdot I_p} = \frac{2 M_z}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

RIGIDEZZA TORSIONALE DELLA SEZIONE

Sostituisco nella formula della torsione massima

$$\tau_z(I) = \frac{M_z \cdot I}{G \cdot I_p} \quad \text{con} \quad \frac{G \cdot I_p}{I} \quad \text{RIGIDEZZA TORSIONALE DELL'ASTA}$$

$$\tau_z^{(MAX)} = \frac{M_z}{I_p} \cdot R$$

↑  
RAGGIO MASSIMO

REMEMBER

In generale

$$\tau_z(r) = \frac{M_z}{I_p} r$$

In altra forma, se sostituiamo  $I_p$  possiamo dire:

$$\tau_z^{(MAX)} = \frac{2 M_z}{\pi \cdot R^3}$$

Quindi, se raddoppiassi il raggio di un albero soggetto a torsione avrei una diminuzione delle tensioni di 8 volte.



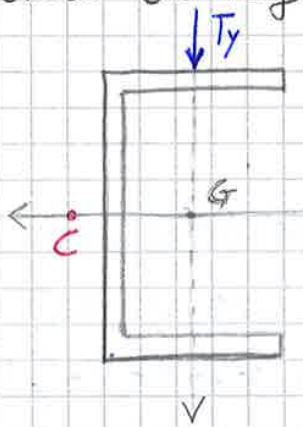
Torsione trave a sezione generica

In questi casi, la torsione non ruoterà attorno a  $G$  bensì attorno ad un altro punto  $C \neq G$ .  
Le sezioni NON RIMANGONO PIANE subendo un ingobbamento.

Questo argomento lo approfondiremo più avanti

► TAGLIO RETTO

Centro di taglio



Se consideriamo una sezione con sollecitazione  $(T_y)$  si può dimostrare che essa subisce uno spostamento lungo  $y$  e una torsione.

Questo capita ogni qualvolta il taglio non è applicato al

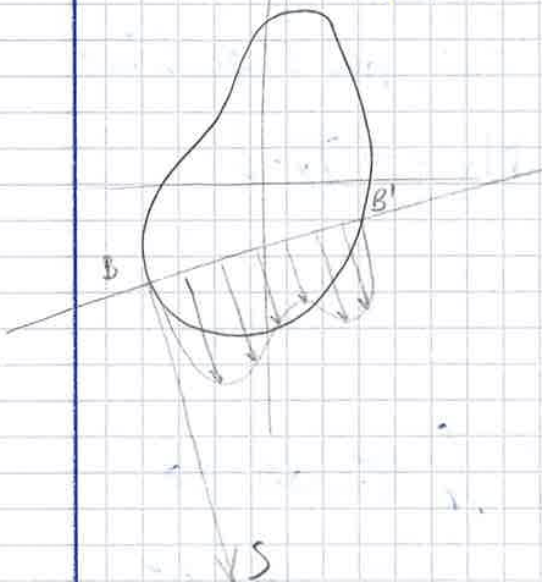
CENTRO DI TAGLIO (c)

Si può studiare tale situazione come somma di una sezione con  $T$  applicato su  $c$  + una in cui è applicato unicamente  $M_z$ .

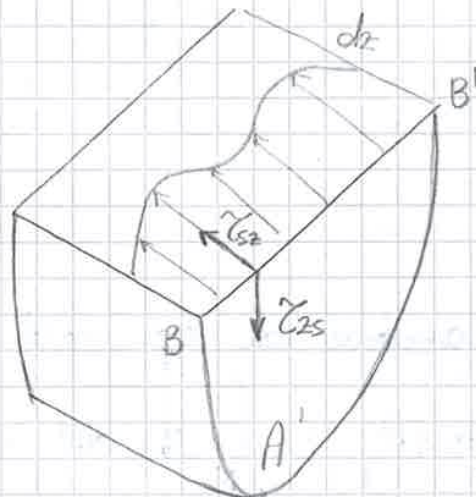


## ► TEORIA DI JOURAWSKI

Studia la distribuzione delle  $\tau$  su  $\tau(z_s)$ ; tensione ortogonale alla corda  $BB'$



Considero un cono



Effettuo un equilibrio alla trazione in direzione  $z$ .

$$\Rightarrow \tau_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Da una "faccia" avremo

$$\tau_z \text{ dall'altra: } \tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} dz$$

Se effettuiamo l'equilibrio,

separare solo la variazione.

$$\int_{A'} \frac{\partial \tau_z}{\partial z} dz dA$$

Le tensioni tangenziali  $\tau_z$  non dipendono da  $z$  poiché il taglio è costante lungo la trave

$$= \int_{A'} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_x}{I_x} y \right) dz dA$$