



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1567-1A

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar

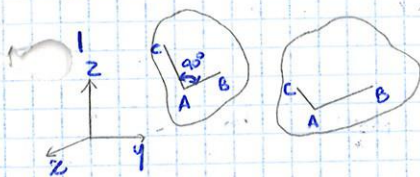
MATERIA: Scienze delle Costruzioni + Eserc.
Prof.Chiaia_Surace - Parte 1

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

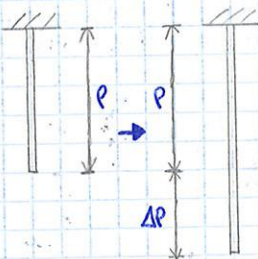
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE



In genere, un corpo a seguito di uno sforzo subisce rototraslazione e, presi due punti, la loro distanza è costante oppure un angolo è costante.
In realtà un corpo può anche cambiare forma, cioè l'angolo può variare, a cui si aggiunge la rototraslazione

2 Deformazione



Considerando una barra priva di massa con lunghezza P_0 , si applica una deformazione in modo che essa si allunghi di una componente ΔP e abbia lunghezza finale P .
Al momento non interessa come la barra si è allungata.
La variazione di lunghezza vale

$$\Delta P = P - P_0$$

Si definisce **deformazione** (qui uniaxiale) la variazione di lunghezza rapportata alla lunghezza iniziale

$$\epsilon = \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P - P_0}{P_0}$$

Si osserva che la deformazione è **ADIMENSIONALE**

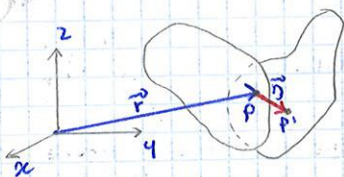
$$[\epsilon] = \frac{[L]}{[L]} = [-]$$

Tale definizione è stata proposta da Cauchy, ad es. Eulero introdusse la **DEFORMAZIONE NATURALE** come

$$\epsilon_{nat} = \frac{\Delta P}{P}$$

Si introduce anche la **DEFORMAZIONE LOGARITMICA**, in cui si segue tutta la deformazione nominale del corpo man mano che si applica il carico

$$\epsilon_{log} = \int_0^{\epsilon_{fin}} d\epsilon = \int_{P_0}^{P_{fin}} \frac{dP}{P} = \log \frac{P_{fin}}{P_0}$$



Considerando stavolta un corpo tridimensionale e fissando un sistema di riferimento CO , ogni suo punto può essere fissato tramite un vettore \vec{r} .
Il generico punto P , a seguito del moto, si sposta a P' e lo spostamento è indicato dal vettore \vec{j} .
Allora si può individuare una corrispondenza tra ogni punto e il suo vettore spostamento, che creando una funzione che associa a un vettore posizione un vettore spostamento \vec{j}

$$f: \vec{r} \rightarrow \vec{j}$$

Per sua definizione, questa è una funzione vettoriale del tipo

$$\vec{j} = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}$$

dove u, v e w sono delle funzioni della posizione del punto

Si considera ora la matrice di deformazione

$$\epsilon_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

~ si vuole correlare DS_Q risp DS_P

Tale matrice è calcolata rispetto a P perchè le derivate parziali sono calcolate in P. Essa si può semplificare introducendo le dilatazioni

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

e gli scorrimenti angolari

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

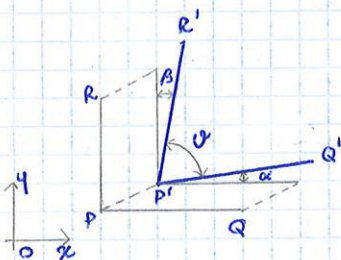
Così essa si scrive come

$$\epsilon_P = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Matrice di deformazione

È la relazione di prima

$$\vec{d}_Q = \vec{d}_P + \varphi_P d\vec{r} + \epsilon_P d\vec{r}$$



INTERPRETAZIONE DELLA MATRICE DI DEFORMAZIONE:
Fissato ora un sistema di riferimento CO, si considerano due segmenti infinitesimi PQ e PR di lunghezza dx e dy. Ora si esegue una rototraslazione con deformazione in modo che il nuovo angolo ψ sia tale che

$$\psi < \frac{\pi}{2}$$

Lo spostamento indotto dalla deformazione in Q (da Q* a Q') vale in orizzontale e verticale rispettivamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx$$

→ moltiplicato per dx perchè è la sua lunghezza

Analogamente per R

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} dy$$

muovendosi lungo l'asse y si nota che R' si sposta in orizzontale

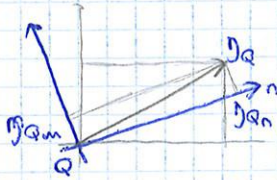
Si nota così che le dilatazioni intervengono negli spostamenti dei punti, mentre lo scorrimento angolare rappresenta la diminuzione dell'angolo retto

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \psi = \alpha + \beta$$

Visto che α e β sono piccoli e che $\sin \psi \rightarrow \psi$, $\psi \rightarrow 0$, si può dire che

γ_{xy}

$$d\vec{r}_{Q,xyz} = \epsilon_{p,xyz} d\vec{r}_{xyz}$$



Ora però si potrebbe scomporre il vettore \vec{r}_Q nel nuovo sistema di riferimento e cercare il collegamento tra i due vettori spostamento attraverso la matrice di rotazione

$$\vec{r}_{Q,xyz} = N \vec{r}_{Q,nml}$$

In virtù di ciò si può scrivere che

$$d\vec{r}_{Q,xyz} = N d\vec{r}_{Q,nml} = \epsilon_{p,xyz} d\vec{r}_{xyz} = \epsilon_{p,xyz} N d\vec{r}_{nml}$$

Poiché N è una matrice di rotazione, tale che

$$N^{-1} = {}^t N$$

Per questo si pre-moltiplica $\times {}^t N$ (che è uguale a N^{-1})

$${}^t N N d\vec{r}_{Q,nml} = \epsilon_{p,xyz} N d\vec{r}_{nml}$$

$${}^t N N \vec{r}_{Q,nml} = {}^t N \epsilon_{p,xyz} N d\vec{r}_{nml}$$

$$\vec{r}_{Q,nml} = {}^t N \epsilon_{p,xyz} N d\vec{r}_{nml}$$

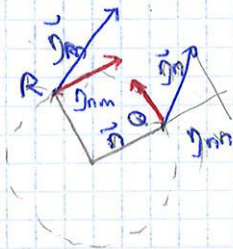
Facendo il confronto che con l'equazione

$$d\vec{r}_{Q,xyz} = \epsilon_{p,xyz} d\vec{r}_{xyz}$$

si può dire dunque che la matrice ${}^t N \epsilon_{p,xyz} N$ è la matrice di deformazione $\epsilon_{p,nml}$ nel nuovo sistema di riferimento

$$\epsilon_{p,nml} = {}^t N \epsilon_{p,xyz} N$$

OSSEVAZIONE : II VIA DI DIMOSTRAZIONE



Dato un punto P , si considera nel suo intorno un punto Q la cui posizione è individuata dal versore \vec{n} (che dà la direzione). Nel punto Q è applicato uno spostamento \vec{j}_n . Si ha che

$$\vec{j}_n = \epsilon_p \vec{n}$$

Analogamente, si prende un versore \vec{m} ortogonale che identifica il punto R e lì c'è uno spostamento \vec{j}_m (dove "m" perché m identifica R)

Si osserva che la proiezione di \vec{j}_m sulla direzione \vec{n} è pari a

$$j_{nm} = \vec{n} \cdot \vec{j}_m = {}^t \vec{n} \vec{j}_m$$

La proiezione lungo m invece vale

$$j_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{j}_n = {}^t \vec{m} \vec{j}_n$$

Per questo, si considera scrive $\vec{\eta}_Q$ secondo la relazione

$$\vec{\eta}_Q = [\varepsilon_p] \vec{\eta} \quad \text{I}$$

Però in questo caso c'è parallelismo \times ipotesi tra $\vec{\eta}_Q$ e $\vec{\eta}$ e il parallelismo si impone introducendo una scalare

$$\vec{\eta}_Q = \varepsilon_n \vec{\eta} \quad \text{II}$$

Si sottrae a (II) la relazione (I)

$$([\varepsilon]_p - \varepsilon_n [I]) \vec{\eta} = \vec{0}$$

Per render vera l'uguaglianza, si potrebbe porre $\vec{\eta} = 0$ ma così non si darebbe più direzione. Del resto $\vec{\eta}$ è un versore.

Però è contemplato porre l'altra quantità uguale a zero e, a farlo, si può porre il suo determinante uguale a zero

$$\det([\varepsilon]_p - \varepsilon_n [I]) = 0$$

Si riconosce che questa è un problema di autovalori. Si esplicita dunque tutto

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_n & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_n & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_n \end{pmatrix} = 0$$

Visto che la matrice è simmetrica, il problema ammette 3 radici reali (non complesse) e positive.

L'equazione può essere riscritta come

$$\varepsilon_n^3 - J_1 \varepsilon_n^2 - \varepsilon J_2 \varepsilon_n - J_3 = 0$$

J_i = invarianti della deformazione, che non dipendono dal sistema

Dove

$$J_1 = \text{tr}[\varepsilon] = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$J_2 = -\det \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -\varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \det[\varepsilon]$$

Risolvendo l'equazione, si ottengono 3 soluzioni reali (dunque non esistono tensioni principali complesse) che possono anche essere non distinte o nulle

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

Se le 3 tensioni sono tra loro differenti

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$$

allora esiste un UNICO SISTEMA DI RIFERIMENTO le cui direzioni siano le direzioni principali di deformazione

Tornando alla matrice di deformazione $[\epsilon]_{pi}$, si suppone che essa sia scritta nel sistema di riferimento $Oxyz$

Si vogliono trovare le direzioni principali 1, 2 e 3, ossia direzioni tali che

$$[\epsilon]_{123} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Per fare questo si è impostato un problema agli autovalori dove le soluzioni sono

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

a questi autovalori si associano gli autovettori

$$\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3$$

Questi possono essere radunati nella matrice degli autovettori

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_{1x} & \lambda_{2x} & \lambda_{3x} \\ \lambda_{1y} & \lambda_{2y} & \lambda_{3y} \\ \lambda_{1z} & \lambda_{2z} & \lambda_{3z} \end{bmatrix}$$

Visto che $[A]$, a costruzione, è ortogonale e in questo caso funge da matrice di rotazione

$$[\epsilon]_{123} = {}^t[A][\epsilon]_{xyz}[A]$$

$$[\epsilon]_{123} = {}^t[A][\epsilon]_{xyz}[A]$$

Equazioni di compatibilità

Finora la trattazione è partita da una funzione che associa a un vettore $d\vec{r}$ a un vettore spostamento del tipo

$$F: d\vec{r} \rightarrow \vec{u}$$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

→ 6 perché sono le componenti del tensore di deformazione



Così dato un campo di spostamenti, è possibile scrivere il campo delle deformazioni. ora, se si ha un campo delle deformazioni (a ogni punto si dà un valore di deformazione), si può tornare indietro? Cioè si vuole giungere al campo di spostamenti. Supponendo infatti di dividere il corpo in tanti volumetti identificati da una coordinata e che si deformano in maniera disordinata. Se si integrano le deformazioni in tutti i punti, si ha il campo di spostamenti. Questi spostamenti da un corpo all'altro devono essere continui, ovviamente (il contrario non è ammissibile). Però, passando da spostamenti a deformazioni si richiede la continuità (e applicare Taylor). Altrimenti, invece, non si può avere sempre continuità perché devono esistere delle condizioni con cui vincolare il campo, in modo che, integrato, dia un vero campo degli spostamenti.

Poi si prende il termine γ_{xy} e si deriva rispetto a x e z

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} \quad I$$

In maniera simmetrica si procede con γ_{xz} derivandolo rispetto a x e y

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad II$$

Infine si deriva γ_{yz} ^{2 volte} rispetto a x

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \quad III$$

Si osserva che nelle relazioni appaiono le stesse quantità e perciò si sommano I e II e si sottrae III

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

→ III EQUAZIONE DI COMPATIBILITÀ

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

La I equazione è simmetrica alla IV, come anche la VI

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

Tali equazioni, in presenza di un campo di deformazioni in un punto (descritto da 6 parametri ε e γ in ogni punto), permettono di dire se questi 6 valori portano a un campo degli spostamenti. Devono valere queste equazioni (cioè è necessario un legame tra ε e γ in ogni punto) e se sì, è condizione sufficiente perché il campo di deformazione sia integrabile in un campo di spostamenti.

Es

Si consideri un campo di moto in cui

$$u = \left[\left(\frac{1}{m^2} \right) x^3 - 6y + 2(m) \right] \cdot 10^{-3}$$

$$v = \left[-3 \left(\frac{1}{m} \right) x^2 + 3y - 6(m) \right] \cdot 10^{-3}$$

$$w = -1 \left(\frac{1}{m^2} \right) z^3 \cdot 10^{-3}$$

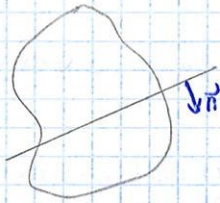
Si fa lo sviluppo in serie

Da qui si cercano gli autovettori

$$A E_{n,s} \rightarrow \vec{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4,85 & -3 \\ -3 & 3-4,85 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quando sono soddisfatte queste equazioni, il corpo è in equilibrio.



Però queste forze sono esterne e, a sapere come si comportano all'interno, si immagina di tagliare idealmente il corpo con un piano di normale \vec{n} .

Così idealmente il solido è diviso in 2 porzioni ① e ②.

Ora si prova a scrivere l'equazione di equilibrio dell'es. della porzione ② e si nota che, a seguito del taglio del solido, si è formata una nuova superficie Ω che è una superficie ideale di taglio. Per ora, si suppone che su tale superficie non sia applicata niente e quindi nell'equilibrio non intervengano solo \vec{F} e \vec{p} .

Qui si scopre che

$$\int_{V_2} \vec{F} dV + \int_{S_2} \vec{p} dS \neq 0$$

Cioè non sussiste equilibrio.

Ad es. immaginando un cavetto tirato da una parte e dall'altra e diviso in due, non sussiste più l'equilibrio.



Dunque è necessario che nella superficie di taglio virtuale Ω agiscano delle forze interne che rappresentino l'azione del corpo di sopra su quello di sotto e che ristabiliscano l'equilibrio del semi-corpo. In altre parole, esistono delle AZIONI MUTUE SULLA SUPERFICIE DI TAGLIO, altrimenti non ci sarebbe equilibrio.

Queste forze sulla superficie di separazione sono indicate con il vettore \vec{T} (TENSIONE) e, visto che sono applicate sulla superficie Ω , sono FORZE DI SUPERFICIE. Si può

si può notare che, quando si fa l'equilibrio e si aggiunge il vettore \vec{T} (cioè l'azione del corpo ① sul corpo ②), si ha di nuovo l'equilibrio

$$\int_{V_2} \vec{F} dV + \int_{S_2} \vec{p} dS + \int_{\Omega} \vec{T}_n d\Omega = 0$$

→ ② è in equilibrio se si considerano le forze mutue sulla superficie di separazione

$$\int_{V_2} \vec{r} \wedge \vec{F} dV + \int_{S_2} \vec{r} \wedge \vec{p} dS + \int_{\Omega} \vec{r} \wedge \vec{T}_n d\Omega = 0$$

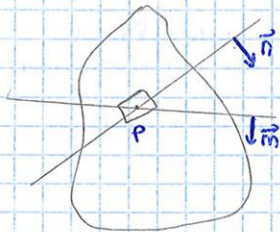
Quando si fa un taglio, le due parti si scambiano forze uguali e contrarie e, infatti, ricomponendo i corpi e sommando le rispettive equazioni di equilibrio, gli integrali rispetto a Ω si elidono perché i vettori \vec{T} sono uguali e opposti.

Il vettore \vec{T} si dice **vettore tensione** ed è scritto come

$$\vec{T}_n$$

Il pedice garantisce il fatto che esso è la tensione agente sul piano x P di normale \vec{n} . Infatti, prendendo un secondo piano passante sempre x P ma di normale \vec{m} , le tensioni saranno diverse perché cambia la distribuzione delle forze

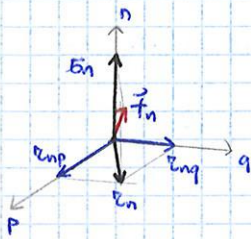
$$\vec{T}_m(P) \neq \vec{T}_n(P)$$



Si intuisce così che il vettore tensione non è una grandezza vettoriale pura ma è una **GRANDEZZA TENSORIALE**, che dipende dal punto P e anche dalla giacitura del piano, cioè dalla direzione \vec{n}

$$\vec{T}_n = \vec{T}_0(\vec{P}; \vec{n})$$

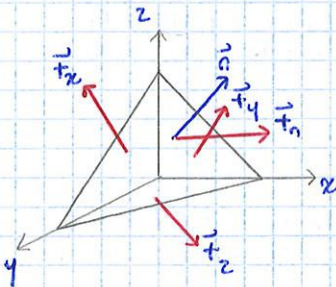
Anche la deformazione è un campo tensoriale, in quanto dipende dall'orientamento del sistema di riferimento.



Le 3 componenti T_{nn} (azioni dovute a separazione/avvicinamento tra le porzioni), T_{np} e T_{nq} (azioni di scorrimento tra le porzioni) sono dette **componenti speciali del vettore tensione** e vale la relazione

$$\vec{T}_n = T_{nn} \vec{n} + T_{np} \vec{p} + T_{nq} \vec{q}$$

La Matrice di tensione: si è introdotta il vettore tensione sia in maniera assiomatica che matematica (come concetto limite della forza $\Delta \vec{L} / \Delta \Omega$) e ora si vuole sapere, come già nella deformazione, il **COMPORTAMENTO DEL VETTORE TENSIONE NEGL'INTORNO DEL PUNTO P x OGNI ORIENTAMENTO DEL PIANO**.



Una via prevede di assumere come intorno del punto P un tetraedro, perché è il solido con il minore numero di facce (cioè 4) e inoltre è comodo perché si possono scegliere 3 facce coincidenti con i piani coordinati mentre la quarta è inclinata secondo la generica normale \vec{n} .

Le 4 facce possono essere immaginate come le impronte di 4 piani di taglio e, visto che sono infinitesime, si può immaginare che questi piani passino x P.

Così si definisce il vettore tensione

- sulla faccia nel piano yz come $-\vec{T}_x$ ("-" perché la normale uscente dal tetraedro è opposta al verso dell'asse x)
- sulla faccia nel piano xz come $-\vec{T}_y$
- sulla faccia nel piano xy come $-\vec{T}_z$
- sulla IV faccia come \vec{T}_n

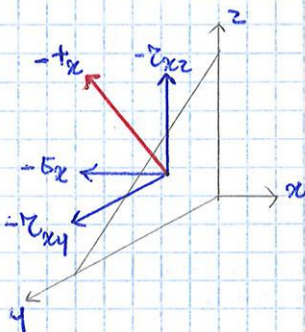
Le aree delle 4 facce sono rispettivamente $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z$ e $d\Omega_n$. In teoria c'è anche la forza di volume perché nel tetraedro è compresa materia e dunque massa ma, visto che si ragiona a livello infinitesimale, questa va moltiplicata x dV mentre le forze di superficie si moltiplicano x dS . Visto che però si ragiona a livello di infinitesimi, si nota che

$$dV = o(dS)$$

dunque si può trascurare dV e, con esso, le forze di volume.

Ora ci si può focalizzare sui vettori tensione. Il vettore \vec{T}_x , agente sulla faccia coordinata avente come normale l'asse x, si scrive come

$$\vec{T}_x = (T_x \ j \ T_x) = (T_x \ j \ T_{xy} \ j \ T_{xz})$$



La componente σ ha un solo pedice perché la componente normale è unica, mentre quella tangenziale è scomposta lungo le direzioni y e z. Inoltre, grazie alla scelta del tetraedro, si nota che le componenti speciali coincidono con quelle cartesiane poiché la faccia è parallela al piano coordinato.

Analogamente si ottiene che

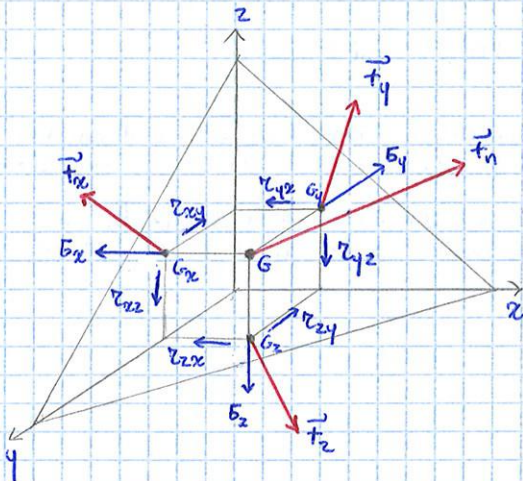
$$\vec{T}_y = (T_y \ j \ T_{yz} \ j \ T_{yx})$$

$$\vec{T}_z = (T_z \ j \ T_{zx} \ j \ T_{zy})$$

Invece, il vettore tensione agente sulla IV faccia viene scomposto lungo gli assi x, y e z (non secondo le componenti speciali)

$$\vec{T}_n = (t_{nx} \ j \ t_{ny} \ j \ t_{nz})$$

PROPRIETÀ: SIMMETRICITÀ DELLA MATRICE DI TENSIONE



Se la matrice di deformazione è stata introdotta come matrice simmetrica, non è invece garantito che la matrice di tensione sia simmetrica, cioè che valga

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

In realtà esiste una relazione importante che dice anche di più della sola simmetria ma che, comunque, permette di ricavare che

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Per dimostrare la simmetria, si considera l'equazione di equilibrio alla rotazione del tetraedro. La statica, infatti, richiede che ci sia equilibrio sia alla traslazione (cosa già usata a definire la matrice di tensione) sia alla rotazione.

Per fare questo, si definiscono 3 assi con origine nel baricentro G della faccia inclinata e passanti x i baricentri G_x, G_y e G_z delle facce giacenti rispettivamente nei piani coordinati yz, xz e xy . Così si costruisce un cubetto con vertici G, G_x, G_y e G_z e di lati

$$\frac{dx}{3} \quad \frac{dy}{3} \quad \frac{dz}{3}$$

a seguito della definizione di baricentro di un triangolo, dove dx, dy e dz sono i lati del tetraedro. Ponendosi nel baricentro, c'è il vantaggio che le forze di volume (applicate nel baricentro), oltre a essere trascurabili, non hanno braccia e inoltre alcune componenti della tensione non hanno braccia rispetto a questi assi.

Ora si studia l'equilibrio rispetto all'asse GG_x , cioè un'asse parallelo all'asse x e passante x G. Si guardano le componenti che agiscono

- il vettore \vec{F}_x è applicato in G e dunque, avendo braccio nullo, non dà contributo (ciò vale anche x gli assi GG_y e GG_z)
- il vettore \vec{F}_y è applicato in G_x e dunque ha braccio nullo rispetto a questo asse
- il vettore \vec{F}_z non ha braccia rispetto all'asse perché la sua retta d'azione passa x G
- i vettori \vec{T}_{zx} e \vec{T}_{xz} non hanno componenti rotatorie rispetto all'asse perché sono paralleli a esso
- il vettore \vec{F}_y ha braccio nullo perché passa x il baricentro G
- danno rotazione i vettori τ_{zy} (con braccio $\frac{dz}{3}$) e τ_{yz} (con braccio $\frac{dy}{3}$)

Dunque x l'asse x partecipano τ_{zy} e τ_{yz} (non caso due componenti con indici invertiti) Per avere l'equilibrio alla rotazione, si moltiplica la tensione x l'area della faccia di competenza in modo da ricavare la forza e così l'equazione di equilibrio attorno all'asse GG_x

$$\tau_{zy} d\Omega_z \cdot \frac{dz}{3} - \tau_{yz} d\Omega_y \cdot \frac{dy}{3} = 0$$

Nel tetraedro, si ricorda che

$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

e così

$$\frac{1}{3} d\Omega_y dy = \frac{1}{3} d\Omega_z dz = \frac{1}{3} A_{\text{faccia}} \cdot h_{\text{di sua competenza}} = dV$$

Da qui x via algebrica si arriva alla relazione

$$[\sigma_p]_{nmp} = [N][\sigma_p]_{xyz}^T[N]$$

→ banale trasformazione x rotazione che dà la matrice ruotata

Così si è dimostrato che la trasformazione con un processo di rotazione degli assi è di tipo tensoriale.
L'utilità di questa trasformazione è che essa è il punto di partenza x trovare gli assi privilegiati in cui si trovano i massimi sforzi.

6 Direzioni principali della tensione:

Ora ci si chiede se nel punto P esistono dei piani privilegiati rispetto cui il vettore tensione non è inclinato, cioè non ha sia componente normale che tangenziale, ma ha solo la componente normale (mentre non c'è quella tangenziale).

↓ esiste solo l'azione di allontanamento/avvicinamento

Questi piani, se esistono, si dicono PIANI PRINCIPALI DELLA TENSIONE e le direzioni a essi normali si dicono **direzioni principali della tensione**.

La loro ricerca si fa in modo analogo x la ricerca delle direzioni principali della deformazione, attraverso l'analisi degli autovalori e autovettori della matrice di tensione.

Per trovare l'equazione risolvente, si nota che contemporaneamente devono valere

→ l'equazione tensoriale di Cauchy

$$\vec{T}_n = [\sigma_p] \vec{n} \quad \textcircled{I}$$

→ si vuole che, nei piani principali, la tensione sia parallela alla normale, x cui deve valere l'equazione vettoriale

$$\vec{T}_n = \sigma_n \vec{n} \quad \textcircled{II}$$

Si cerca un piano in cui queste condizioni siano entrambe soddisfatte, x cui si mettono a sistema le due equazioni e alla \textcircled{I} si sottrae la \textcircled{II}

$$[\sigma] \vec{n} - \sigma_n \vec{n} = \vec{0}$$

Si nota che la costante di proporzionalità σ_n è incognita. Ora si raccolgono le incognite, cioè i coseni direttori delle direzioni privilegiate

$$([\sigma] - \sigma_n [I]) \vec{n} = \vec{0}$$

Questo è un classico problema agli autovalori e l'espressione corrisponde a un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni x 3 incognite (n_x, n_y e n_z), la cui matrice dei coefficienti però non è determinata. Dunque, x risolvere il sistema, occorre prima concretizzare la matrice dei coefficienti ricavando gli autovalori. Si nota a tal proposito che, in questo contesto, la soluzione banale del sistema dev'essere esclusa in quanto non ha senso fisico. Per ipotesi, infatti, \vec{n} è un versore tale che

$$|\vec{n}| = 1$$

e dunque almeno una sua componente dev'essere non nulla.

Così, x escludere la soluzione banale dal sistema, occorre imporre la condizione dell'algebra lineare x cui

$$\det([\sigma] - \sigma_n [I]) = 0$$

$$T_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

→ è un indicatore del tipo di stato di tensione.
 Se $T_3 = 0$, allora almeno un σ_i è nullo e dunque in P lo stato di tensione non è triassiale ma biassiale o uniassiale.

OSSERVAZIONE: x semplicità, si supponrà sempre che

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Si dimostra allora che σ_1 e σ_3 sono il GRADO DI ESTREMO (in senso algebrico) nell'intorno del punto P.

Così σ_1 è la MASSIMA TENSIONE in P.

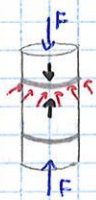
Invece σ_3 è la MINIMA TENSIONE in P in senso algebrico, x cui è possibile che σ_3 sia più grande ma di segno negativo.

Infine σ_2 è la tensione intermedia che non è tanto importante dal punto di vista ingegneristico anche perché in genere si hanno stati biassiali in cui si pone $\sigma_2 = 0$.
 L'ingegnere cerca piuttosto le massime tensioni di trazione e compressione e ha necessità di conoscere non tanto i carichi x infiniti posizionamenti ma interessanti i posizionamenti che danno le tensioni più forti, cioè quelli principali.

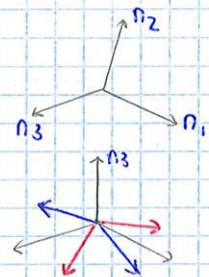
CLASSIFICAZIONI DEGLI STATI DI TENSIONE

I → $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$: è il caso più generale e gli assi principali della tensione sono 3 assi mutualmente ortogonali.

→ $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$: si ha uno stato di tensione con direzione principale \vec{n}_3 e sono principali tutte le direzioni nel fascio proprio (passante x un punto) giacente nel piano normale a \vec{n}_3 .



Es. In un pilastro compresso con delle cerchiature, in corrispondenza delle cinture nasce una compressione radiale e cioè una compressione principale all'interno.



→ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: si parla di stato di tensione idrostatico perché corrisponde allo stato di tensione che avrebbe una sferetta immersa in un fluido e x essa tutte le tensioni sono principali nell'intera stella di centro P.

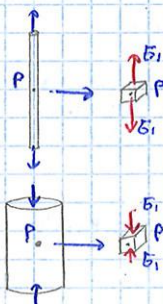
Es. Nelle rocce c'è uno stato di tensione idrostatico che è molto buono x il materiale (regge bene la compressione in tutte le direzioni) ma, facendo una galleria, lo si disturba in quanto viene meno parte dello stato idrostatico.

Per questo si fanno gallerie a sezione circolare, perché è la sezione che meno disturba lo stato inizialmente idrostatico.

II → $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \neq 0$: si parla di stato di tensione triassiale

→ $\sigma_2 = 0$: si parla di stato di tensione piano

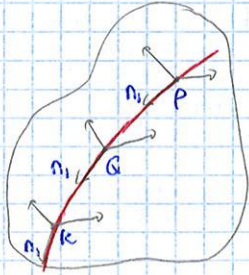
→ $\sigma_1 \neq 0$: si parla di stato di tensione monoassiale



Es. Prendendo l'intorno di un punto P all'interno di una fune tesa o di una colonna compressa, si scopre la presenza di un solo stato di tensione (di trazione o di compressione).

8 Linee isostatiche: finora si è visto come si trova la tensione in un punto P e che è possibile trovare le direzioni principali in quel punto. Ciò vale anche a altri punti Q, K , etc. e ogni punto ha uno stato di tensione espresso dalla matrice $[B_P], [B_Q], [B_K]$, etc.

Nell'ambito della deformazione si è fatta una trattazione con gli infinitesimi senza fratture e compenetrazioni, cioè si è fatto un **omeomorfismo** ("stessa forma") in cui si è mantenuta all'incirca la stessa forma (ad es. un parallelogramma non diventa un filo). I materiali in ingegneria, infatti, sono abbastanza rigidi e così le derivate superiori sono trascurabili.



Orò, se vale che la tensione, che è stata introdotta come discorso statico indipendente ma in realtà la tensione dipende dalla deformazione (è una sua conseguenza), vuol dire che il CAMPO DELLE TENSIONI dev'essere CONTINUO, LISCO (in senso matematico, cioè senza grandi salti), BIUNIVOCO E DERIVABILE ALMENO 2 VOLTE.

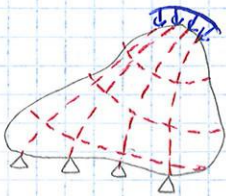
Così, andando da un punto P a uno Q , se questi sono abbastanza vicini, le matrici di tensione sono diverse ma non troppo, cioè sono simili perché lo stato di tensione varia in modo continuo (perché il descrittore dello stato di tensione è continuo).

Allora si può provare a mettere in relazione x es. gli autovettori (cioè le direzioni principali), individuando linee che sono linee di flusso della tensione, sulle quali la tangente alla linea è la direzione principale in quel punto. Queste linee sono le **linee isostatiche** = LINEE IDEALI all'interno del solido N FLUSSO DELLA TENSIONE, cioè tangenti in ogni punto alla direzione principale. Così, passando da P a Q , si può immaginare che questa linea sia continua e tale continuità si può giustificare fisicamente con l'omeomorfismo.

Perché in ogni punto esistono 3 direzioni principali, esistono allora 3 famiglie di linee isostatiche, in genere (ad es nella fune c'è solo una famiglia).

In caso di SITUAZIONE BIASSIALE, si riconoscono

- una famiglia di linee isostatiche di trazione
- una famiglia di linee isostatiche di compressione



Ci sono dunque due famiglie di linee ortogonali tra di loro e così si può immaginare un corpo non come continuo ma come un insieme di fili.

La natura, infatti, cerca di fare strutture non totalmente continue ma realizzarle in modo da minimizzare il peso e il costo. Ad es nella ragusatela si fa una tela di materiale duttile e resistente risparmiando materiale. Questa rete, infatti, si costruisce seguendo le linee isostatiche di una membrana con una famiglia radiale dal centro verso l'esterno e una seconda famiglia di fili circonferenziali.

Oppure le trabeccole ossee sono disposte secondo linee isostatiche, cioè la materia si addensa secondo tali linee.

Questi valori devono essere positivi, poiché n_i^2 è un quadrato, e dunque si può ragionare sul segno della frazione, che sarà positiva quando numeratore e denominatore sono concordi. Usando, infatti, la convenzione della relazione d'ordine

$$b_1 > b_2 > b_3 \quad \rightarrow \quad b_3 \text{ è il massimo negativo o il minimo positivo}$$

In virtù di questa relazione, il segno di ciascun denominatore è univoco

$$n_1 \rightarrow \text{den} > 0$$

$$n_2 \rightarrow \text{den} < 0$$

$$n_3 \rightarrow \text{den} > 0$$

Di conseguenza, visto che la frazione è positiva, si può scrivere la disequazione relativa a ogni numeratore

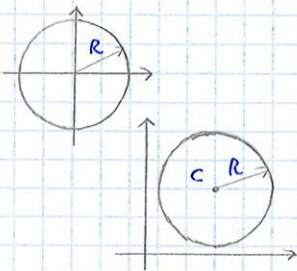
$$n_1 \rightarrow \text{num} = z_n^2 + (b_n - b_2)(b_n - b_3) \geq 0$$

$$n_2 \rightarrow \text{num} = z_n^2 + (b_n - b_1)(b_n - b_3) \leq 0$$

$$n_3 \rightarrow \text{num} = z_n^2 + (b_n - b_2)(b_n - b_3) \geq 0$$

Ora si guarda che tipo di dominio danno queste disequazioni

PREMESSA: si ricorda dalla geometria che una circonferenza di raggio R centrata nell'origine ha equazione



$$x^2 + y^2 = R^2$$

Se invece tale circonferenza è centrata in un punto $C(x_c, y_c)$, allora ha equazione

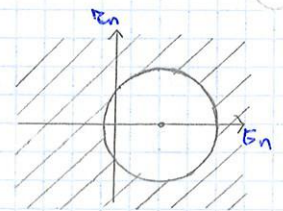
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Sviluppando il prodotto contenuto in ogni disequazione, si nota che ciascuna di essa dà luogo a un dominio circolare nello spazio $z-b$. Per n_1 si ha

$$\textcircled{\alpha} \quad z_n^2 + \left(b_n - \frac{b_2 + b_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{b_2 - b_3}{2}\right)^2$$

Vedendo questa disequazione nel piano $z-b$, essa è simile alla relazione

$$y^2 + (x - x_c)^2 \geq R^2$$



Dunque essa rappresenta una circonferenza con centro giacente sull'asse b e il dominio che soddisfa la condizione imposta dalla disequazione è quello esterno alla circonferenza.

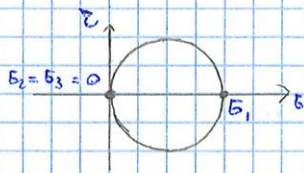
Analogamente, x n_2 e n_3 si ha

$$\textcircled{\beta} \quad z_n^2 + \left(b_n - \frac{b_1 + b_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{b_1 - b_3}{2}\right)^2$$

\rightarrow il dominio è interno (perché la disequazione impone $\leq R^2$)

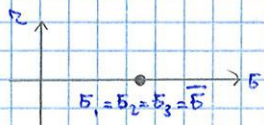
$$\textcircled{\gamma} \quad z_n^2 + \left(b_n - \frac{b_2 + b_1}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2$$

\rightarrow il dominio è esterno



compressione.

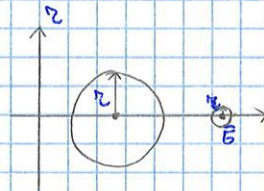
→ **stato monoassiale** (es. cavo teso, pilastro):
poiché due tensioni principali sono nulle, c'è un solo cerchio, in quanto l'altro cerchio è collassato sull'origine



→ **stato idrostatico**:

poiché il tensore idrostatico presenta solo la tensione media sulla diagonale, il raggio è nullo e il cerchio collassa in un punto e, in particolare, nel punto

$$(\bar{\sigma}; 0)$$



Questo è il caso dei liquidi perfetti.

Si osserva, a tal proposito, che in un materiale che soffre a causa della parte deviatorica (cioè x le tensioni tangenziali) diventa importante la DIMENSIONE DELLE CIRCONFERENZE DI MOHR, indipendentemente dal valore di tensione, perché aumentando il raggio, il materiale soffre di più.

Dunque è meglio CERCARE PICCOLE CIRCONFERENZE. Ad es è meglio uno stato quasi idrostatico con $\bar{\sigma} = 2000 \text{ MPa}$ che uno stato con tensione principale più piccola ma con tensioni tangenziali maggiori

Stato tensionale piano

1 Ora ci si focalizza sullo stato tensionale piano e si applica il metodo dei cerchi di Mohr su di esso.

Lo stato tensionale piano è di grande interesse perché in esso vale che

$$\sigma_3 = 0$$

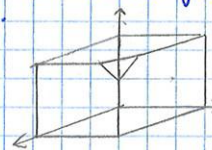
→ è più semplice

e inoltre è molto frequente in ingegneria perché molte strutture lavorano in modo cartesiano, cioè hanno uno stato biassiale (ad es nella trave le tensioni non nulle sono discordi - c'è trazione e compressione).

2 Stato tensionale piano:

è uno stato di tensione in un punto P tale che il VETTORE TENSIONE È SEMPRE APPARTENENTE A UNA GIACITURA DETERMINATA, indipendentemente dalla giacitura del piano scelto (cioè la componente sulla terza direzione è nulla).
Ritornando ad es che

$$\sigma_3 = 0$$



dire che uno stato tensionale è piano significa che, prendendo un qualunque taglio, il vettore tensione giace sempre nel piano Π_{12}

$$\vec{t}_n \in \Pi_{12}$$

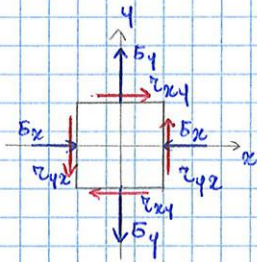
Il piano Π_{12} costituisce, in questo caso, il **piano delle tensioni**.

Dal punto di vista algebrico, ciò significa che posso scrivere la matrice degli sforzi $[\sigma_p]$ nel sistema principale ponendo

$$\sigma_3 = 0$$

Così, con la relazione di Cauchy, si ha che

$$\vec{t}_n = [\sigma_p] \vec{n} \Rightarrow t_{n3} = 0$$



σ_2 e ottenere così la circonferenza.

In realtà, le tensioni principali σ_1 e σ_2 si possono ottenere anche imponendo nel tensore degli sforzi $[\sigma_p]$ che

$$\tau_{xy} = 0$$

Ciò equivale, dato uno stato di tensione di partenza con sforzi σ_x e σ_y , τ_{xy} e τ_{yx} , a cercare l'ANGOLO φ FRA GLI ASSI x e y E GLI ASSI PRINCIPALI. Questo angolo φ annulla gli sforzi tangenziali, cioè permette il passaggio



$$\text{da } \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In altri termini, si vuole l'angolo φ di cui si deve ruotare il piano x avere una matrice diagonale. Si dimostra che tale angolo vale

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

PROPRIETÀ: da quest'ultima relazione, si osserva che

→ con SFORZI TANGENZIALI MOLTO PICCOLI rispetto al denominatore $\sigma_x - \sigma_y$, si può assumere che

$$\tau_{xy} \approx 0$$

Di conseguenza, si può dire che

$$\varphi \approx \frac{1}{2} \arctan 0 \approx 0$$

Ciò a raggiungere lo stato principale occorre dare solo una piccola rotazione φ , in altri termini, si può dire che lo STATO DI TENSIONE È QUASI PRINCIPALE.

→ con SFORZI TANGENZIALI MOLTO ELEVATI occorrono grandi rotazioni e, in particolare, φ

$$\tau_{xy} \gg \sigma_x - \sigma_y$$

si può ritenere il denominatore nullo e dunque l'angolo di rotazione φ vale

$$\varphi = 45^\circ$$

Questo valore è importante perché rappresenta una linea di cedimento di una struttura e, meglio, rappresenta la direzione della tensione tangenziale massima sotto l'effetto di una forza orizzontale (es. terremoto).

OSSERVAZIONE: se nel sistema biassiale basta una rotazione, nel sistema triassiale a arrivare al sistema di riferimento principale occorre dare 3 angoli di rotazione.

Ora si determina un terzo punto P^* detto **polo del cerchio di Mohr**, che corrisponde all'intersezione tra una retta orizzontale passante $x K$ e la retta verticale passante $x K'$.
 Si osserva però che, seguendo le convenzioni di segno opposte ($\sigma > 0$ se di compressione, $\tau > 0$ se di rotazione antioraria), allora si considera la retta verticale $x K$ e la retta orizzontale $x K'$ e così P^* si trova simmetricamente.

Così si può disegnare la circonferenza, che si osserva passare $x K$ e K' ma anche $x P^*$ (x costruzione geometrica), e si è ottenuto il cerchio di Mohr relativo allo stato di tensioni σ_x, σ_y e τ_{xy} .

Da qui si possono determinare le TENSIONI MASSIME σ_1 e σ_2 , cioè si possono trovare le tensioni principali dello stato tensionale biassiale, corrispondenti ai PUNTI ESTREMI DELLA CIRCONFERENZA M e N SULL'ASSE σ .

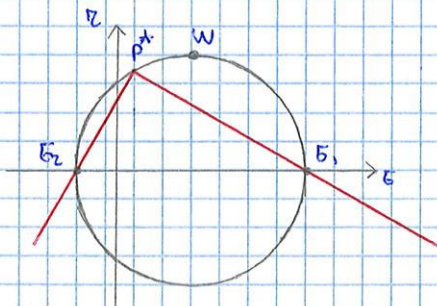
Si dimostra poi che LE DIREZIONI P^*M e P^*N SONO LE DIREZIONI PRINCIPALI, cioè si può trovare la posizione in cui occorre ruotare il cubetto x essere nelle direzioni principali. L'angolo tra la direzione orizzontale e la direzione P^*N rappresenta proprio l'angolo φ con cui bisogna ruotare l'elemento piano x trovare le direzioni principali.

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

Si osserva inoltre che

→ N sta nella parte degli sforzi normali positivi, x cui $P^*N = \sigma_1$, è direzione principale di trazione nel punto P (lungo σ_1 il materiale è tirato).

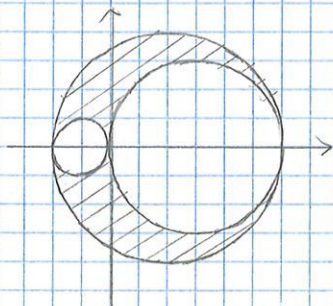
→ M sta nella parte degli sforzi normali negativi, x cui $P^*M = \sigma_2$ è direzione principale di compressione nel punto P (lungo σ_2 il materiale è compresso).



In realtà occorrerebbe completare la circonferenza perché in ingegneria interessano

→ VALORI ESTREMI DEGLI SFORZI NORMALI e, in particolare, σ_1 (perché è il maggiore in modulo), in modo da avere informazioni su trazione e compressione. Se, infatti, un materiale è fragile (cioè collasa x dilatazione), esso collaserà lungo la direzione perpendicolare alla direzione di massima trazione. Dunque se σ_1 supera il limite del materiale, si aspetta che esso abbia una fessura fatta in quel modo.

→ VALORE MASSIMO DI SFORZO TANGENZIALE che si ha nel punto W e il suo valore è pari al raggio della circonferenza. Esso è importante perché, ad es., l'acciaio funziona bene x trazione ma ha problemi in presenza di sforzi tangenziali.



Inoltre la rappresentazione di Mohr è una rappresentazione tridimensionale e finora si è tracciato solo il cerchio relativo alla giacitura 1-2 e, x dire quali sono tutti i punti rappresentativi dello stato tensionale nel punto P, occorrerebbe disegnare gli altri due cerchi (che saranno interni). In realtà non è così necessario perché è più importante il cerchio massimo e inoltre si sa già che nello stato biassiale σ_3 è nullo.

D'altra parte, però, proprio perché nello stato biassiale vale che

$$\sigma_3 = 0$$

diventa immediato tracciare gli altri due cerchi e così si ha un'informazione in più in quanto si possono escludere i punti interni alle circonferenze interne dalla rappresentazione.

ES (TAGLIO PURO)

Si consideri la situazione biassiale

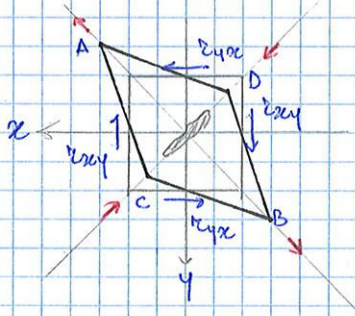
$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 300 \text{ MPa}$$

→ poiché è positiva, è oraria sulla faccia x e antioraria sulla faccia y

Questa situazione si dice **stato di taglio puro**.

Studiare le tensioni principali.

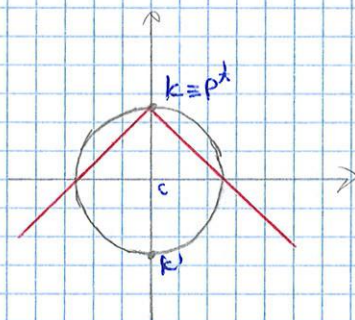


In questo caso, si osserva che il cubo si deforma e il quadrato tende a diventare un rombo, cioè si allunga in un direzione e si accorcia nell'altra.

In particolare, la fibra diagonale tra A e B si allunga e quella CD si accorcia.

Pertanto, ci si aspetta che la situazione peggiore (con massima trazione e compressione) sia nella direzione diagonale e dunque lunga 45° .

Se il materiale è sensibile a dilatazione, essa si fessurerà nella direzione CD, che è inclinata di 45° .



Al solito, considerando i punti k e k' , questi cadono sull'asse delle tensioni σ , in posizione opposta rispetto all'asse τ .

Di conseguenza, il centro del cerchio di Mohr di taglio puro coincide con l'origine e ha raggio pari a c .

Da qui, poiché il centro cade nell'origine, si ha che

$$\sigma_1, \sigma_2 = \tau$$

Inoltre, il polo p^* coincide con k

Si ottiene così che

$$\sigma_1 = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -300 \text{ MPa}$$

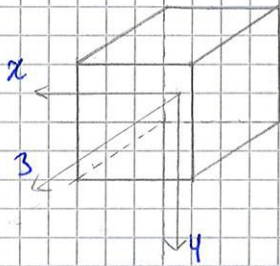
Quindi in uno stato di taglio puro le tensioni principali hanno lo stesso modulo di τ .

L'angolo φ_0 è degenere e vale

$$\varphi_0 = 45^\circ$$

così le direzioni principali nello sforzo di taglio puro sono inclinate di 45° .

ϵ_3 (STATO TRIASSIALE)



Si consideri lo stato triassiale (x cui occorre disegnare tutto il cubetto - non solo una faccia)

$$\sigma_x = 10 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 20 \text{ MPa} \quad \sigma_z = -5 \text{ MPa} \neq 0$$

$$\tau_{xy} = -5$$

Questo problema non è complesso perché è assegnata una tensione principale, cioè quella lungo la direzione 3 (lì non ci sono tensioni tangenziali).

Se si fosse assegnata non la tensione σ_3 ma una generica σ_2 , con la presenza di tensioni tangenziali τ_2 , il problema non si sarebbe potuto risolvere in maniera diretta.

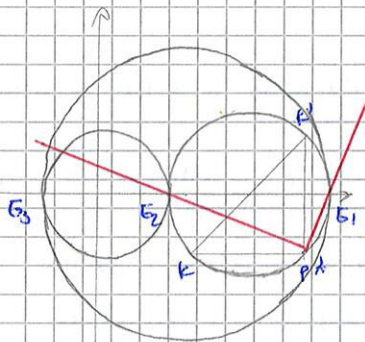
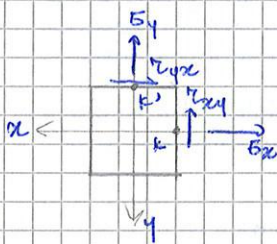
Infatti, qui si dovrebbe collegare la circonferenza nel piano 1-2 con la tensione σ_3 , che non è nulla ma vale -5. Cioè non cambia niente:

una volta trovato il cerchio, gli altri si trovano semplicemente collegandoli con σ_3 .

Se però σ_3 non fosse principale, occorrerebbe studiare separatamente x ogni piano ma questi sono tra di loro interconnessi e ciò non è graficamente semplice.

Poiché la tensione σ_3 è principale, la si "congela" e si studia cosa succede nel piano normale alla direzione 3, studiando σ_1 e σ_2 .

Il risultato è che così ci si riconduce a un problema biassiale e di fatto si ruota il cubetto attorno all'asse 3.



Dal cerchio di Mohr, si deduce una situazione di doppia trazione, tipica delle membrane.

Poi si posiziona σ_3 e si tracciano gli altri cerchi.

Si scopre così che la situazione più sofferente non è nel piano xy ma nel piano 1-3, in cui c'è la circonferenza massima, con

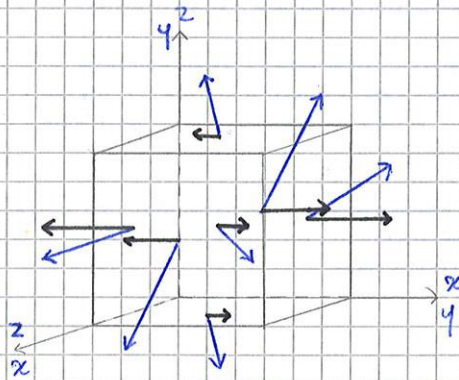
$$\tau_{max} = 13,5$$

e quindi il materiale soffre x scorrimento.

nell'equilibrio le parti finite si semplificano a due a due

Dunque, a differenza di quanto avveniva nel tetraedro (v. "Analisi della tensione", 4), le tensioni che intervengono nell'equilibrio sono solo le loro derivate e queste sono moltiplicate x dV, proprio come le forze di volume F_v . Di conseguenza, quando si scriveranno le equazioni cardinali della statica (cioè si imporrà l'equilibrio) sul volume infinitesimo, le variazioni di tensione sulle faccie e la forza di volume sono uguali e dunque quest'ultima non può essere semplificata.

prima, nel tetraedro di Cauchy, si aveva una tensione finita (non differenziale) e la forza di volume era un infinitesimo di ordine superiore, a cui si poteva semplificarla.



Ora si devono fare 3 equilibri e, a iniziare, lo si fa lungo l'asse x. Per questo, oltre alla componente F_x della forza di volume, bisogna prendere le componenti dei vettori T_x , T_y e T_z . Queste ultime sono

$$\begin{aligned} T_x & \text{ e } & T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \\ T_{zx} & \text{ e } & T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} dz \\ T_{yx} & \text{ e } & T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \end{aligned}$$

I pedice = faccia su cui agisce il vettore
II pedice = direzione lungo cui agisce

le variazioni sono tutte in dx perché, passando da una faccia all'altra sulla normale x, si vuole sapere la variazione lungo x da una faccia all'altra e dunque si deriva rispetto a x.

Però nell'equilibrio le componenti finite a due a due si elidono e dunque delle componenti dei vettori tensione si prende solo il differenziale.

Così, a fare l'equilibrio, si hanno 4 quantità che prima, però, devono essere moltiplicate x la superficie della faccia su cui è applicato il relativo vettore oppure x il volume, perché diventino delle forze.

L'equazione d'equilibrio così si scrive come

$$\underbrace{\frac{\partial T_x}{\partial x} dx}_{\text{tensione}} \underbrace{(dy dz)}_{\text{area}} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy (dx dz) + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} dz (dx dy) + F_x dx dy dz = 0$$

Così è comparso il termine dV su tutti gli addendi e dunque la variazione di tensione è dell'ordine della forza di volume. Ciò significa, fisicamente, che LA VARIAZIONE DI TENSIONE DIPENDE DALLA FORZA DI VOLUME (se le tensioni sono indipendenti dalla forza di volume, le loro variazioni non lo sono).

Si divide infine x dV e si ottiene

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

I equazione di equilibrio infinitesimo: essa è ricavata scrivendo l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione x

Analogamente, facendo l'equilibrio in direzione y e z, si ottiene

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + F_y = 0$$

II equazione di equilibrio infinitesimo

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + F_z = 0$$

III equazione di equilibrio infinitesimo

La differenza è che, nei problemi ingegneristici, il carico \vec{p} è un dato del problema (da esso infatti parte il progetto delle strutture ed esso si ricava dalle forze agenti sul corpo), mentre le reazioni vincolari sono un'incognita.

Allora, su un generico elemento di superficie dS_x il principio di azione e reazione, il vettore tensione coincide con il vettore \vec{p} applicato e ciò vale a ogni punto della superficie.

$$\vec{F}_n \equiv \vec{p}, \forall PES$$

Allora, a trovare il vettore tensione sulla superficie, s'immagina di essere su un elemento di superficie con normale \vec{n} uscente e così il vettore tensione \vec{F}_n vale

$$\vec{F}_n = \vec{p}$$

Ora si scompone tale relazione in componenti cartesiane e si ha che

$$t_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = p_x$$

$$t_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = p_y$$

$$t_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = p_z$$

$$\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = p_x$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = p_y$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = p_z$$

Equazioni di equilibrio al contorno:

Si osserva in realtà che, più che equazioni di equilibrio nelle varie direzioni, sono una scomposizione dell'identità $\vec{F}_n = \vec{p}$

PROPRIETÀ: rivedendo le equazioni indefinite di equilibrio, la prima era

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -F_x$$

ora la si confronta con la I equazione di equilibrio al contorno

$$n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = p_x$$

Si osserva che, facendo l'equilibrio all'interno del corpo, si hanno le derivate mentre, facendo l'equilibrio sulla superficie di contorno, si hanno i coseni direttori.

Questa identità tra derivate e coseni direttori ricorda il teorema di Gauss, che afferma che il flusso del campo attraverso la superficie è pari alla divergenza di tale campo nel volume.

2. Ora si prova a sintetizzare quanto fatto finora in maniera più compatta, osservando che le componenti indipendenti sia delle tensioni che delle deformazioni sono 6 (e non 9). In questo modo, si comincerà ad associare tra di loro le tensioni e le deformazioni. Tale legame, poi, diventerà più intimo quando si dimostrerà il principio dei lavori virtuali x i corpi deformabili.

Innanzitutto si cerca di riscrivere i concetti di congruenza e di equilibrio.

Per fare ciò, si considerano i tensori $[\epsilon_p]$ e $[\sigma_p]$ definiti in un punto P del solido e si suppone che siano simmetrici ($[\epsilon_p]$ lo è a costruzione, mentre $[\sigma_p]$ è simmetrica a via dell'equilibrio alla rotazione con l'ipotesi di campo tensionale centrale senza microcoppie) e dunque che abbiano 6 valori indipendenti.

Così, visto che sono 6 le quantità indipendenti, dal punto di vista del calcolo, conviene non tenere il tensore e passare a un vettore.

Pertanto, occorre definire

Di conseguenza, l'equazione di congruenza si può riscrivere come

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Si osserva solo che l'operazione di moltiplicazione è formale perché $[D]$ non è una matrice numerica ma è una matrice operatoriale, cioè non contiene numeri ma operatori (derivata parziale) da applicare al vettore spostamento. Inoltre la nuova espressione è comoda a fare i calcoli ma bisogna ricordarsi che interviene sempre un tensore.

→ EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

si osserva che a scrivere è necessaria una matrice 3×6 , in quanto si hanno 3 equazioni di equilibrio e non 6 come prima. Tale matrice moltiplica il vettore 6×1 delle tensioni e poi bisogna aggiungere le 3 componenti F_x, F_y e F_z della forza di volume \vec{F} .

$$+ [D] \vec{\sigma} + \vec{F} = \vec{0}$$

In forma estesa diventa

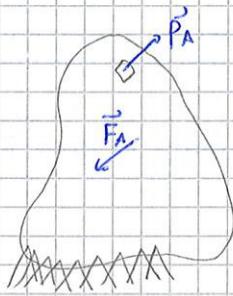
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Qui valgono sempre le proprietà del prodotto righe x colonne e, a avere la I equazione di equilibrio, si moltiplica la I riga x il vettore $\vec{\sigma}$ e si somma F_x e infine si eguaglia a 0. Lo stesso vale x la II e la III equazione. Il prodotto, però, non avviene tra numeri ma c'è una derivazione, cioè si ha un prodotto formale che presuppone l'applicazione di un operatore.

Nel momento in cui si scrive l'equazione di equilibrio si scopre un'importante proprietà, che ha grosse implicazioni fisiche e matematiche (non è solo un'uguaglianza formale):

C'È UNA COINCIDENZA FORMALE TRA LA MATRICE OPERATORIALE $[D]$, CHE MOLTIPLICA IL VETTORE DELLE TENSIONI X AVERE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, E LA TRASPOSTA DELLA MATRICE $[D]$ USATA NELLE EQUAZIONI DI CONGRUENZA (cioè la prima riga dell'una è la prima colonna dell'altra e così via). Così l'operatore differenziale statico è il trasposto dell'operatore differenziale cinematico e questa coincidenza formale implica che il campo delle tensioni e il campo delle deformazioni non sono 2 quantità indipendenti, ma in realtà IL CAMPO DELLE TENSIONI E IL CAMPO DELLE DEFORMAZIONI SONO LEGATI MECCANICAMENTE - Cioè si vedrà meglio nel principio dei lavori virtuali.

Questa proprietà è detta **dualità statico-cinematica** e tale proprietà è già presente nella statica dei sistemi di travi (la matrice dei vincoli è la trasposta della matrice delle reazioni vincolari).



Dato un corpo deformabile, si applica un sistema A di forze e tensioni e questo sistema dev'essere equilibrato. Così si applicano

→ \vec{F}_A nel volume

→ \vec{p}_A sulla superficie

In tal modo, all'interno del corpo, si formano tensioni \vec{E}_A che sono in equilibrio con la forza \vec{F}_A e l'azione \vec{p}_A attraverso l'equazione di equilibrio vista prima (v. 3). Poiché vale questa equazione, cioè \vec{E}_A è in equilibrio con \vec{F}_A secondo l'equazione di equilibrio infinitesimo

$$+[\rho]\vec{E}_A + \vec{F}_A = 0$$

e con la forza di superficie \vec{p}_A attraverso l'equazione di equilibrio sul contorno

$$+N\vec{E} = \vec{p}_A$$

allora il sistema di forze A è in equilibrio.

Poi si prende lo stesso corpo e si applica, ignorando le forze, un sistema B di spostamenti. Si vuole che questo sistema sia congruente, cioè un sistema cinematicamente ammissibile, e dunque tale che, in ogni punto, la deformazione sia una derivata dello spostamento, secondo l'equazione di congruenza

$$[\rho]\vec{\epsilon}_B = \vec{\xi}_B, \forall P \in V$$

Si possono poi aggiungere le equazioni sui vincoli, che dicono che lo spostamento dei punti vincolati è uguale a uno spostamento noto \vec{j}_0 (ad es. in un incastro tale spostamento è nullo ma in realtà in tutti i vincoli perfetti esso dev'essere nullo)

$$\vec{j}_B = \vec{j}_0, \forall P \in S_V$$

Così si hanno due sistemi riferiti a un medesimo corpo deformabile, cioè un sistema A in cui si legge l'equilibrio tra forze e tensioni (es. sistema compressivo) e un sistema B in cui si leggono gli spostamenti, che devono essere congruenti con la deformazione (cioè non avviene rottura). Questi sistemi in oltre sono completamente indipendenti.

La potenza del P.L.V., infatti, è che si può calcolare il lavoro virtuale tra le forze di un sistema A e gli spostamenti di un sistema B, che non siano spostamenti indotti dalle forze del sistema A ma che sono spostamenti indipendenti. In altri termini, si può usare il P.L.V. anche senza aver individuato i veri spostamenti.

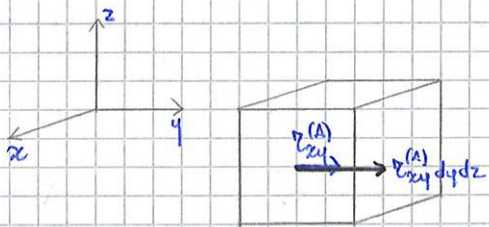
Così si può dire che le deformazioni $\vec{\epsilon}_B$ non sono quelle causate dalle tensioni \vec{E}_A (anche se in realtà, in ogni caso, è sempre ^{più} corretta dire che le tensioni non sono causate da quelle deformazioni).

Enunciato del principio dei lavori virtuali:

dati due sistemi indipendenti, l'uno di forze in equilibrio (staticamente ammissibile) e l'altro di spostamenti che sia congruente (e cinematicamente ammissibile), il P.L.V. afferma che IL LAVORO VIRTUALE ESTERNO È UGUALE AL LAVORO VIRTUALE INTERNO

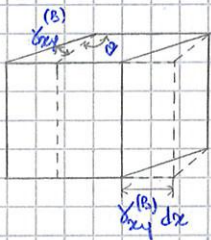
$$\mathcal{L}_{v,e} = \mathcal{L}_{v,i}$$

Si nota che prima, nel corpo rigido, si diceva che il lavoro virtuale esterno era nullo perché nel corpo rigido non avveniva deformazione e dunque non c'era accumulata di energia dentro il corpo.



Ora si vede il lavoro di deformazione delle componenti tangenziali.
 Nel sistema A, dove si leggono le forze, si cerca in un punto P la componente tangenziale. Ad es. si considera la componente $\tau_{xy}^{(A)}$ sulla faccia x.
 Per avere una forza, innanzitutto, la si moltiplica x l'area della faccia su cui agisce

$$\tau_{xy}^{(A)} dy dz$$



Quale sarà il movimento che fa compiere lavoro a questa forza?

Si sa che la forza compie lavoro a seguito dello spostamento del suo punto d'applicazione e si sa anche che tale forza è diretta come l'asse y, pertanto, occorre cercare la deformazione del cubetto che permette di compiere un lavoro spostando nella direzione y il punto d'applicazione di quella tensione.

Nel sistema B, allora, si nota che x sposta verso destra (oppure verso sinistra) in direzione y, la deformazione che dà questo spostamento è uno scorrimento angolare. Infatti, x avere tale spostamento, non bisogna allungare le fibre ma occorrono delle distorsioni, cioè fibre inizialmente perpendicolari non lo sono più e tra esse c'è un angolo φ .

Così, quello che fa compiere lavoro alla tensione, è lo scorrimento angolare $\gamma_{xy}^{(B)}$. Esso però è un angolo e, x avere lo spostamento, occorre moltiplicarlo x il raggio dx e così lo spostamento (ovviamente letto nel sistema B) vale

$$dv^{(B)} = \gamma_{xy}^{(B)} dx$$

Ora si fa lavorare questa forza x questo spostamento

$$d\delta v = F \cdot s = \tau_{xy}^{(A)} \cdot \gamma_{xy}^{(B)} dx dy dz = \tau_{xy}^{(A)} \gamma_{xy}^{(B)} dV$$

Lo stesso ragionamento può essere fatto anche alle altre tensioni tangenziali, applicando alle tensioni le distorsioni che le fanno compiere a loro lavoro

2.2c

Perché il lavoro ottenuto è quello infinitesimo sul punto P, si integra nel volume e si ottiene così il lavoro complessivo sul corpo deformabile

$$\delta v_{in} = \int_V \tau_{ij}^{(A)} \epsilon_{ij}^{(B)} dV$$

$$\delta v_{in} = \int_V \tau_{ij}^{(A)} \epsilon_{ij}^{(B)} dV$$

si mantengono gli stessi apici A e B x ricordare che il vettore tensione nel punto P è letto nel sistema A e il vettore deformazione è letto nel sistema B (in genere indipendenti)

Si osserva che tale lavoro è un prodotto scalare tra vettori e ciò ha senso perché l'energia è una quantità scalare (mentre tensioni e deformazioni sono quantità tensoriali che, sfruttando la simmetria, diventano vettori).
 Così, conoscendo il campo di tensione e di deformazione in ogni punto del corpo, moltiplicando e integrando si conosce quanta energia è immagazzinata dentro il corpo.

SOLIDO ELASTICO

Con il P.L.V. si è fatto un passo in avanti perché si è legata la tensione con la deformazione (prima erano due campi indipendenti) e, in particolare, si è dimostrato che il loro prodotto è sostanzialmente un'energia, cioè l'energia immagazzinata nel corpo deformabile sotto l'azione delle forze esterne.

In tal principio, però, x come è scritto, non compare né al primo membro né al secondo nessuna informazione sul materiale e dunque, x come è scritto, tale principio vale anche x i Fluidi.

Ora si vuole specializzare il P.L.V. sul tipo di materiale perché al momento, i campi di tensione e di deformazione rimangono indipendenti, cioè non si sa come essi siano collegati.

Infatti, si sa che, applicando una forza x uno spostamento, si ha un lavoro e dunque energia immagazzinata (che a livello microscopico è l'integrale del prodotto tra tensioni e deformazioni) ma, dall'altra parte, si intuisce che lo STESSO SPOSTAMENTO NON È INDIPENDENTE DALLA FORZA, cioè forza e spostamento non sono indipendenti.

Ad es. applicando una certa forza su una spugna, la si deforma di molto ($\eta = 5 \text{ cm}$), mentre con l'acciaio la deformazione è piccola ($\eta \rightarrow 0$). Così, a parità di forza, cambia lo spostamento ed esso dipende dal materiale.

Ciò significa che, a livello microscopico, date delle tensioni, le deformazioni non sono una quantità indipendente da esse.

Di conseguenza, c'è la necessità di vedere una relazione tra forze e spostamenti x il lavoro esterno e tra tensioni e deformazioni x il lavoro interno e dunque vedere i cosiddetti **legami costitutivi**.

↓
In altri termini, il passo successivo è specializzare il potente P.L.V. andando a contestualizzare nei materiali e vedere che legame c'è tra tensioni e deformazioni. Questo legame interno poi si esplicherà come legame esterno tra forze e spostamenti.

Teoria dei legami costitutivi

1) Considerando ad es. due travi, una in legno e una in acciaio, caricate con la stessa forza di mezz'era di 20 kN e con la stessa geometria (cioè stessa campata), cosa succede?



Si osserva che lo spostamento v nella mezz'era vale

→ x il legno $v = 10 \text{ cm}$

→ x l'acciaio $v = 1 \text{ cm}$

Di conseguenza si hanno lavori esterni diversi tra i due casi in quanto lo spostamento v non è indipendente (qui si sta parlando di lavoro reale, dove lo spostamento v è quello effettivamente causato dalla forza).

Come si legano forza F e spostamento v ?

Ciò dipende dal materiale e occorre dunque specializzare la risposta del materiale sulla base delle sue caratteristiche. Ciò viene fatto seguendo una visione non basata sulle proprietà chimiche, cristalline, etc. ma in una scala più macroscopica, in cui intervengano grandezze e proprietà medie del comportamento del materiale.

Dunque si vuole trovare una relazione costitutiva tra tensione e deformazione



la teoria che si occupa di questo è detta **teoria dei legami costitutivi** e ha due obiettivi:

1) il punto fondamentale è trovare una **RELAZIONE TRA TENSIONI E DEFORMAZIONI**, cioè trovare una relazione funzionale che, in genere, sarà del tipo

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{\epsilon}; \vec{\epsilon}'; t)$$

Si nota che la tensione può dipendere da

→ deformazione $\vec{\epsilon}$

3 La teoria dei legami costitutivi si fonda sugli **assiomi di Noll**:

I) **Principio di determinismo**:

vi è un determinismo nella determinazione dello stato tensionale, che dipende solo dalla storia di deformazione. Essa è fondamentale perché fa capire che la tensione dipende solo dalla deformazione e non da altro.

II) **Principio di azione locale**:

in un generico punto P, lo stato tensionale è indipendente dai punti sufficientemente lontani (cioè si lega alla definizione del vettore tensione come limite della tensione).

III) **Principio di indifferenza del materiale**:

esso è tipico della Fisica classica e dice che, da una certa scala in poi, la risposta del materiale è indipendente dall'osservatore (cioè non vale x scale quantistiche in virtù del principio di Heisenberg).

Teoria dell'elasticità

I **Teoria dell'elasticità**: essa è alla base x l'ingegneria civile, in quanto si realizzano strutture con materiali che lavorano in campo elastico. Essa è definita x corpi tridimensionali ma poi la si specializzerà sulle travi, cioè elementi monodimensionali.

Innanzitutto, x definizione, un corpo deformabile si dice **corpo elastico** quando il CAMPO DELLE TENSIONI \vec{T} È UNA FUNZIONE BIUNIVOCHE DEL CAMPO DELLE DEFORMAZIONI $\vec{\epsilon}$.

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{\epsilon})$$

Dunque la tensione è funzione diretta della deformazione e, se è biunivoca, quando la deformazione è nulla, la tensione è nulla. Ciò discende dall'assioma di determinismo, cioè che la tensione dipende solo dalla deformazione.

L'evidenza sperimentale dell'elasticità è data dall'ESPERIENZA DI HOOKE, che evidenzia la diretta proporzionalità tra forza e spostamento. Data una molla elastica, infatti, essa si allunga in maniera proporzionale alla forza F applicata, cioè si ha

$$F = kx$$

La proporzionalità è espressa attraverso una costante k , detta costante di elasticità della molla.

In questa esperienza, l'elasticità significa proporzionalità tra forza e spostamento.

ora però si vuole estendere tale concetto sul microscopico, dicendo che c'è proporzionalità tra tensioni e deformazioni. Per quanto riguarda la costante, Bernoulli la estese al concetto di tensione studiando il comportamento di una fune e li osservò non solo che la forza è proporzionale all'allungamento ma anche che, microscopicamente, le tensioni sono proporzionali alle deformazioni (cioè alle variazioni di lunghezza) attraverso la costante E , detta modulo di Young

$$\vec{T} = E \vec{\epsilon}$$

x gli spostamenti $d\vec{y}$ (infinitesimo di 1° ordine). Così si ha che

$$d\mathcal{L}_{v,e} = \int_V \vec{F} d\vec{y} dV + \int_S \vec{p} d\vec{y} dS$$

Ricordando che il lavoro interno vale

$$d\mathcal{L}_{v,i} = \int_V \vec{E} d\vec{\epsilon} dV$$

applicando il PLV si ha che

$$\int_V \vec{E} d\vec{\epsilon} dV = \int_V \vec{F} d\vec{y} dV + \int_S \vec{p} d\vec{y} dS$$

Affinchè un corpo sia iperelastico, è necessario che il lavoro interno (cioè il lavoro di deformazione e dunque l'integrale del prodotto tra tensioni e deformazioni) sia un differenziale esatto.

Dal punto di vista fisico, ciò significa che il processo deformativo avviene fornendo energia dall'esterno (x deformare un corpo occorre immettere energia e non toglierla) e che tutta questa energia è recuperata quando si rimuovano le cause della deformazione, cioè non avviene dissipazione.

Ora, affinché il lavoro sia un differenziale esatto, la dev'essere l'integrando, cioè il prodotto $\vec{E} d\vec{\epsilon}$ DEV'ESSERE UN DIFFERENZIALE ESATTO. Pertanto, si può introdurre una funzione Φ , detta **potenziale elastico**, x cui si ha che

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{\epsilon}$$

Così deve valere che

$$d\mathcal{L}_{v,i} = d\Phi$$

e dunque

$$\mathcal{L}_{v,i} = \int_V d\Phi dV$$

In base a considerazioni
PROPRIETÀ DEL POTENZIALE ELASTICO:

in base a considerazioni matematiche, il potenziale elastico Φ dev'essere una funzione univoca delle quantità differenziali, cioè essa è funzione univoca delle 6 componenti di deformazione

$$\Phi = \Phi(\epsilon_x; \epsilon_y; \epsilon_z; \gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz})$$

→ le componenti sarebbero 9 max la simmetria di ϵ e γ diventano 6

Il campo Φ è un campo conservativo ed è esprimibile come differenziale esatto, cioè il suo differenziale totale $d\Phi$ si esprime come somma delle derivate parziali rispetto alle deformazioni.

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

Esso, però, x definizione, si lega al lavoro interno e vale

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{\epsilon}$$

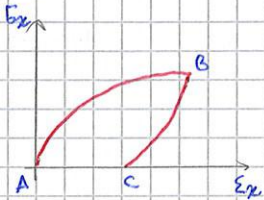
$$d\Phi = E_x d\epsilon_x + E_y d\epsilon_y + E_z d\epsilon_z + 2\tau_{xy} d\gamma_{xy} + 2\tau_{xz} d\gamma_{xz} + 2\tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

Si sono così individuate due scritture equivalenti di $d\Phi$ (una derivando e l'altra imponendo che il lavoro interno sia un differenziale esatto) e, confrontandole, visto che coincidono,

Se poi si carica dallo stato indeformato A, si va allo stato B e si torna indietro, allora x quanto detto prima il lavoro in corrispondenza del cammino chiuso è nullo

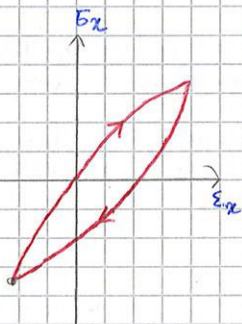
$$\oint_{A \rightarrow B \rightarrow A} d\Phi = 0$$

Ciò significa che, caricando, si percorre il ramo di curva e, tornando indietro, lo si ripercorre e tutto viene restituito. In altri termini, si PERCORRE LO STESSO RAMO SIA IN ANDATA SIA IN RITORNO e l'area viene spazzata sia all'andata come energia fornita sia al ritorno come energia restituita.



In un MATERIALE ANELASTICO non è così perché, se l'energia fornita (cioè l'area sottesa) non cambia, la curva di scarico non torna all'origine ma va a finire in un punto C. Ciò significa che c'è una DEFORMAZIONE RESIDUA. Ad es. una lastra troppo inflessa non può tornare indietro perché parte dell'energia è usata a danneggiare il materiale nel punto di cuspidè.

↓
l'ingegnere non vuole materiali di questo tipo



Così, tornando indietro in un materiale anelastico, l'area sottesa alla curva corrisponde all'energia dissipata, usata a rompere i legami del materiale. Di conseguenza, se si fanno n cicli di carico-scarico, a ogni ciclo si dissipa tutta questa energia che si accumula (poiché si ha n volte quell'area). Così, a un certo punto, il punto di cuspidè si scalda e talmente indebolito i legami del materiale che lo rompono. In meccanica, questi cicli dissipativi sono detti **cicli di isteresi**.

Si osserva che un materiale può essere elastico fino a certi livelli di carico (es. acciaio) e oltre essi il materiale diventa anelastico. Esistono anche materiali sempre anelastici, d'enti cioè campo elastico insignificante, e non sono considerati x l'ingegneria strutturale.

3 Potenziale elastico complementare:

ora si scrive il differenziale di contrarrio, cioè si differenziano le tensioni (e non le deformazioni) e si scrivono

$$d\psi = {}^t d\vec{\sigma} \vec{\epsilon}$$

La funzione ψ si dice **potenziale elastico complementare**. Si nota che, sommandola con il potenziale elastico, si ha che

$$d\Phi + d\psi = {}^t \vec{\sigma} d\vec{\epsilon} + d\vec{\sigma} \vec{\epsilon} = d({}^t \vec{\sigma} \vec{\epsilon})$$

Poiché ${}^t \vec{\sigma} d\vec{\epsilon}$ e $d({}^t \vec{\sigma} \vec{\epsilon})$ sono due differenziali esatti, allora anche $d\psi$ è un differenziale esatto e dunque il **POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE ψ È UNA FUNZIONE DI STATO**.

A livello fisico, però, se il potenziale elastico Φ è l'energia immagazzinata, il potenziale elastico elementare non ha significato chiaro perché è solo il complementare.

PROPRIETÀ DEL POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

→ essa è una funzione delle 6 componenti di tensione (e non di deformazione)

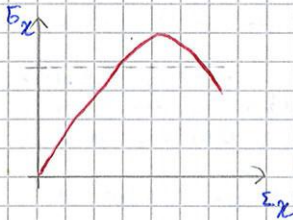
$$\psi = \psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

e trovare la funzione

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$$

Infatti l'esistenza dell'area ψ è condizione necessaria x la biunivocità e dunque l'invertibilità del legame costitutivo.

Ad es, nella curva a sinistra non si può definire il potenziale ψ perché c'è un ramo discendente, x cui a un certo carico si associano due deformazioni.



Dal punto di vista matematico, guardando la curva, si nota che, oltre un certo limite di tensione σ_{max} , aumentando la deformazione ma diminuendo la tensione. Dunque x poter aumentare la deformazione occorre diminuire il carico. Tale fenomeno è fisicamente innaturale x un materiale elastico e, x evitarlo, occorre farsi che non ci siano rami discendenti, in cui il prodotto $d\sigma d\varepsilon$ è negativo, e garantire così l'esistenza di ψ .

Ciò equivale a imporre che

$$d\sigma d\varepsilon > 0$$

In termini matematici, questo significa che l'INVERTIBILITÀ DEL LEGAME COSTITUTIVO e quindi l'esistenza di ψ sono garantite QUANDO LA FUNZIONE Φ È CONVESSA, cioè il prodotto delle derivate seconde x gli incrementi ε_{ij} sono sempre positivo.

Φ , mentre il potenziale elastico complementare ψ garantisce l'invertibilità del legame costitutivo ma è comunque solo una quantità complementare dell'energia.

Così la quantità di interesse positivo

Nello studio x l'ingegneria civile interessano materiali dove la relazione è monodroma, cioè monotona nelle 6 dimensioni, x cui si può sempre definire ψ e invertire la relazione costitutiva, cioè trovare la funzione

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$$

Altrimenti il materiale è considerato anelastico

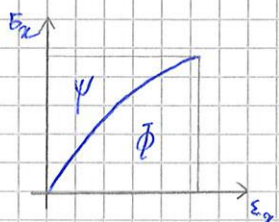
Così la quantità di interesse fisica e misurabile è il potenziale elastico ψ , mentre il potenziale elastico complementare Φ garantisce l'invertibilità del legame costitutivo ma è comunque una quantità complementare dell'energia.

In generale, x un materiale, si ha che

$$\Phi \neq \psi$$

e si distinguono due casi

$$\rightarrow \Phi > \psi$$



Ragionando sempre nel monodimensionale, in questo caso si ritrovano le classiche curve tensione-deformazione e tali curve sono caratterizzate da concavità rivolta verso il basso.

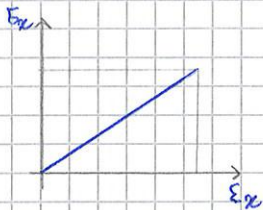
Ciò significa che, nelle prime fasi di carico, il materiale è molto rigido in quanto bisogna aumentare molto il carico x avere piccole deformazioni. Per alte pendenze, infatti, si parla di MATERIALE RIGIDO e lì è richiesta una grande tensione x poter deformare.

Dopo un po', poi, la pendenza diminuisce e la rigidità si riduce.

Questo è il caso delle gomme. Gonfiando ad es. un palloncino, all'inizio c'è molta resistenza ma questa poi diminuisce.

Elasticità lineare

1 **Elasticità lineare**: in essa, LA CURVA TENSIONE-DEFORMAZIONE È UNA RETTA.
La prima conseguenza fondamentale di ciò è che nell'elasticità lineare vale la relazione



$$\phi = \psi$$

Ciò permette nella trattazione teorica, dal punto di vista matematico, di confondere i due potenziali (nella matematica essi sono due aree uguali, ma nella fisica sono due concetti diversi)

2 Nell'elasticità lineare si è ricavata in modo sperimentale ed euristico la legge di Hooke ma la legge

$$\sigma = E \epsilon$$

è stata introdotta a livello monodimensionale e vale solo, ad es., x aste o funi (in cui si può disegnare il diagramma).

Ora occorre estendere tale legge al caso tridimensionale, in modo da conoscere il comportamento elastico del materiale. Bisogna dunque collegare non tanto gli scalari σ_x e ϵ_x ma i tensori $[\sigma]$ e $[\epsilon]$.

In generale, la relazione si esprime come

$$[\sigma] = [EA][\epsilon]$$

I due tensori del II ordine $[\sigma]$ e $[\epsilon]$ sono collegati tramite il **tensore di elasticità $[EA]$** , che è un TENSORE DEL IV ORDINE contenente 81 elementi.

Nella geometria, un tensore del IV ordine dev'essere visualizzato come una matrice a 4 dimensioni, in questo caso $3 \times 3 \times 3 \times 3$ (e ciascuna con rango 3), e dev'essere disegnato in uno spazio a 4 dimensioni.

Nella matematica, però, esso può essere rappresentato come una matrice bidimensionale 9×9 i cui elementi sono caratterizzati da 4 indici (poiché derivano da una matrice quadridimensionale). Poiché però le matrici $[\sigma]$ e $[\epsilon]$ sono simmetriche e presentano solo 6 componenti indipendenti, x la matrice elastica vale la proprietà di **simmetria minore**, in cui vale l'identità

$$A_{iejh} = A_{eijh} = A_{ikhj} \quad \rightarrow \text{c'è una simmetria intrecciata}$$

Così si hanno solo 36 componenti indipendenti nel tensore elastico $[EA]$.

Si può poi semplificare ulteriormente lo studio introducendo l'ipotesi di **iperelasticità lineare**, cioè s'ipotizza che il prodotto $\sigma \epsilon$ tra tensioni e deformazioni. In tal caso, infatti, si dimostra che vale la proprietà di **simmetria maggiore**

$$A_{iejh} = A_{jhie}$$

Così si dimostra che esistono solo 21 COMPONENTI INDIPENDENTI NEL TENSORE DEL IV ORDINE DI ELASTICITÀ.

Si osserva però che 21 costanti non sono poche perché, x descrivere il comportamento meccanico di un materiale, occorrerebbero 21 parametri. Questo, infatti, è il caso generale ma sotto opportune ipotesi si può massimizzare la semplificazione e descrivere il materiale con 2 soli parametri (cioè vale x materiali omogenei e isotropi).

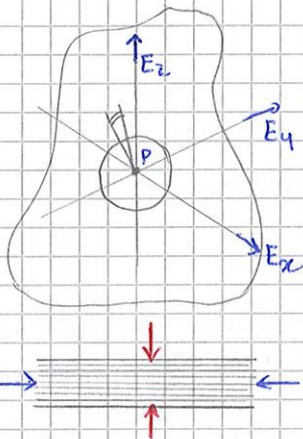
$$[H] = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y^2}\right)_0 & 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z}\right)_0 & 0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_z^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xy}} \partial \varepsilon_y\right)_0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz}} \partial \varepsilon_z\right)_0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}} \partial \varepsilon_z\right)_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Così la matrice hessiana $[H]$ raccoglie dentro di sé questi 21 numeri (non funzioni perché calcolate nell'origine) e uno di questi è modulo elastico.

Di conseguenza se, nello spazio, si considera un punto P con fibre dirette secondo le direzioni x, y e z , la matrice $[H]$ descrive il comportamento costitutivo in tutto l'intorno di P . Essa infatti non dice solo come si allunga e accorcia l'asse lungo E_x ma dà anche i moduli E_y e E_z e la resistenza alle variazioni d'angolo attraverso il parametro G .

Dunque le 21 costanti dicono come si comporta il materiale in tutte le direzioni della stella di centro P .

Si osserva però che, se il materiale è omogeneo e isotropo, tutto diventa uguale e le costanti si riducono a 2.



Es. In legno presenta fibre allineate che determinano una risposta diversa del materiale in base alla direzione d'applicazione dell'azione e dunque servono più costanti.

Tornando allo sviluppo di Maclaurin, si osserva che il potenziale Φ è pari alla metà della somma delle derivate seconde moltiplicate x il quadrato delle deformazioni (cioè è un segnale di elasticità lineare).

Di conseguenza, si può esprimere in forma matriciale la relazione come

$$\Phi = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} [H] \vec{\varepsilon}$$

cioè si può dire che il POTENZIALE ELASTICO Φ È UNA FORMA QUADRATICA DELLE DEFORMAZIONI $\vec{\varepsilon}$.

Si nota che tale relazione coincide formalmente con il potenziale elastico dell'oscillatore armonico (es. molla), che è una forma quadratica dell'elongazione x

$$\Phi = \frac{1}{2} k x^2 \quad k = \text{costante elastica della molla}$$

Ora, derivando l'equazione rispetto alle deformazioni $\vec{\varepsilon}$ (è come se si derivasse il potenziale della molla rispetto all'elongazione x), si ottengono le tensioni $\vec{\sigma}$ (nell'altro si ha la forza kx), cioè si ottiene il LEGAME COSTITUTIVO LINEARE

$$\vec{\sigma} = [H] \vec{\varepsilon}$$

Legame costitutivo lineare
(risultato molto importante)

Così la forza dell'elasticità lineare è che si possono usare queste relazioni interscambiabili, anche se, dal punto di vista fisico, è più importante la forma bilineare. Il P.L.V., infatti, dice che l'energia è l'integrale del prodotto tra tensioni e deformazioni mentre, nell'elasticità lineare, essa vale

$$\frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

dove il termine $\frac{1}{2}$ deriva dalla triangularità delle aree integrali.

3 Problema elastico lineare:

dopo aver definito il legame costitutivo, si prova a definire il corpus di equazioni che governa lo stato tensionale e deformativo, una volta assegnate le forze esterne e vincolari agenti sul corpo. Questo insieme di equazioni definisce il cosiddetto **problema elastico lineare**:

è il problema in cui si deve trovare lo stato tensionale e deformativo all'interno del corpo solido deformabile elastico lineare soggetto all'azione di forze esterne.

Esso è il tipico problema posto dall'ingegnere a valutare quanto un materiale soffre sotto le azioni a cui esso è stato progettato.

Si studierà innanzitutto il problema nel caso generale e poi lo si specializzerà alla trave.

Si sa che in un corpo tridimensionale le 3 equazioni indefinite dell'equilibrio

$$\text{div} [\sigma] = {}^t[\rho] \vec{b} = -\vec{F}$$

non sono sufficienti a trovare le tensioni, in quanto si hanno 3 equazioni x 6 incognite. Si ha dunque la necessità di sapere il comportamento del materiale e di aggiungere così 6 equazioni costitutive lineari

$$\vec{\sigma} = [H] \vec{\epsilon}$$

Ora si sostituisce la II equazione nella prima ma, facendo così, si hanno ancora 6 incognite (le componenti delle deformazioni). Occorre allora scendere nel numero delle incognite e, a fare ciò, si passa dalle deformazioni agli spostamenti attraverso le equazioni di congruenza

$$\vec{\epsilon} = [\partial] \vec{\eta}$$

Facendo queste sostituzioni nell'equazione di equilibrio si ha così che

$${}^t[\rho] \vec{b} \stackrel{\text{Ⓢ}}{=} {}^t[\rho][H] \vec{\epsilon} \stackrel{\text{Ⓢ}}{=} {}^t[\rho][H][\partial] \vec{\eta} = -\vec{F}$$

x il legame costitutivo

x l'equazione di congruenza

Così le incognite diventano le 3 componenti del vettore spostamento $\vec{\eta}$. In tal modo, il numero di incognite diventa pari al numero di equazioni ma, dall'altra parte, in questa semplificazione si paga con un aumento dell'ordine di derivazione che, da 1, passa a 2 (infatti l'operatore $[\partial]$, cioè la derivata prima, è applicato 2 volte).

L'equazione ottenuta si può riscrivere come

$$\underbrace{({}^t[\rho][H][\partial])}_{[L]} \vec{\eta} = [L] \vec{\eta} = -\vec{F}$$

$$[L] \vec{\eta} = -\vec{F}$$

Equazione di Lamè

Poi si moltiplica x l'hessiana costitutivo del materiale e si trova la tensione, cioè il dato di interesse

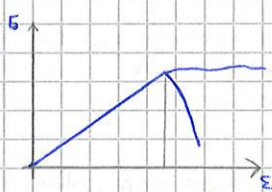
$$\vec{\sigma} = [H] \vec{\epsilon}$$

Da qui si può poi conoscere il punto in cui il materiale soffre di più e, ricavate le direzioni principali, si può prevedere in quale direzione avverrà la rottura.



dunque nel problema elastico s'impone il problema, si risolvono le equazioni, si post-processano i dati e si ricava infine la tensione

6 Ora si introdurranno dei **principi e teoremi fondamentali dell'elasticità lineare**, che costituiscono una serie di principi fisici molto importanti nella teoria dell'elasticità lineare e dunque anche x l'ingegneria.

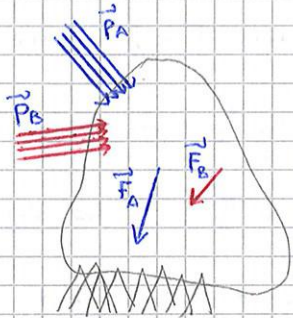


Del resto, l'ingegneria è così legata a questa teoria che anche quando un materiale non è esattamente elastico lineare (ad es la muratura, simile alla gamma x la deformabilità della malta), il suo comportamento è approssimato con una legge elastica bilaterale. Quest'ultima si caratterizza di una costante elastica che cambia al cambiare del carico ma che, localmente, descrive il comportamento come lineare, in modo da trarre tutti i vantaggi del caso.

Molte, solo recentemente nelle strutture si è iniziato a valutare come si comporta il materiale oltre il limite elastico e capire se ha comportamenti anelastici con o senza rottura.

A tal proposito, si è visto che in genere non conviene far lavorare le proprie strutture nella zona lineare anche sotto le scosse sismiche, ma si accetta, sotto una certa sicurezza, di sfiorare la zona elastica con snervamento.

5 Principio di sovrapposizione degli effetti



Si consideri un corpo deformabile soggetto a un sistema ^A di forze di Volume F_A e di forze di superficie P_A .

Si può allora impostare il problema elastico lineare e ricavare il campo di spostamenti \vec{u}_A associato al suddetto sistema di forze e dunque anche le deformazioni $\vec{\epsilon}_A$ e le tensioni $\vec{\sigma}_A$. Così si è risolto il problema elastico lineare nel caso del sistema di forze A.

Ora si aggiunge un sistema di forze B, con forze di volume F_B e di superficie P_B .

Risolviendo il problema elastico lineare relativo a tale sistema, si ricavano gli spostamenti \vec{u}_B , le deformazioni $\vec{\epsilon}_B$ e le tensioni $\vec{\sigma}_B$.

Così si sono studiati separatamente il sistema A e il sistema B.

Ora si considera l'insieme dei sistemi A e B, non più presi separatamente, e ci si chiede quale sia la soluzione del problema elastico quando i sistemi A e B sono presenti simultaneamente.

Il principio di sovrapposizione degli effetti garantisce che **la soluzione elastica al problema di simultaneità del sistema A e del sistema B è la somma delle soluzioni parziali.**

Di conseguenza, i campi di deformazione, di spostamento e di tensione sono somma dei due campi parziali

$$\vec{u}_{A+B} = \vec{u}_A + \vec{u}_B$$

$$\vec{\epsilon}_{A+B} = \vec{\epsilon}_A + \vec{\epsilon}_B$$

$$A = \int_V {}^+ (\vec{F}_A - \vec{F}_B) \cdot \underbrace{(\vec{\delta}_A - \vec{\delta}_B)}_{\Delta \vec{\delta}} dV =$$

$$= \int_V {}^+ \vec{\sigma} \cdot \Delta \vec{\eta} dV = 0$$

→ perchè, x ipotesi, il sistema di forze è unico, si ha che $\vec{F}_A = \vec{F}_B$

$$B = \int_{S_p} {}^+ (\vec{P}_A - \vec{P}_B) \cdot (\vec{\eta}_A - \vec{\eta}_B) dS$$

$$= \int_{S_p} {}^+ \vec{\sigma} \cdot \Delta \vec{\eta} dS = 0$$

→ x lo stesso motivo di prima, si ha che $\vec{P}_A = \vec{P}_B$

$$C = \int_{S_v} {}^+ (\vec{R}_A - \vec{R}_B) \cdot \underbrace{(\vec{\delta}_{v,A} - \vec{\delta}_{v,B})}_{\Delta \vec{R}} dS =$$

$$= \int_{S_v} {}^+ \Delta \vec{R} \cdot \vec{\sigma} dS = 0$$

→ in questo caso, non è detto che le reazioni vincolari siano le stesse, però lo spostamento dei punti vincolati è lo stesso (in quanto si sta considerando lo stesso sistema vincolato), x cui si ha che $\vec{\delta}_{v,A} = \vec{\delta}_{v,B}$

Una volta calcolato il lavoro virtuale, si può applicare il P.L.V. (ricordandosi che esso può essere applicato a un qualunque sistema di forze e anche x sistemi di spostamenti non corrispondenti a quello delle forze applicate, proprio grazie alla virtualità)

$$\mathcal{L}_{v,e} = \mathcal{L}_{v,i}$$

$$0 = \int_V {}^+ (\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B) \cdot (\vec{\epsilon}_A - \vec{\epsilon}_B) dV$$

→ il lavoro virtuale delle forze interne x il sistema differenza è dato dalla variazione del campo tensionale x la variazione del campo deformativo

Imponendo che

$$\Delta \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B \quad \text{e} \quad \Delta \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_A - \vec{\epsilon}_B$$

l'equazione diventa

$$\int_V {}^+ \Delta \vec{\sigma} \cdot \Delta \vec{\epsilon} dV = 0$$

In elasticità lineare però vale la relazione generale

$$\vec{\sigma} = \psi = \frac{1}{2} \int_V {}^+ \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} dV$$

Applicando tale relazione al sistema differenza, dove interferiscono le tensioni $\Delta \vec{\sigma}$ e le deformazioni $\Delta \vec{\epsilon}$, e sostituendola nell'equazione, si ha che

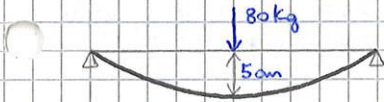
$$\int_V {}^+ \Delta \vec{\sigma} \cdot \Delta \vec{\epsilon} dV = 2 \int_V \vec{\sigma} \cdot \left(\Delta \epsilon_{xx}; \Delta \epsilon_{yy}; \Delta \epsilon_{zz}; \Delta \gamma_{xy}; \Delta \gamma_{xz}; \Delta \gamma_{yz} \right) dV = 0$$

Poiché la funzione $\vec{\sigma}$ è una forma quadratica definita positiva, questa sia annulla solo quando l'integranda è nulla su tutto il corpo, cioè solo quando le variazioni di deformazioni sono nulle

$$\Delta \epsilon_{xx} = \Delta \epsilon_{yy} = \Delta \epsilon_{zz} = \Delta \gamma_{xy} = \Delta \gamma_{xz} = \Delta \gamma_{yz} = 0 \quad \rightarrow \text{solo così si ha } \vec{\sigma} = 0$$

Questa condizione si traduce nell'uguaglianza

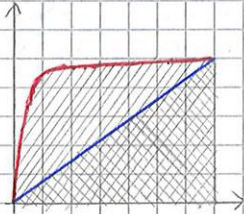
E.S (APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI CLAPEYRON)



Si applichi su una trave un carico di 80 kg. La trave si piega di 5 cm. Per tanto l'energia immagazzinata, x il teorema di Clapeyron, vale

$$\frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}_{ext} = \frac{1}{2} \cdot 800 \text{ [N]} \cdot 0,05 \text{ [m]} = 20 \text{ J}$$

↓
valore finale della forza x spostamento



Dunque l'energia immagazzinata nella trave è pari a 20 J, con l'ipotesi che la deformazione della trave avvenga in modo lento e statico, in modo che il grafico sia triangolare.

Se, infatti, un proiettile con velocità 100 ms⁻¹ colpisce la trave, essa si deforma ma l'energia non segue più il teorema di Clapeyron. L'energia, infatti, ora è più simile a un area rettangolare in cui la parte triangolare è assorbita dal materiale e il surplus diventa energia cinetica (la trave vibra) oppure finisce nel materiale che, non sopportandola, si rompe.

In questo ambito, si supponrà che il teorema di Clapeyron valga sempre.

Si osserva inoltre che il teorema di Clapeyron fa capire che la triangolarità, cioè il legame lineare, non vale solo a livello microscopico tra tensioni e deformazioni ma anche tra forze e deformazioni.

8 Teorema di Betti:

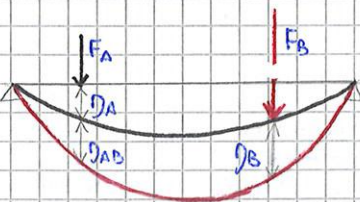
è un teorema fondamentale che dimostra che il principio di sovrapposizione degli effetti non vale x l'energia.

Ciò avviene perché esiste il cosiddetto LAVORO MUTUA, cioè quando due sistemi di forze agiscono contemporaneamente sulla stesso corpo, essi compiono un lavoro di deformazione intrecciato e dunque non si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Si vuole prima analizzare questo fenomeno nel caso di una trave.

Si consideri una trave soggetta a un primo sistema di forze A, a cui si associa un carico \vec{F}_A che determina uno spostamento $\vec{\eta}_A$. Così, in virtù del teorema di Clapeyron, il lavoro compiuto da tale sistema di forze vale

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \vec{F}_A \cdot \vec{\eta}_A$$



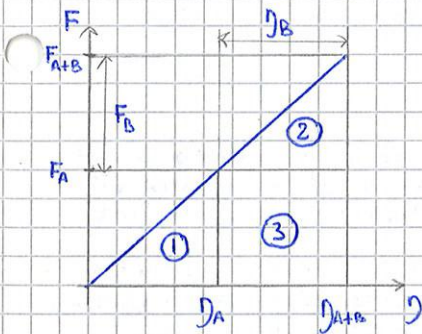
Ora si suppone che arrivi un II sistema di forze B, a cui si associa un carico \vec{F}_B che è applicato mentre il carico \vec{F}_A è presente, cioè i due carichi sono contemporanei. A seguito di questo II carico, la trave si inflette secondo uno spostamento $\vec{\eta}_B$ e il lavoro compiuto dal sistema di forze B, x il teorema di Clapeyron, vale

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \vec{F}_B \cdot \vec{\eta}_B$$

Si osserva però che il punto di applicazione della forza \vec{F}_A , x effetto del nuovo carico \vec{F}_B , si è abbassato di un termine $\vec{\eta}_{AB}$ (=spostamento del punto A x effetto del sistema B) e, in virtù di questo spostamento, la forza \vec{F}_A compie ancora lavoro. Così s'individua il LAVORO MUTUA come

$$\mathcal{L}_{AB} = \vec{F}_A \cdot \vec{\eta}_{AB}$$

Tale lavoro è anche detto "lavoro di trascinamento" perché è come se la forza \vec{F}_A fosse trascinata dalla forza \vec{F}_B , cioè tale lavoro è indotto dal sistema B.



Come si pone però il lavoro mutuo rispetto al lavoro complessivo? Graficando gli effetti dei due sistemi di forze A e B in un piano forze-spostamenti, si osserva che il lavoro dei sistemi A e B corrisponde rispettivamente alle aree dei triangoli ① e ② (quest'ultimo triangolo parte dallo spigolo superiore del triangolo ①). Considerando invece il sistema complessivo di forze, pari alle forze del sistema A più le forze del sistema B, a valutare il lavoro complessivo bisogna arrivare dove la forza è pari a $F_A + F_B$ e lo spostamento complessivo è pari a $J_A + J_B$, cioè bisogna considerare il triangolo a loro associato (quello più grande). Si osserva allora che, tra il lavoro dei singoli sistemi α_A e α_B e il lavoro complessivo α_{A+B} , manca il rettangolo ③ che corrisponde al lavoro di trascinamento (o lavoro mutuo) α_{AB} e vale in questo caso

$$\alpha_{AB} = \int_V \vec{F}_A \cdot \vec{J}_B dV$$

Pertanto si può dire che tra i lavori dei singoli sistemi e il lavoro complessivo vale la relazione

$$\alpha_{A+B} = \alpha_A + \alpha_B + \alpha_{AB}$$

Se ora s'invertisse l'ordine di applicazione dei sistemi (prima B, poi A), stavolta si avrebbe una forza F_B già presente che è trascinata a fare un lavoro extra di deformazione a causa dell'arrivo della forza F_A . Pertanto si avrebbe un nuovo lavoro mutuo

$$\alpha_{BA} = \int_V \vec{F}_B \cdot \vec{J}_A dV + \int_{S_p} \vec{P}_B \cdot \vec{J}_A dS$$

Di conseguenza, anche qui il lavoro complessivo α_{B+A} non è la somma dei singoli lavori indipendenti (come direbbe la sovrapposizione degli effetti) ma occorre aggiungere il lavoro mutuo α_{BA}

$$\alpha_{B+A} = \alpha_B + \alpha_A + \alpha_{BA}$$

Nell'ipotesi di corpo iperelastico, però, il loro complessivo è costante, in quanto esso dipende solo dallo stato iniziale e finale e non dalla modalità di carica (e dunque non dall'ordine d'applicazione dei due sistemi di forze)

$$\alpha_{A+B} = \alpha_{B+A}$$

A seguito di questa identità, si ricava che

$$\alpha_{AB} = \alpha_{BA}$$

Questo costituisce il teorema di Betti, detto anche TEOREMA DELL'UGUAGLIANZA DEI LAVORI MUTUI:

il lavoro mutuo α_{AB} compiuto dal sistema di forze A quando arriva il sistema di forze B è pari al lavoro mutuo α_{BA} compiuto dal sistema di forze B quando arriva il sistema di forze A.

Così il teorema di Betti introduce il concetto di lavoro mutuo, che spiega la non validità del principio di sovrapposizione degli effetti e l'energia, e inoltre, sfruttando il fatto che nell'iperelasticità l'energia non dipende dal percorso, si dimostra che i due lavori mutui sono uguali.

dove η_i è lo spostamento totale del generico punto P_i , che si è appena visto valere

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} F_j$$

Dunque il lavoro si riscrive come

$$\mathcal{L}_{def} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \psi_{ij}$$

Si osserva che tale espressione è una forma quadratica delle forze in termini dei coefficienti ψ_{ij} , dove tali coefficienti fanno le veci dei termini dell'hessiana. Se ora si deriva il lavoro di deformazione rispetto a ciascuna forza, si ottiene che

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{def}}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} F_j = \eta_i, \quad i=1; \dots; n$$

cioè la derivata del lavoro di deformazione rispetto alla singola forza è uguale allo spostamento del punto di applicazione di quella forza.

Dunque il teorema di Castigliano, sostanzialmente, porta al livello strutturale l'identità vista tra potenziale elastico complementare ψ e deformazioni ϵ

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} = \epsilon_{ij}$$

Il suo enunciato è il seguente:

La derivata del lavoro di deformazione (cioè dell'energia immagazzinata dentro il corpo) rispetto al modulo di una forza è pari allo spostamento elastico globale duale della forza stessa (cioè del punto di applicazione della forza in direzione dell'applicazione della forza stessa = spostamento che fa lavorare la forza)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{def}}{\partial F_i} = \eta_i, \quad i=1; \dots; n$$

In tal modo, il teorema non dà lo spostamento assoluto di un punto ma dà la componente di spostamento che fa lavorare la forza (che è detta "duale della forza stessa").

10A questo punto s'introduce una nuova proprietà fondamentale e molto frequente in ingegneria civile, cioè l'isotropia:

un materiale si dice isotropo se ha identiche proprietà in tutte le direzioni.

Ciò significa che si può scrivere il potenziale elastico complementare in funzione dei 3 invarianti della tensione T_1, T_2 e T_3 . Infatti, poiché non c'è dipendenza dalla direzione, si possono usare 3 quantità che non dipendono dal sistema di riferimento.

$$\psi = \psi(T_1; T_2; T_3)$$

Si ricorda che, dato il tensore degli sforzi

$$[B] = \begin{bmatrix} B_x & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{xy} & B_y & B_{yz} \\ B_{xz} & B_{yz} & B_z \end{bmatrix}$$

I 3 invarianti della tensione si esprimono come

$$\rightarrow T_1 = \text{tr}[B] = B_x + B_y + B_z$$

Ora si vogliono trovare i valori dei parametri a e b con cui correlare lo stato deformativo $\vec{\epsilon}$ con lo stato tensionale $\vec{\sigma}$.

↳ questo è un passo fondamentale

Si sa, x definizione, che gli invarianti T_1 e T_2 valgono

$$T_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$T_2 = -\sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_z + \tau_{xz}^2 - \sigma_y \sigma_z + \tau_{yz}^2$$

Così si può calcolare l'espressione di tutte le deformazioni

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} = 2a T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \sigma_x} + b \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_x} = 2a(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 1 + b \cdot (-\sigma_y - \sigma_z) = \\ &= 2a\sigma_x + (2a-b)\sigma_y + (2a-b)\sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} = 2a T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \sigma_y} + b \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_y} = 2a(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 1 + b \cdot (-\sigma_x - \sigma_z) = \\ &= (2a-b)\sigma_x + 2a\sigma_y + (2a-b)\sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z} = 2a T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \sigma_z} + b \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_z} = 2a(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 1 + b \cdot (-\sigma_x - \sigma_y) = \\ &= (2a-b)\sigma_x + (2a-b)\sigma_y + 2a\sigma_z \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} = 2a T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau_{xy}} + b \frac{\partial T_2}{\partial \tau_{xy}} = 2a(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 0 + b \cdot 2\tau_{xy} = 2b\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} = 2a T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau_{xz}} + b \frac{\partial T_2}{\partial \tau_{xz}} = 2a(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 0 + b \cdot 2\tau_{xz} = 2b\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} = 2a T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau_{yz}} + b \frac{\partial T_2}{\partial \tau_{yz}} = 2a(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot 0 + b \cdot 2\tau_{yz} = 2b\tau_{yz}$$

Si è così ottenuta una serie di formule che legano le tensioni alle deformazioni attraverso i due parametri a e b e ora si sistema il tutto in una matrice che legni le tensioni $\vec{\sigma}$ alle rispettive deformazioni $\vec{\epsilon}$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2a-b & 2a-b & 0 & 0 & 0 \\ 2a-b & 2a & 2a-b & 0 & 0 & 0 \\ 2a-b & 2a-b & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

↳ la parte con le tensioni normali è una matrice simmetrica perché si ha una forma quadratica definita positiva

Ora si deve trovare un modo x determinare questi parametri ma questo è un caso semplice perché, x determinare il problema elastico, si è passati da 81 a 21 parametri (nel problema elastico lineare) e infine si è arrivati a 2 parametri (nel problema elastico lineare isotropo).

$$\begin{cases} \frac{1}{G} > 0 \\ \frac{1}{E} > 0 \\ \frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} > 0 \\ \frac{1}{E^3} (1 - 3\nu^2 - 2\nu^3) > 0 \end{cases} \rightarrow \text{sono i determinanti delle varie sottomatrici}$$

Queste sono le quattro disuguaglianze che bisogna imporre affinché la matrice sia definita positiva. Per la prima disuguaglianza, si ricorda la definizione del parametro G

$$\frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} > 0 \quad \text{se } E > 0 \text{ e } \nu > -1$$

Da qui si ha che

$$\begin{cases} \nu > -1 \\ E > 0 \\ -1 < \nu < 1 \\ \nu < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Combinando queste condizioni si ha che

$$\begin{aligned} E &> 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

→ queste sono le condizioni che la matrice deve soddisfare perché sia definita positiva

Si osserva che il parametro ν è limitato nel campo dell'elasticità lineare con piccoli spostamenti e, in generale, nella realtà, si ha che

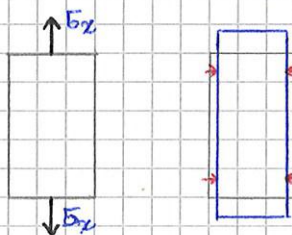
$$0 < \nu < \frac{1}{2} \rightarrow \text{ciò non vale a alcune gamme}$$

INTERPRETAZIONE FISICA DEI PARAMETRI E E ν

→ modulo elastico E e coefficiente di contrazione laterale ν

Innanzitutto, si immagina di limitarsi alla parte superiore a sinistra della matrice trovata

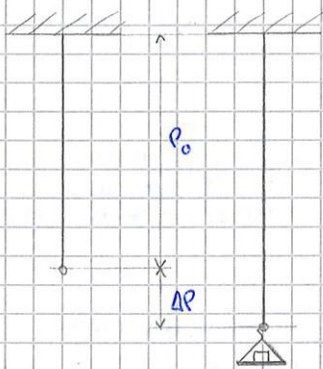
$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$



Per capire il significato, si considera un parallelepipedo e si sottopongono le due facce di base a una forza, da cui deriva uno stato tensionale σ_x di suo interno. Si immagina che esso si allunghi, cioè le due facce si allontanino, ma, dall'altra parte, che esso si restringa. Così, da una configurazione iniziale passa a una configurazione deformata dove, in generale, si ha un restringimento di sezione a scapito di un allungamento.

Si può allora definire come **modulo elastico** E il rapporto tra la tensione e la corrispondente deformazione.

MISURA DEL MODULO ELASTICO E:



un buon metodo consiste nel sottoporre il pezzo a una **prova di trazione**.

Si consideri un filo del materiale che si vuole studiare, con lunghezza iniziale P_0 (misurata a filo teso) e con un anellino al fondo. Sotto poi si aggiunge un peso e si valuta l'allungamento ΔP del filo. Di conseguenza, la deformazione assiale vale, a definizione,

$$\epsilon_x = \frac{\Delta P}{P_0}$$

La tensione E_x è invece calcolata come

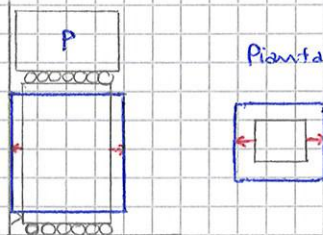
$$E_x = \frac{P}{A_{\text{filo}}} \quad P = \text{peso}$$

Sapendo questo, in teoria si può determinare il valore del modulo elastico del filo come

$$E = \frac{E_x}{\epsilon_x}$$

MISURA DEL COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE LATERALE ν :

Un primo modo x poterlo calcolare potrebbe essere il valutare la variazione di diametro del filo durante la prova di trazione.



Altrimenti, si prende un cubetto fatto dello stesso materiale e lo si sottopone a una pressione, avendo cura di impedire che si verifichi attrito sulle basi, ad es apponendo delle sfere in modo che il corpo sia vincolato in un solo punto.

La pressione si ottiene mettendo sul corpo un peso P . A seguito di questa pressione, il corpo si schiaccia e, schiacciandosi, s'allarga. Dopodiché si misura la variazione di sezione misurando le nuove lunghezze dei lati e da qui si stima il valore del coefficiente ν .



Una volta, però, erano usati metodi diversi perché, in generale, le variazioni di diametro o di lunghezza ~~era~~ sono micrometriche e difficili da misurare (del resto, quando il modulo elastico è alto, servono carichi molto elevati x avere piccole deformazioni).

Allora si è studiato un sistema in cui, a un supporto fisso e vincolato, è attaccata una lamina del materiale che si vuole studiare. Il tutto viene inserito in un bagno d'acqua, di cui ovviamente sono note tutte le proprietà (è omogenea, si sa il peso specifico a ogni temperatura).

In fondo alla lamina è immesso un piccolo sistema di contrasto, costituito da un piccolo peso metallico tale che tenga la lamina in tensione e dritta.

Così facendo, si misura il livello del liquido su di un tubo di vetro e si segna così il livello nelle condizioni iniziali (le condizioni iniziali sono note perché si sa il peso).

Dopodiché, viene inserita sotto una calamita che attira in giù il peso che costituisce il contrasto. La forza esercitata dalla calamita è nota perché è misurata attraverso delle malle messe sotto il peso. Visto che, inoltre, il peso è molto grosso e la deformazione si concentra all'interno del provino (è meno rigida), la lamina tende ad allungarsi.

Di conseguenza, il suo volume tende ad aumentare e, x questo, il livello d'acqua tende a salire.

Dalla variazione di livello, si è in grado di risalire al valore del coefficiente ν .

metodo usato in passato x determinare ν

Comportamento dei materiali

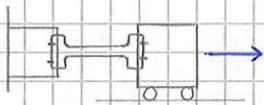
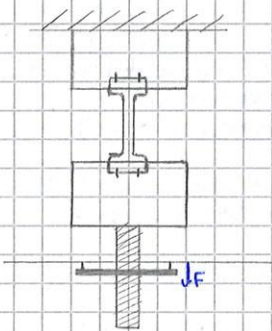
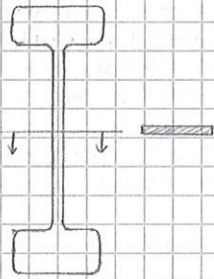
I Prova di trazione

È una prova fondamentale in quanto permette di determinare la RESISTENZA DEL MATERIALE, dato importante x realizzare strutture.

Nello studio del materiale, il produttore crea un campione del materiale con una certa forma. Questa deve rispettare certi requisiti, tra cui

lunghezza \gg diametro

in modo da avere uniformità lungo la soluzione. La sezione è rettangolare di area A .



Questo campione è inserito in una macchina, dove si attacca la provetta a un supporto molto rigido posto nella parte superiore. Poi, c'è un II supporto molto rigido a cui si vincola il campione e tale supporto è montato su una vite. Quest'ultima può girare e si può misurare la forza esercitata su questa parte attraverso una sorta di bilancia.

Facendo ruotare la vite, si misura la forza che si esercita sul sistema (intanto il dado è tenuto fermo da un sistema di ganasce).

Si capisce allora che, in questo sistema, non si applica tanto un carico ma una deformazione, cioè si vincola la provetta ad avere una certa deformazione.

Per questo motivo, questa prova costituisce uno schema di **prova a controllo di deformazione**.

Si potrebbe anche imporre una medesima prova, detta **prova a controllo di carico**, dove la provetta del materiale è vincolata da una parte a un sostegno libero di scorrere e si applica una forza F .

Così, nella prova a controllo di deformazione, si applica una deformazione, cioè **nella prova a controllo di deformazione s'incrementa la deformazione e si misura la forza**.

Dall'altra parte, **nella prova a controllo di carico s'incrementa la forza e si misura la deformazione**.

Il risultato è completamente diverso perché i risultati che si vedevano si possono ottenere solo con una prova di controllo di deformazione, in quanto essa è la prova più completa che si possa fare su di un materiale.

Facendo una prova a controllo di deformazione, si ottiene un grafico su un piano con

ordinate = TENSIONE σ , misurata come

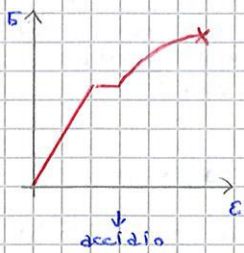
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

dove F è la forza misurata sul mezzo di contrasto e A è la sezione originaria.

ascisse = DEFORMAZIONE ϵ e la variazione di lunghezza è misurata tra due punti messi a cavallo dell'ipotetica sezione di rottura, mettendo un estensimetro x un campo di circa 10 cm

OSSERVAZIONE: la deformazione è fornita da una misura locale nel punto di rottura. Si potrebbe misurare la variazione di distanza tra i due mezzi di contrasto ma in questa distanza interviene anche la deformazione della parte più spessa, che non interessa. Pertanto la misura viene fatta sulla base ridotta della provetta.

OSSEVAZIONE:



In presenza di una prova a controllo di carico, si avrebbe una situazione diversa.

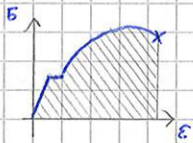
Caricando il materiale, se nel tratto elastico non cambia nulla, allo snervamento non si vede un lieve cedimento ma piuttosto un tratto orizzontale (si perdono le oscillazioni in mezzo).

Poi si prosegue come prima nel tratto plastico e si arriva al picco ma da lì poi si perde la parte discendente.

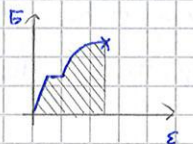
In altri termini, si vede la rottura ma non la parte di strizione. Dunque si perdono la parte di snervamento e di strizione.

Per questo motivo, è migliore la prova a controllo di deformazione.

2 Duttilità e fragilità

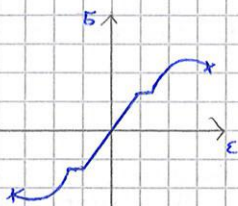


Si parla di **materiale duttile** quando quel materiale è caratterizzato da un diagramma di carico (cioè un diagramma σ - ϵ) tale che l'area sottesa dal diagramma è elevata, cioè **l'energia che il materiale accumula prima della rottura** (corrispondente all'integrale del prodotto tra tensioni e deformazioni) è elevata.

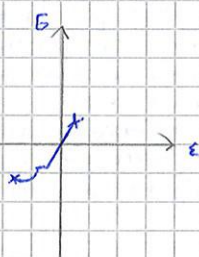


Un **materiale fragile**, invece, è caratterizzato da un diverso tipo di curva tensione-deformazione e presenta **energia accumulata prima del processo di rottura molto bassa**.

Esistono materiali che seguono più un comportamento duttile e materiali con comportamento più fragile.



Ad es., guardando la curva tensione-deformazione dell'acciaio a temperatura ambiente, si osserva che esso è un materiale duttile sia in trazione che in compressione. Ciò vale anche per tutti gli altri metalli in generale anche se, per questioni chimiche, il comportamento è influenzato dalla temperatura e a bassa temperatura possono diventare fragili.

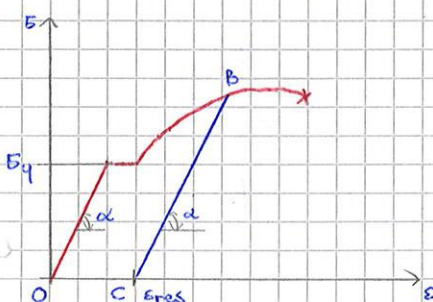


Il calcestruzzo, invece, ha un certo diagramma che presenta un ramo di trazione praticamente inesistente, in quanto a trazione il materiale si sfalda subito. Infatti, in generale, non si eseguono prove di trazione sul calcestruzzo, ma si cerca di estendere i risultati della prova di compressione, fatta con un cubetto standardizzato. Nella curva di compressione è presente un piccolo ramo plastico e dunque, per la poca energia accumulata, il calcestruzzo è un materiale fragile.

Più in generale, sono fragili tutti i materiali ceramici, anche se il calcestruzzo, in determinate condizioni di confinamento, laterale, diventa duttile.

In ogni caso, in generale, **l'ACCIAIO È DUTILE e IL CALCESTRUZZO È FRAGILE**.

3 Incrudimento



Si sono viste le curve di trazione, cioè le curve tensione-deformazione.

Se ora si fa una prova di trazione in cui, caricando, si supera lo snervamento e si percorre il ramo d'incrudimento fino al punto B. Dopodiché si scarica il provino.

Cosa succede?

Se il materiale fosse elastico (anche non lineare) ripercorrerebbe il medesimo percorso fino al punto iniziale O.

all'indietro

Criteri di resistenza

1 In generale, a studiare il comportamento di un materiale, si lavora essenzialmente su prove di trazione e di compressione e, a i materiali metallici e ceramici, si possono determinare 2 valori

→ σ_T = resistenza limite a trazione

→ σ_C = resistenza limite a compressione

→ a i metalli, questi sono le tensioni di snervamento (limite da cui si esce dal campo elastico)

2 A questo punto, però, sorge un problema:

quando si lavora con uno stato tensionale $[\sigma]$ definito come

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

si sta lavorando su uno stato tensionale fatto da 6 componenti ma nelle prove queste non possono essere misurate tutte. Ad es. in una prova non si può imporre una certa σ_x e σ_y e misurare la tensione τ_{xy} a cui c'è rottura.

Dunque, in generale, si ha una situazione di stato tensionale triassiale (con tutte le 6 componenti di tensione), mentre dalla prova si ha un unico valore.

Questo problema è stato studiato con una serie di metodi e ci è fa da premessa ai cosiddetti **criteri di resistenza**:

in essi, in genere, si considera uno stato tensionale triassiale, si calcola un valore di **tensione equivalente**, si esegue una prova sul materiale e dopo di che si fa un **confronto tra la tensione equivalente allo stato tensionale** (funzione dello stato tensionale, cioè delle 6 componenti della tensione) e la **tensione equivalente, dovuta alla prova del materiale** (perché anche nella prova si ha uno stato tensionale), per cui si esce dal campo elastico e il materiale va a rottura, se fragile, oppure entra in campo plastico, se duttile.

In tal modo, diventa possibile confrontare lo stato tensionale generico di un corpo con lo stato tensionale della prova e, in particolare

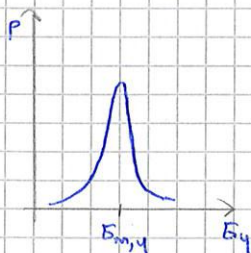
→ se $\sigma_{eq, stato} \leq \sigma_{eq, mat}$, allora il MATERIALE È IN CAMPO ELASTICO

→ se $\sigma_{eq, stato} > \sigma_{eq, mat}$, allora il MATERIALE ESCE DAL CAMPO ELASTICO (va a rottura o in campo plastico)

Nel confronto tra tensione equivalente allo stato tensionale e la tensione equivalente limite del materiale, però, occorre anche considerare il cosiddetto **coefficiente di sicurezza** γ_s , cioè perché ci sia un soddisfacimento delle verifiche e il MATERIALE LAVORI IN CAMPO ELASTICO, è necessario che

$$\sigma_{eq, stato} \leq \frac{\sigma_{eq, mat}}{\gamma_s}$$

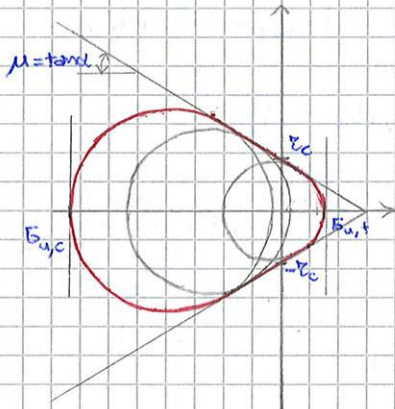
Tale coefficiente, sempre maggiore di 1, tiene conto delle **DIFFORMITÀ DEL MATERIALE** con cui si realizza la struttura o da cui si estrae la provetta, in quanto possono esserci disuniformità che, ovviamente, devono essere contenute a dovere la garanzia che una materiale sia **DI QUALITÀ**



si parla di **materiale di qualità** quando, pur avendo anche scarse proprietà tecniche, presenta lo **STESSO PROCESSO DI COSTRUZIONE NEL TEMPO**. Così nel tempo si ottengono sempre gli stessi valori nel senso che, considerando ad es la tensione σ_y di snervamento, la curva di probabilità ha una distribuzione a campana intorno al valore medio $\sigma_{m,y}$ (bassa σ_{qm})

→ **criterio di Mohr-Coulomb**: esso prevede che le tensioni massime responsabili della rottura siano le **TENSIONI TANGENZIALI** ma che ciò dipende anche dalle **TENSIONI NORMALI**.
In particolare, nel punto dove si vuole fare la verifica deve valere la condizione

$$\tau_{max} < \tau_c + \mu \sigma$$

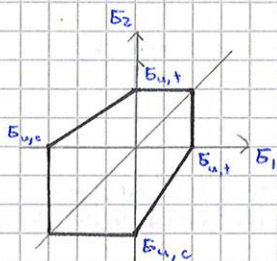


dove τ_c si dice **costante del materiale** e μ si dice **coefficiente di attrito interno**.

Questo criterio, sul piano di Mohr (cioè sul piano τ - σ) è rappresentato da due rette. Secondo tale criterio, i cerchi di Mohr che rappresentano lo stato tensionale (non più un punto perché prima si era in un diagramma σ_1 - σ_2), devono trovarsi all'interno della zona delimitata dalle due rette o, meglio, da questa specie di involuppo di rette (perché si lavora nel tridimensionale).

Inoltre saranno noti i valori di resistenza a trazione e a compressione, che finiscono una tensione massima $\sigma_{u,t}$ a trazione e una $\sigma_{u,c}$ a compressione.

Sulla base di tutto questo, si definisce un'AREA ENTRA LA QUALE SI TROVANO TUTTI I CERCHI DI MOHR CHE RAPPRESENTANO STATI TENSIONALI AMMISSIBILI PER IL MATERIALE. Quando il cerchio esce in parte dall'involuppo, allora lo stato tensionale non è più ammissibile e c'è un'uscita dal campo elastico.



Se si provasse a disegnare questo criterio nel diagramma σ_2 - σ_1 delle tensioni principali a uno stato tensionale piano, si otterrebbe un ESAGONO con asse coincidente con la bisettrice del I e del III quadrante e caratterizzato da due valori distinti di tensione $\sigma_{u,t}$ e $\sigma_{u,c}$. Si osserva che i PUNTI $(\sigma_1; \sigma_2)$ CHE SI TROVANO ALL'INTERNO DI QUESTA ESAGONO RAPPRESENTANO STATI TENSIONALI AMMISSIBILI.

Questo criterio è molto usato per le murature ma anche nella meccanica delle terre e dei mezzi granulari. In parti calde, funziona molto bene per le argille, che lavorano con un criterio di questa tipo e vengono connotate dai due parametri τ_c e μ .

↳ Criteri di resistenza per materiali duttili:

i materiali duttili presentano alcune particolari proprietà

→ hanno uguale comportamento a trazione e a compressione

→ Bridgeman osservò che, facendo delle prove di resistenza a diversa pressione idrostatica, la tensione di snervamento σ_y non cambiava, e cui responsabile della rottura non è la pressione idrostatica (e quindi le tensioni normali) ma le **TENSIONI TANGENZIALI**.

Ai materiali duttili si associano due criteri di resistenza

→ **criterio di Tresca (1868)**: è il **CRITERIO DELLE MASSIME TENSIONI TANGENZIALI**.

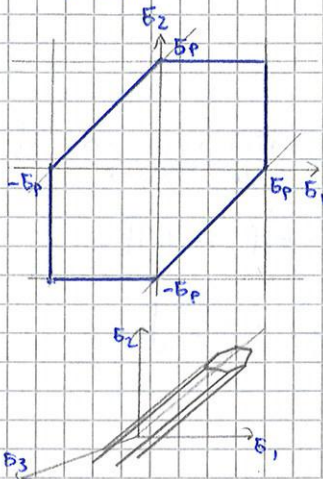
Tale criterio afferma che la responsabilità dello snervamento è della **massima tensione tangenziale** sulla superficie di rottura del provino.

Ora bisogna valutare la tensione equivalente σ_{eq} che, in un materiale isotropo, è funzione delle tensioni principali, cioè

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3)$$

In questo caso, il criterio può essere rappresentato nel piano delle tensioni principali σ_1, σ_2 .
Tale criterio, infatti, può essere scritto come

nell'esagono di Tresca c'è un unico valore di σ_p mentre in Mohr-Coulomb ci sono σ_{u1} e σ_{u2}



$$|\sigma_1| < \sigma_p$$

→ σ_1 deve stare nella fascia tra $-\sigma_p$ e $+\sigma_p$

$$|\sigma_2| < \sigma_p$$

→ σ_2 deve stare nella fascia tra $-\sigma_p$ e $+\sigma_p$ e dunque il dominio di interesse è quadrato

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$

Quest'ultima condizione impone che, affinché non ci sia snervamento in un punto del materiale, la coppia di valori (σ_1, σ_2) deve trovarsi all'interno di un esagono, detto **esagono di Tresca**.

È possibile anche rappresentare il criterio di Tresca anche in uno STATO TRIASSIALE, cioè nello spazio tridimensionale. Ci si ottiene un solido corrispondente a un prisma a base esagonale avente come asse la trisettrice del primo ottante del sistema di riferimento.

→ criterio di Von Mises:

è stato studiato da Von Mises, Huber e Henky e questi stabilirono che responsabile dello snervamento è l'energia legata alla variazione di forma del corpo (non alla variazione di volume) e quindi è l'**energia legata al tensore deviatorico** e non quella idrostatica.

Questa ipotesi è giustificata dal fatto sperimentale in cui si è visto che la pressione idrostatica, responsabile della variazione di volume ma non di forma, non influisce sulla tensione di snervamento. Ciò significa che la variazione di volume non influisce sullo snervamento ma solo la variazione di forma, dovuta al tensore deviatorico.

Si sa che il tensore degli sforzi si descrive come

$$[\sigma] = [\sigma_d] + [\sigma_d]$$

dove

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

→ si suppone di lavorare sul sistema di riferimento principale

Nel sistema di riferimento principale, la tensione media $\bar{\sigma}$ vale

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{J_1}{3}$$

L'ipotesi è che responsabile dello snervamento è l'energia legata al tensore deviatorico. L'energia è associata in generale al potenziale elastico complementare Ψ (non $\bar{\sigma}$ perché interessa lavorare sugli invarianti scalari della tensione), che vale

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left(J_1^2 + 2(1+\nu)J_2 \right)$$

In questo momento interessa però il potenziale di distorsione, a cui si applica tale formula al tensore deviatorico

dove σ_p è la tensione di snervamento.
 Pertanto, l'energia $\psi_{dev, p}$ per lo snervamento si ottiene sostituendo le tensioni proprie dello snervamento nella relazione appena scritta

$$\psi_{dev, p} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2$$

Quindi, il criterio diventa

$$\frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3) < \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2$$

Così il criterio di Von Mises diventa il seguente

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 < \sigma_p^2$$

Pertanto la tensione equivalente σ_{eq} può essere espressa come

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3} < \sigma_p$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3} < \sigma_p$$

Il criterio di Von Mises qui è espresso x il sistema di riferimento principale ma esso può anche essere espresso in funzione delle componenti speciali della tensione in qualunque sistema di riferimento, ricordandosi che lì si ha che

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

Sostituendo questi invarianti nel potenziale ψ_{dev} , si ottiene la tensione equivalente σ_{eq} x un generico sistema di riferimento

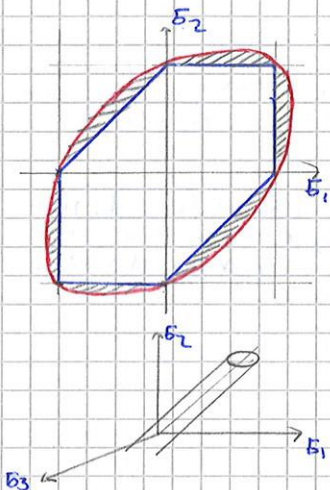
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2}$$

In presenza di uno STATO BIASSIALE, con

$$\sigma_3 = 0$$

l'espressione della tensione equivalente x il sistema di riferimento principale si semplifica e diventa

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$



Sul piano delle tensioni principali, questo corrisponde a un'ellisse avente come asse la bisettrice del I e del III quadrante, detta **ellisse di Von Mises**.

Se questa fosse sovrapposta all'esagono di Tresca, si osserverebbe che il CRITERIO DI VON MISES È MENO RESTRITTIVO perché è caratterizzato da un'ellisse circoscritta all'esagono di partenza e dunque si trovano zone x cui, secondo il criterio di Von Mises, la struttura è verificata mentre x Tresca no.

Un altro vantaggio del criterio di Von Mises è che la tensione equivalente σ_{eq} può essere espressa con una sola equazione e può essere anche espressa in un qualunque sistema di riferimento non principale.

Il criterio di Von Mises può essere anche rappresentato nello spazio (STATO TRIASSIALE) come un cilindro di base ellittica e avente come asse la trisettrice del I ottante.

Considerando il triangolo $\hat{C}HP$, si ha che

$$\begin{aligned}\overline{CP} &= \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HP}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}\end{aligned}$$

Così la tensione equivalente di Tresca diventa

$$\sigma_{eq} = 2\overline{CP} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}$$

→ CRITERIO DI VON MISES :

è sufficiente considerare la formula scritta x un sistema di riferimento generico $Oxyz$, in cui, in questo caso, si ha che

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

Da qui la tensione equivalente σ_{eq} diventa

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}\end{aligned}$$

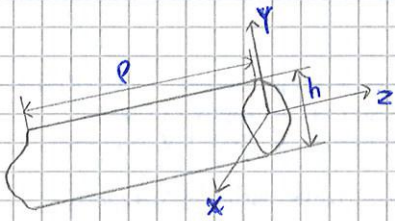
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}$$

Rispetto al criterio di Tresca, si osserva che cambia il fattore davanti al termine τ_z , che da 3 passa a 4, x cui il criterio di Von Mises è meno restrittivo di Tresca.

Queste due formule sono usate x verificare la sezione di una trave.

3 IPOTESI FONDAMENTALI :

innanzitutto, occorre definire il tipo di solido in cui vale la teoria di De Saint Venant, cioè il **solido unidimensionale**:



il solido considerato deve essere sufficientemente snello, cioè in esso la lunghezza l deve essere molto maggiore della larghezza h , cioè

$$l \gg h \quad \rightarrow \text{circa } 8 \div 10 \text{ volte}$$

In virtù di questo, in genere, LE TRAVI SONO SOLIDI UNIDIMENSIONALI.

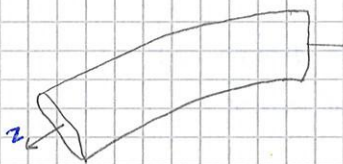
Dunque, a gran parte delle strutture intelaiate in ingegneria civile, le travi sono assimilabili a strutture snelle. Altrimenti, si parla di solidi tozzi in cui non vale la teoria di De Saint Venant e occorre una correzione.

In queste strutture, il SISTEMA DI RIFERIMENTO è dato da

→ asse Z = ASSE DELLA TRAVE

La teoria vale sia a assi Z rettilinei sia a assi Z a debole curvatura, cioè a assi Z con raggi di curvatura R molto grandi rispetto alla dimensione h di riferimento e la sezione trasversale

$$R \gg h$$



Per tale motivo, la teoria può essere estesa anche agli ARCHI di grande raggio.

Però, in ambito civile, non vale ad es. i giunghi di sollevamento, in cui il raggio di curvatura R è piccolo e confrontabile con il parametro h .

→ assi X e Y = ASSI PRINCIPALI D'INERZIA della sezione trasversale, cioè assi baricentrici che annullano il momento centrifugo d'inerzia

$$I_{xy} = 0$$

A questa, si accompagna una serie di ipotesi fondamentali

→ ovviamente, si lavora con **materiali elastici, lineari, omogenei e isotropi**, caratterizzabili dai 3 parametri

→ modulo elastico E

→ modulo di Poisson ν

→ modulo di rigidezza al taglio G , che non è una quantità indipendente ma vale la relazione

$$G = f(E; \nu)$$

Di conseguenza, le equazioni governanti sono quelle caratteristiche del problema di Lamé e cioè

→ equa