appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1562A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Botta

MATERIA: Analisi Matematica II. Prof.Serra

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 108

ANALISI II

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 108

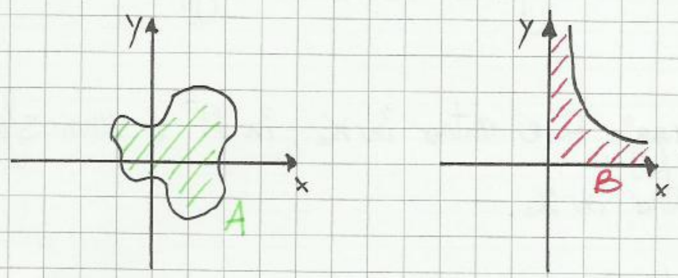
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 108

per entrambi gli insiemi i punti di frontiera sono i punti della circonferenza, che appartengono a B ma non ad A.

L'insieme dei punti di frontiera si chiama bordo di A o frontiera di A.

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice limitato se esiste un intorno $B_R(x_0)$ tale che $A \subseteq B_R(x_0)$, cioè A è contenuto nell'intorno $B_R(x_0)$.

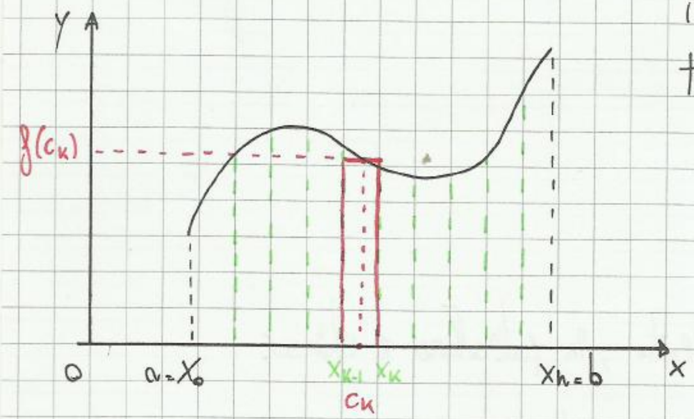
es1:



A è limitato e B non è limitato.

Def: Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato si dice compatto.

Riepilogo integrali semplici



in $[x_{K-1}, x_K]$ si sceglie un punto c_K dell'intervallo per $K = 1 \dots n$ e si calcola:

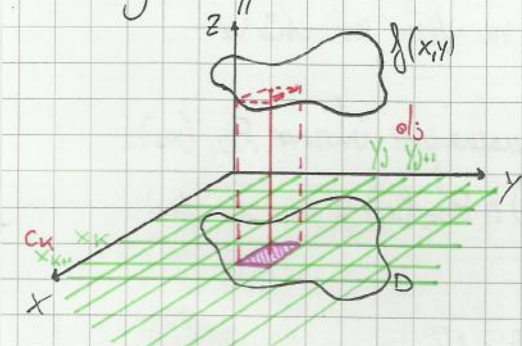
$$\sum_{K=1}^{n} f(c_K) \underbrace{(x_K - x_{K-1})}_{\Delta x_K}$$

Si prendono partizioni sempre più fini:

$$\delta = \max_K \Delta x_K \to 0$$

Se f è continua il limite $\lim\limits_{\delta \to 0} \sum_{K=1}^{n} f(c_K)(x_K - x_{K-1})$ esiste ed è finito e prende il nome di integrale semplice $\int_a^b f(x)\,dx$.

Integrali doppi



$D \subset \mathbb{R}^2$ compatto

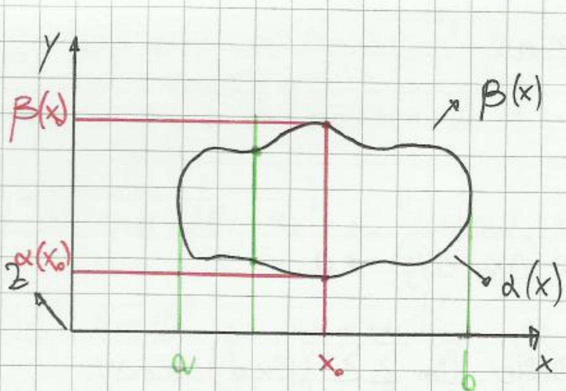
$f: D \to \mathbb{R}$ continua

Si suddivide D in rettangolini $R_{jK} = [x_K, x_{K+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

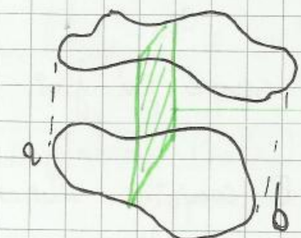
In ogni R_{jK} si prende un punto $(c_K, d_j) \in R_{jK} \cap D$ (per considerare gli R_{jK} solo dentro D).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 108



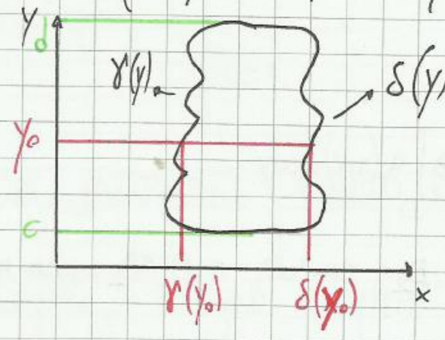
$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



$\int f(x,y)\,dy$

Caso 2: Dominio "orizzontalmente convesso"

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / c \le y \le d ,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \}$$

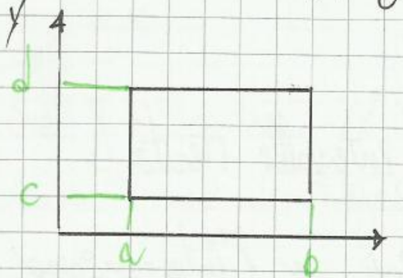


$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Caso 3: Dominio sia verticalmente che orizzontalmente convesso.

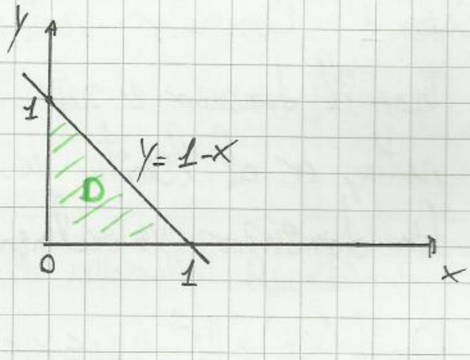
$$D = [a,b] \times [c,d] = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b ,\ c \le y \le d \}$$

$$\int_D f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$



es1: $f(x,y) = 1 - x - y$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0 ,\ y \ge 0 ,\ x + y \le 1 \}$



sia v. conv. che o. conv.

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underset{0}{a} \le x \le \underset{1}{b} ,\ \underset{0}{\alpha(x)} \le y \le \underset{1-x}{\beta(x)} \}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 108

Applicazione integrale doppi: calcolo del baricentro

se la densità è costante:

$$x_G = \frac{1}{\text{area}D} \int_D x \, dx dy$$

con area $D = \int_D dx dy$

media degli y sul corpo ← $y_G = \frac{1}{\text{area}D} \int_D y \, dx dy$

se la densità non è costante:

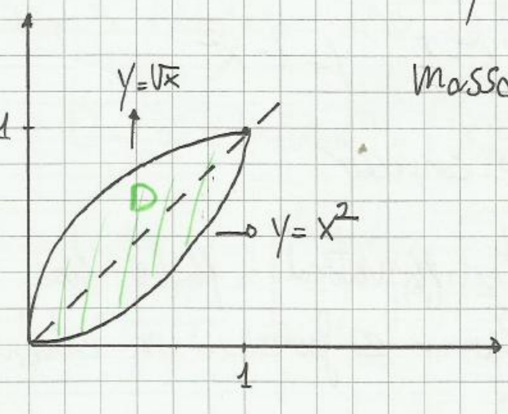
$m: D \to \mathbb{R}$ $\quad m(x,y)$ densità $\quad$ massa $= \int m(x,y) \, dx dy$

$x_G = \frac{1}{\text{massa}} \int_D m(x,y) \, x \, dx dy$ → media pesata di x con peso $m(x,y)$

$y_G = \frac{1}{\text{massa}} \int_D m(x,y) \, y \, dx dy$

es1:

$m(x,y) = xy \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$



$$\text{massa} = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$x_G = \frac{1}{\text{massa}} \int_D x\,m(x,y) \, dx dy = 12 \int_D x^2 y \, dx dy =$$

$$= 12 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \right) dx = 12 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 12 \int_0^1 \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2} dx = 12 \left[\frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{14} x^7 \right]_0^1$$

$$= 12 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{14} \right) = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) = \frac{9}{14}$$

$$y_G = 12 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2 \, dy \right) dx = 12 \int_0^1 \left[\frac{x}{3} y^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = 12 \int_0^1 \frac{1}{3} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^7 dx =$$

$$= 4 \left[\frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{1}{8} x^8 \right]_0^1 = 4 \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{9}{14} \qquad (x_G, y_G) = \left(\frac{9}{14}, \frac{9}{14} \right)$$

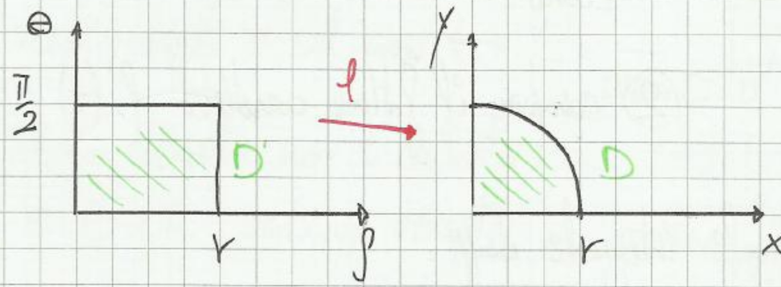
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 108

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(\underbrace{\rho}_{u},\underbrace{\theta}_{v}) = (\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(u,v)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y(u,v)})$$



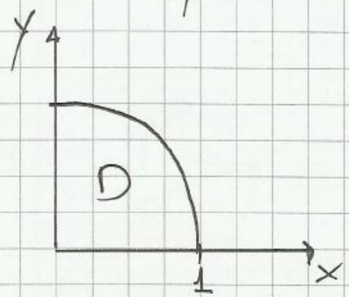
$$J_{(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

es 1:

$$\int_D x\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0\ \ x^2+y^2 \leq 1\}$$



$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx \qquad x \text{ verticali}$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \qquad D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

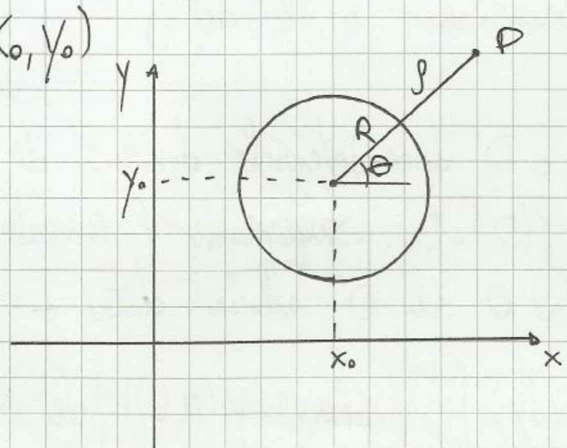
$$0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$\int_D x\,dx\,dy = \int_{D'} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho^2\cos\theta\,d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos\theta}_{\text{non dipende da } \rho} \left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

Coordinate polari centrate in (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$$



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2$$

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq R^2$$

$$\rho^2 \leq R \to 0 \leq \rho \leq R$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ lo Jacobiano è $\det J = \rho$

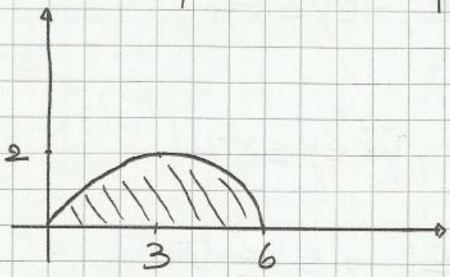
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 108

③ tema d'esame 7/7/09

$\int_D y^2 dxdy$ con $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4(x-3)^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0 \right\}$

$4(x-3)^2 + 9y^2 \leq 36 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y)^2}{4} \leq 1$ ellisse $C(3,0)$, $a=3$, $b=2$



Coordinate "ellittiche"

$\begin{cases} x = \underbrace{3}_{\text{semiassi}}\rho\cos\theta + \underbrace{3}_{\text{centro}} \\ y = 2\rho\sin\theta + 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-3 = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases}$

$(x-3)^2 = 9\rho^2\cos^2\theta \qquad y^2 = 4\rho^2\sin^2\theta$

$\frac{(x-3)^2}{9} = \rho^2\cos^2\theta \qquad \frac{y^2}{4} = \rho^2\sin\theta$

$\Downarrow$

$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq \rho^2 \quad \rho \leq 1 \quad 0 \leq \rho \leq 1$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$J = \begin{pmatrix} 3\cos\theta & -3\rho\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\rho\cos\theta \end{pmatrix}$ Jacobiano $= 6\rho$

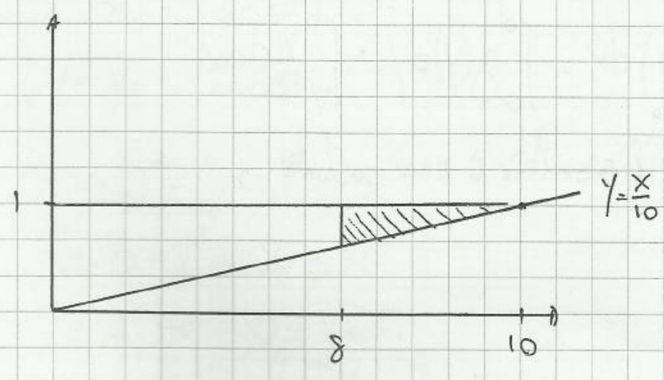
$\int_D y^2 dxdy = \int_0^\pi 4\rho^2\sin^2\theta \, 6\rho \, d\rho \, d\theta = 24\int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho = 24 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi$

Coordinate "ellittiche"

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)}{b^2} \leq 1 \quad \begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\theta \\ y = y_0 + b\rho\sin\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$ Jacobiano $ab\rho$

④ tema d'esame 11/7/12

$\int_D e^{-5y^2+8y} dxdy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 8 \leq x \leq 10 \quad \frac{x}{10} \leq y \leq 1 \right\}$



x verticali:

$\int_8^{10} \left(\int_{\frac{x}{10}}^1 e^{-5y^2+8y} dy \right) dx$ non risolvibile

x orizzontali

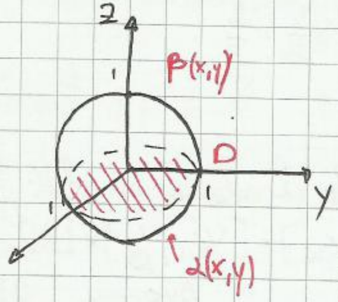
$\int_{\frac{4}{5}}^1 \left(\int_8^{10y} e^{-5y^2+8y} dx \right) dy =$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 108

ESERCIZI:

① $\int_\Omega z^2\,dxdydz \qquad \Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2\le 1\}$



x fili:

$(x,y)\in D,\quad \alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)$

$\alpha(x,y)=-\beta(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

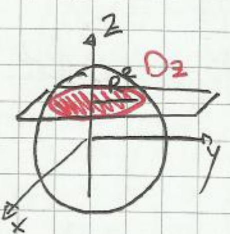
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\}$

$$\int_\Omega z^2\,dxdydz=\int_D\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\right)dxdy=\int_D\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{2}{3}\int_D(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\rho\,d\theta\,d\rho=\frac{2}{3}2\pi\int_0^1(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\rho\,d\rho=\frac{4}{3}\pi\left[-\frac{1}{5}(1-\rho^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{4\pi}{15}\right.$$

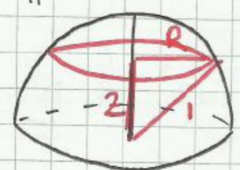
x strati:

$-1\le z\le 1$



$D_z:\ x^2+y^2\le R^2 \qquad x^2+y^2+z^2\le 1 \quad x^2+y^2\le(1-z^2)\to R^2$

oppure



$R=\sqrt{1-z^2}$

$$\int_{-1}^1\left(\int_{D_z}z^2\,dxdy\right)dz=$$

$$=\int_{-1}^1 z^2\left(\int_{D_z}dxdy\right)dz=\int_{-1}^1 z^2\pi(1-z^2)\,dz=\pi\int_{-1}^1 z^2-z^4\,dz=\pi\left.\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right|_{-1}^1=\frac{4\pi}{15}$$

$\downarrow$

area $D_z=\pi R^2=\pi(1-z^2)$

Se $f(x,y,z)$ su Ω è una densità, $\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ è la massa (o la carica) totale.
G baricentro di Ω con $m(x,y,z)$ densità di massa.

$$x_G=\frac{\int_\Omega x\,m(x,y,z)\,dxdydz}{\int_\Omega m(x,y,z)\,dxdydz};\quad y_G=\frac{\int_\Omega y\,m(x,y,z)\,dxdydz}{\int_\Omega m(x,y,z)\,dxdydz};\quad z_G=\frac{\int_\Omega z\,m(x,y,z)\,dxdydz}{\int_\Omega m(x,y,z)\,dxdydz}$$

se $m(x,y,z)$ è costante $\Rightarrow$ $x_G=\dfrac{\int_\Omega x\,dxdydz}{\int_\Omega dxdydz}$; ... ; ...

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 108

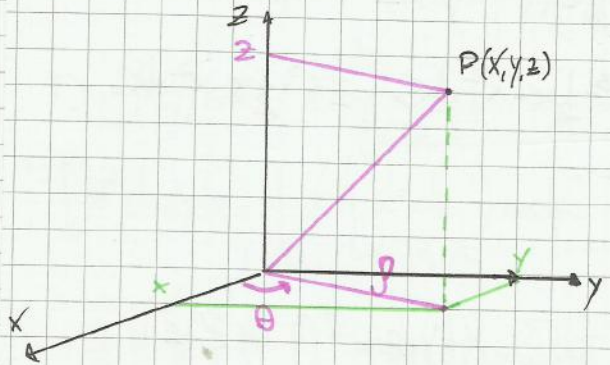
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 108

formula:

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{D'} \underbrace{f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))}_{g(u,v,w)} \underbrace{|\det J_\phi|}_{h(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

D' ← spazio u,v,w

coordinate cilindriche



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,+\infty) \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

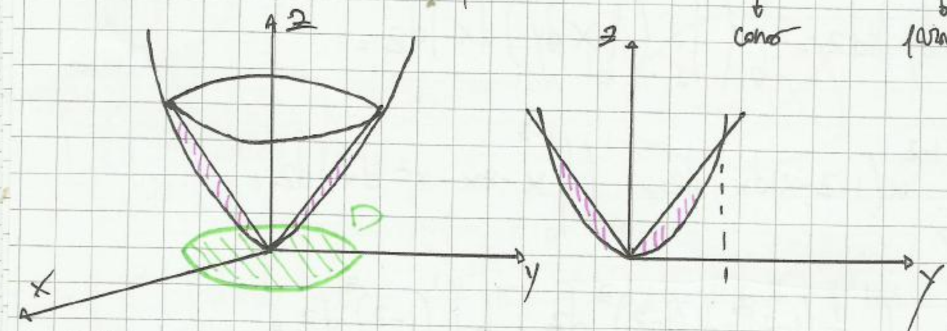
$$J_\phi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_\phi = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

È conveniente usare le coordinate cilindriche quando Ω è un dominio di rotazione attorno a z.

Esercizio ①

$$\int_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{z^2 \le x^2+y^2}_{\text{cono}}, \underbrace{z \ge x^2+y^2}_{\text{paraboloide}}\}$$



$z^2 \le x^2+y^2$

$z \le \sqrt{x^2+y^2} \to z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $z \ge 0$

x fili: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le 1\}$

$$\int_D \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dz\right)dx\,dy = \int_D xy\frac{z^2}{2}\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy = \frac{1}{2}\int xy\left((x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)^2\right)dx\,dy = \dots$$

oppure con coordinate cilindriche

$\theta \in [0,2\pi]$

$\rho \in [0,1]$

$z \in [\rho^2,\rho] \leftarrow \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2} \le z \le \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\rho}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{\rho} \rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,z\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta =$$

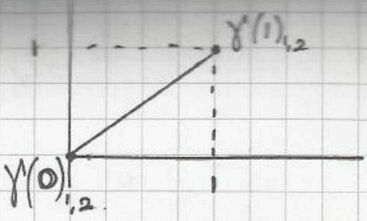
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{\rho} \rho^3\cos\theta\sin\theta\,z\,dz\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\rho^3\cos\theta\sin\theta\frac{z}{2}\right]_{\rho^2}^{\rho} d\rho\,d\theta = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 108

es: $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (x(t), y(t)) = (t,t)$



$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, t^2)$

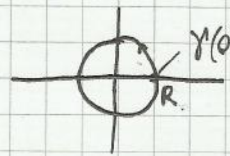
curve diverse possono avere lo stesso sostegno!

Tra i due sostegni cambia la velocità di percorrenza.

$\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$



$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ è il vettore velocità (o tangente) in t

Una curva è regolare quando γ è C^1 e $\gamma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t$

Una curva γ è semplice se γ è iniettiva su (a,b): $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ con $\forall t_1, t_2 \in (a,b)$

la curva non interseca se stessa, gli estremi non sono compresi perchè la curva può essere chiusa.

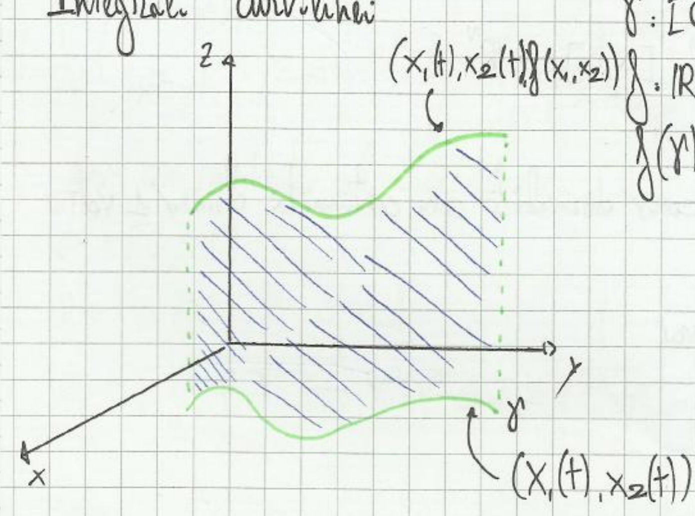
Una curva γ è chiusa quando $\gamma(a) = \gamma(b)$

Lunghezza di una curva:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare $\qquad$ lunghezza di $\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$

con $\|\gamma'(t)\| = \|(x_1'(t), \dots, x_n'(t))\| = \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2}$

Integrali curvilinei



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

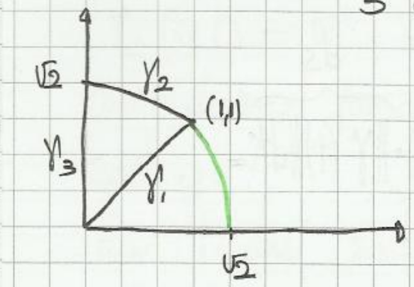
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(\gamma) = f(x_1(t), x_2(t))$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 108

es: $\int_\gamma xy\, ds$ con γ bordo di:



3 curve: $\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + \int_{\gamma_3} f ds$

$\gamma_1(t) = (t,t) \quad t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \quad t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$\gamma_3(t) = (0,t) \quad t \in [0, \sqrt{2}]$

$\gamma_1'(t) = (1,1) \quad \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{2}$

$\gamma_2'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t) \quad \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{2}$

$\gamma_3'(t) = (0,1) \quad \|\gamma_3'(t)\| = 1$

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_0^1 \underset{\uparrow \, xy}{t^2} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} f ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

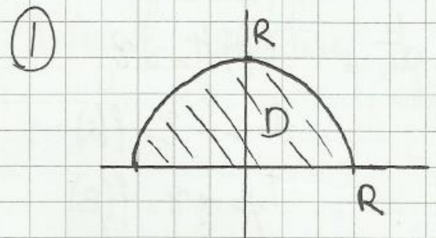
$$\int_{\gamma_3} f ds = \int_0^{\sqrt{2}} 0 = 0$$

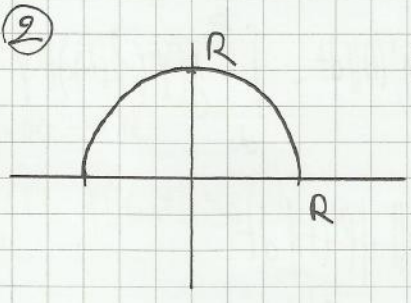
$$\int_\gamma f ds = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

es:

1. un semicerchio nel piano $y \geq 0$ di raggio R
2. una semicirconferenza nel piano $y \geq 0$ di raggio R

Dove il baricentro è più basso?

① 

② 

$m = \text{cost}$

① $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$

$$y_G = \frac{\int_D y\, m(x,y)\, dx dy}{\int_D m(x,y)\, dx dy} = \begin{matrix} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,R] \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0,\pi] \end{matrix} = \frac{\int_0^\pi \int_0^R \rho\sin\theta\, \rho\, d\theta\, d\rho}{\frac{1}{2}\pi R^2} =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 108

esempio:

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad F(x,y,z) = (e^x, x+y, y+z)$

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

$F(\gamma(t)) = (e^t, t+t^2, t^2+t^3) \qquad \gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = e^t + (t+t^2)2t + (t^2+t^3)3t^2 = e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5$

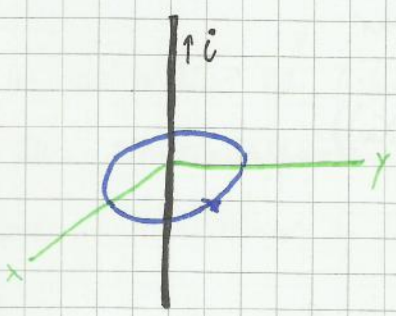
$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5 = \dots = e + \frac{19}{15}$

Fisicamente $\int_\gamma F \cdot dP$ è il lavoro compiuto da F lungo γ

Osservazione: l'integrale di 2ª specie non dipende dalla parametrizzazione di γ purchè γ sia percorsa sempre nello stesso verso. Se percorsa in senso opposto l'integrale cambia segno.

↳ Quando si integra su una curva chiusa bisogna specificare il verso di percorrenza.

ES:



conduttore rettilineo in cui scorre corrente:

campo magnetico $B(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$

Calcolare il lavoro compiuto da una carica che percorre una circonferenza nel piano xy di raggio $R=1$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$

$B(\gamma) = \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 0\right) = (-\sin t, \cos t, 0)$

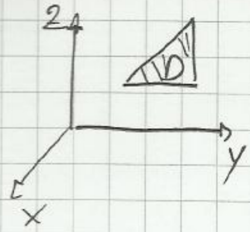
$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$B(\gamma) \cdot \gamma'(t) = (\sin t)^2 + \cos^2 t = 1$

$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 108



$$y_G = \frac{1}{\text{area}\,D}\int_D y\,dz\,dy = \frac{1}{\text{area}\,D}\int_a^b\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} y\,dz\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\text{area}\,D}\int_a^b y(\beta(y)-\alpha(y))\,dy$$

$$\text{Vol}\,\Omega = 2\pi\int_a^b \rho(\beta(\rho)-\alpha(\rho))\,d\rho$$

osservazioni:

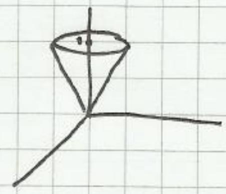
① $\text{Vol}\,\Omega = 2\pi\int_D y\,dy\,dz$ volume del solido di rotazione di D attorno a z

② $\text{Vol}\,\Omega = 2\pi\,\text{area}\,D\cdot y_G$ il volume è il prodotto dell'area della sezione per la lunghezza della circonferenza passante per il baricentro e di centro sull'asse z

T. di Guldino

esercizio:

$\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz$ $\quad\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z\le 1,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$ ~ cono



x fili:

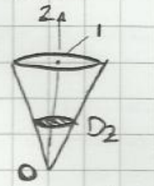
$D = \{(x,y) / x^2+y^2\le 1\}$

$\Omega = \{(x,y,z) / x^2+y^2\le 1,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$

$$\int_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z\,dz\right)dx\,dy = \int_D \frac{1}{2}z^2\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dx\,dy = \frac{1}{2}\int_D 1-x^2-y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \pi\int_0^1 \rho-\rho^3\,d\rho = \pi\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

x strati:



$0\le z\le 1 \quad z = \sqrt{x^2+y^2} \quad z^2 = x^2+y^2$

$D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le z^2\}$

$$\int_0^1\left(\int_{D_z} z\,dx\,dy\right)dz = \int_0^1 z\Big(\underbrace{\int_{D_z} dx\,dy}_{\text{area cerchio raggio } z\,=\,\pi z^2}\Big)dz = \int_0^1 \pi z^3\,dz = \pi\frac{z^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 108

$E(t) = \frac{1}{2} m (\gamma'(t))^2 - U(\gamma(t))$ energia

$E'(t) = m\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) - \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = m\gamma''(t) - \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = cost$
$\Updownarrow$
l'energia si conserva.

Lavoro

Teorema: sia $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conservativo, A aperto e connesso. Sia $\gamma: [a,b] \to A$ regolare a tratti e U il potenziale di F allora:

$$\int_\gamma F \cdot dP = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

DIM:

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(\gamma(t)))\,dt =$$
$$= U(\gamma(t))\Big|_a^b = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

Il lavoro lungo γ è la differenza di energia potenziale agli estremi.

Se F è conservativo $\int_\gamma F \cdot dP$ non dipende da γ ma solo dagli estremi.

ES: $F(x,y,z) = (e^{y+z^2}, xe^{y+z^2}, 2xze^{y+z^2})$

$\gamma(t) = (4t + t(t-1)e^t, -e^{t-1}t^2, t\sin(\frac{\pi}{2}t))$ $\quad t \in [0,1]$ $\qquad U(x,y,z) = xe^{y+z^2}$

$$\int_\gamma F \cdot dP = U(\underset{(4,-1,1)}{\underset{\downarrow}{\gamma(1)}}) - U(\underset{(0,0,0)}{\underset{\downarrow}{\gamma(0)}}) = 4$$

- Sapendo che F è conservativo come calcolare U?
- Come riconoscere se F è conservativo?

Teorema: sia $F: A \to \mathbb{R}^3$, A aperto e connesso. Sono equivalenti:

1. F è conservativo
2. Date 2 curve con gli stessi estremi (nell'ordine):
$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 108

$$\int_\gamma F\cdot dP = U(x,y,z) = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP + \int_{\gamma_3} F\cdot dP$$

$$\int_{\gamma_1} F\,dP = \int_0^x F(t,0,0)\cdot(1,0,0) = 0$$

$$\int_{\gamma_2} F\,dP = \int_0^y \cancel{F}(0,0,x^2 t)\cdot(0,1,0) = 0$$

$$\int_{\gamma_3} F\cdot dP = \int_0^z (2xy\sin t,\, x^2 \sin t,\, x^2 y\cos t)\cdot(0,0,1)\,dt = \int_0^z x^2 y \cos t\,dt = x^2 y \sin t\Big|_0^z =$$

$$= x^2 y \sin z = U(x,y,z)$$

2° metodo: ispezione diretta (x $\mathbb{R}^2$)

F conservativo $\nabla U = F$ $\quad \dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1 \xrightarrow{\text{integro in } x} U(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + C(y)$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2 \quad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int F_1(x,y)\,dx + C(y)\right) = F_2$

risolvere per trovare $C(y)$

ES:

$F(x,y) = (2x\cos y,\, -x^2\sin y + 4y^3)$

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x\cos y \qquad U(x,y) = x^2\cos y + C(y)$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = \left\langle \begin{array}{l} -x^2\sin y + C'(y) \\ -x^2 \sin y + 4y^3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow -x^2\sin y + C'(y) = -x^2\sin y + 4y^3$

$C'(y) = 4y^3$

$C(y) = y^4 + k$

$U(x,y) = x^2\cos y + y^4 + k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Vedere se un campo non è conservativo

$F \in C^1(A) \quad A \subset \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

T. di Schwarz: $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad C^2 \quad \partial_{x_i}\partial_j f = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f$

Se $F: A \to \mathbb{R}^3$ C^1, con A aperto e connesso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 108

Campo magnetico generato da una corrente rettilinea:

$$B = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right) \qquad B: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \quad C^1$$

rot $B = 0 \Rightarrow$ è irrotazionale

$$\int_\gamma B \cdot dP = \dots = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \text{non è conservativo}$$

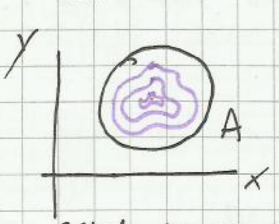
$\gamma \downarrow$ circonf. $R=1$

irrotazionale <u>NON</u> implica conservativo

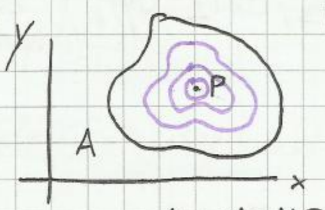
Proprietà topologica:

Def: Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$ (connesso). Si dice che A è "semplicemente connesso" se ogni curva chiusa in A può essere deformata in un punto stando sempre in A.

ES: in $\mathbb{R}^2$



sempl. connesso

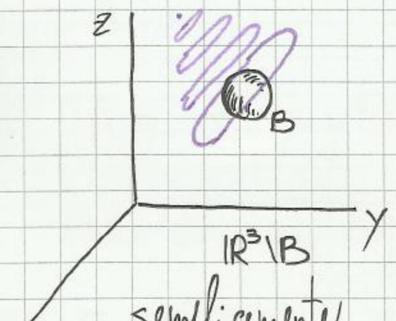


~~[illegible]~~ $A \setminus P$

non è semplicemente connesso

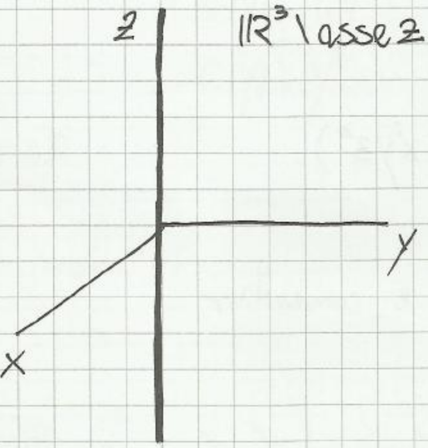
in $\mathbb{R}^2$ A non deve avere "buchi"

in $\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3 \setminus B$

semplicemente connesso



$\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z non semplicemente connesso

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 108

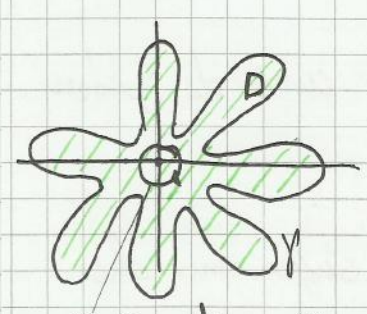
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 108

$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ C^1 sia F irrotazionale C^1

calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$ con γ strana ~~$\Rightarrow \oint_\gamma F \cdot dP = ??$ F non è conservativo~~

es: B

$\gamma = ((2+\cos 4t \cos t), (2+\cos 4t \sin t))$



γ_1 circonferenza $R=1$

T. Green: $\int_\gamma F\,dP + \int_{\gamma_1} F\,dP = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$

$\downarrow$

$\text{rot } F = 0$

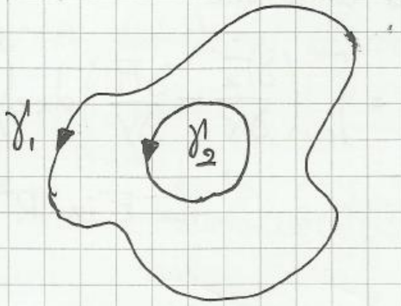
quindi è irrotazionale

$\int_\gamma F\,dP = -\int_{\gamma_1} F\,dP = 2\pi$

$\hookrightarrow$ circuitazione sulla circonferenza

quindi se F è irrotazionale in D:

$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$



Tema d'esame 26/6/12

Usare Green per calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$ con γ bordo "orientato positivo" (↺) di D.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ $\quad F = \left(e^{x^2} - y,\ \frac{x^4}{4} + e^y\right)$

ellisse: $x^2 + \frac{y^2}{9} \le 1$

$\int_\gamma F \cdot dP = \int_D \left(\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x}}_{x^3} - \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y}}_{-1}\right) dx\,dy = \int_D (x^3 + 1)\,dx\,dy =$

Coord. ellittiche

$\begin{cases} x = \rho \cos\theta & 0 \le \rho \le 1 \\ y = 3\rho \cos\theta & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\rho^3 \cos^3\theta + 1)\, 3\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 3\rho^4 \cos^3\theta\, d\rho\, d\theta +$ $\quad \Big|\ x^2 + \frac{y^2}{9} = \rho^2 \cos^2\theta + \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{9} = \rho^2$

$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 3\rho\, d\rho\, d\theta = \ldots = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 108

$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 = x+y$ integro in $x \to U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \begin{cases} x + C'(y) \\ x = F_2 \end{cases}$ $C'(y) = 0 \to C(y) = K \in \mathbb{R}$

$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + K$

se $F(x,y) = (x+y, ax)$

$\partial_x U = x+y$ $U = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$

$\partial_y U = \begin{cases} x + C'(y) \\ ax \end{cases}$ $ax = x + C'(y)$ $(a-1)x = C'(y)$ $\forall x \ e \ \forall y$

se $a \neq 1$ è impossibile passare da una funzione in x ad una in y.

Tema d'esame 3/9/09

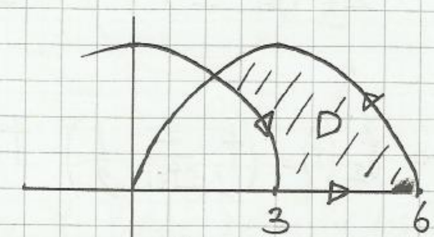
$\int_\gamma F \cdot dP$ con γ bordo di $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, x^2+y^2 \geq 9, x^2 - y^2 - 6x \leq 0\}$ ed

$F(x,y) = \left(\frac{xy^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \sqrt{\ln(1+9x^2)} \ ; \ \frac{x^2y^2}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{9+y^2} \right)$

$y \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 9$ fuori cerchio R.3

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 9 \leq 0$ $(x-3)^2 + y^2 \leq 9$



$\int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dxdy = -\int_D y\, dxdy$

$\partial_x F_2 \to \cancel{xy^2}$, $\partial_y F_1 \to \cancel{xy^2} + y$

coord. polari

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ y = \rho\sin\theta & 3 \leq \rho \leq 6\cos\theta \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ x^2+y^2-6x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ 9 = 6x \end{cases}$ $x = \frac{3}{2}$ $y/x = \operatorname{tg}\theta$ $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\theta \to \frac{\pi}{3}$

$x^2+y^2-6x = 0$ $\rho^2 - 6\rho\cos\theta = 0$ $\rho = 6\cos\theta$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 108

$$\int_{\gamma_4} F\cdot dP = -\int_c^d F_2(a,t)\,dt$$

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_a^b F_1(t,b)\,dt - \int_a^b F_1(t,d)\,dt + \int_c^d F_2(b,t)\,dt - \int_c^d F_2(a,t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left(F_1(t,c) - F_1(t,d)\right)dt + \int_c^d \left(F_2(b,t) - F_2(a,t)\right)dt$$

$\downarrow *$

$* \rightarrow F_2$ primitiva $\frac{\partial}{\partial x} F_2$

$$\int_a^b \left(F_1(t,c) - F_1(t,d)\right)dt = -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial y}(t,y)\,dy\right)dt$$

perchè c e d sono scambiati

$$\int_c^d \left(F_2(b,t) - F_2(a,t)\right) = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,b)\,dx\right)dt$$

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_c^d \left(\int_a^b \partial_x F_2\right)dx\,dy - \int_a^b \int_c^d \partial_y F_1\,dx\,dy = \int_D \left(\partial_x F_2 - \partial_y F_1\right)dx\,dy \quad \text{cvd}$$

$$* \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \iff \int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

$$\Downarrow \qquad F_2(b,t) - F_2(a,t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(x,t)\,dx$$

Campi vettoriali e forme differenziali

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo

$F(x,y,z) = \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right)$

γ regolare $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\quad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_a^b \left[F_1(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]dt =$$

$$= \int_a^b F_1(x(t),y(t),z(t))\underbrace{x'(t)dt}_{dx} + \int_a^b F_2(x(t),y(t),z(t))\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} + \int_a^b F_3(x(t),y(t),z(t))\underbrace{z'(t)\,dt}_{dz} =$$

$$= \int_\gamma F_1(x,y,z)\,dx + \int_\gamma F_2(x,y,z)\,dy + \int_\gamma F_3(x,y,z)\,dz$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 108

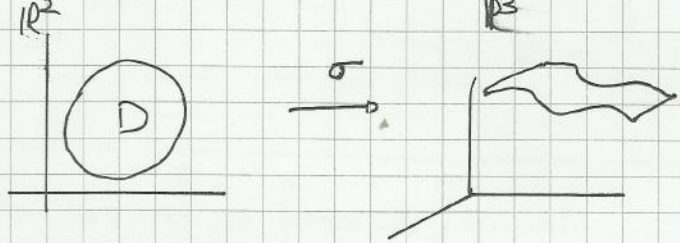
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 108

Terminologia

Vettori (campi)	1-forme
$F = (F_1, F_2, F_3)$ campo	$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ 1-forma differenziale
$\int_\gamma F \cdot dP$ integrale curv. 2ª specie	$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ integrale della forma ω su γ
F conservativa $F = \nabla U$	ω "esatta" $dU = F$
F irrotazionale $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$	ω "chiusa"
Conservativa $\Rightarrow$ irrotazionale	esatta $\Rightarrow$ chiusa
irrotazionale su D semplicemente connesso $\Downarrow$ conservativa	ω chiusa su D semplicemente connesso $\Downarrow$ esatta

Integrali di superficie

Superfici parametriche in $\mathbb{R}^3$: $D \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



superficie parametrica

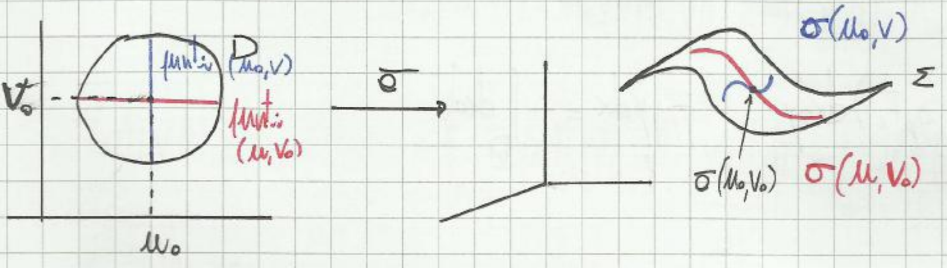
$Im\,\sigma$ = sostegno della superficie Σ

se σ è C^1 su D ; $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ derivabili con continuità

$\sigma : D \to \mathbb{R}$

Fisso v: $\sigma : (u, v_0) \to \mathbb{R}^3$ curva sulla superficie Σ

Fisso u: $\sigma(u_0, v)$



per $\sigma(u, v_0) = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$

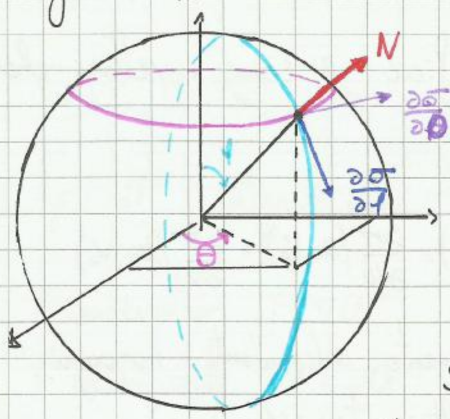
vettore tangente: $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 108

$$\text{area} \approx \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v \Rightarrow \|N(u,v)\|\, du\, dv$$

Sfera $R=1$



$x(\varphi,\theta) = \sin\varphi\cos\theta$ $\qquad \varphi \in [0,\pi]$

$y(\varphi,\theta) = \sin\varphi\sin\theta$ $\qquad \theta \in [0,2\pi)$

$z = \cos\varphi$ $\qquad \rho = 1$

$\sigma: [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

se θ è fisso φ descrive i meridiani, il vettore tangente è $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}$.

se φ è fisso θ descrive i paralleli ed il vettore tangente è $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$$

$$N(\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\varphi\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1})$$

$$\|N(\varphi,\theta)\|^2 = \sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^4\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= \sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \sin^2\varphi$$

$\|N(\varphi,\theta)\| = \sin\varphi$

$$\text{Area} = \int_D \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} \sin\varphi = 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 4\pi$$

Integrali di superficie di 1^a specie, integrazione di funzioni

Data la superficie $\sigma: D \to \mathbb{R}^3$ regolare ($\Rightarrow \sigma\ C^1$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \neq 0$) e una funzione $f(x,y,z)$ continua sul sostegno Σ di σ, si definisce integrale di superficie di 1^a specie di f su Σ:

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_D f(\underset{x(u,v)}{x}, \underset{y(u,v)}{y}, \underset{z(u,v)}{z})\, \|N(u,v)\|\, du\, dv$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 108

$N = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$

$$\int_D x\sqrt{1+4(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta \sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{\to 0} \int_0^{\sqrt{2}} \dots = 0$$

$x = \rho\cos\theta \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{2}$

$y = \rho\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

$z = z$

Integrale di superficie di 2ª specie: integrali di flusso

Il flusso attraverso Σ di F è proporzionale al $\|F\|$, all'area di Σ e al coseno dell'angolo tra F e la normale di Σ.

È data $\sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regolare e un campo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo sul sostegno di σ. $\vec{n}(u,v)$ è il versore normale a Σ $n = \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}$. Allora l'integrale di flusso di F attraverso Σ è:

$$\int_\Sigma F\cdot n\, d\sigma = \int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot n(u,v)\, d\sigma =$$ $F\cdot n$ è scalare quindi 1° specie =

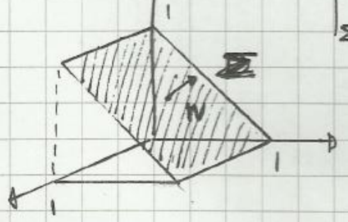
$$= \int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}\, \|N(u,v)\|\, du\, dv =$$

$$= \int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot N(u,v)\, du\, dv$$

Se la superficie è cartesiana $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y))$ $N = (-\partial_x g, -\partial_y g, 1)$

La superficie deve essere orientabile: deve avere 2 facce

Es. $F(x,y,z) = (\cos(xz), xy, z)$ attraverso Σ data dalla porzione di piano $z = 1-y$ con $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e con n orientato come z $(n\cdot\hat{k} > 0)$



$$\int_\Sigma F\cdot n\, d\sigma = \int_D F(\sigma(u,v))\cdot N(u,v)\, du\, dv$$

σ è cartesiana: $D: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(x,y) = (x, y, 1-y)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 108

$f(x,y,z) = x^2 z$

$\sigma(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$

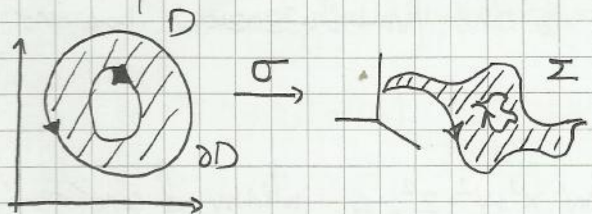
$f(x,y,\sigma(x,y)) = x^2\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\int_\Sigma f\,d\sigma = \int_D x^2\sqrt{4-x^2-y^2}\,\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy = 2\int_D x^2\,dxdy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho = 2\pi\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$$

Teorema del rotore (o di Stokes)

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio d'integrazione che verifica le ipotesi del T. di Green (D dominio di Jordan = regione delimitata da un numero finito di curve semplici e regolari a tratti).
Si prende $\sigma: D \to \mathbb{R}^3$ una superficie C^1 e sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 su un aperto contenente $\sigma(D) = \Sigma$



$(\partial\Sigma = \sigma(\partial D))$

Allora

$$\oint_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\Sigma \text{rot}\,F\cdot n\,d\sigma \to \text{flusso del rotore di } F \text{ attraverso } \Sigma$$

$\downarrow$

circuitazione di F lungo $\partial\Sigma$

la normale è orientata in modo che ~~se~~ usando la regola della vite.

Nel caso del T. di Green

$\sigma(x,y) = (x,y,0) \quad \Sigma = D$

$$\oint_{\partial D} F\cdot dP = \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dxdy$$

$\hookrightarrow \text{rot}\,F\cdot\hat{k} \qquad \hat{k}\cdot n = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 108

Legge di Gauss

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$. La carica totale in Ω è proporzionale al flusso del campo E attraverso $\partial\Omega$:

$$Q = \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} E n \, d\sigma$$

Supponendo $q(x,y,z)$ la densità di carica:

$$Q = \int_\Omega q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} E\cdot n\,d\sigma \underset{\text{T. divergenza}}{=} \varepsilon_0 \int_\Omega \operatorname{div} E \, dx\,dy\,dz$$

$$\int_\Omega (\varepsilon_0 \operatorname{div} E - q)\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

se $\int_\Omega f = 0 \ \forall \Omega$ allora $f = 0$

quindi:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} E - q = 0 \qquad \operatorname{div} E = q/\varepsilon_0$$

Altra applicazione

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo C^1

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

gF campo (gF_1, gF_2, gF_3)

$$\operatorname{div}(gF) = \partial_x(gF_1) + \partial_y(gF_2) + \partial_z(gF_3) = \partial_x g F_1 + g\partial_x F_1 + \partial_y g F_2 + g\partial_y F_2 + \partial_z g F_3 + \partial_z F_3\, g =$$

$$= \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$$

$$\int_\Omega \nabla g\cdot F + g\operatorname{div}F = \int_\Omega \operatorname{div}(gF) \overset{\text{T. diverg}}{=} \int_{\partial\Omega} g F\cdot n\,d\sigma$$

$$\int_\Omega \nabla g\cdot F\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} g\cdot F\cdot n\,d\sigma - \int_\Omega g \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$$ integrazione per parti in $\mathbb{R}^3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 108

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} - \underset{\downarrow \; \frac{1}{2^{(k=0)}}}{1} = 2 - 1 = 1$$

Teorema

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge allora $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

ES: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$

DIM:

$$S_n = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$$

$S_n = S_{n-1} + a_n \qquad a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \quad \text{cvd}$$

ES: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ serie armonica

$a_k = \frac{1}{k} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ però $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge a $+\infty$

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{} + \frac{1}{17} + \ldots \quad \text{Blocco } k$$

2 termini $\geq \frac{1}{4}$ — somma $\geq 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

4 termini $\geq \frac{1}{8}$ — somma $\geq 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

8 termini $\geq \frac{1}{16}$ — somma $\geq 8\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

2^k termini $\geq \frac{1}{2^{k+1}}$ — somma $\geq 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$

Se stiamo sommando $\frac{1}{2}$ infinite volte: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

Stabilire il carattere di una serie vuol dire stabilire se converge/diverge/indeterminata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 108

q carica puntiforme nell'origine in $\mathbb{R}^3$, il campo generato da q è:

$E(x) = k \dfrac{q\,x}{\|x\|^3}$ Il flusso di E uscente da Σ attorno a O non dipende da Σ (legge di Gauss).

$x(x_1, x_2, x_3)$

$\|E\| \approx \dfrac{1}{\|x\|^2}$

$\operatorname{div} E(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$ un campo con div=0 si dice solenoidale

$\operatorname{div} E = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

Campo radiale $F(x) = \phi(\|x\|)x$

$\operatorname{div} g \cdot F = \nabla g \cdot F + g(\nabla \cdot F)$

$\operatorname{div}(\phi(\|x\|)x) = \nabla\phi(\|x\|) + \phi(\|x\|)\operatorname{div}x = \phi'(\|x\|)\underset{\uparrow\, \nabla\|x\|}{\dfrac{x}{\|x\|}} \cdot x + \phi(\|x\|)\cdot \underset{\uparrow\, \operatorname{div}x = \operatorname{div}(x,y,z)}{3}$

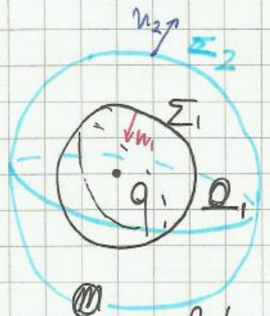
$\operatorname{div}(\phi(\|x\|)x = \phi'(\|x\|)\|x\| + 3\phi(\|x\|) = \phi'(t)t + 3\phi(t)$

$\|x\| = t$

$\phi'(t)t + 3\phi(t) \overset{?}{=} 0 \quad \forall t \qquad \dfrac{\phi'}{\phi} + \dfrac{3}{t} = 0 \qquad \dfrac{d}{dt}\left(\ln(\phi(t)) + 3\ln(t)\right) = 0$

$\ln\phi + \ln t^3 = cost \quad \ln\phi t^3 = cost \quad \phi t^3 = cost \quad \phi(t) = \dfrac{cost}{t^3}$

$\phi(\|x\|)x$ ha divergenza nulla (con $x \neq 0$) solo se $\phi(\|x\|) = \dfrac{c}{\|x\|^3}$



$\int_{\Sigma_1} E \cdot \vec{n}\, d\sigma \qquad E(x) \in C^1(\Omega_1)$ perchè non è definito in O

$\Downarrow$

non si può usare T. divergenza

Ω solido tra Σ_1 ed Σ_2, non contiene $O \Rightarrow$ T. divergenza

$\int_\Sigma E \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div} E}_{0}\, dx\,dy\,dz = 0$

$\downarrow$

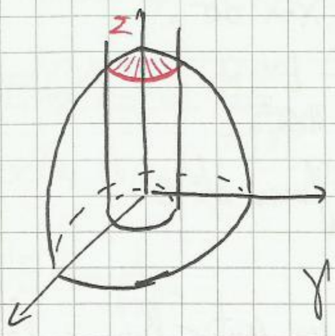
$\int_{\Sigma_1} E \cdot \vec{n}\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} E \cdot n_2\, d\sigma = 0$ se si orienta n_2 come $n_1 \rightarrow n = -n_2$

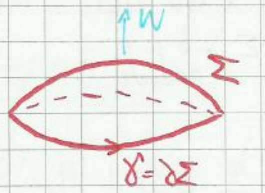
$\int_{\Sigma_1} E n_1\, d\sigma = \int_{\Sigma_2} E \cdot n\, d\sigma$ Il flusso non dipende da Σ

se Σ sfera di $R = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 108

orientata verso l'alto





$$\int_\Sigma rot F = \oint F \cdot dP$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad z^2+1=4 \quad z=\sqrt{3}$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}) \qquad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sqrt{3}, \cos t, \sin t)}_{F(\gamma)} \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = \int_0^{2\pi} \underbrace{-\sqrt{3}\sin t}_{\int_0^{2\pi}=0} + \underbrace{\cos^2 t}_{\int_0^{2\pi}=\pi} \, dt = \pi$$

Somma di 2 serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) =$ converge a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Moltiplicazione per scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \cdot \lambda = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la moltiplicazione non cambia il carattere della serie

$\hookrightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda a_n = \lim_{N\to\infty} \lambda \sum_{n=0}^{N} a_n = \lambda \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Il carattere di una serie non cambia se si modificano un numero finito di termini: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=100}^{\infty} a_k$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{99} a_n}_{\text{somma finita}} + \sum_{n=100}^{\infty} a_n$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge/diverge $\Leftrightarrow \sum_{n=100}^{\infty} a_n$ converge/diverge

Serie a termini positivi

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \ \forall n$

Teorema: una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente.

DIM

$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \qquad S_{N+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_N + a_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$

$\hookrightarrow \geq 0 \ \forall N \qquad$ La successione è crescente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 108

$\frac{\log n}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq N_0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$ converge

2) Criterio del confronto asintotico:

Data $\sum a_n, \sum b_n$ con $a_n, b_n \geq 0 \ \forall n$

se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ esiste finito e non nullo $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0 \Leftrightarrow a_n \overset{\text{equivalente}}{\sim} l b_n \right)$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

ES. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n}{3n^5+1} \qquad \cancel{\frac{n^3+2n}{3n^5}} \ \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+2n}{3n^5+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^3}{3n^5+1} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^2}$

$\Downarrow$

converge

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+e^{-\sqrt{n}}}{\log n+n^3+5} \qquad \frac{n^2+2n+e^{-\sqrt{n}}}{\log n+n^3+5} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ la serie diverge

equivalenze $(x\to 0)$
$\sin x \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$\log(1+x) \sim x$
$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$

- $\sum \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$

$\sin x \sim x \ (x\to 0) \qquad \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

- $\sum_{n=\phi}^{\infty} \left(e^{1/n}-1\right)^2 \qquad e^{1/n}-1 \sim \frac{1}{n} \quad (e^{1/n}-1)^2 \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

3) Criterio del rapporto:

Data $\sum a_n$ con $a_n > 0 \ \forall n$ supponiamo esista finito:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

- se $l < 1$ allora la serie converge
- se $l > 1$ allora la serie diverge

DIM:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$

Prendo $\varepsilon > 0$ così piccolo che $l + \varepsilon < 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 108

DIM

$(l<1)$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

$\exists\, \varepsilon>0 \,/\, l+\varepsilon<1$

Siccome $\sqrt[n]{a_n} \to l$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \le l+\varepsilon \ \forall n \ge N_0$

$a_n \le (l+\varepsilon)^n \ \forall n \ge N_0$ $\quad \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \le \sum_{n=N_0}^{\infty} (l+\varepsilon)^n$

↳ serie geometrica di ragione $l+\varepsilon<1$ $\Downarrow$ converge

Per il teorema del confronto $\sum a_n$ converge

$(l>1)$ $\sqrt[n]{a_n} \to l>1$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ $\quad a_n \ge 1 \ \forall n \ge N_0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

ES: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n} = e^{-2} < 1$ converge

OSS:

1) Se $a_n \sim b_n$ $(n\to\infty)$

$a_n^{1/n} \sim b_n^{1/n}$ $\quad a_n, b_n > 0$

2) Formula di Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

ES:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ $\quad$ criterio rapporto: $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2\cdot 2^n}{(n+1)n!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$ converge

criterio radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2^n}{n!}\right)^{1/n} = \frac{2}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{2}{n/e} = \frac{2e}{n} \to 0 < 1$ converge

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ $\quad (n!)^{1/n} \sim \left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^{1/n} = n e^{-1} \underbrace{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}_{\downarrow\, 1}$

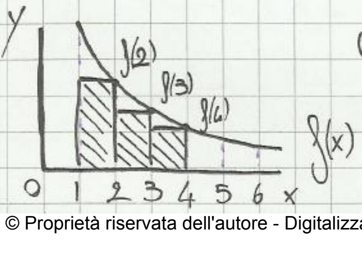
$a>0$ $\sqrt[n]{a} \to 1$ $n\to\infty$

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log n} = 1$ $\quad \left(\frac{1}{n}\log n \to 0\right)$

(5) Criterio integrale (o di Mac Laurin)

Sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua, positiva, decrescente considerando $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f(n)}_{a_n}$

allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere



area rettangoli: $1\cdot f(2)$; $f(3)$; $f(4)$

area sottesa: $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 108

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ non converge assolutamente

Teorema: Se $\sum a_n$ converge assolutamente allora è convergente

DIM:

Per ipotesi: $\sum |a_n|$ converge, si considerano le successioni ausiliarie:

$$b_n \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 \end{cases} \qquad c_n \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n < 0 \\ 0 \end{cases}$$

$a_n = b_n - c_n$ se $a_n \geq 0 \Rightarrow c_n = 0$ $a_n = b_n = a_n$

se $a_n < 0 \Rightarrow b_n = 0$ $a_n = 0 - (c_n) = -(-a_n) = a_n$

$\sum b_n \leq \sum |a_n|$

$\sum c_n \leq \sum |a_n|$ $\Rightarrow \sum b_n, \sum c_n$ convergono $\Rightarrow \sum b_n - \sum c_n$ converge

$\downarrow$

$\sum (b_n - c_n) = \sum a_n$ converge

Esercizi: serie a termini positivi

1) $\sum_0^\infty \frac{e^{\sin n}}{n^3+1}$ $\sin n \leq 1$ $e^{\sin n} \leq e^1 = e$

$\frac{e^{\sin n}}{n^3+1} \leq \frac{e}{n^3+1} \leq \frac{e}{n^3}$ converge $\Rightarrow$ la serie converge

2) $\sum_1^\infty \frac{n+2}{(n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}} \overset{?}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\frac{\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{?}{\longrightarrow} 1$ $\frac{(n+2)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+3}} \longrightarrow 1$ diverge

$\alpha = \frac{1}{2} < 1$ diverge

oppure

$n+2 \geq n+1$ $\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}} \geq \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+3}} = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

$\sqrt{n+3} \leq 2\sqrt{n}$ $n+3 \leq 4n$

$3n \geq 3$

$n \geq 1$ (V) $\frac{1}{\sqrt{n+3}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n+3}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $\frac{1}{2} < 1$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 108

Def: una serie a termini di segno qualunque si dice "semplicemente convergente" se converge ma non assolutamente.

Serie di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ serie armonica $\rightarrow$ diverge $\Rightarrow$ la serie non converge assolutamente

Criterio di Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con } a_n > 0$$

- la successione a_n è decrescente $(a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq N_0)$
- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \quad |S - S_N| < a_{N+1}$ distanza della somma parziale dalla serie

ES.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ a_n = \frac{1}{n} \text{ decrescente} \\ \cdot\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \times \text{ Leibniz converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n} n^2 \qquad a_n = e^{-n} n^2$$

$\cdot\ \lim_{n \to \infty} n^2 e^{-n} = 0$

$\cdot\ x^2 e^{-x} = f(x) \quad f'(x) = 2x e^{-x} - x e^{-x} = x e^{-x} (2 - x) < 0$

$2 - x < 0$

$x > 2$

$f(n)$ decrescente con $n \geq 2$ $(\mathbb{R})$

$n \geq 3$ $(\mathbb{N})$

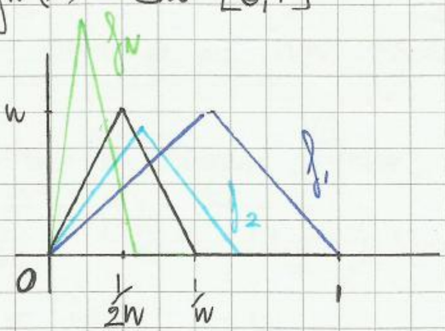
la serie converge

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ non converge $(a_n \not\to 0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 108

$f_n(x)$ su $[0,1]$



$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per x fissato $f_n \to 0$ $\forall n \geq N_0$? $\frac{1}{x}$

$f_n(x) = 0$ $[\frac{1}{n}, 1]$

$\forall x$ $f_n(x) = 0$ per $\forall n$ grande

$\forall x$ $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$ converge puntualmente su $[0,1]$ a $f = 0$ $\forall x$

$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n} n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ l'integrale non passa alla funzione limite

Convergenza uniforme

$f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che f_n converge ad f su A se:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall x \in A$ $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ NB N non dipende più da x

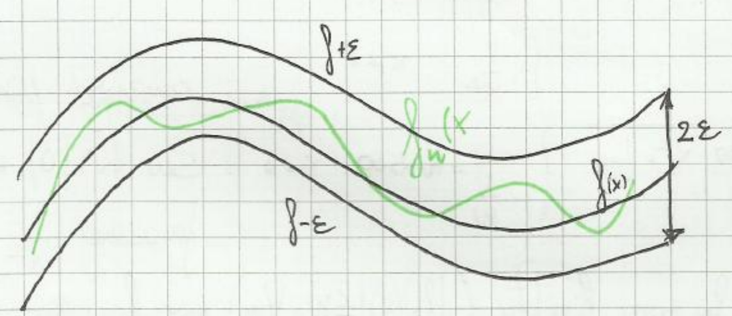
$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq N$ $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$ Il grafico di f_n sta in una striscia ampia 2ε attorno a $f(x)$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 108

$\sup |f_n(x)-f(x)| = 1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ può essere piccolo quanto si vuole

crescente su $\mathbb{R}^+$ e pari

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right) = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ non converge uniformemente

Se $A=[-R,R]$

$\sup_{x\in[-R,R]} |f_n(x)-f(x)| = \sup\left(1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right) = \lim_{x\to R}\left(1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right) = 1-e^{-\frac{R^2}{n^2}}$

$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} 1-e^{-\frac{R^2}{n^2}} = 0$ conv. uniforme

Teorema: Sia f_n una successione di funzioni convergente uniformemente ~~ad~~ f su un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$.

1) Se ogni f_n è limitata su I, anche f è limitata su I
2) Se ogni f_n è continua su I, anche f è continua su I
3) Passaggio al limite sotto al segno di integrale: Se $I=[a,b]$ e ogni f_n è integrabile su $[a,b]$ allora anche f è integrabile su I e

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)$ oppure $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

Teorema: Passaggio al limite sotto il segno di derivata

Sia f_n una successione di funzioni di classe C^1 su $[a,b]$. Se:

1) $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ su $[a,b]$
2) $f_n'(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su $[a,b]$

allora f è C^1 su $[a,b]$ e $f_n' \to f'$ uniformemente su $[a,b)$

$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 108

$$f_n'(x) = \frac{2n(1+n^2x^2)-2nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n+2n^3x^2-4n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0$$

$2n^3x^2 = 2n \quad n^2x^2 = 1 \quad x = \frac{1}{n}$ max

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

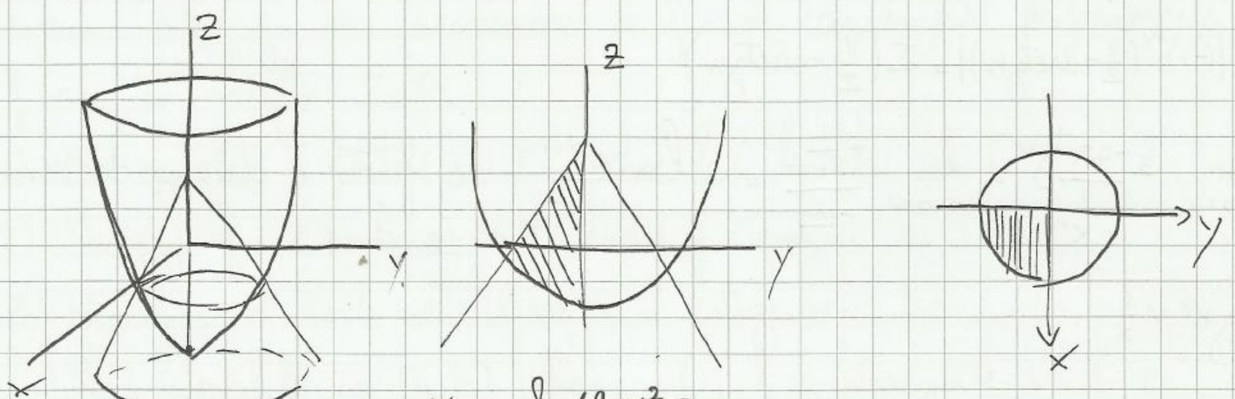
$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f_n| = \sup \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \max \frac{2nx}{1+n^2x^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup = 1 \neq 0$$ non converge uniformemente

Q32

$$f(x,y) = \frac{49}{4}(x^2+y^2) - 7 \qquad g(x,y) = 1 - 7\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0,\ y \leq 0 \quad f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$$

Vol Ω = ?



$x=0 \quad f = \frac{49}{4}y^2 - 7$

$g = 1 - 7|y|$

$$\frac{49}{4}y^2 - 7 = 1 - 7y \quad \frac{49}{4}y^2 + 7y - 8 = 0 \quad \frac{7}{4}y^2 + y - \frac{8}{7} = 0 \quad y^2 + \frac{4}{7}y - \frac{32}{49} = 0$$

$$y = \frac{-\frac{4}{7} \pm \sqrt{\frac{16}{49} + 4\frac{32}{49}}}{2} = \frac{-\frac{4}{7} \pm \sqrt{9\frac{16}{49}}}{2} = \frac{-\frac{4}{7} \pm 3\frac{4}{7}}{2} = \pm\frac{4}{7}$$

coord cilindriche:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{4/7}\int_{\frac{49}{4}\rho^2-7}^{1-7\rho} \rho \, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{4/7}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{49}{4}\rho^2-7}^{1-7\rho} d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^{4/7}(1-7\rho)^2 - \left(\frac{49}{4}\rho^2-7\right)^2 d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{4/7} 1 + 49\rho^2 - 14\rho - \left(\frac{2401}{16}\rho^4 + 49 - \frac{343}{2}\rho^2\right) = \frac{\pi}{4}\int_0^{4/7} 1 - 48 - 14\rho - \frac{2401}{16}\rho^4 + \frac{441}{2}\rho^2 = \ldots$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 108

Il passaggio al limite per convergenza uniforme permette di portare "al limite" proprietà quali limitatezza, continuità, gli integrali.
Per esempio se $\forall f_n$ è continua su A e $\sum f_n$ converge uniformemente su A a $f(x)$ allora:

- S_N è continua $\forall N$
- $S_N \to S$ uniformemente
- S è continua per il teorema sui limiti uniformi di f continua
- $\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme
Data $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, supponiamo esistano i numeri M_n $\forall n$ tali che:

① $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$

② $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente e assolutamente su A

DIM.

$\sum f_n$ converge assolutamente:
$\sum |f_n(x)| \leq M_n$ che converge per ipotesi
x il criterio del confronto converge anche $\sum |f_n(x)|$, quindi $\sum f_n$ converge assolutamente.

$\sum f_n$ converge uniformemente:

$$\lim_{N \to \infty} \sup |S(x) - S_N(x)| = 0$$

noto perchè conv. ~~perché~~ assolutamente

$$S(x) - S_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$

$$|S(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$$ non dipende più da x

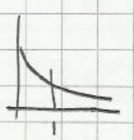
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 108

Verificare la convergenza uniforme su $[1,+\infty)$ di $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$

$\sup_{x\in[1,+\infty)} e^{-nx} = \max_{x\in[1,+\infty)} e^{-nx} = e^{-n}$ $\quad \|e^{-nx}\|_\infty = e^{-n}$ su $[1,+\infty)$

$\downarrow$ sempre >0



$\sum_{n=0}^{\infty} \|e^{-nx}\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \sum (e^{-1})^n$ ragione $e^{-1}<1 \Rightarrow$ converge

la serie converge totalmente a $\frac{1}{1-e^{-x}}$ su $[1,+\infty)$.

se $A(0,+\infty)$

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$ su $(0,+\infty)$ $\quad \lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty$

su A $S(x)$ non è limitata ($\sup = +\infty$) mentre tutte le f_n sono limitate su A ($\sup e^{-x} = 1$) $\Rightarrow$ non c'è convergenza uniforme in A

Serie di potenze

È una serie di funzioni del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (centrata in x_0)

Osservazione: Ogni serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x=0$ ad a_0

Lemma: Se $\sum a_n x^n$ converge in $x_1 \neq 0$ allora converge assolutamente nell'intervallo $(-|x_1|,+|x_1|)$.

DIM.

× Ipotesi: la serie converge in x_1

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n < \infty$

$\hookrightarrow$ serie numerica

$a_n x_1^n \to 0$ per $n\to\infty$

allora $a_n x_1^n$ è limitata ed esiste M tale che $|a_n x_1^n| \le M$ $\forall n$

Prendiamo $x \in (-|x_1|,|x_1|)$ e verifichiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge:

$|a_n x^n| = |a_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| \le M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ termine generale di una serie geometrica di $r = \left|\frac{x}{x_1}\right|$

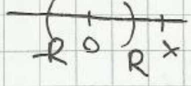
$\left|\frac{x}{x_1}\right|<1 \Rightarrow M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ converge $\Rightarrow$ x confronto $\sum |a_n x^n|$ converge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 108

Per Weierstrass converge uniformemente in $[-k, k]$

la serie non converge su $|x|>R$:

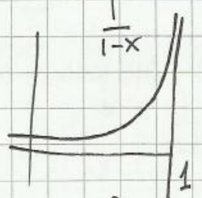


se convergesse in $|x|>R$, $R \geq |x| \Rightarrow$ non converge

•) $R=+\infty$ simile al precedente.

ES.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è la serie geometrica con $R=x$, converge (se $|x|<1$) in $\frac{1}{1-x}$



il raggio di convergenza è $R=1$.

Converge assolutamente in $(-1,1)$

converge uniformemente in $[-k,k]$ $\forall k<1$

non è limitata vicino a 1

Calcolo di R.

Formula della radice

data $\sum_0^{\infty} a_n x^n$, si suppone esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ $(l \geq 0)$

allora $R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l=0 \\ 1/l & \text{se } l>0 \\ 0 & \text{se } l=+\infty \end{cases}$ "$R=\frac{1}{l}$"

DIM.

$\sum |a_n x^n|$ si applica il criterio della radice (x fisso)

$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|\, x^n} = \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\downarrow \text{ x ipotesi } l} \cdot |x| \to l|x|$

la serie $\sum |a_n x^n|$ converge per il criterio della radice quando $l|x|<1$

$|x|<\frac{1}{l}$

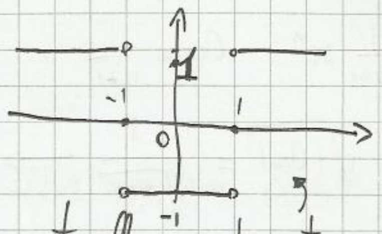
Formula del rapporto

se esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora "$R=\frac{1}{l}$"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 108

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x\in[0,1) \\ 0 & x=1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$



non c'è convergenza uniforme in qualunque intervallo contenente 1

$0 \le x < 1$ o $[0,1)$

$$\lim f_n(x) = f(x) = -1 \qquad |f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}+1\right| = \left|\frac{x^{2n}-1+x^{2n}+1}{x^{2n}+1}\right| = \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1}$$

x comodità si prende $a<1$ $[0,a]$

$$\sup_{x\in[0,a]} \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1} \le \sup_{x\in[0,a]} \frac{2a^{2n}}{1} = 2a^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,a]} \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1} \le \lim_{n\to\infty} 2a^{2n} \underset{a<1}{=} 0$$

c'è convergenza uniforme in $[0,a]$ $a<1$

Proposizione

se $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente su I

prendiamo $x_n \to x \in I$ allora $f_n(x_n) \to f(x)$

$$[0,1) \qquad |f_n(x)-f(x)| = \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1}$$

se fosse $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1)$

allora $|f_n - f| \to 0$ uniformemente su $[0,1)$

se trovo una successione $x_n \to x \in [0,1)$ ma tale che $|f_n(x_n) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

allora non c'è convergenza uniforme

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{2x^{2n}}{2^{2n}+1} \qquad x_n \to 1 \quad \text{es: } x_n = 1-\frac{1}{2n} \to 1$$

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{2n}\right) - f\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right| = \frac{2\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}+1} \to \frac{2e^{-1}}{e^{-1}+1} \neq 0$$

non c'è convergenza uniforme su $[0,1)$

per $x>1$ $\quad f_n(x) \to 1$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}-1\right| = \left|\frac{x^{2n}-1-x^{2n}+1}{x^{2n}+1}\right| = \left|\frac{-2}{x^{2n}+1}\right| = \frac{2}{x^{2n}+1}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 108

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$R = \sup \{ x \in [0, +\infty) \ / \ \sum a_n x^n \text{ converge} \}$

La serie converge in $(-R, R)$ assolutamente, uniformemente in $[-K, K]$ con $K < R$.

$R^{-1} = \lim \sqrt[n]{a_n}$

Teorema di Abel

Se $\sum a_n x^n$ ha raggio di convergenza R allora:

- Se converge anche in R allora la serie converge uniformemente in $[-K, R]$
- Se converge in $-R$ allora la serie converge uniformemente in $[-R, K]$
- Se converge in $\pm R$ allora la serie converge uniformemente in $[-R, R]$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \qquad = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n}} = e^{\lim \frac{1}{n+1}} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1 \qquad R = \frac{1}{\ell} = 1$

se $x = 1$ $\quad \sum \frac{1}{n+1}$ diverge

se $x = -1$ $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n+1} \to \sum (-1)^n a_n \qquad a_n = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad n \to \infty$

a_n decrescente $a_n > a_{n+1}$

x Leibniz la serie converge

L'insieme di convergenza è $[-1, 1)$

x il teorema di Abel c'è convergenza uniforme in $[-1, K]$ $\forall K < 1$

Somma di serie di potenze

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Def: si definisce la serie somma come $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$

Proprietà: se $\sum a_n x^n$ ha raggio R_1 e $\sum b_n x^n$ ha raggio R_2

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 108

ES.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \qquad a_n = 1 \ \forall n$$

$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

successione geometrica ragione $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) x^n$$

Proprietà: Se $\sum a_n x^n$ ha raggio R_1 e la serie $\sum b_n x^n$ ha raggio R_2 allora il prodotto alla Cauchy ha raggio $R \geq \min(R_1, R_2)$

se $S(x) = \sum a_n x^n$ e $T(x) = \sum b_n x^n$

$\sum c_n x^n = S(x)\,T(x)$

Integrazione termine a termine di una serie di potenze

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ con raggio R allora la somma della serie $S(t)$ è definita su $(-R,R)$, è continua su $(-R,R)$ e vale $\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

$$\int_0^x \sum a_n t^n = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \int_0^x \sum a_n t^n = \sum \int_0^x a_n t^n \qquad \int_0^x \sum a_n t^n$$

la serie $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ha ancora raggio R.

ES

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0} (-t)^n \qquad R=1$$

$x \in (-1,1)$ $\quad \int_0^x (-t)^n$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

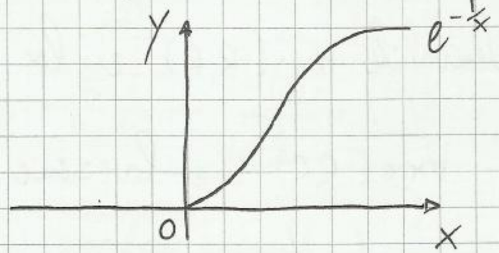
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 108

Se la serie di Taylor ha raggio R>0 è vero che la serie converge a $f(x)$? ($\Rightarrow$ in generale non vale)

ES.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



f è C^∞.

[Se f è continua in 0, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\lim_{x\to 0} f'(x) = l$ allora f è derivabile in 0].

f è derivabile in 0:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \Big(\underbrace{\lim_{x\to 0^-} f'(x)}_{0} = 0 \ \cup \ \underbrace{\lim_{x\to 0^+} f'(x)}_{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} = 0\Big) \Rightarrow \exists\, l = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile e $f'(0) = 0 \Rightarrow f$ è C^1

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow f^n(0) = 0 \ \forall n$$

Serie di Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 + 0x + 0\frac{x^2}{2} + \ldots$

$R = \infty$ ma $f(x) = \sum \frac{0}{n!} x^n = 0 \ \forall x$ converge solo per $x<0$

Def. Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto e $x_0 \in I$, sia $f: I \to \mathbb{R}$ C^∞.
Si dice che f è analitica in x_0 se la sua serie di Taylor centrata in x_0 converge in un intorno di x_0 alla funzione f.
Se f è analitica in ogni punto di I si dice che f è analitica su I.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 108

Es. Sviluppare in serie di Taylor.

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-8x+12} = \frac{x+2}{(x-6)(x-2)}$$

$$\frac{x+2}{(x-6)(x-2)} = \frac{A}{(x-6)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{(x-2)A + B(x-6)}{(x-6)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 6B}{(x-6)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-6B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{x-6} - \frac{1}{x-2}$$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x} \quad R=1 \qquad \frac{2}{x-6} = \frac{2}{6}\frac{1}{\frac{x}{6}-1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{6}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n$$

analogamente $-\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3}\frac{1}{6^n}\right)x^n \qquad \cancel{R=6} \quad R=2$$

$$\sum\left(\frac{x}{6}\right)^n \quad \left|\frac{x}{6}\right|<1 \to |x|<6 \Rightarrow R=6$$

La serie somma ha raggio $= \min(2,6) = 2$

$$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}} \overset{\text{Hopital}}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

Esercizi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-n^2}{n5^n}(x-2)^n \qquad x-2=t \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-n^2}{n5^n}t^n$$

Raggio: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{4^n-n^2}{n5^n}} = \sqrt[n]{\frac{4^n\left(1-\frac{n^2}{4^n}\right)}{5^n n}} = \frac{4}{5}\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{n}{4^n}} = \frac{4}{5}\frac{\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{4^n}}}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, $\quad \sqrt[n]{n} \to 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4}{5} \qquad R=\frac{5}{4} \qquad |t|<\frac{5}{4} \qquad -\frac{5}{4}<t<\frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{4}<x<\frac{13}{4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 108

Tuttavia c'è convergenza uniforme su $[-a,a]$ $\forall a>0$

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

$$\left|-\frac{8x^2}{4+n}+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{e^{3nx^2}}\right)\right| \le \frac{8x^2}{4+n}+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{e^{3nx^2}}\right)$$

$2+1 \downarrow \log 3$

$e^{3nx^2}\ge 1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad 2\cdot\frac{1}{e^{3nx^2}} \le 1\cdot 2 \Rightarrow \log\left(1+\frac{2}{e^{3nx^2}}\right) \le$

$$\frac{1}{n}\log\left|1+\frac{2}{e^{3nx^2}}\right| \le \frac{1}{n}\log 3 \qquad x\in[-a,a]$$

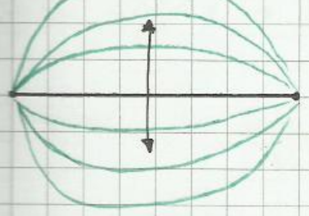
$$\left|-\frac{8x^2}{4+n}+\frac{1}{n}\log\left|1+\frac{2}{e^{3nx^2}}\right)\right| \le \frac{1}{n}\log 3+\frac{8x^2}{4+n} \qquad \forall x\in[-a,a]$$

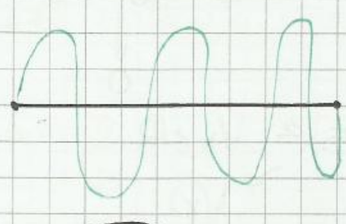
$$\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(-\frac{8a^2}{4+n}+\frac{1}{n}\log 3\right) \le \frac{8a^2}{4+n}+\frac{1}{n}\log 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

se $x\in[-a,a]$ non è vera su $\mathbb{R}$.

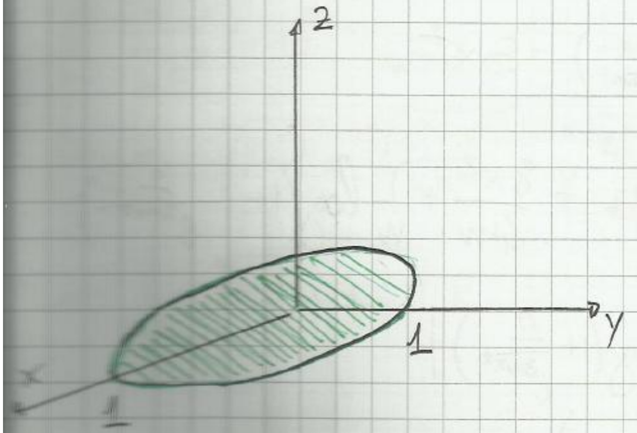
VIBRAZIONI DI UNA MEMBRANA CIRCOLARE

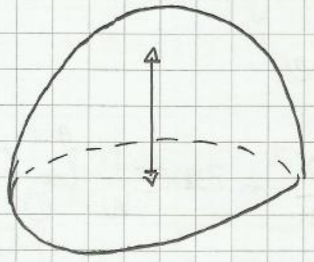
Filo:

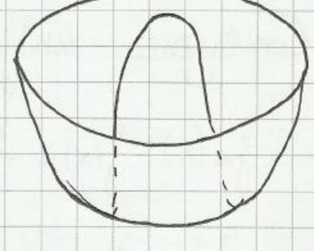


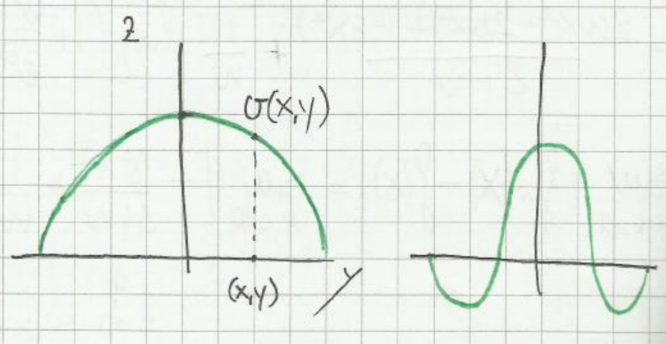


Membrana









© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 108

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a''(\rho)}{a(\rho)} + \frac{1}{\rho}\frac{a'(\rho)}{a(\rho)} \qquad \forall t \quad \forall \rho \leq 1$$

l'equazione è valida solo se entrambi i membri sono costanti

$\Rightarrow \exists K$ tale che: $\frac{T''}{T} = K$ e $\frac{a''}{a} + \frac{1}{\rho}\frac{a'}{a} = K$

$T'' = KT$ per considerazioni fisiche K è <0 altrimenti si otterrebbero soluzioni esponenziali (e^{Kt}) che rappresentano vibrazioni crescenti.

$K = -\lambda^2$

$T'' + \lambda^2 T = 0$

$T(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t) = A\cos(\lambda t + \phi)$

$v(\rho, t) = T \cdot a = A\cos(\lambda t + \phi) \cdot a(\rho)$ profilo

componente oscillatoria

Trovare $a(\rho)$:

$\frac{a''}{a} + \frac{1}{\rho}\frac{a'}{a} = -\lambda^2 \qquad a'' + \frac{1}{\rho}a' + \lambda^2 a = 0$

$a(\rho) = \alpha(\lambda\rho) \qquad \alpha'' + \frac{1}{\rho}\alpha' + \alpha = 0$

Si riscrive con "variabili più classiche" e si moltiplica per ρ:

$\alpha \to u \qquad x u''(x) + u'(x) + x u(x) = 0$

$\rho \to x$

Equazione differenziale 2° ordine a coefficienti non costanti nota come Equazione di Bessel di 1ª specie e di ordine 0.

Si cerca una soluzione in serie di potenze:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 108

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n}(n!)^2} \quad \forall n \geq 0$$

la funzione di Bessel 1^a specie ordine 0 $J_0(x)$:

$$J_0(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n!)} x^{2n}$$

raggio di convergenza

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad R = \frac{1}{\ell} = +\infty > 0 \text{ come supposto}$$

$$U(\rho, t) = A\cos(\lambda t + \phi) \cdot J_0(\rho)$$

Esercizi

① $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{2-n} x^n$

• Raggio:

$$a_n = \frac{\log(n+1)}{2-n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log(n+2)}{2-(n+1)} \cdot \frac{2-n}{\log(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{\to 1} = 1 \qquad R = 1$$

Convergenza assoluta in $(-R, R)$, uniforme in $[-r, r]$ $\forall r < 1$

• Estremi:

$$x = +1 \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{2-n} = -\sum \frac{\log(n+1)}{n-2}$$

$$\frac{\log(n+1)}{n-2} \geq \frac{1}{n-2} \Rightarrow \sum \frac{\log(n+1)}{n-2} \geq \sum \frac{1}{n-2} \Rightarrow \text{serie armonica}$$

la serie diverge a $-\infty$ per $x = 1$ $\Leftarrow$ diverge

$$x = -1 \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{2-n} (-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{2-n} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 108

$3x < \log_2 9 \quad x < \frac{1}{3}\log_2 9$

insieme di convergenza $(-\infty, \frac{1}{3}\log_2 9)$

· Estremi

se $x = \frac{1}{3}\log_2 9 \rightarrow 2^{3x} = 9$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2^{3x})^n}{3^{2n}+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{3^{2n}+1}$$

$$a_n = \frac{9^n}{3^{2n}+1} = \frac{9^n}{9^n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0 \times \text{Leibniz diverge}$$

Intervallo di convergenza $(-\infty, \frac{1}{3}\log_2 9)$

non è simmetrico perchè la serie in x non è una serie di potenze.

---

3) Q102

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{2n+(-1)^n} \qquad t = \sin x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n+(-1)^n} \qquad a_n = \frac{1}{2n+(-1)^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{2n+(-1)^n}} = 1 \qquad R = 1$$

positivo

t converge in $(-1,1)$

estremi:

$$t=1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+(-1)^n} \quad \frac{1}{2n+(-1)^n} \sim \frac{1}{2n} \Rightarrow \text{diverge}$$

$$t=-1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+(-1)^n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

a_n

a_n decrescente?

se n è pari: $a_n > a_{n+1}$

$$\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{vero}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 108

Convergenza su $[0,R]$

$$\sup_{[0,R]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{[0,R]} \frac{5x^4}{6x^2+18n^2}$$

$$\frac{5x^4}{6x^2+18n^2} \le \frac{5R^4}{6x^2+18n^2} \le \frac{5R^4}{18n^2}$$

$$\sup_{x[0,R]} |f_n(x)-f(x)| \le \frac{5R^4}{18n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ convergenza uniforme in $[-R,R]$ $\forall R<+\infty$

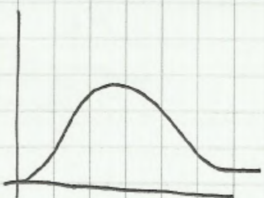
---

(5) Serie di funzioni Q 103

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}$$

$\sup_{x\in A} |f_n(x)|$ a_n Weierstrass: se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n$ converge totalmente su A

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}$$



$$\left.\begin{array}{l} f_n(0)=0 \\ f_n(x)>0 \\ \lim_{x\to\infty} f_n(x)=0 \end{array}\right\} \exists \text{ massimo}$$

f_n sono pari

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = \max_{x\in(0,+\infty)} f_n(x) \ge f_n(1) = \frac{1^n}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2} \quad \forall n$$

Non si può applicare Weierstrass perché:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup \left|\frac{x^n}{1+|x|^{2n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \max |f_n(x)| \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty$$

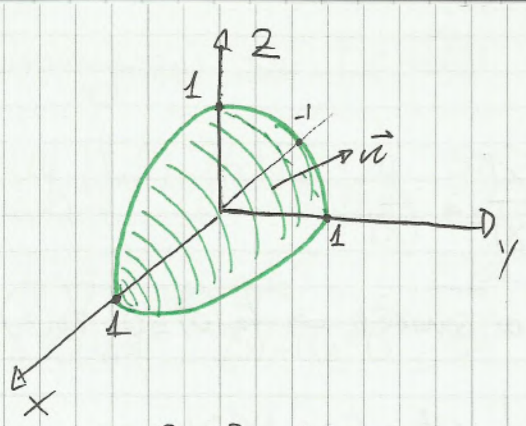
Insieme di convergenza puntuale?

$a_n = f_n(x)$ x fissato

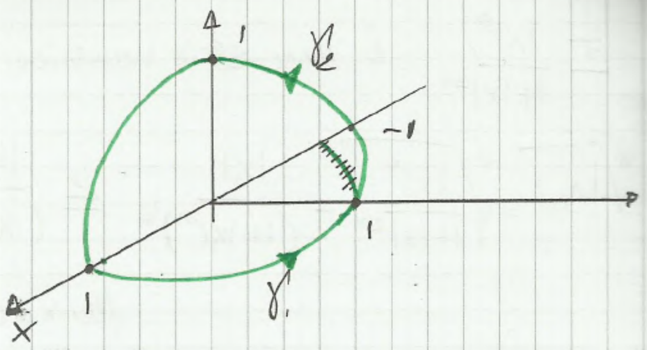
$\hookrightarrow \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 108

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 108



$\Longrightarrow$



$\gamma_1 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$ semicirconferenza

$\gamma_2 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=0 \\ z\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ z\geq 0 \end{cases}$ semicirconferenza

$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin t, 0) \quad t\in[0,\pi]$

$\gamma_2(t) = (-\cos(t), 0, \sin t) \quad t\in[0,\pi]$

parte da $x=-1$

$\int_\Sigma \text{rot} F_1 \, d\sigma = \int_{\gamma_1\gamma_2} F_1 \, dP$

$F_1 = (y+z, z+x, x+y)$

$F_1(\gamma_1(t)) = (\sin t, \cos t, \cos t + \sin t)$

$\gamma_1' = (-\sin t, \cos t, 0)$ $\quad \int_0^\pi \sin^2 t = \int_0^\pi \cos^2 t$

$\int_{\gamma_1} F dP = \int_0^\pi -\sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 0$

$F_2(\gamma_2(t)) = (\sin t, \sin t - \cos t, -\cos t)$

$\gamma_2' = (\sin t, 0, \cos t)$

$\int_0^\pi \sin^2 t - \cos^2 t = 0 \qquad \int_\Sigma \text{rot} F_1 \, d\sigma = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 108

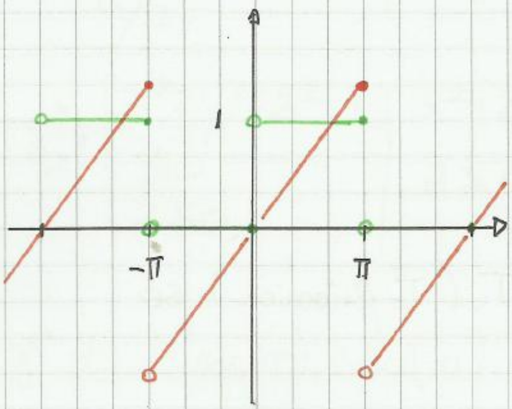
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 108

Somme e differenze di polinomi trigonometrici sono polinomi trigonometrici.
Prodotti di polinomi trigonometrici sono polinomi trigonometrici

$$\cos x \cdot \cos x = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \rightarrow \text{pol. trigonometrico}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

$$\cos kx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\cos\big((k+n)x\big) + \frac{1}{2}\cos\big((k-n)x\big)$$



onda a dente di sega
onda quadra

funzioni 2π-periodiche che non sono polinomi trigonometrici (non continue).

Integrali di funzioni trigonometriche

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ \pi & \text{se } k = n \end{cases}$$

2. $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ \pi & \text{se } k = n \end{cases}$$

3. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx = 0 \quad \forall k,n \in \mathbb{N}$$

DIM 2: $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x\,dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

se $n = k$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos 2nx}_{\to 0} + \underbrace{\cos 0}_{\to 1}\,dx = \frac{1}{2}2\pi = \pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 108