



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1559A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Bobba

MATERIA: Fisica I. Prof.Montorsi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# RIASSUNTI FISICA I

OGGETTO PUNTI FORTE = molto piccolo rispetto altre grandezze del problema

GRANDEZZE FONDAMENTALI SI

- lunghezza (m)
- massa (kg)
- tempo (sec)

$$\frac{\text{km/h}}{3,6} \rightarrow \text{m/sec}$$

$$\text{m/sec} \cdot 3,6 \rightarrow \text{km/h}$$

## CINEMATICA

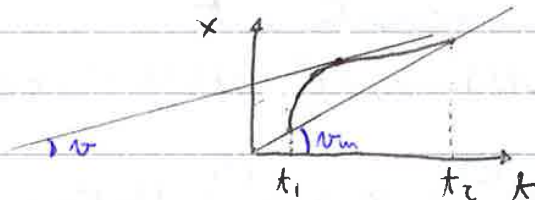
VELOCITÀ MEDIA =  $\frac{\text{spostamento}}{\text{tempo impiegato o nel percorso}}$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{m/sec}$$

nel grafico  $Otx$  è coeff. angolare retta  $\Delta x = v_m \Delta t$ , secante  $x_1$  e  $x_2$

VELOCITÀ ISTANTANEA =  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v = \frac{dx}{dt}$

nel grafico  $Otx$  è coeff. ang. retta tangente in quel  $t$



ACCELERAZIONE MEDIA =  $\frac{\text{cambiamento di velocità}}{\text{tempo impiegato a variare}}$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{m/sec}^2$$

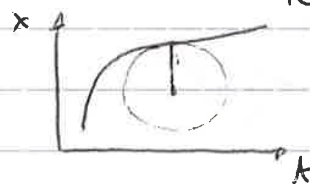
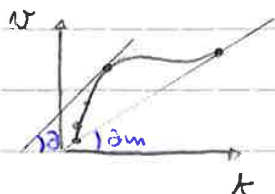
nel grafico  $Ovt$  è pendenza retta  $\Delta v = a_m \Delta t$ , secante  $v_1$  e  $v_2$

ACCELERAZ. ISTANTANEA =  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v'(t)}{dt} = \frac{d(x'(t))}{dt(dt)} = \frac{d''x(t)}{dt^2}$

nel grafico  $Ovt$  è pendenza retta tangente  $v$

nel graf.  $Oxt$  è curvatura in quel  $t$ :  $a \propto \frac{1}{R}$

$$a = \frac{d''x(t)}{dt^2}$$



$$v_F = \sqrt{2gh}$$

$$t_{caduta} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

dependono solo dall'la iniziale

$$\begin{cases} v_F = v_0 - gt_F; & t_F = \frac{v_F - v_0}{-g} = \frac{\sqrt{2gh} - v_0}{-g} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = y_0 + v_0 y \frac{v_F - v_0}{-g} - \frac{1}{2} g \frac{(v_F - v_0)^2}{(-g)^2}; & v_F^2 - v_0^2 = -2g(y_F - y_0); \end{cases}$$

$$v_F = -\sqrt{2gh}$$

$$v_F = \sqrt{2gh + v_0^2} \quad \text{se } v_0 \neq 0$$

### VECTORE POSIZIONE

segmento che unisce punti dello spazio con origine

verso dello spostamento  $\equiv$  direzione del vett.

$$\text{valore dello spostamento} = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

le componenti di  $v$  e  $a$  in una direzione indipendenti da comp. altre direz.

### MOTO PARABOLICO

direzione x MRU  $\Rightarrow a_x = 0$  e  $v_x$  cost

direzione y MRUA con  $a_{cost} = -g$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\vec{r} = \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ANGOLO DI GITTATA = angob.  $\varphi$  di cui  $\vec{v}_0$  è inclinata rispetto x

$$v_{0x} = v_0 \cos \varphi$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \varphi$$

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}(x - x_0)}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2} \quad \text{con } \varphi \rightarrow$$

$$y - y_0 = t g \varphi (x - x_0) - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{(v_0 \cos \varphi)^2}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \end{cases}$$

$$y - y_0 = v_{0y} \frac{(x - x_0)}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2} = \frac{v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi} (x - x_0) - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{(v_0 \cos \varphi)^2}$$

**MOTO CIRCOLARE UNIFORME**

$$v = 0 \text{ cost} \times t \quad v = \frac{dR}{dt} \text{ con } R \text{ cost} \quad d = 0$$

$$\omega \text{ cost}$$

$$|a_c| \text{ cost, } v \text{ varia di res.}$$

**PERIODO** = tempo dopo cui moti si ripete uguale

$$\Delta \text{ rivoluzione} = 2\pi; \quad T = \frac{t}{2\pi} \quad \boxed{\text{sec}}$$

**FREQUENZA** = no di rivoluzioni nel tempo

$$f = \frac{2\pi}{t} \quad \boxed{1/\text{sec}}$$

$$\omega = 2\pi f; \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] = 2\pi \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right] = \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

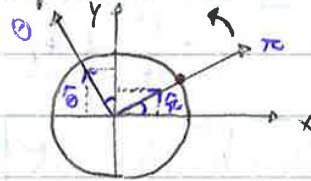
**COORDINATE POLARI**

assi polari mantengono al variare del vett. pos.  $\vec{r}$

$$\vec{r} = R \hat{r}$$

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$



$$\vec{v} = R\omega \hat{\theta}; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = \frac{d}{dt}(R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}) =$$

$$= R \left( \frac{d\cos\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \frac{d\sin\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \right) = R\omega (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j})$$

$$\vec{a} = a_t \hat{\theta} + a_r \hat{r}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} R\omega \hat{\theta} = R \frac{d(\omega \hat{\theta})}{dt} = R \left( \frac{d\omega}{dt} \hat{\theta} + \omega \frac{d\hat{\theta}}{dt} \right) =$$

$$= R \left( \frac{d\omega}{dt} \hat{\theta} + \omega \frac{d}{dt} (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \right) =$$

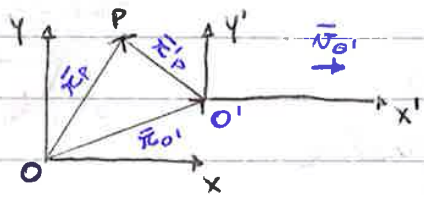
$$- \omega \cos\theta \hat{i} - \omega \sin\theta \hat{j}$$

$$- \omega$$



Dim. sistema  $Oxy$  fisso

sistema  $O'x'y'$  mobile con  $\vec{v}_{O'}$  misurato da  $O$  costante



$\vec{r}_{O'}$  vett. posiz. di  $O'$  misurato da  $O$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P$$

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P$$

### SE NON INERZIALI

sistema  $Oxy$  fisso

sistema  $O'x'y'$  mobile

ACCELERAZ. DI TRASCUANTAMENTO =  $\vec{a}_{O'}$  di  $O'$  rispetto  $O$

FORZA APPARENTE: misurate da  $O$ , dovuta ad  $\vec{a}_{O'}$

$O$  ed  $O'$  misurano acceleraz. diverse, quindi  $F$  diverse

velocità diverse:  $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P$

posizioni diverse:  $\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P$

TRASLAZIONE:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P)}{dt} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P \rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P$$

$$\vec{F}_P = \vec{F}_{O'} + \vec{F}'_P : m\vec{a}_P = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'_P$$

ROTAZIONE:

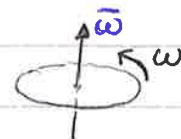
regola di Poisson

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

Se  $O'$  ruota, quindi misuriamo i suoi vettori di riferimento, da considerarsi in quel  $t$

ETTORE VEL. ANG  $\vec{\omega}$ : direz.  $\perp$  piano rotaz.

verso mano dx



$$r' = x'i + y'j$$

$$\frac{dr'}{dt} = \left[ \frac{dx'}{dt} i \right] + x' \frac{di}{dt} + \left[ \frac{dy'}{dt} j \right] + y' \frac{dj}{dt} =$$

$$= \bar{v}' + x'(\omega_1 i) + y'(\omega_1 j) = \bar{v}' + \omega_1 (x'i + y'j) = \bar{v}' + \omega_1 r'$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0' + \bar{v}' + \omega_1 r'$$

$$a = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_0'}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} + \frac{d(\omega_1 r')}{dt} =$$

$$a_0' + \frac{d(v_x i + v_y j)}{dt} + \frac{d\omega_1 r'}{dt} + \omega_1 \frac{dr'}{dt} =$$

$$a_0' + \left[ \frac{dv_x}{dt} i + v_x \frac{di}{dt} + \frac{dv_y}{dt} j + v_y \frac{dj}{dt} \right] + \frac{d\omega_1 r'}{dt} + \omega_1 (v' + \omega_1 r')$$

$$a_0' + \bar{a}' + \omega_1 (v_x i + v_y j) + \frac{d\omega_1 r'}{dt} + \omega_1 (v' + \omega_1 r')$$

$$a_0' + a' + \omega_1 \bar{v}' + \frac{d\omega_1 r'}{dt} + \omega_1 \bar{v}' + \omega_1 (\omega_1 r')$$

$$a_0' + a' + 2\omega_1 \bar{v}' + \frac{d\omega_1 r'}{dt} + \omega_1 (\omega_1 r')$$

$$a_0' + a' - \bar{a}' + \frac{d\omega_1 r'}{dt} = \bar{a}' + \omega_1 r'$$

ROTOTRASLAZIONE:

$$\bar{v} = \bar{v}_{o'} + (\bar{\omega} \wedge \bar{r}') + \bar{v}'$$

$\downarrow$  xk trasla
 $\downarrow$  xk moto

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{o'}}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \wedge \bar{r}')}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{a}_{o'} + \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}' + \bar{\omega} \wedge \frac{d\bar{r}'}{dt} \right) + \frac{d\bar{v}'}{dt}$$

$$= \bar{a}_{o'} + \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}' + \bar{\omega} \wedge (\bar{v}' + \bar{\omega} \wedge \bar{r}') \right) + \frac{d\bar{v}'}{dt}$$

$\downarrow$

$$\left( \frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{a}' + \bar{\omega} \wedge \bar{v}' = \bar{a}' + \bar{\omega} \wedge \bar{v}' \right)$$

$$= \bar{a}_{o'} + \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}' + \bar{\omega} \wedge \bar{v}' + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}') \right) + \bar{a}' + \bar{\omega} \wedge \bar{v}'$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{o'} + \bar{a}' + \bar{a}_{cor} + \bar{a}_{cf} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}'$$

DINAMICA

leggi di Newton

- I. un corpo in assenza di forze esterne ( $\Rightarrow \Sigma \bar{F}_{est} = 0$ )  
 permanece nel suo stato di quiete o MRU in  $\forall SRI$
- II. per ogni oggetto puntiforme  $\bar{R} = \Sigma \bar{F} = m\bar{a}$   $kg \cdot m/sec^2 = N$   
 VETTORE RISULTANTE  $\bar{R}$  = somma vettoriale di tutte le forze agenti  
 se  $\bar{F}_{cost} \Rightarrow \bar{a}_{cost}$   
 se corpo fermo  $\Rightarrow \Sigma \bar{F} = 0$
- III. principio di azione-reazione  
 ogni corpo esercita su un altro corpo una forza uguale  
 in modulo, opposta in verso.  $F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$   
 Si genera movimenti se forze uguali ma su corpi con  
 masse diverse.

MASSA proprietà costante del corpo, non dipende da "influenze esterne"  
 FORZA l'influenza esterna



origine macroscopica: attrito tra superfici

microscopica: interacc. elettrostatiche tra atomi

superfici mult. aspre o mult. liscie  $\Rightarrow$  molto attrito  $\times$  se si formano + legami

**ATTRITO DINAMICO** se corpi in mot. relativo

$$\vec{F}_d = \mu_d \vec{N}$$

$\mu_d$ : coeff. attrito dinamico

empiricamente, dipende da materiale, adimensionato

**ATTRITO STATICO** se corpi in quiete relativa

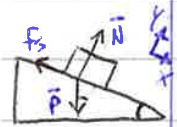
non si muove  $\rightarrow$  qnd corpo fermo

e  $\vec{F}_s \max \rightarrow$  qnd corpo inizia muoversi  $\rightarrow$  diventa  $\vec{F}_d$

$$\vec{F}_s \max = \mu_s \vec{N}$$

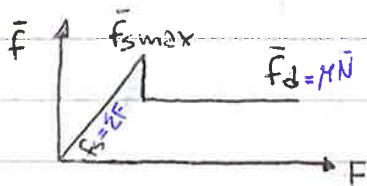
$$\text{in generale } \vec{F}_s = \Sigma \vec{F}$$

$$\mu_s = \tan \theta : \begin{cases} -f_s + mg \sin \theta = 0 \\ N - mg \cos \theta = 0 \end{cases} ; \quad -\mu_s mg \cos \theta = -mg \sin \theta$$



$\mu_s > \mu_d \Rightarrow \vec{F}_s \max > \vec{F}_d$ : altrimenti non si muoverebbe

stato fermi  $\Rightarrow$  attrito + legami tra atomi



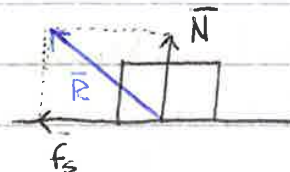
$\vec{F}_s$  aumenta se aumenta  $F$

$\vec{F}_d$  costante  $\forall F$ , dipende da  $N$

**FORZA VINCOLARE**

forza risultante da  $\vec{F}$  attrito con comp.  $x$

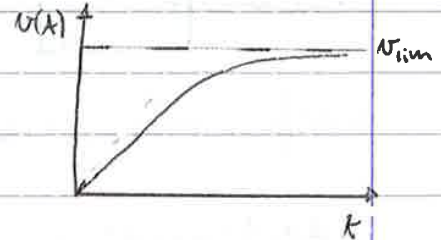
$\vec{N}$  con comp.  $y$



$v(t) = v_{lim} \Rightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{mg}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_{lim} (1 - \frac{1}{e^{\infty}}) = v_{lim}$$

all'inizio dipendenza lineare di  $v(t)$  dal  $t$   
 con  $t \rightarrow +\infty$   $v(t) \rightarrow v_{lim}$  ma si avvicina



**Attrito viscoso A GRANDE VELOCITA'**

$$b = \frac{1}{2} C_p A$$

$C$  = coeff. aerodinamico  $\rightarrow$  corpo piccolo  $\Rightarrow C$  piccolo

$\rho$  = densità del fluido  $\rightarrow \rho$  alta  $\Rightarrow \bar{F}_v$  alto

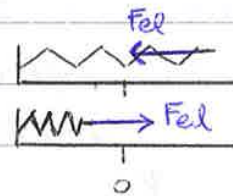
$A$  = "sezione efficace" = max superf  $\perp v \rightarrow A$  grande  $\Rightarrow \bar{F}_v$  grande

$$\bar{F}_v = \frac{1}{2} C_p A v^2$$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg \cdot \tau}{\frac{1}{2} C_p A}}$$

**FORZA ELASTICA (ORIZZONTALE  $x_{eq} \equiv x_{rip}$ )**

a contatto, si oppone all'allungamento  
 o alla compressione della molla  
 rispetto la pos. di riposo



"forza di richiamo" = tende a tornare nella cond. iniziale.  
 per il forza di richiamo vale:

legge di Hooke  $F(x) = -k \Delta x$

1° termine sviluppo di Taylor di  $F(x)$   
 $k$  costante elastica, N/m

**EQUAZIONE DEL MOTO ARMONICO**

molla con attaccata una massa:  
 se molla allungata (ma attriti) massa oscilla

se invece in oscilla → mot armonico:

$$-\frac{k}{m}x + mg = ma; \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

se la forza è costante oscilla come la molla orientabile  
 x oscilla attorno posizione di equilibrio, per riportare equaz.  
 alla pos. eq da considerare  $y_{eq} - y_{rip}$ :

$$y(t) - y_{eq} = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

### OSCILLAZIONI SMORZATE

aggiunto attrit viscoso alla molla

$$kx - b\dot{x} = mg; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x = 0$$

equivalente a  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x = 0$

risolvo:  $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$\gamma =$  coeff smorzamento

$\omega_0^2 =$  freq propria, dipende da materiale

se  $\gamma^2 > \omega_0^2$ : moto sovrasmorzato, non oscilla, si ferma

se  $\gamma^2 < \omega_0^2$ : moto sottosmorzato, oscillazioni diminuiscono

se agisce una forza esterna non costante

con una frequenza  $\approx$  freq propria → RISONANZA

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t)$$

legge oraria da risonanza:  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

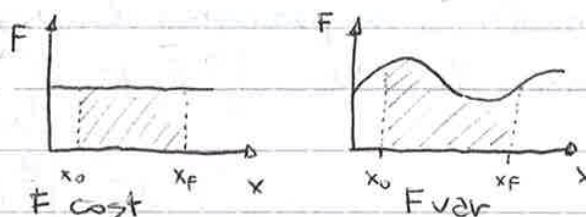
con ampiezza  $A \propto \frac{1}{\sqrt{(\omega_{ext} - \omega_0)^2 + \gamma^2}}$ , con  $\omega_{ext} =$  frequenza  $F_{ext}$  non costante

se  $\gamma = 0$  e  $\omega_{ext} \rightarrow \omega_0$ ,  $A \rightarrow +\infty$   
 (corpo fermo)



$W$  è forza conservat. dipende solo da  $\mu$  posizione e arrivo  $\Rightarrow \oint dW = 0$

$W$  è area sotto grafico di  $F(x)$



### Teorema lavoro-energia cinetica

$$W_{EF} = \Delta k \quad ; \quad v_F^2 - v_0^2 = 2a \Delta x \quad ; \quad \frac{m}{2}(v_F^2 - v_0^2) = \frac{m}{2} a \Delta x$$

$$k = \frac{1}{2} m v^2 \quad [J]$$

teorema vale anche per  $F$  variabili:

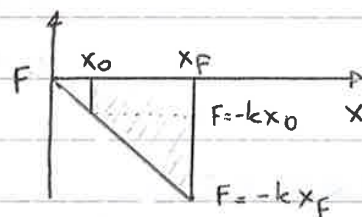
$$W_{EF} = \int_{x_i}^{x_f} m a \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_i}^{v_f} m v \, dv = \frac{m}{2} v^2 \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2)$$

lavoro fatto da forza peso:

$$W = \int_0^h m g \, dh = m g h$$

lavoro fatto da f. elastica:

$$W = \int_{x_0}^{x_f} -k x \, dx = -\frac{k}{2} x^2 \Big|_{x_0}^{x_f} = -\frac{k}{2} (x_f^2 - x_0^2)$$



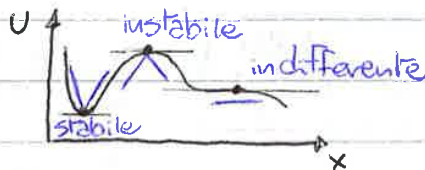
infatti si verifica con Area trapezio:

$$A = \frac{(-k x_f - k x_0) \cdot (x_f - x_0)}{2}$$

lavoro fatto da gravitazione:

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{G M m}{R^2} \, dR = -G M m \frac{1}{R} \Big|_{R_1}^{R_2} = -G M m \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

eq. instabile: MAX  
 eq. indifferente: FLESSO tog orcia.



### CONSERVAZIONE EN. MECCANICA

se sul corpo agiscono solo forze conservative, la somma di  $k$  e  $U$  durante il moto è costante:

en. meccanica:  $E = k + U$

$E_i = k_i + U_i$  ed  $E_f = k_f + U_f$ ;  $\Delta E = \Delta k + \Delta U = +W_{EF} - W_{EF} = 0$

$\Delta k + \Delta U = 0$ ;  $(k_f - k_i) + (U_f - U_i) = 0$ ;  $k_f + U_f = k_i + U_i$

$E_f = E_i$

se agiscono f. NON conservative (attrito)

in QUELLA DIREZIONE NON si conserva en. mecc.

xc il lavoro della f. NON conservative dipende dal percorso:

+ percorso  $\Rightarrow$  + en. dissipata sotto forma di  $W$ .

$W_{FNONCONS} = \Delta E_{mecc} = E_f - E_i = \Delta k + \Delta U$

$W_{EF} = W_{FCONS} + W_{FNONCONS} = \Delta k$  per Th. lavoro-en. cin.

$-\Delta U_{FCONS} + W_{FNONCONS} = \Delta k$ ;  $\Delta k + \Delta U = W_{FNONCONS}$

### POTENZA

rapidità nel compiere lavoro:  $P = \frac{dW}{dt} = \frac{J}{sec} = \text{Watt}$

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ;  $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$

### VELOCITÀ DI FUGA

velocità con cui lanciare  $m$  per non farla tornare su  $M \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  affinché abbia  $v_0 = 0$  a  $R_{\infty}$



## CORPO RIGIDO

corpo con un se fosse puntiforme  $\sum m_i \vec{r}_i = 0$

corpo in rotazione: ogni punto compie moti diversi.

### CENTRO DI MASSA

posizione media, pesata dalle masse

per un sistema di  $N$  parti puntiformi: 
$$\bar{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

se  $N$  masse uguali:  $\bar{r}_{CM} \equiv$  centro geometrico

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{Nm}$$

se  $M \gg m$ :  $\bar{r}_{CM}$  + vicino a  $M$

per corpo continuo: 
$$\bar{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

con la densità del corpo:  $\rho = \frac{M}{V}$  (d media se non cost), in ogni punto  $\rho = \frac{dm}{dV}$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{M}$$

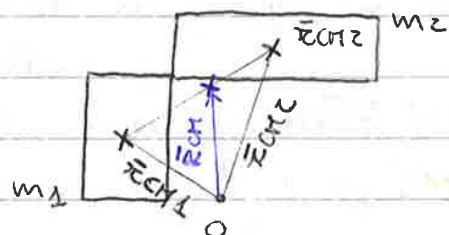
se dens. costante:  $\bar{r}_{CM} = \frac{1}{M} \rho \int_V \vec{r} dV$ ,  $\bar{r}_{CM} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$

se corpo ha simmetrie: CM nell'intersez. assi di simmetria  
 CM entro i confini + esterni del corpo

se corpo formato da  $n$  corpi: 
$$\bar{r}_{CM} = \frac{\bar{r}_{CM1} \cdot m_1 + \bar{r}_{CM2} \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

nel CM si considera applicato  $\sum \vec{F}$

nel CM corpo in equilibrio



**conservaz. quantità di moto**

dati che: CM si comporta con punto materiale

se  $\sum \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow M \vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{CM}$  costante

quindi: in un sistema isolato (= non agiscono  $\vec{F}_{est} \Rightarrow$  )  
la QDM totale si conserva.

$\vec{P} = P_x + P_y + P_z \rightarrow$  applico conservaz. anche solo in una direzione  
conservaz. QDM  $\Leftrightarrow$  conservaz. energia

**URTI**

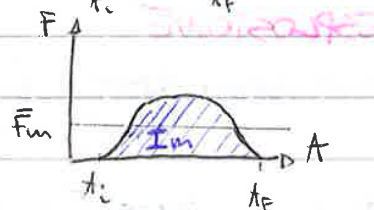
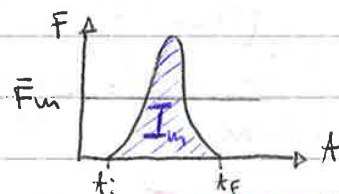
interazioni molto veloci  $\Rightarrow$  per trascurare  $\vec{F}_{est}$  subito prima/dopo  
molti fatti

**FORZE IMPULSIVE** le forze interne, forti che si sviluppano nell'urt  
agiscono in tempo breve

**IMPULSO DELLA FORZA**

vettore con moduli = area sotto grafico

$\vec{I}_m = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = N \cdot sec$



"impulso" che è una forza impulsiva,  
fatto da  $\Delta$  lei  $\geq$  6yr nell'urt

$F_{max}$  in  $t_{min}$  e  $F_{min}$  in  $t_{max}$

per avere lo stesso impulso, si cambia la  $\vec{F}_{media}$   
durante urto:  $\vec{F}_{media} = \frac{\vec{I}_m}{\Delta t}$

**Teorema Impulso - quantità di moto**

$\vec{I}_m = \Delta \vec{P} : \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt} dt = \int_{P_i}^{P_f} d\vec{P} = \vec{P}_f - P_i$

per semplificare SR CM = SR\*:

nel SR del CM, CM è fermo  $\Rightarrow \vec{V}_{CM} = 0, \vec{P}_{CM} = 0$

•  $\vec{V}_{CM}$  in SR =  $\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

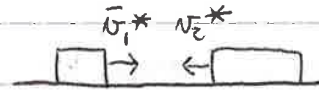


CM in SR\*, SR\* in SR con stessa velocità:  $\vec{V}_{CM} \equiv \vec{v}_0$

• in SR\*  $\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM}$   
 $\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} = -\vec{V}_{CM}$

• k con QDM:  $k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m}$ ,  $k = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

$k_i = \frac{\vec{p}_{1i}^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2i}^{*2}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{1f}^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2f}^{*2}}{2m_2} = k_f$

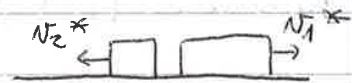


$\vec{P}_{CM}^* = 0 \Rightarrow \vec{P}_{1i}^* + \vec{P}_{2i}^* = 0, \vec{P}_{1i}^* = -\vec{P}_{2i}^*$  quindi  $\vec{p}_f^* = -\vec{p}_i^*$   
 $\vec{P}_{fCM}^* = \vec{P}_{1f}^* + \vec{P}_{2f}^* = 0, \vec{P}_{1f}^* = -\vec{P}_{2f}^*$   $\vec{v}_f^* = -\vec{v}_i^*$

ostituendo in  $k_i = k_f \Rightarrow \vec{p}_{1f}^{*2} = \vec{p}_{1i}^{*2}$  oppure  $\vec{p}_{2f}^{*2} = \vec{p}_{2i}^{*2}$

• in SR\* velocità prima e dopo urto si scambiano (se  $m_1 = m_2$ )  
 ma vale anche in SR  $\Rightarrow \Delta v_{vicinam} = -\Delta v_{allontanam}$

$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f}^* + \vec{V}_{CM} = -\vec{v}_{1i}^* + \vec{V}_{CM}$   
 $\vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1i}^* + \vec{V}_{CM} = -\vec{v}_{2i}^* + \vec{V}_{CM}$



quindi  $\vec{v}_f = -\vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}$   $= -\vec{v}_i + \vec{v}_{CM}$  ;)

**MURO**

se  $M \gg m$ , M rimane fermo, CM fermo.

$\vec{v}_{i\perp} = -\vec{v}_{f\perp}$

$\vec{v}_{i\parallel} = \vec{v}_{f\parallel}$

$\theta_i = \theta_f$





$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} + \bar{V}_{CM} (m_1 v_1^* + m_2 v_2^*) = \\
 &= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} + \bar{V}_{CM} \underbrace{(m_1 v_1^* + m_2 v_2^*)}_{m_1 + m_2} \\
 &\quad \underbrace{k_{CM} \text{ in SR}} \quad \quad \quad \underbrace{k^*} \quad \quad \quad \underbrace{V_{CM}^* \text{ e uno } v_i^* v_j^* = 0}_{\text{di ogni corpo, nel SR}^*}
 \end{aligned}$$

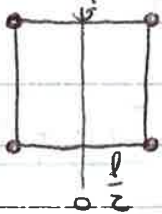
CORPO RIGIDO sistema in cui distanze tra punti non cambiano

MOMENTO D'INERZIA

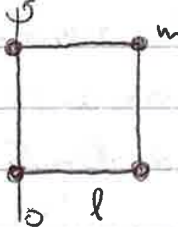
$I_0 = \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}_i^2$ , definibile per corpi "rigidi" e non ( $kg \cdot m^2$ )

$I_0$  dipende da dove è l'asse di rotazione: + è costante, ma  $I_0$  ( $\neq CM$  fisso)

$I_0 = m \frac{l^2}{4} + m \frac{l^2}{4} + m \frac{l^2}{4} + m \frac{l^2}{4} = m l^2$



$I_0 = m l^2 + m l^2 + 0 + 0 = 2 m l^2$



$I_0 = \int r^2 dm$

- per solidi in 3D:  $I_0 = \int_V \bar{x}^2 \rho dV$
- in 2D:  $I_0 = \int_S \bar{x}^2 \rho dS$
- in 1D:  $I_0 = \int_L \bar{x}^2 \rho dL$

• punto  $I_0 = m r^2$

• anello  $I_0 = \int_M r^2 dM = r^2 M$

### MOMENTO DELLA FORZA

La forza  $\vec{F}$  su un corpo origina rotazioni - accelerazioni diverse in base a direzione e p. applicata rispetto asse rotaz.  
 vettore mom. della forza risultante  $\vec{F}$  applicato e  $\vec{\omega}$ :

$\vec{\tau}_0 = I_0 \alpha$ :  $\vec{F}$  agisce su un'asta facendo muovere di moto circolare

$$\omega = \alpha t ; \vec{F}_\theta = m a_\theta ; r F_\theta = m r^2 \alpha$$

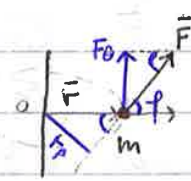
$$\vec{F}_\theta = F \sin \varphi ; r F_\theta = r F \sin \varphi$$

$$r F \sin \varphi = m r^2 \alpha$$

$$|\vec{F} \wedge \vec{r}| = I_0 \alpha = \vec{\tau}_0$$

$$r_p F = m r^2 \alpha = \vec{\tau}_0, \text{ con } r_p = F \sin \varphi = \text{braccio della } \vec{F}$$

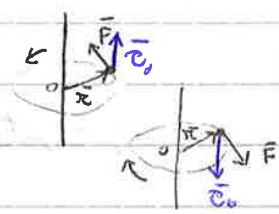
= distanza a direzione  $\vec{F}$  e  $O$



quindi anche  $\vec{\tau}_0 = |\vec{F} \wedge \vec{r}| = r_p F$

$$\vec{\tau}_0 = r F \sin \varphi$$

$\vec{\tau}_0$  regola mano dx:  $\perp$  piano rotaz,  $\parallel$  asse rotaz  
 + se rotaz. antioraria  
 - se rotaz. oraria



$\vec{\tau}_0$  max se  $\vec{r} \perp \vec{F} \Rightarrow \sin \varphi = 1$

$\sum \vec{\tau}_0$  delle  $\vec{F}_{int} = 0$

$\sum \vec{F} \perp$  piano di rotaz. = 0 (se no cambia piano rotaz)

sol  $\vec{F}_{\parallel}$  piano rotaz contribuiscono a  $\vec{\tau}_0$ .

# punti del corpo hanno stessa  $\alpha \Rightarrow$  # punti hanno  $\vec{\tau}_0 = I_0 \alpha$

$\vec{\tau}_0$  "analogo rotazionale"  $2^a$  legge Newton:

$$\sum \vec{F}_{est} = m \vec{a} \rightarrow \vec{\tau}_{est} = I_0 \alpha = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2} = \text{Nm (TRANO energia)}$$

vale per asse di rotaz. fisso  $\Rightarrow \vec{\tau}_0$  non cambia direzione



### Teorema lavoro-energia cinetica rotazionale

$$W_{\vec{F}_{est}} = \frac{1}{2} I_0 (\omega_f^2 - \omega_0^2):$$

$$W_{\vec{F}_{est}} = \int \vec{\tau}_0 d\theta = \int I_0 \alpha d\theta = I_0 \int \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_0 \int_{\omega_0}^{\omega_f} \omega d\omega = I_0 \frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_0}^{\omega_f} = \frac{1}{2} I_0 (\omega_f^2 - \omega_0^2)$$

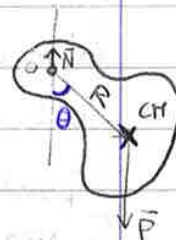
infatti vale Th. lavoro-energia cin.  $W = \Delta k$ ,  
 asintotico a rotazione con  $k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \rightarrow \Delta k = \frac{1}{2} I_0 (\omega_f^2 - \omega_0^2)$

### PENDOLO FISICO

$\vec{\tau}_0$  est:  $I_0 \alpha$ , ma  $\alpha$  non costante: dipende da  $\theta \rightarrow$  dipende da  $t$

$$\vec{\tau}_0 \text{ est: } I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = FR \sin\theta, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgR}{I_0} \sin\theta = 0$$

$\frac{MgR}{I_0}$  equivalente a  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  del pendolo semplice:



infatti  $I_0$  in punto  $F = MR^2$ ;  $\frac{MgR}{MR^2} = \frac{g}{R}$

moto periodico  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{MgR}{I_0}} t + \phi\right)$

con periodo  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{MgR}}$

se pendolo impennato non nel CM, sostituisce  $I_0$  con  $I_0 = I_{CM} + MR^2$

### ROTO-TRASLAZIONE

asse di rotazione passa per CM e trasla  
 anche se CM è SR non inerziale (accelera) vale  $\vec{\tau}_{CM} = I_{CM} \alpha$

en. cin. corpo esteso in rototrasl componente  $\times$  transl + comp.  $\times$  rotaz:

$$k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

### MACCHINA DI ATWOOD CARROCCIA PASSIVA

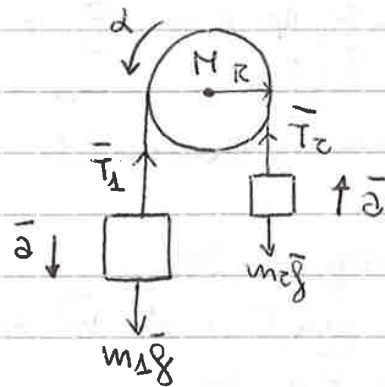
trovare  $a$ :

$$-m_1 g + T_1 = -m_1 a$$

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a$$

$$\bar{C} = I \alpha = I \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R a$$

$$\bar{C} = T_1 R - T_2 R ; \frac{1}{2} M a = T_1 - T_2$$



$$T_1 - T_2 - m_1 g + m_2 g = (-m_1 - m_2) a$$

$$a = \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \right) g$$

### MOTENTO ANGOLARE

analogo rotazionale di QDM

momento della QDM:

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \wedge m \bar{v} \quad \text{come } \bar{p} = m \bar{v}$$

$$\bar{C}_0 = \frac{d\bar{l}_0}{dt} \quad \text{come } \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} ; \frac{d\bar{l}_0}{dt} = \frac{d(\bar{r} \wedge m \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \wedge m \bar{v} + \bar{r} \wedge \frac{d(m \bar{v})}{dt} =$$

$$= \bar{v} \wedge m \bar{v} + \bar{r} \wedge \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{r} \wedge \bar{F} = \bar{C}_0$$

per il corpo estero:

$$\bar{L}_0 = \sum \bar{l}_{0i} = \sum \bar{r}_i \wedge m_i \bar{v}_i \quad (\text{anche se asse di rotazione variabile})$$

$$\bar{C}_{0 \text{ est}} = \frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum \bar{r}_i \wedge \bar{F}_i \rightarrow \bar{C}_{0 \text{ est}} \text{ è la risultante di tutti i momenti delle } \bar{F} \text{ che agiscono sul sistema}$$

### conservaz. momento angolare

$$\text{sistema isolato, } \sum \bar{F}_{\text{est}} = 0, \quad \frac{d\bar{L}_0}{dt} = 0, \Rightarrow \bar{L}_0 \text{ costante}$$

$$\bar{C}_{0 \text{ est}} = 0$$

in cinematica con mom. angolare:

$$k = k_{trasl} + k_{rotaz} = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{P_{cm}^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{L_{cm}^2}{I_{cm}}$$

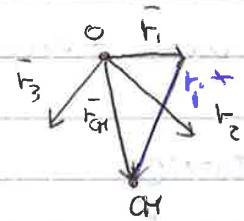
k rotaz dipende da  $I^{-1}$  xk  $L$  si conserva

### primo Teorema di König

con  $k$ , anche  $\bar{L}_O$  della rotaz. è dato da contributi dell' $\bar{L}_O$  cm e delle  $L_{O_i}^*$  di ogni punto nel SR\* con O // asse e cm

$$\bar{L} = \bar{L}_O cm + \bar{L}_O^*, \text{ con } \bar{L}_O^* = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^*$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_O &= \sum \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum (\vec{r}_i cm + \vec{r}_i^*) \wedge m_i (\vec{v}_i cm + \vec{v}_i^*) = \\ &= \vec{r}_i cm \wedge \sum m_i \vec{v}_i cm + \sum \vec{r}_i^* m_i \wedge \vec{v}_i cm + \\ &+ \vec{r}_i cm \wedge \sum m_i \vec{v}_i^* + \sum \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* = \end{aligned}$$



$$= \vec{R} cm \wedge M \vec{V} cm + M \vec{R} cm^* \wedge \vec{V} cm + \vec{R} cm \wedge \vec{V} cm^* + L^* =$$

" xk  $\vec{R} cm = 0$       " xk  $\vec{V} cm = 0$

### MOMENTO ORBITALE

mom. angolare del cm, considerato un punto di massa M

$$\bar{L}_O cm = \vec{R} cm \wedge M \vec{V} cm$$

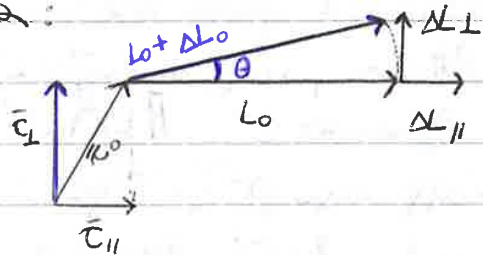
### STABILITÀ OGG. ROTAZ.

off con  $L_O$  elevato, mantiene traiettoria

$L_O$  iniziale dell'off,  $\vec{c}_0$  della F esterna:

$$\tau_{||} = \frac{\Delta L_{||}}{\Delta t} \quad \tau_{\perp} = \frac{\Delta L_{\perp}}{\Delta t}$$

$$\Delta L_{\perp} = \theta L_O \quad \theta = \frac{\tau_{\perp} \Delta t}{L_O}$$



angob di deviaz. minore se  $L_O$  magg.



"cariche positive" = mancasse carica negativa  
 nob cariche neg ( $e^-$ ) per spostarsi nei materiali conduttori

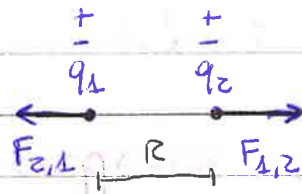
**legge di Coulomb**

tra due cariche puntiformi  $F = k \frac{q_1 q_2}{R_{1,2}^2}$

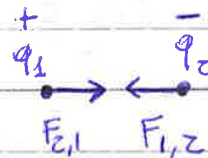
"forza repulsiva tra cariche stesso segno e inversam prop al quadrato della distanza che le separa"

con  $k \approx 10^{10} \frac{NC^2}{m^2}$ ;  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  con  $\epsilon_0 = \text{cost dielettrica nel vuoto}$

se  $q_1 q_2$  stesso segno:  
 $\vec{F}_{1,2} = \oplus k \frac{|q_1| |q_2|}{R_{1,2}^2}$



se  $q_1 q_2$  cariche diverse  
 $\vec{F}_{1,2} = \ominus k \frac{|q_1| |q_2|}{R_{1,2}^2}$



stesso modulo ma direz. opposte

analogia tra  $\vec{F}_G$  vs  $\vec{F}_C$

$\vec{F}_G$ :  $\propto \frac{1}{R^2}$ , sempre attrattiva, dipende da  $m$ ,  $\ll F_C$

$\vec{F}_C$ :  $\propto \frac{1}{R^2}$ , attrattiva o repulsiva, NON dipende da  $m$ ,  $\gg F_G$

infatti tra  $2e^-$ :  $\vec{F}_G = G \cdot \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{-31}}{r^2}$   
 $\vec{F}_C = k \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-19} \cdot 1,67 \cdot 10^{-19}}{r^2}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_C = 10^{40} \cdot \frac{10^{-19} \cdot 10^{-19}}{10^{-11} \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-31}} = 10^{40} \\ \vec{F}_G = 10^{-11} \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-31} \end{array} \right\} F_C = 10^{40} F_G$$

è campo vettoriale: somma v. dell'ogni p. dello spazio il vettore somma  $\vec{E}$  in quel p.

con 1 carica:  $\vec{E} = k \frac{q_1}{r^2}$  ;  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k \frac{q_1 q}{r^2} \cdot \frac{1}{q}$

condipob:  $\vec{E} = -z k Q \frac{z}{d^3}$  a piccole distanze

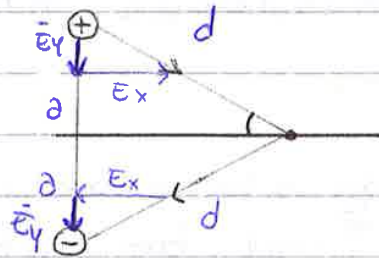
$\vec{E} = -z k Q \frac{z}{(\sqrt{z^2 + x^2})^3}$  a grandi distanze

poiché  $\vec{E}$  ha componenti  $\vec{E}_x$  che si annullano  
 $\vec{E}_y$  si sommano

$\vec{E}_y = -z E \sin \theta \rightarrow \vec{E} = k \frac{Q}{d^2}$  ,  $\vec{E} = \frac{-z k Q \sin \theta}{d^2}$

$\sin \theta = \frac{z}{d} \rightarrow \vec{E} = -\frac{z k Q}{d^3}$

$d = \sqrt{z^2 + x^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{-z k Q}{(\sqrt{z^2 + x^2})^3}$



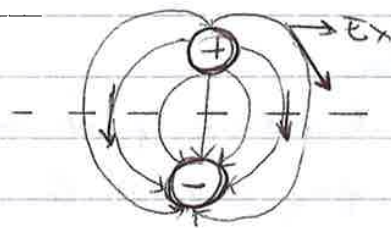
**LINEE DI CAMPO**

rappresentazione del campo elettrico

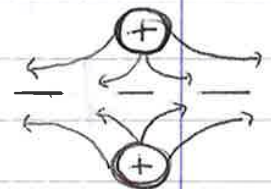
escono da carica +

entrano in carica -

in tutti punti tangenti all' $\vec{E}$ , stesso verso



tutte escono da +, qnt entrano in -  
 sempre dense



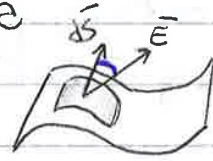
$\vec{E}$  max a metà tra le cariche, se solo comp. y, se (+) (-)

$\vec{E}$  nullo a metà se cariche opposte, linee si respingono



Flusso campo elettrico attraverso superf. chiusa

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



con  $d\vec{S}$  vettore superficie,  $\perp$  superf

prodotto scalare  $\Rightarrow$  se  $\vec{E} \perp d\vec{S}$ , ossia  $\vec{E} \parallel$  superf,  $\cos\theta = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

se superf. chiusa,  $\Phi_{\text{netto}} = 0$  se tutt linee entrano quante escono

$\Phi$  non dipende dalla superf, ma solo da carica contenuta:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int dS = E 4\pi R^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2$$

uso flusso  $\times$  determinare  $\vec{E}$  generato da  $\forall$  distribua. cariche

riformulazione con

### legge di Gauss

$\Phi_{\text{netto}}$  attraverso superf. chiusa  $\bar{E}$  prop. a carica contenuta

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

infatti:  $dS$  = superf. infinitesima di sfera

$d\Omega$  = angolo solido sotteso a  $dS \rightarrow$  angolo solido tot =  $4\pi$

$$dS: 4\pi r^2 = d\Omega = 4\pi \quad ; \quad dS = r^2 d\Omega$$

$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E ds \cos\theta \rightarrow$  vett. superf. del  $dS \perp \vec{E} = ds \parallel \vec{E}$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} ds_{\parallel} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi$$

con princ. sovrapponib. per estendere a tutt cariche

uso Gauss per trovare  $\vec{E}$  di tutt cariche a dispora. simmetrica:

$$\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = E ds$$



## FLUIDI

costituiti da hanno volume ma non forma propria  
 le molecole possono muoversi (scorrere) → no distanza fissa

descrivono fluidi con:

densità volumica  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{kg}{m^3}$

pressione  $p = \frac{F}{\Delta A} = \frac{N}{m^2} = \text{Pascal}$       $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow \vec{F} = p \Delta A$

per connettere  $p$  e  $\rho$ :

modulo compressibilità  $B = \frac{\Delta p}{-\Delta V/V}$

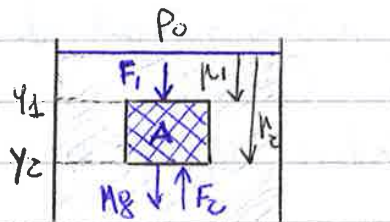
esprime con la pressione applicata quanto varia frazione di  $V$ :  
 liquidi poco comprimibili, solidi  $B \rightarrow \infty$ , gas molto

fluido ideale (liquido o gas), incompressibile  
 x la gravità, fluido sta il più in basso possibile

## legge di Stevino

pressione è proporzionale a profondità,  
 e dipende da  $\rho$ , non da forma contenitore

$p_z = p_1 + \rho g (y_2 - y_1)$



A porzione cubica di fluido statico  
 Newton considerando  $\Delta$  puntiforme:

$-\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - Mg = 0$

con  $\vec{F}_1$  = forza peso dovuta alla press. sopra

ed  $\vec{F}_2$  = forza normale per reazione con press. superf. sotto

per cui:  $-\rho_1 A + \rho_2 A - \rho V g =$   
 $-\rho_1 A + \rho_2 A - \rho g A (y_2 - y_1)$

### principio di Pascal

l'incremento di  $p$  applicato ad una parte del fluido è trasmesso ad ogni altra parte di fluido e a pareti del contenitore

$$\Delta p_1 = \Delta p_2$$

quindi cambiare  $p$  ad una profondità  $y_1$  comporta stessa variazione di  $p$  a profondità  $y_2$  poiché:  $p$  uguale in tutto fluido ad una certa  $y$



$$\Delta p_1 = p_1 - p_0 = \frac{F_1}{A_1} - p_0$$

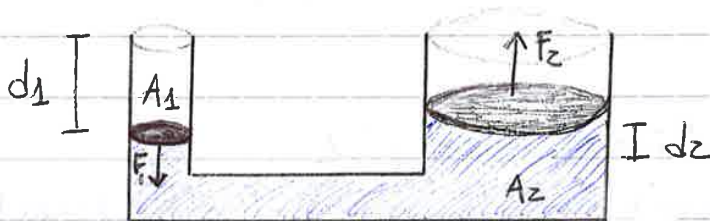
$$\Delta p_2 = p_2 - p_0 = \frac{F_2}{A_2} - p_0$$

per princ. Pascal  $p_0$   $\frac{F_1}{A_1} - p_0 = \frac{F_2}{A_2} - p_0$  ;  $F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$

perciò maggiore è area dove si trasmette  $\Delta p$  maggiore è la  $F_2$  ottenuta

$F_1$  e  $F_2$  rispettano conservazione en. meccanica:

$F_2 > F_1$ , ma  $F_2$  sposta  $V_2 = V_1$  liquido per un tratto minore infatti  $W = F \cdot d$ ,  $d_2 < d_1 \Rightarrow W_1 = F_1 d_1 \Leftrightarrow W_2 = F_2 d_2$

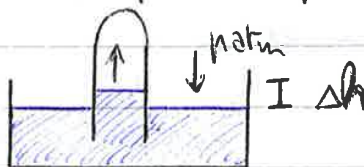


$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

### BAROMETRO

per misurare  $p_{atm}$

tubo vuoto in liquido,  $\Delta p_{atm}$  comporta  $\Delta p$  dentro tubo



misura  $\Delta h$   
 $p = \rho g \Delta h$  ;  
 (sterimo in  $p_1 = 0$ )



infatti se diminuisce la sezione del tubo, ma di rimanere costante  $p$ , dev aumentare  $v$  del fluido

### legge di Torricelli:

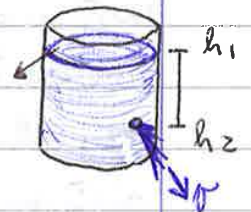
velocità di deflusso da un foro  $v = \sqrt{2g\Delta h}$

foro molto piccolo:

considero  $v$  in superf.  $\approx 0$ , equaz. Bernoulli diventa:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 ; \quad v_1 \approx 0$$

$$g h_1 = g h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

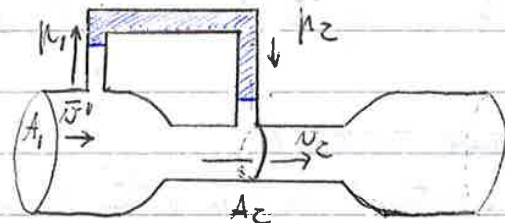


### tubo di Venturi:

per misurare velocità conoscendo  $p$  da equaz. Bernoulli con  $h$  cost, portata cost  
 con variazione solo  $v$  e  $p \Rightarrow \ominus p \quad \oplus v$   
 $\oplus p \quad \ominus v$

per portata cost:  $v_2 A_2 = v_1 A_1$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho \left( v_2 \frac{A_2}{A_1} \right)^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 ;$$



$$v_2^2 = \left[ p_1 - p_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] \frac{2}{\rho} ; \quad v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)}}$$



dilata termica è proprietà termometrica = varia in funz. di T  
 $\Delta L \propto \Delta T$  e dimensioni di partenza  
 solo H<sub>2</sub>O ha dilata  $\propto \frac{1}{T}$  :  $\Delta T = (0,4)^\circ\text{C}$  diminuisce V

**TERMOMETRO**

per misurare temperatura  
 uso dilata termica

scala Celsius:  $0^\circ\text{C}$  H<sub>2</sub>O ghiaccia -  $100^\circ\text{C}$  H<sub>2</sub>O bolle a 1 atm

scala assoluta:  $0\text{K}$   $v=0$  -  $273\text{K}$  H<sub>2</sub>O ghiaccia

scala Fahrenheit:  $32^\circ\text{F}$  H<sub>2</sub>O ghiaccia a 1 atm -  $212^\circ\text{F}$  H<sub>2</sub>O bolle

$$1^\circ\text{F} = \frac{5}{9}^\circ\text{C} ; T^\circ\text{C} = \frac{5}{9}(T^\circ\text{F} - 32)$$

**TEORIA CINETICA GAS IDEALE**

applicato a gas ideale: molecole non si urtano, urti con parete elastici,  
 d'barra, no forze chimiche, solo en. cinetica,  
 no en. potens. di interazione  
 come H<sub>2</sub>: gas, direzioni e velocità casuali

$$\mu = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle k_{trasl} \rangle$$

$$\langle k_{trasl} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

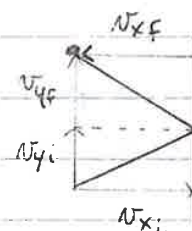
micro( $\langle k_{trasl} \rangle$ )


una molecola urta una parete:  $F$  su parete =  $\frac{dP_x}{dt} = \frac{\Delta P_x}{\Delta t}$

$$\Delta P_x = m N_{Fx} - m N_{ix} = -2m N_x \times k \quad N_{xF} = -N_{xi}$$

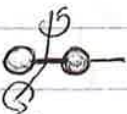
quindi  $F$  su parete =  $\frac{2m N_x}{\Delta t}$

$$v_x = \frac{s}{t} = \frac{2d}{\Delta t} ; \Delta t = \frac{2d}{v_x} \rightarrow F = \frac{2m N_x}{\frac{2d}{v_x}} = \frac{m N_x^2}{d}$$




molecole monoatomiche: 

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 = \boxed{\frac{3}{2}} k T$$

molecole diatomiche: 

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I \omega_x^2 + \frac{1}{2} I \omega_z^2 = \boxed{\frac{5}{2}} k T$$

ma non traslucce in 3D, muove in 2D (non attorno asse su cui giace)

molecole poliatomiche: 

$$3 \cdot \frac{1}{2} m v^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} I \omega^2 = \boxed{3} k T$$

atomo nel solido:

come molla che oscilla attorno a pos. di eq, a cause di attrazioni - repulsioni con atomi vicini:

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k z^2 = 3 k T$$

quindi l'energia media dell'atomo (Energia) =  $3 k T$

energia media tot di un corpo (E\_tot) =  $N 3 k T$

### ENERGIA INTERNA

è l'energia cinetica tot  $U = \text{cost } N \langle k T \text{ trasl} \rangle$

gas monoatomico  $U = \frac{3}{2} N k T$

gas diatomico  $U = \frac{5}{2} N k T$

gas poliatomico  $U = \frac{3}{2} N k T$  (valido in certi range di T)

se il gas è reale da aggiungere l'energia potenziale tra particelle

per cambiare en. interna cambio temperatura:

lavorando calore, o variando pressione

## I principio termodinamica

in # trasforma. termodinamica, l'energia interna si conserva

$$\Delta U = Q + W_{\text{dal sul}}$$

## CAPACITÀ TERMICA

calore necessario ad aumentare di  $\Delta T$  la temp. del sistema  
= quant. di calore che può immagazzinare un corpo

$$Q = C \Delta T, \quad C = \frac{Q}{\Delta T}$$

dipende dal materiale e da massa

si può dare calore ma aumentare temp, se  $Q$  è usato per  $W$   
se fa  $W$  serve più  $Q$  per variare  $\Delta U$  (cambiamenti di stato)

## CALORE LATENTE

quant. di calore necessaria al sistema per far avvenire  
passaggio di stato di 1 unità di massa

$$Q = mL, \quad L = \frac{Q}{m}$$

## CALORE SPECIFICO

capacità termica per u di massa  $C_s = \frac{C}{m} = \frac{Q}{\Delta T m}$

$$\text{per mole } c_s = \frac{C}{\#M} = \frac{Q}{\Delta T \# \text{mol}}$$

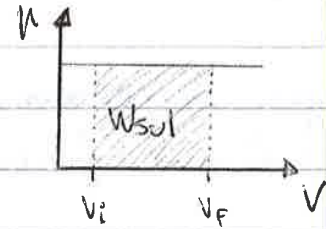
sostanze con + gradi di libertà necessitano +  $Q$  per avere stesso  $\Delta T$   
 se  $Q$  usato per + energie

$c_s$  nel gas ideale non dipende da  $T$  se sempre stesso no gradi libertà  
 nel gas reale si  $c_s$  a  $T$  molto alte / basse ha +/- gradi lib.



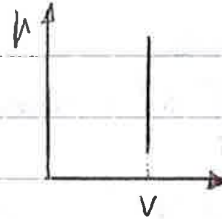
TRASFORMAZIONE ISOBARA

$p = \text{cost}$   
 $W_{\text{sol}} = - \int_{V_i}^{V_f} p dV = -pV \Big|_{V_i}^{V_f} \Rightarrow W_{\text{sol}} = -p \Delta V$



TRASFORMAZIONE ISOCORA

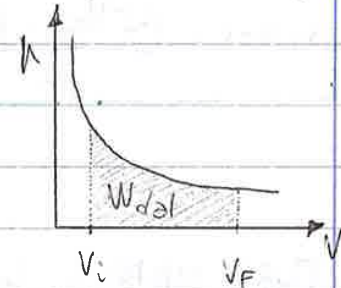
$V = \text{cost} \Rightarrow W = 0$



TRASFORMAZIONE ISOTERMA

$\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U = Q - W_{\text{dal}} = 0; Q = W$  "At:  $Q$  for  $W$ "

$T = \text{cost}$   
 $W_{\text{dal}} = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f}$



$W_{\text{dal}} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$

traccio curve precise da ipotizzare trasformazione ideale: reversibile, molto lenta, attraverso soli stati di equilibrio

TRASFORMAZIONE ADIABATICA

non scambia  $Q \Rightarrow Q = 0$

In princ.  $\Delta U = \pm W_{\text{sol}}_{\text{dal}} \Rightarrow pV^\gamma = \text{cost}$

$C_v n \Delta T = -W = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV$ , dato che x le interne  $pV = \text{cost}$

$2R n \Delta T = -\frac{nRT}{V} dV$ ,  $\int \frac{2}{T} dT = -\int \frac{dV}{V}$ ;  $2 \ln T = -\ln V + \text{cost}$ ;

$2 \ln T^2 V = \text{cost}$ ;  $T^2 V = e^{\text{cost}} = \text{cost}$

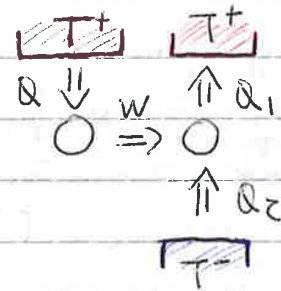
$T = \frac{pV}{nR} \Rightarrow \left(\frac{pV}{nR}\right)^2 V = \text{cost}$ ;  $\sqrt{p^2 V^3} = \sqrt{\text{cost} (nR)^2} = \text{cost}$ ;

macchina termica vietata (viola Kelvin-Planck) e macchina frigorifera vera  
 $Q$  da  $T^+$  diventa  $W$

$W$  usato per portare  $Q_2$  da  $T^-$  a  $T^+$   
 $Q_1$  viene restituito a  $T^+$

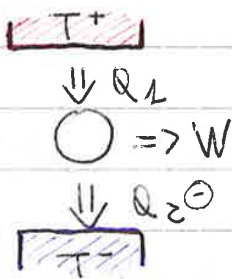
$Q = Q_1 - Q_2$  ;  $Q_1 = Q + Q_2$

restituisce  $W$  e  $Q_2$  da  $T^+$  a  $T^-$   
 viola macchina frigorifera Clausius

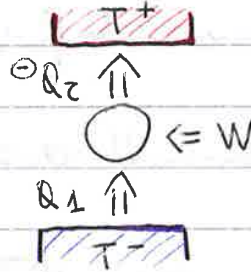


**MACCHINA TERMICA**

**e FRIGORIFERA**



$T^+ > T^-$   
 $Q_1 > Q_2$



$T^+ > T^-$   
 $Q_1 < Q_2$

macchine termica + frigorifera lavorano in transf. ciclica

**RENDIMENTO**

macchina termica:  $\eta = \frac{W_{out}}{Q_{ass}} = \frac{Q_1 - |Q_2^c|}{Q_1}$  xk nelle cicliche  $W = Q$

$1 - \frac{|Q_2^c|}{Q_1} < 1$  per II princ

macchina frigorifera:  $K = \frac{Q_{ass}}{W_{in}} = \frac{Q_2}{Q_2^c - Q_2} = \frac{Q_2 \frac{1}{Q_2}}{(Q_2 - Q_2) \frac{1}{Q_2}} =$

$= \frac{1}{\frac{Q_2^c}{Q_2} - 1} < \infty$  per II princ.

**MACCHINA DI CARNOT (reversibile)**

macchina con il max rendimento tra due temperature  
 lavora tra  $T^+$  e  $T^-$  con cicli di compressione - espansione

### Teorema di Carnot

rendimento macchina qualsiasi che opera tra  $T^+$  e  $T^-$   
 ha  $M \leq M$  di macchina reversibile che opera tra le stes.  $T^+$  e  $T^-$

infatti: per assurdo  $W_i > W_r$

$$W_r = Q_{1r} - Q_{2r}, W_i = Q_{1i} - Q_{2i}$$

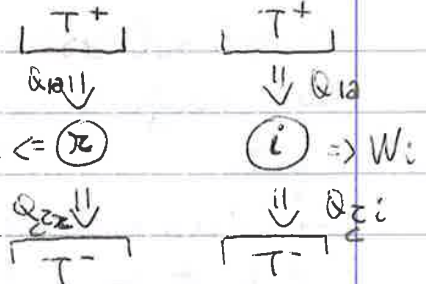
$Q_{2i} < Q_{2r}$  per avere  $W_i > W_r$

inverti la macchina reversibile:

$Q_{2r}$  per fare  $W_i$  che sarebbe  $W_i > W_r$

unico risultato  $W_i$  da sorgente  $T^-$  a  $T^+$

no per II princ. Kelvin-Planck



rendimento macchina Carnot con th. Carnot:

$$m_i = 1 - \frac{|Q_{2i}|}{Q_{1i}} \leq 1 - \frac{T^-}{T^+} = m_r; \quad + \frac{Q_{2r}}{Q_{1r}} \leq \frac{T^-}{T^+}; \quad T^+ Q_2 \leq T^- Q_1; \quad \frac{Q_{2r}}{T^-} + \frac{Q_{1i}}{T^+} \leq 0$$

se macchina reversibile  $\frac{Q_{1r}}{T^+} + \frac{Q_{2r}}{T^-} = 0$

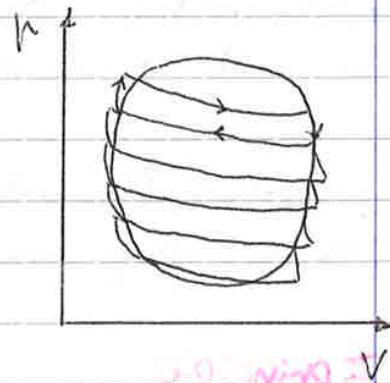
se macchina irreversibile  $\frac{Q_{1r}}{T^+} + \frac{Q_{2r}}{T^-} < 0$

nella macchina di Carnot  $\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$  e nelle adiabatiche non avviene  $Q$  inoltre

in th. cicli vale  $\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ ;

infatti:

rispetto ai cicli con macchine di Carnot  
 le isoterme si annullano a vicenda,  
 restano le parti di isoterme fuori dal ciclo  
 e le adiabatiche



riformulato con:

### disuguaglianza di Clausius

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \text{ per } N \rightarrow \infty, \text{ diventa } \oint_A^B \frac{\delta Q}{T}$$



trasformaz. proibite da Kelvin-Planck/Clausius comportano  
diminuz. di  $S$ , ossia portano a + ordine:

macchina termica proibita prende  $Q$  da ambiente e fa rob  $W$ ;

$$\Delta S_{\text{ambiente}} = \frac{1}{T_1} \int \delta Q = - \frac{1}{T} \int \delta Q < 0 \text{ perché ambiente cede } Q \text{ anziché diminuire } S$$

probabilità che avvenga trasformazione proibita (che porti a + ordine)  
 $\rightarrow 0$ ; talmente improbabile che è "impossibile"

calcolare  $\Delta S$  tra A e B connessi con trasformazione invariata isoterma:

connetto A e B con transf. reversibile isoterma;

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}; \quad \Delta U = 0 \Rightarrow Q = W \Rightarrow \Delta S = \int_A^B \frac{dW}{T} = \int_A^B \frac{p dV}{T};$$

$$\text{per 1 mol vale } pV = RT \Rightarrow \Delta S = \int_A^B \frac{RT}{V} \frac{dV}{T} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{R}{V} dV = R \ln \frac{V_B}{V_A}$$

quindi  $\Delta S = R \ln \frac{V_B}{V_A}$  per trasformaz. "libera"