centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1557A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bobba

MATERIA: Analisi Matematica II. Prof.Mazzi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 66

CALCOLO DIFFERENZIALE

- **DISTANZA** = funzione $d: A \times A \to \mathbb{R}$

  $\forall x, y \in A$ 1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0$ se $x = y$

  2. $d(x,y) = d(y,x)$

  3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

spazio metrico = insieme A su definisco d

metrica euclidea = distanza in $\mathbb{R}^n$

$X = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

$Y = (y_1, \dots, y_n)$

norma = distanza di X da 0

- **INTORNO SFERICO**: (A,d), $X \in A$, raggio $\rho > 0$, centro x,

  $B_\rho(x) = \{Y \in A : d(x,y) < \rho\}$

punto interno: E sottoinsieme di A, $x \in E$

se $\exists$ un $B_\rho(x)$ è tutto in E

$\text{int}(E)$ = insieme di p. interni di E

E aperto se $\text{int}(E) = E$

punto di frontiera: $E \subseteq A$, $x \in A$ $\quad B_\rho(x) \cap E \neq \emptyset$ e $B_\rho(x) \cap (A$

se per $\forall$ $B_\rho(x)$ interseca E e il complementare di $E = A$

frontiera di E ∂E insieme di p. di frontiera

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 66

- **LIMITE**, $\bar{x}$ punto accumulaz. di A, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ scalare

  $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$ se $\forall B_\varepsilon(l)\ \exists B_\delta(\bar{x}) : x \in B_\delta(\bar{x}) - \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon$

CONTINUA, $\bar{x}$ p. accumulaz. di A, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

se $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$, $\forall B_\varepsilon(l)\ \exists B_\delta(x) : x \in B_\delta(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon($

date f, g scalari, continue in $\bar{x}$ 1. $\lambda f + \gamma g$ continua in $\bar{x}$

2. $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ continua in $\bar{x}$

3. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^g$ continua in $f(\bar{x})$

$h \circ f$ continua in $\bar{x}$

(triviale)

- **MASSIMO ASSOLUTO** $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in A$

se $\forall X \in A$, $f(X) \leq f(\bar{x})$ → unico $f(\bar{x})$

punto di massimo (minimo) $\bar{x}$ → NON necessariam. unico

Teorema di Weierstrass

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua su k compatto

$\Rightarrow$ f ha max e min assoluti su k

Teorema esistenza degli zeri

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua su A connesso per archi, $X, Y \in A$

se $f(X) f(Y) < 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ almeno una z: $f(z) = 0$

Dim. A connesso $\Rightarrow \exists \gamma(a) = X$, $\gamma(b) = Y$:

$h(t) = f(\gamma(t)) \to h(a) \cdot h(b) = f(\gamma(a)) f(\gamma(b)) = f(X) f(Y)$

applico Th. esistenza zeri per 1 variabile $\Rightarrow \exists z = \gamma(A)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 66

Teorema

se $f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ differenziabile in tutto Ω

se $f, g \in C^1(\Omega) \Rightarrow f+g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g},\ g \circ f \in C^1(\Omega)$

- derivate seconde miste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Teorema di Schwarz

se $f: \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^2(\Omega)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$

- FUNZIONE VETTORIALE $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \geq 2}$

$x \to F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$

LIMITE $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}$ p. accumulazione di Ω

$\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = L = (L_1, \dots, L_m)$ se $\forall B_\varepsilon(L)\ \exists B_\delta(\bar{x}) : x \in B_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon$

$\Downarrow$ deve esistere tutto $\lim_{x \to \bar{x}} F_i(x) = l_i$

CONTINUA $F(x)$ continua se continua in $\bar{x}$ ogni F_i

derivate parziali $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}$ p. interno,

F derivabile in $\bar{x}$ rispetto x_j: $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})$

matrice jacobiana di F in $\bar{x} = J_{\bar{x}} F = \begin{vmatrix} \nabla F_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\bar{x}) \end{vmatrix}$ $(m \times n)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 66

INTEGRALI DOPPI

- partizione di R = R rettangolo $[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$
  divisa in rettangoli + piccoli $a=x_0<\dots<x_n=b$ e $c=y_0<\dots<$
  $\neq R$ tra i rettangolini R_{ij} aperti

FUNZIONE A SCALA adattata alla partizione $\{R_{ij}\}$
= funzione costante sui rettangoli $f(x,y)=c_{ij}\quad (x,y)\in R_{ij}$

INTEGRALE DI F. A SCALA $\int_R f=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} c_{ij}\,(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)=$
(c_{ij} = h; $(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ = Abase) $=$

raffinamento della partizione
= divisione in rettangoli + piccoli

f,g funz. a scala, su R 1. $\int_R \lambda f+\mu g=\lambda\int_R f+\mu\int_R g$ = linearità
2. $f(x,y)\le g(x,y)$, $\int_R f\le\int_R g$ = mono

- funz. minoranti a scala di f limitata su R
  = g a scala definite su R : $g(x,y)\le f(x,y)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}$ $G=\{$

funz. maggioranti a scala
= h a scala def. su R : $h(x,y)\ge f(x,y)$ $H=\{\int_R h\}$
$g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y)$

integrale inferiore = $\underline{\int_R} f=\sup G=$ sup dei minoranti

integrale superiore = $\overline{\int_R} f=\inf H=$ inf dei maggioranti

RIEMANN INTEGRABILE f continua su R, se $\int_R f=\overline{\int_R} f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 66

• funzione caratteristica Ω limitato $\subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists R$ che lo contiene

$$\chi_\Omega(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

INSIEME MISURABILE secondo Peano-Jordan

Ω limitato $\subseteq \mathbb{R}^2$, misurabile secondo P-J se $\chi_\Omega(x,y)$ è Riemann integrabile su R che contiene Ω

× $|\Omega| = \int_R \chi_\Omega(x,y)\,dx\,dy$

Ω misurabile $\Rightarrow |\partial\Omega| = 0$ (punti, segmenti, curve)

$|\Omega|$ secondo P-J NON dipende da R ✓ tutt $\chi = 0$ se $(x,y) \notin$

$\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ misurabili 1. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow |\Omega_1| \leq |\Omega_2|$

2. $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2$ misurabili

$|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| - |\Omega_1 \cap \Omega$

(3.) $\operatorname{int}\Omega$ e $\bar{\Omega}$ misurabili

$\operatorname{int}\Omega \subseteq \tilde{\Omega} \subseteq \bar{\Omega}$, $|\operatorname{int}\Omega| = |\tilde{\Omega}| =$

× RIEMANN INTEGRABILE f continua su Ω misurabile limitata su $\Omega \setminus C$, $|C| = 0$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

è Riemann integrabile su $R \supseteq$

integrale di Riemann di f su $\Omega = \int_\Omega f = \int_R \tilde{f}$

volume del solido $V = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ 0 < z < f(x,y)\} = \int_\Omega f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 66

Ω lamina, $\rho(x,y)$ densità di Ω: $m(\Omega) = \int_\Omega \rho(x,y)\,dx\,dy$

$$x_G = \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$y_G = \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

Teorema

$f: \Omega$ misurabile $\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

ϕ cambiam. variabili: $\Omega' \subseteq A'$ aperto $\to \Omega \subseteq A$ aperto

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(u,v)\,|J\phi(u,v)|$$

(ϕ^{-1}; $|J\phi(u,v)|$ = elemento d'area)

coord. polari: $\phi: \Omega' = [0,+\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$(\rho, \theta) \qquad (x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

ϕ NON è biiettiva se $\rho = 0$

coord ellittiche $\phi: \Omega' = [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$(\rho, \theta) \qquad (x,y) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta$

$0 < \rho < 1$ θ riferito a circonf. $\rho = 1$ prima di Ω

ϕ NON biiettiva se $\rho = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 66

RIEMANN INTEGRABILE f limitata: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile $\to \mathbb{R}$

se $\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & (x,y,z) \in R \setminus \Omega \end{cases}$

è Riemann integrabile su R che contiene Ω

$$\int_{\Omega} f = \int_{R} \tilde{f}$$

parametrizzaz. per fili:

$\tilde{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile, α, β continue su $\tilde{C}: \to \mathbb{R}$ t.c. $\alpha(x,y$

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,0) : (x,y) \in \tilde{C}\}$

$\Rightarrow \Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in \tilde{C},\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$

$$\int_{\Omega} f = \iint_{\tilde{C}} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

parametrizzaz. per strati:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Omega \cap$ piano orizzontale $z = \bar{z}$ è Ω_z misurabile

$\Omega = \{a \le \Omega_z \le b\}$

$$\int_{\Omega} f = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f\,dx\,dy \right) dz$$

Ω solido, densità $\rho(x,y,z)$: $M(\Omega) = \iiint \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$x_G = \frac{1}{M(\Omega)} \iiint x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

coord. cilindriche $\phi: [0,+\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

(circolari, ellittiche) $(\rho, \theta, t) \to (x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin$

ϕ NON biunivoca se $\rho = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 66

INTEGRALI SU CURVE

curva iniettiva γ continua, $\forall t_1 \neq t_2 \in I$, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

γ è anche semplice

curva parametrica $\gamma: I$ aperto $\in C^1 \to \mathbb{R}^n$, continua in I

arco di curva $\gamma: [a,b] \subseteq I \to \mathbb{R}^n$ (CURVA CHIUSA se $\gamma(a) = \gamma(b)$)

curva regolare 1. $\gamma(t) \in C^1(I)$

2. $\gamma'(t) \neq (0,\dots,0_n)$ in $\mathbb{R}^n$

$\gamma'(t)$ = vettore tangente in $P = \gamma(t)$ e $\|\gamma'(t)\|$ la sua [illegible] in $\mathbb{R}$

curva regolare a tratti $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

se $\exists$ un n.finito di punti t_i in cui 1. γ non derivabile

2. $\gamma'(t_i) = (0,\dots,0_n)$

in t_i γ non è regolare

se γ regolare ma non semplice in un t_i, in t_i $\exists z\ \gamma'(t_i)$ (d[illegible]

arco somma $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$\gamma_1: [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$ $\quad \gamma_2: [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$

✗ $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$

$\Rightarrow \gamma: [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b] \end{cases}$

cambiamento parametrizzazione (regolare): funzione $\alpha: [c,d] \to [a,b]$

α biunivoca, $\in C^1([c,d])$ e $([a,b])$, $\alpha'(s) \neq 0$ $\forall s \in [c,d]$

$\Downarrow$ α' ha segno costante $\Leftarrow$ α continua

$\alpha' > 0$: $\alpha(c) = a$, $\alpha(d) = b$

$\alpha' < 0$: $\alpha(c) = b$, $\alpha(d) = a$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 66

Teorema

f continua, Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\gamma : [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\delta : [c,d] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ differiscono per cambio par., $\alpha : [c, \quad \delta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau))$

$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_\delta f$

Dim. $\int_\delta f \, d\sigma = \int_c^d f(\delta(\tau)) \, \|\delta'(\tau)\| \, d\tau$ (*)

$\int_\gamma f \, d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$, con $t = \alpha(\tau) \to dt = \alpha'(\tau)$

$= \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\underbrace{\gamma(\alpha(\tau))}_{\delta(\tau)}) \, \|\underbrace{\gamma'(\alpha(\tau))}_{\delta'(\tau)}\| \, \alpha'(\tau) \, d\tau$

se $\alpha' > 0$: $\int_c^d f(\delta(\tau)) \, \|\delta'(\tau)\| \, d\tau = (*)$

se $\alpha' < 0$: $\int_d^c = -\int_c^d f(\delta(\tau)) \, \|\delta'(\tau)\| \, d\tau = \int_c^d f(\delta(\tau)) \, \|\delta'(\tau)\|$

NON dipende dalla parametrizzazione

nè dall'orientamento della curva

γ curva di densità $\rho(x,y,z)$: $M(\gamma) = \int_\gamma \rho \, d\sigma$

$x_G = \int_\gamma x \rho \, d\sigma$

= LAVORO "lungo γ"

- INTEGRALE DI LINEA campo vett. continuo su Ω aperto $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

curva regolare $\gamma : [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

integro componente nella direzione versore $\hat{u}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ tangente

$F \cdot \hat{u} = |F| \cdot |\hat{u}| \cos\theta = |F| \cos\theta$ è scalare

$\int_\gamma F \cdot d\rho = \int_\gamma (F \cdot \hat{u}) \, d\sigma = \int F(\gamma(t)) \, \hat{u}(t) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int F(\gamma(t)) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 66

INTEGRALI SU SUPERFICI

superficie in forma parametrica σ continua: A aperto, connesso $\subseteq \mathbb{R}^2 \to$

sostegno di σ = $Im(A) = \sigma(A) = \Sigma$

sup. semplice NO autointersezioni

× sup. regolare σ: A aperto connesso $\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$

1. $\sigma \in C^1(A)$
2. $J\sigma(\bar{u},\bar{v}) = \begin{vmatrix} \nabla\sigma_1(u,v) \\ \nabla\sigma_n(u,v) \end{vmatrix}$ ranfo max

piano tangente $P(\bar{u},\bar{v}) \in A$

$\gamma_{\bar{v}}(u) = \sigma(u,\bar{v})$ $\qquad$ $\gamma_{\bar{u}}(v) = \sigma(\bar{u},v)$

1. definito in $(\bar{u}-\varepsilon, \bar{u}+\varepsilon) = D$ $\qquad$ 1. definito in $(v-\varepsilon,$
2. $C^1(D)$ $\qquad$ 2. $C^1(D)$
3. regolare, $\gamma'_{\bar{v}}(u) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,\bar{v})$ $\qquad$ 3 regolare, $\gamma'_{\bar{u}}(v) =$ ∂

se σ regolare $\exists\ \gamma'_{\bar{v}}(u)$ ed $\gamma'_{\bar{u}}(v)$

linearmente indip xk J deve avere ranfo ma

$\pi: (x-\bar{x}, y-\bar{y}, z-\bar{z}) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right) = 0$

$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} = N(u,v)$

superficie topografiche

$\sigma(x,y) \begin{cases} \sigma_1(x,y) = x \\ \sigma_2(x,y) = y \\ \sigma_3(x,y) = f(x,y), \quad f: A \text{ aperto connesso} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f \in C^1(\end{cases}$

$S = \{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in A\}$

$N(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 66

$N(t,\theta) \to \|N(t,\theta)\| = |\gamma_1(t)| \, \|\gamma'(t)\|$

$$A(\Sigma) = \iint_k |\gamma_1(t)| \, \|\gamma'(t)\| \, d\theta \, dt = 2\pi \int_a^b |\gamma_1(t)| \, \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

con $\gamma_1(t) = x$ $\quad A(\Sigma) = 2\pi \int_a^b x \, \|\gamma'(t)\| \, dt = 2\pi \int_\gamma x \, d\sigma$

Secondo Teorema Guldino

area di Σ di rotaz attorno z = area superf. laterale del cilindro avente $h = L(\gamma)$ e $R = x_G$

Dim. $A(\Sigma) = 2\pi \int_\gamma x \, d\sigma = 2\pi \, L(\gamma) \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x \, d\sigma = 2\pi \, L(\gamma) \, x_G$

- INTEGRALE SUPERFICIALE, contiene Σ

$\sigma : k \subseteq \mathbb{R}^2 \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ calotta sup. regolare

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$= \int_\Sigma f \, d\sigma = \iint_k f(\sigma(u,v)) \, \|N(u,v)\| \, du \, dv$$

Teorema

$\sigma : k \to \mathbb{R}^n$ $\quad \eta : k' \to \mathbb{R}^n$ calotte sup. regolari, differiscono per

$\Rightarrow$ integr. superf. su uguali $\Rightarrow$ non dipende da parametrizzaz

f, g continue su $\Sigma \subseteq A$ 1. linearità

2. additività

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho \, d\sigma$$

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{H}(\Sigma)} \int_\Sigma x \rho \, d\sigma$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 66

TEOREMA DI GREEN

aperto con bordo di $\mathbb{R}^2$ = insieme $k \subseteq \mathbb{R}^2$

1. compatto, connesso
2. $\text{int}(k) \neq \emptyset \Rightarrow |k| \neq 0$
3. ∂k unione di curve chiuse, semplici, regolari a t. $\Rightarrow$ k misu

Teorema

k aperto con bordo, ∂k orientato positivamente, $k \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$

$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, continuo e $C^1(A)$

$$\Rightarrow \int_{\partial k} F \cdot dP = \iint_k \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy$$

formule di Gauss-Green

$$F=(f,0) \to \int_{\partial k} F \cdot dP = \iint_k 0 - \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$F=(0,g) \to \int_{\partial k} F \cdot dP = \iint_k \frac{\partial g}{\partial y} - 0\, dx\, dy$$

$$\text{Area}(k) = \iint_k 1\, dx\, dy = \iint_k \underbrace{1}_{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}\, dx\, dy = \int_{\partial k} F \cdot dP$$

(1 = molto difficile da parametrizzare)

$F=(0,x)$
$F=(-y,0)$
$F=\left(-\frac{1}{2}y, \right.$

TEOREMA DI STOKES

rotore = campo vettoriale continuo di $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\text{rot}\, F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

se $F_3 = 0$ torna Th Green

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 66

DAL 1958 ...

CAMPI CONSERVATIVI

campo conservativo $F: \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F continuo su Ω se $\exists$ funzione potenziale $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$ t.c. $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) = F(x)$

forma differenziale esatta

se F conservativo $\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = df$

Proposizione

$F: \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F conservativo in Ω connesso, $\gamma: [a,b] \to \Omega$ arco di curva regolare t.c. $\gamma(a) = A$ $\gamma(b) = B$

$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = f(B) - f(A)$

Dim. $\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$ con $h(t) = f(\gamma(t)) \in C^1$

$= \int_a^b h'(t)\,dt =$ ← $h'(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t) = F($

$= h(b) - h(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A)$

Proposizione

potenziali differiscono per una costante

Dim. $\partial_i(f(x) + k) = \partial_i(f(x)) = F_i \Rightarrow$ anche $f(x) + k$ è potenziale

è lo stesso integrale ↑ dipende solo

$\int_{\gamma_X} F \cdot dP = f_1(\gamma_X(b)) - f_1(\gamma_X(a)) = f_1(x) - f_1(A)$ } $f_1(x) - f_1(A) = f_2(x$

$\int_{\gamma_Y} F \cdot dP = f_2(\gamma_X(b)) - f_2(\gamma_X(a)) = f_2(x) - f_2(A)$ } $f_1(x) = f_2(x) + f_1(A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 66

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^1 F(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h \int_0^1 (F_1,\dots,F_n)(1,0,\dots,0)$$

$\gamma'(t) = (h,0,\dots,0)$

$$= \lim_{h\to 0} \int_0^1 F_1(x_1+th, x_2, \dots, x_n)\,dt$$

applico Th. media integrale: $\frac{1}{1-0}\int_0^1 F_1(-)\,dt$

poiché $F_1(-)$ continua in $[0,1]$,

$\exists c : \int_0^1 F_1(x_1+th,\dots)\,dt = F_1(x_1+ch, x_2, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0} F_1(x_1+ch, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1,\dots,x_n)$$

posso estendere a $\forall x$ perché g continua $\Rightarrow \nabla g(x) = F(x) \Rightarrow F$

Teorema

$F: \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F conservativo, $F \in C^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

Dim. poiché $F \in C^1(\Omega) \Rightarrow g \in C^2(\Omega)$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

per Th Schwartz, $g \in C^2(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$

in $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{rot} F = 0$ condizione necessaria ma non suff per F c

invece se $\operatorname{rot} F \neq 0 \Rightarrow F$ non conservativo

condiz. suff.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 66

SUCCESSIONI NUMERICHE

= funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$

NO p. accumulazione $\in \mathbb{N}$, solo $\lim_{n\to+\infty}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ se $\forall B(L)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in B(L)$

successione geometrica $\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} = e^0 = 1$

successione convergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

success. divergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$

success. indeterminata se $\lim_{n\to+\infty} a_n \nexists$

ste x comportamento se a_n e b_n definitivamente uguali

Dim. per Hp a_n e b_n diff uguali $\Rightarrow \exists \bar{n} > n_0$ t.c. $a_n = b_n$

$\lim_{n>\bar{n}\to+\infty} a_n = L$; $\forall B_\varepsilon(L)\ \exists n > \bar{n} : |a_n - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$\lim_{n>\bar{n}\to+\infty} b_n = L$; $\forall B_\varepsilon(L)\ \exists n > \bar{n} : |b_n - L| < \varepsilon$

success. monotona crescente se $\forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$ (decrescente)

$n_1 = n \quad n_2 = n+1$

$a_n < a_{n+1}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 66

DAL 1956 ...

Criterio della radice per successioni

a_n succ. definitivamente positiva, $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

$\Rightarrow$ $l < 1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$l > 1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$l = 1$ (no info)

ordine infinito $\log n \to n^q \to q^n \to n! \to n^n$

$a_n = \frac{n!}{q^n} \to \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n!} = \frac{n+1}{q} = +\infty \Rightarrow n!$ inf ordine

$a_n = \frac{n^n}{n!} \to \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)\, n^n} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \Rightarrow n^n$ infinit inf.

SERIE NUMERICHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

= somma formale degli infiniti termini (numeri reali) di una succ

successione delle ridotte = somma di un finito di termini (un

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$\vdots$

$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

somma della serie $= \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, la serie converge

se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$, serie diverge

se $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n$, serie indeterminata

C de

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 66

Criterio necessario di convergenza

$\sum_{n\geq 0} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Dim. $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$ poiché a_n converge

$\lim_{n\to+\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0$

Criterio di non convergenza

$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ non converge

Criterio del resto n-esimo

$\sum_{n\geq 0} a_n$ converge $\Rightarrow R_n = s - s_n \to 0$

$\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ hanno stesso comportamento

Dim. $\lambda a_0 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + \dots + a_n) = \lambda s_n$

pos applicare a s_n addendi

Criterio della somma

$\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)$

s	t	$s+t$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
s	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?
$\nexists$	t	?

Dim. $s_n = a_0 + \dots + a_n$ e $t_n = b_0 + \dots + b_n$

$z_n = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n) = (a_0 + \dots + a_n) + (b_0 + \dots + b_n) = s_n + t_n$

$z = \lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n = s + t$ con $s, t \in \mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 66

DAL 1956 ...

Primo Criterio confronto asintotico

$\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ serie a termini definitivam. positivi per $n >$

se a_n e b_n stesso ordine di grandezza

$\Rightarrow$ serie hanno stesso comportam.

Dim. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ per Hp.

$\forall \varepsilon \; \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon \to -\varepsilon + l < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + l$

scelgo ε t.c. $l - \varepsilon > 0$

$0 < (l-\varepsilon) b_n < a_n < (l+\varepsilon) b_n$, applico Th. del confront

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge: $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, ossia $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ stesso

I Conf. asintotico, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge: serie Mengoli: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \to n = n+1 \; \sum_{n-1=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n-1)}} = 1$ stesso ordine: I Conf. asintotico, serie Meng

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ co

Criterio del rapporto per serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ definitivam. strettam. positiva, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$\Rightarrow$ $l < 1$ $\sum a_n$ converge

$l > 1$ $\sum a_n$ diverge

$l = 1$ (no info)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 66

DAL 1958 ...

Criterio di Mclaurin

$f(x): [1, +\infty)$ 1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

2. $f(x)$ decrescente su $[1, +\infty)$

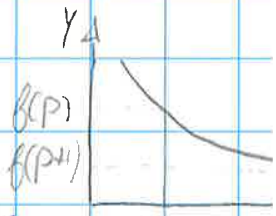
$\Rightarrow$ 1. $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ stex comportamento

se convergono:

2. $\sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$

3. $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p) \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{p=n}^{+\infty} f(p) = R_{n-1}$

Dim. $\forall x \in [p, p+1] \quad f(p+1) \leq f(x) \leq f(p)$



per monotonia dell'integrale e

$\frac{A}{b} = h = f(p+1) = \frac{\int_p^{p+1} f(p+1)\,dx}{p+1-p} \leq \int_p^{p+1} f(x) \leq \int_p^{p+1} f(p) = f(p)$

applico la somma $\sum_{p=1}^{n} f(p+1) \leq \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} f(x)\,dx \leq \sum_{p=1}^{n} f(p)$

per additività integrale rispetto dominio

$\sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$

scalo indici della somma a sx: $m = p+1$ $\sum_{m-1=1}^{n+1} f(m) \Rightarrow \sum_{m=2}^{n+1} f(p)$

$\sum_{n=2}^{n+1} f(p) \leq \int_1^{n+1} f(x) \leq \sum_{n=1}^{n} f(p)$

applicando $\lim_{n \to +\infty}$: $\sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$

integrale e serie hanno stex comport

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 66

DAL 1956 ...

serie a segni alterni: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$, b_n succ. ≥ 0

Criterio di Leibniz

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ t.c. 1. $b_n \geq 0 \ \forall n$

2. $b_{n+1} < b_n$ decrescente

3. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

$\Rightarrow$ 1. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n b_n$ converge a s

2. $|R_n| = |s - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k| \leq b_{n+1}$

Dim. $s_0 = b_0 \geq s_1 = b_0 - b_1$

$s_0 \geq s_2 = b_0 - b_1 + b_2 \geq s_3 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \geq s_1$

$s_{2n-2} \geq s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_{2n-1}$

s_{2n} decrescente, s_{2n+1} crescente

$s_{2n} - s_{2n-1} = b_{2n}$

$\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = 0$ x.h. sottosucc. di b_n che $\to 0$ per ip

$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} - s_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} \downarrow$

$s_p = s$

poiché due sottosuccessioni ammettono stx limite, serie con

$|R_n| = |s - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k b_k| = |b_{n+1} - b_{n+2} + \dots| \leq b_{n+1}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 66

monotonia e convessità si conservano con conv. puntuale

Teorema

$f_n(x)$ succes. funzioni continue su I_u, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su I_u
$\Rightarrow$ $f(x)$ continua su I_u

Dim. definizione continuità in $x_0 \in I_u$ per la successione: (*)
$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \to \forall \varepsilon \; \exists \delta : x \in I_u \cap B_\delta(x_0) \Rightarrow |f_n(x) - f_n($

diventa continuità per funz. limite
fissato un risalto (*) $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)(-f_n(x) + f_n(x))(-f_n(x_0) + f_n(x_0)$

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$

$< \varepsilon$ per def. conv. unif. (segni opposti) | $< \varepsilon$ per (*) | $< \varepsilon$ per def. conv. unif.

poiché $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$, risalgo al $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
con cui verifico continuità di $f(x)$

Proposizione

$f_n(x)$ di funz. continue, $f_n(x) \to f(x)$ NON continua su I_p
$\Rightarrow$ $f_n(x)$ NON converge unif. a $f(x)$ su I_p

Teorema scambio ordine dei limiti

$f_n(x)$ succes. di funzioni, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su I_u, x_0 p. accumulato
se 1. $\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n$ $f_n(x_0)$
2. $\exists \lim_{n \to +\infty} \ell_n = \ell$
$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \ell$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 66

Dim. dal Th. scambio fra limite ed integrale so che $F_n(x) \to F(x)$
scrivo def. conv. puntuale: $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) - F(x) = 0$$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \le$$

per prop. integrali $\le \left|\int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\,dt\right| \le$

per $\forall x, x_0 \in [a,b]$, con $a<b$, $\le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$

allora $|F_n(x) - F(x)| \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$

poiché in ipot. ass. $0 \le |F_n(x) - F(x)|$

poiché $f_n(t) \to f(t)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) - f(t) = 0 \Rightarrow \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \to 0$

$0 \le |F_n(x) - F(x)| \le 0$

applico proprietà per stabilire conv. unif: $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| = 0$ (Th. confron

Teorema derivata di successioni:

$f_n(x)$ succ. funz. continua di classe $C^1(I)$, I aperto

se 1. $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ su compatti di I

2. $\exists c \in I : f_n(c) \to z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 1. $f \in C^1(I) : f_n(x) \to f$ su I

$f_n(x) \rightrightarrows f$ su compatti di I

2. $g(x) = f'(x)$

Dim. mi ricordo Th. Fond. Calcolo Integrale:

$$\int_{x_0}^{x} h(t)\,dt = H(x) - H(x_0)$$

con $h(t) = f'(t)$ $\to$ $\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

mi riferisco a $f_n'(t)$ $\to$ $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,dt$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 66

CONVERGENZA UNIFORME

se $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = s(x)$ su $I_u \subseteq I$

$\forall \varepsilon \; \exists n_0(\varepsilon) : n > n_0 \; \forall x \in I_u \Rightarrow |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$

$|R_n(x)| < \varepsilon$

$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I_u} |s(x) - s_n(x)| = 0$ ($|R_n(x)|$)

convergenza assoluta su I_a

se converge puntualmente $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ su I_a

convergenza totale su I_t

se 1. $f_n(x)$ sono limitate in I_t (se no non posso fare sup)

2. converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in I_t} |f_n(x)|$

Criterio di Weierstrass

$f_n(x)$ successione funz. definite su I

se 1. $\exists M_n$ (≥ 0) successione numerica : $\forall x \in I_u \; |f_n(x)| \le M_n$ (se devo maggiorare un val ass.)

$\sup_{x\in I_u} |f_n(x)| \le M_n$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ serie numerica converge

$\Rightarrow$ 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ serie di funz. converge assolutamente, uniformemente, totalmente a $s(x)$ su I_u

2. $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| = |s(x)| \le \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \quad \forall x \in I_u$

Dim, per hp $|f_n(x)| \le M_n$

applico la somma: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \le \sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ ...

per il criterio del confronto $\sum f_n(x)$ conv.

$\sup |R_n(x)| < M_n$ per hp

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 66

Teorema

$f_n(x)$ succes. fun. continue su I

se la serie converge unif. a $s(x)$ su $[a,b] \subseteq I$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)$ convergente

Dim. considero succes. ridotte $s_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x) \to s(x)$

$\int_a^b s_n(x) = \int_a^b f_0(x) + \dots + f_n(x)\,dx \to \int_a^b s(x)$ applico ora il lim

per $n \to +\infty$

Corollario

$f_n(x)$ succes. fun. continue, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge a $s(x)$ unif. su

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ converge a $\int_{x_0}^{x} s(t)\,d$

Teorema

$f_n(x)$ succes. fun. continue e dune $C^1(I)$, I aperto,

se 1. $\exists c \in I : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(c)$ converge a s

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ converge unif su compatti $\subseteq I$ a $t(x)$

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge unif. a $s(x)$

2. $s(x) \in C^1(I)$

3. $s'(x) = t(x)$

Dim. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s_n(x)$ per il lemma $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = s_n'(x) \to t(x)$

prendo c: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(c)$ converge a $s'(x)$ che converge a t

per poter avere $s'(x)$, $s(x)$ dv essere $C^1(I)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 66

raggio di convergenza $R = \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$, quindi

Teorema

1. $R=0 \Rightarrow$ serie converge solo in $x=0$

   Dim. intervallo di convergenza $(-0,0)=0$

2. $R \in (0,+\infty) \Rightarrow$ serie conv. assolutam. in $(-R,R)$
   uniformem. sui compatti $\subseteq (-R,R)$

   Dim. R è il sup delle $|x|$ in cui la serie converge
   converge in $(-|R|,|R|)$ e per il corollario unif. sui compatti

3. $R=+\infty \Rightarrow$ serie converge assol. $(-\infty,+\infty)$ unif. sui compatti $\subseteq \mathbb{R}$

   Dim. R è il sup, converge in tutte le x

Teorema di Abel (soprattutto se intervallo di conv. semi aperto)

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge puntualmente su I

$\Rightarrow$ converge uniformemente sui compatti $\subseteq I$

Criterio del rapporto serie di potenze

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, a_n definitivam. $\neq 0$, $\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = m$

$\Rightarrow$ $m=0$ $\quad R=+\infty$

$m \in (0,+\infty)$ $\quad R=\frac{1}{m}$

$m=+\infty$ $\quad R=0$

Dim. applico criterio del rapporto per serie numeriche a $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}||x^n x|}{|a_n||x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = 0 \cdot |x| = 0$$

$m|x|$

$+\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 66

Criterio del prodotto di due serie di potenze

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con R_1 convergente a $s(x)$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ con R_2 convergente a $t(x)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n x^n$ ha $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, convergente $s(x)\,t(x)$

Teorema continuità

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge a $s(x)$ in I

$\Rightarrow$ $s(x)$ continua in I

Teorema integrazione termine a termine

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $R > 0$, converge a $s(x)$ in I

$\Rightarrow$ serie degli integrali: $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \to \int_c$

con R, su I

Dim. per Th. continuità per integrare $\int_0^x s(t)\,dt$

per corollario delle serie di funz. la serie degli integrali su

Teorema derivazione termine a termine

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $R > 0$, converge $s(x)$ in I

$\Rightarrow$ serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} \to s'(x)$

con R, su $(-R, R)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 66

f e g analitiche 1. $\alpha f + \beta g$ analitica in x_0

2. $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ analitiche in x_0

3. h analitica in $f(x_0)$, $h \circ f$ analitica in x_0

Teorema

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con $R > 0$, $s(x)$ somma della serie su $(-R, R)$

$\Rightarrow$ 1. $s(x) \in C^\infty((-R, R))$

2. serie di Taylor di $s(x)$ è la serie stessa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Dim. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$s'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$s''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_2 x + \dots$

$s'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \, a_2 + \dots$

$s^{(n)}(x) = n! \, a_n$

allora $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! \, a_n}{n!} x^n \dots$

Principio di identità delle serie di potenze

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n$ serie di potenze conv. a $f(x)$ e $g(x)$ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

se $f(x) = g(x)$ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n \geq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 66

polinomio trigonometrico di ordine n è la ridotta n-esima della
= funzione $P_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n$

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

× $P_n(x)$ è funz. analitica

$P_n(x) = Q_n(x)$ se hanno tt coeff. uguali

serie trigonometrica
= serie di funzioni $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
$\downarrow$
f_0

• SPAZIO VETTORIALE
= insieme V su campo $\mathbb{K}$ in cui sn definite:

somma $V \times V \to V$, $(v, w) \to v+w$
1. commutativa $v+w = w+v$
2. associativa $(v+w)+u = v+$
3. elem. neutro 0_V
4. elem. opposto $-v$

prodotto per scalare $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \to \lambda v$
1. elem. neutro 1
2. $\lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v$
3. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
× 4. $(\lambda+\mu) v = \lambda v + \mu v$

sottospazio vettoriale
= W sottoinsieme $\subseteq V$ dotato di 1. somma
2. prodotto per scalare

combinazione lineare
$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $v_1 \dots v_n \in V$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$

linearmente indipendenti:
$v_1, \dots, v_n$ se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 66

Teorema proiezione ortogonale

$\mathbb{V}$ dotato di prod. scalare, $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ dimensione n generato da $\{e$

se $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{W} \Rightarrow$ 1. $\exists!$ w che minimizza distanza di v da $\mathbb{W}$

2. $w = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$

Dim. $d^2(v,z) = \|z - v\|^2 = \langle z-v, z-v \rangle = \langle z,z \rangle - \langle z,v \rangle - \langle v,$

$= \langle z,z \rangle - 2\langle v,z \rangle + \|v\|^2$

con $z = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, $\langle z,z \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$

$\langle z,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle e_i, v \rangle$

$d^2(v,z) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \langle e_i, v \rangle + \|v\|^2$

$d^2(v,z) - \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (c_i^2 - 2c_i \langle e_i, v \rangle)$

deriviamo il termine in c_i per trovare la c_i che sostitu

midà la w: $2c_i - 2\langle e_i, v \rangle = 0$;

$c_i = \langle e_i, v \rangle \rightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v \rangle e_i = w$

3. $\forall z \in \mathbb{W}$, $\langle v - w, z \rangle = 0$

4. $d(v,w)^2 = \|v - w\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\langle v, e_i \rangle)^2$

Dim. $d(v,w)^2 = \|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w \rangle = \langle v,v \rangle - 2\langle v,$

per il punto 2, $\langle v, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i \rangle =$

$= \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle^2 = \langle w, w \rangle$

$d(v,w)^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle^2$

ortogonalizzazz. Gram-Schmidt

per costruire sistema ortonormale di versori ortogonali a 2, se'

1. $v \in \mathbb{V} \rightarrow e_1 \rightarrow \mathbb{W}_1$
2. $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{W}_1 \rightarrow$ proiez. ort. su $\mathbb{W}_1$ $w_1 \rightarrow v_2 = v - w_1 \rightarrow e_2 \rightarrow$
n. $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{W}_{n-1} \rightarrow$ proiez. ort su $\mathbb{W}_{n-1}$ $w_n \rightarrow v_n = v - w_n \rightarrow e_n \rightarrow \mathbb{W}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 66

$L^2((a,b))$ è spazio vettoriale

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ è il prodotto scalare in $L^2((a,b))$

$\|f\|_{L^2(a,b)} := \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ è la norma quadratica

convergenza in norma quadratica

succes. di funz. quadrat integr. $f_n(x) \subseteq L^2((a,b))$

$f_n(x)$ converge in norma quad. a f

se $\lim_{n\to+\infty} \|f-f_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b (f(x)-f_n(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge in n. quad e f_1 con succes. ridotte $\sum_{k=0}^{n} f_k$

se $\lim_{n\to+\infty} \|f - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

scarto quadratico medio di f e $g \in L^2((a,b))$

= numero $\|f-g\|_2 = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

- sistema ortonormale per Fourier

partendo da funzioni periodiche $(0, 2\pi) = T$

$v_0(x) = 1 \to \|v_0\|_2^2 = \int_0^{2\pi} v_0^2(x)\,dx = 2\pi$

versore associato $e_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$v_1(x) = \cos kx \to \|\cos kx\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi$

versore associato $e_1 = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$

$v_2(x) = \sin kx \to \|\sin kx\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi$

versore associato $e_2 = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 66

$$\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rangle^2 = \frac{1}{\pi} \langle f, 1 \rangle^2 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \right)^2 = 4\pi a_0^2$$

$$\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \rangle^2 = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos kx \rangle^2 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx \right)^2 = \pi$$

analogamente $\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \rangle^2 = \pi b_k^2$

$$\|f - P_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

Teorema di Riemann-Lebesgue

$f \in L^2((0, 2\pi))$, a_k b_k di Fourier

$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0$

Dim. dall'id. di Perseval per lo scarto quadratico

$\|f - P_n\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$ deve essere serie converg

per crit. necessario di convergenza per serie numeriche

deve essere $\lim_{k \to +\infty} (a_k^2 + b_k^2) = 0$

Funzione regolarizzata associata a f in $\bar{x}$

$= \tilde{f}(\bar{x}) = \dfrac{f(\bar{x}^-) + f(\bar{x}^+)}{2}$

se f continua in $\bar{x}$ $\to$ $f(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x})$

se $\bar{x}$ salto $\to$ $\tilde{f}(\bar{x})$ = valor medio del salto

se $\bar{x}$ eliminabile $\to$ $\tilde{f}(\bar{x})$ continua in $\bar{x}$

continua a tratti $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

= in $\forall [a,b]$ ha nro finito di punti di discr. eliminabile

funzioni continue a tratti, regolarizzate, periodo 2π $\Big\}$ $\in \tilde{C}((0,2\pi))$ $\to$ spazio vettoriale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 66

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 66

Teorema

f periodica periodo 2π, continua a tratti
f ha pseudo derivate dx e sx in ogni punto
$\Rightarrow$ serie di F di f conv. puntualm. a $\tilde{f}$ su $\mathbb{R}$

C^1 a tratti: su $\mathbb{R}$ se 1. f continua su $\mathbb{R}$
2. f derivabile tranne al + in nro finito di pti
in cui punti angolosi

Teorema

f periodo 2π, C^1 a tratti su $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ serie F di f converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$

X **Teorema principio di localizzazione**

$f|_{(a,b)}$ C^1 a tratti in intervallo (a,b)
$\Rightarrow$ serie F dif. conv. unif. a f nei compatti $\subseteq (a,b)$

serie di Fourier in f. complessa:

$$\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \quad \text{e} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{e^{ikx}+e^{ikx}}{2}\,dx = C_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2}\,dx = C_{-k}$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(C_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + C_{-k}\,\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 66