NUMERO: 1556A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bobba

MATERIA: Analisi Matematica I. Prof.Serra

ANALISI I

INSIEME

concetto primitivo = non si può definire se non con 1 sinonimo

rappresentazione esplicita $A = \{a, b, c\}$

elenca tutti elementi dell'insieme

/ : "tale che"

implicita $A = \{x \in X \mid P(x)\}$

descrive prop. caratteristica degli elem

[passare da rappresentaz. impl. a espl = = risolvere un'equazione

es. $\{x \in X \mid x^2 = 4\} \leadsto \{2, -2\}$]

$P(x)$: proprietà caratteristica = ce l'hanno solo quegli elementi

X = insieme universo

specificare ins. universo — es $\{x \mid x^2 = -1\}$

tutti insiemi $\subseteq X$

se X nei reali $\emptyset$

se X nei complessi 2 soluz.

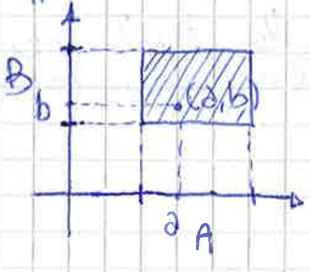
$b \in A$ "appartiene" ; $b \notin A$

$A = \{a, b, c\}$ $\quad B \subset A$ "contenuto" "sottoinsieme"

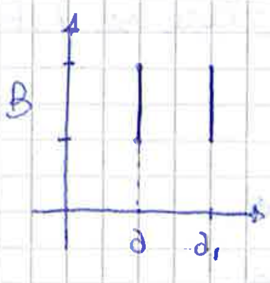
$B = \{a, b\}$ $\quad \subseteq$ "ogni elem. di B è anche elem. di A"

$B \not\subset A$

rappresentazione prodotto cartesiano :

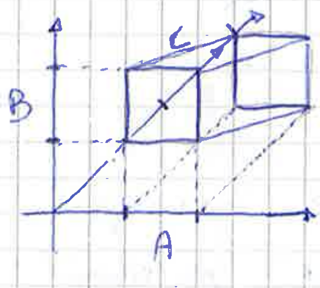


$A \times B$ → rettangolo formato da tt punti (a,b)



$A \times B$ → segmento $A = \{a\}$

2 segmenti $A = \{a, a_1\}$



$A \times B \times C$ → solido

[possibile prod. cartesiano di +3 insiemi
ma no disegno]

[insieme $\emptyset$ è sottoinsieme
di qualsiasi insieme]

$\wedge$ "e" → intersezione nella disuguagl.
$\vee$ "o" → unione nella disuguaglianza
$\Leftrightarrow$ "se e solo se"
condiz. necessaria sufficiente

es. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

propos. sempre vera = teorema

es. $A \cap B \subseteq A \cup B \rightarrow V$

$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C \rightarrow F$ [V solo se B e C si contengono a vicenda]

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3\}$ $\quad =$ $\quad$ ma $B \neq C$

$C = \{1, 2\}$ $\quad A \cup C = \{1, 2, 3\}$

$A \in A \cup B \rightarrow V$

$A \cap B \subseteq A \rightarrow V$

$\Rightarrow$ "implica"

negazione di proposizione quantificata

$NOT(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x\ NOT\ P(x)$ → scambio quantificatori
sposto NOT davanti $P(x)$

es. x banco
$P(x)$: x è occupato $\quad NOT(\forall x\ P(x))$
negare = "esiste almeno 1 banco non occupato"
$= \exists x\ NOT\ P(x)$

i razionali disposti su retta non la riempiono

(Pitagora)

Teorema: non esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

Dim: x assurdo supposti $\exists\, p, q \in \mathbb{Z} \mid \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$
(negare ciò k si afferma) supposti p, q NON entrambi pari → [x non divid inutile $\frac{p^2 \cdot \frac{1}{2}}{q^2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$]

$\frac{p^2}{q^2} = 2$; $p^2 = 2q^2$ → p^2 pari ⇒ p pari

allora $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $2n = p$

$(2n)^2 = 2q^2$; $4n^2 = 2q^2$

$2n^2 = q^2$

[il quadrato di nro pari è pari
di nro dispari è dispari] ← pari — dovrebbe essere pari ASSURDO x Ip

i razionali hanno espansione decimale

[$N(x)$ = # cifre-cifre prima periodo
$D(x)$ = 9 x ogni cifra periodo
0 x ogni cifra antiperiodo]

finite → $0, a_1 a_2 a_3$
o periodiche → $0, a_1 a_2 a_1 a_2 = 0,\overline{a_1 a_2}$

numeri hanno + rappresentazioni decimali

es. $x = 0,999\ldots$

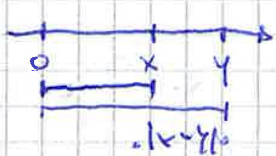
$10x = 9,999 = x + 9$; $10x = x + 9$; $x = 1$

$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ $\quad \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

$0,333\ldots \cdot 3 = 0,999\ldots$

es. $|-5|$ = distanza dal p. del num. -5 a zero $= 5$

$|x-y|$ = distanza di x da y



$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \\ -(x-5) & \text{se } x-5 < 0 \rightarrow x < 5 \end{cases}$$

proprietà val. assoluto:

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = |-x|$

$\left.\begin{array}{l} x \leq |x| \\ -|x| \leq x \end{array}\right\} -|x| \leq x \leq |x|$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad ; \quad |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ o } x \geq a$

$\downarrow$

Dim. $|x| \leq a \quad \begin{cases} x \leq a & x \geq 0 \\ -x \leq a & x < 0 \\ x \geq -a & \end{cases} \rightarrow -a \leq x \leq a$

$|x \cdot y| = |x| \, |y| \quad ; \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \qquad\qquad ||x|-|y|| \leq |x-y|$

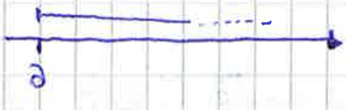
val. assoluto x descrivere insiemi

$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < R\} \quad \begin{cases} x-x_0 < R & \text{se } x-x_0 \geq 0 \rightarrow x \geq x_0 \\ -(x-x_0) < R & \text{se } x-x_0 < 0 \rightarrow x < x_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > R + x_0 & x \geq x_0 \\ x < -R + x_0 & x < x_0 \end{cases}$$

$(a,b]$, $[a,b)$: "interv. semiaperti o semichiusi"

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ → geometricamente semiretta



$(a,+\infty)$

$(-\infty,b]$

$(-\infty,b)$

proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
posto insieme $A \subset \mathbb{R}$,

Def. A è superiormente limitato
se $\exists M \in \mathbb{R}$ (non x forza $\in A$)
tale che $\forall x \in A$, $x \leq M$

M = MAGGIORANTE di A → (se ne ho 1 ne ho ∞; ogni nro $\geq$ al + grande degli elem. di A può essere magg. di A)

es. $[1,100]$ $M = 100, 101, \dots$

$(0,1)$ $M = 1, 2, \dots$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ non è sup. limitato

A è inferiormente limitato
se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$, $x \geq m$

m = MINORANTE di A se $m \leq x$ $\forall x \in A$

A è $\boxed{\text{limitato}}$ se è sup. e inf. limitato es. $A=[0,1]$ $\max A = 1$ $\sup A = 1$ → il sup può anche essere max

$B=[0,1)$ $\nexists \max B$ $\sup B = 1$

$C=\{x\in\mathbb{R} / 27 \le x^3 < 64\}$ $\sup C = 4$ $\inf C = 3$ $\nexists \max C$ $\min C = 3$

$D=\{x\in\mathbb{R} / x = 3+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$

$\sup D = 4$ $\inf D = 3$ $\max D = 4$ $\nexists \min D$

↓

D limitato

CARATTERIZZARE il sup

↓

"= dare condizioni equivalenti alla definizione"

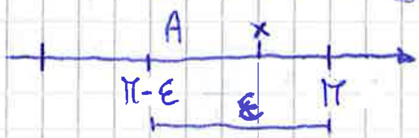
posto $A\subset\mathbb{R}$, sup. limitato, $\sup A = M$

M è sup A se e solo se:

- $\forall x \in A$, $x \le M$ → "M è maggiorante di A"
- $\forall \varepsilon < M$, $\exists x \in A$ tale che $x > M-\varepsilon$

"M è il + piccolo dei maggioranti"

"non esistono maggioranti + piccoli di M"



se "A non è sup. limitato" → $\sup A = +\infty$

($\max A = +\infty$ NO!)

assioma di completezza di $\mathbb{R}$ (proprietà di $\mathbb{R}$)

ogni sottoins. di $\mathbb{R}$ sup. limitato ha sempre l'estremo sup.
(= "la retta è completa")

$\mathbb{Q}$ non è completo

in $\mathbb{Q}$ $\exists$ insiemi sup. limitati che non hanno il sup

es. $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$

sup. limitato $\to$ maggioranti: 4, 10, ...

estremo sup $\to \sqrt{2}$ ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

FUNZIONI

X e Y insiemi

funzione f da X in Y è una legge che associa a ogni elemento di X un elemento di Y

$f: X \to Y$

X "dominio di f" = dom(f) è il + grande sottoinsieme di X che ha senso (= è possibile) calcolare f

[$f: X \to Y$ sottointende $f: \mathrm{dom}(f) \subset X \to Y$]

es. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathrm{dom}(f) = [0, +\infty]$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

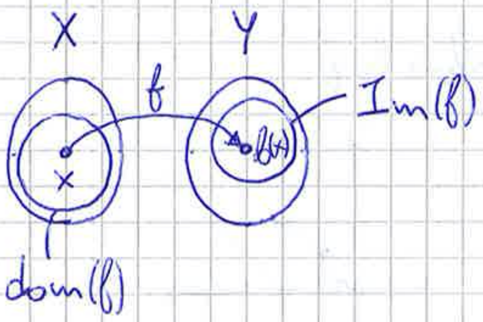


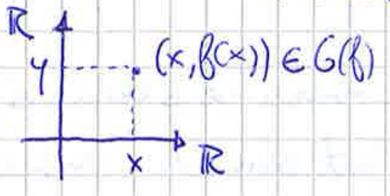
grafico di una funzione

$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in dom(f)\}$

es. $f(x) = x^2$ $\quad (3,9) \in G(f)$

$(2,5) \in X \times Y$ ma $\notin G(f)$

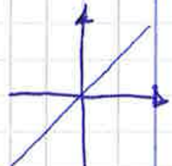
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ("erre due" = coppie di nri = cartesiano = da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ = piano)



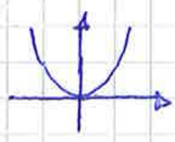
[si può anche da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ = $\mathbb{R}^3$ ma no disegno oltre $\mathbb{R}^3$]

es. $f(x) = (x)$ = identità

$G(f) = \{(x, x) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$; $dom(f) = \mathbb{R}$



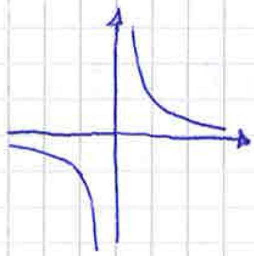
$f(x) = x^2$ $\quad G(f) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad G(f) = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R} \mid x \in dom(f)\}$

$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

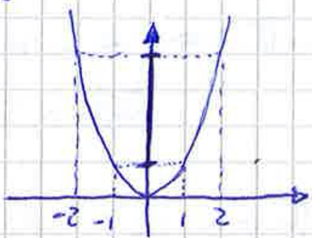


$B \subset Y$

$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ = insieme delle controimmagini di B tramite f

es. $f(x) = x^2$

$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [2,1]$



$f^{-1}(Y) = dom(f)$

$f: X \to Y$ PROBLEMA DELL'ESISTENZA

f si dice suriettiva se: $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$

$Im(f) = Y$

es. $f(x) = 2x+3$ $Im(f) = \mathbb{R}$ → suriett.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ → NO suriett.

$f: X \to Y$ PROBLEMA DELL'UNICITÀ

f si dice iniettiva se: $\forall x_1, x_2$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\forall y \in Im(f)$ $f^{-1}(y)$ ha 1 solo elemento

es. $f(x) = 2x+3$

pongo $f(x_1) = f(x_2)$ → dimostro $x_1 = x_2$

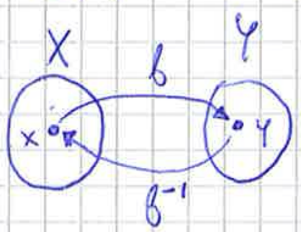
$\cancel{2}x_1 + \cancel{3} = 2x_2 + \cancel{3}$; $x_1 = x_2$ → iniettiva

$f(x) = x^2$

$f^{-1}(9) = \{\pm 3\}$ → NON iniettiva

$dom(f^{-1}) = Im(f)$

$Im(f^{-1}) = dom(f)$



es. $f(x) = x^3$

iniettiva $\rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^3 = x_2^3$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

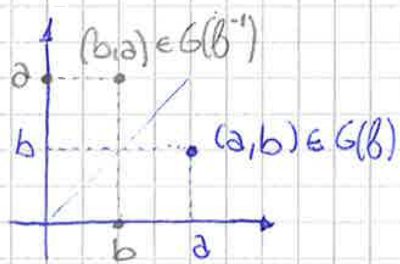
$f^{-1}(8) = 2 \rightarrow f(2) = 8$

grafico di f^{-1}

$G(f^{-1}) = \{(b,a) \in X \times Y \,/\, (a,b) \in G(f)\}$

$(a,b) \in G(f) \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$

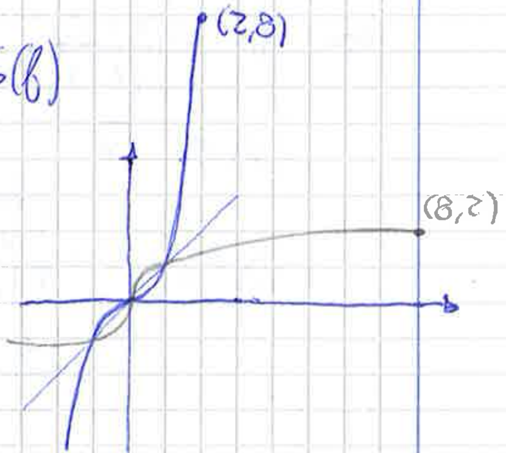
quindi $(b,a) \in G(f^{-1})$



$G(f^{-1})$ simmetrico rispetto $\boxed{y = x}$ a $G(f)$

es. $f(x) = x^3$ $\quad (2,8) \in G(f)$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad (8,2) \in G(f^{-1})$



es. $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=\frac{1}{y}$ $\qquad dom(f) = x \geq 0 \quad dom(g) = y \neq 0$

$dom(f \circ g) = dom\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = x > 0$

$f(g(x)) = \frac{1}{y} \to \sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$g(f(x)) = \sqrt{x} \to \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(g(x))$ non è sempre $= g(f(x))$

$f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = \sin x - 4$

$g(f(x)) = \sqrt{x} \to \sin\sqrt{x} - 4$

$f(g(x)) = \sin x - 4 \to \sqrt{\sin x - 4}$ < 0 NO

se $\boxed{f \text{ e } g}$ iniettiva $\to \boxed{(g \circ f)}$ iniettiva

$\downarrow$

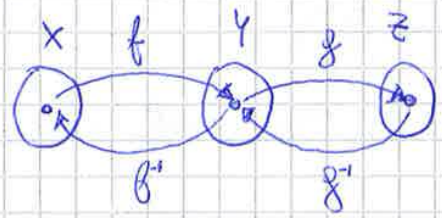
$(g \circ f)$ ha inversa

$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})$

Dim. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

iniettività di $g \to f(x_1) = f(x_2)$

iniettività di $f \to x_1 = x_2$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$

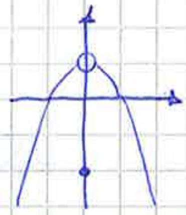
f **crescente** su I se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

strettamente crescente se $f(x_1) < f(x_2)$

f **decrescente** su I se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

strettamente decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$

es. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \neq 0 \\ -2 & x = 0 \end{cases}$



$\sup_{\mathbb{R}} f(x) = 1$

$\nexists \max_{\mathbb{R}} f(x)$

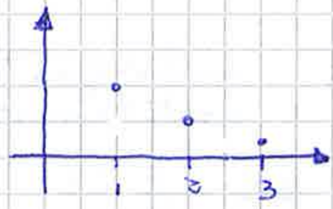
SUCCESSIONI

= funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (= definite solo sui naturali dom$(f) = \mathbb{N}$ o un suo sottoins infinito del tipo $\{k, k+1, k+2\}$)

a_n "termine generale" $\to$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$
a_1 a_2 a_3 (= "a con 3")

es. $a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$



proprietà $P(n)$ é vera definitivamente:

se $P(n)$ é vera $\forall n \geq n_0$ = se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $P(n)$ vera $\forall n \geq n_0$

= se é vera da n_0 in poi

= se $P(n)$ é vera tranne che x 1 nro finito di n

es. $a_n = \frac{1}{n}$ definitivamente $< \frac{1}{1000}$ $\to$ vera per $n \geq 1001$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, $n > 1000$

[se fosse per $n \leq 1001$ falsa x le infinite n x cui falsa]

$a_n = \sin(n) + \frac{n}{1000}$ $P(n)$ é definitivam. positiva

se $n_0 = 3000$ $\to$ $\sin n > -\frac{3000}{1000}$ -3 $\to$ vera

Def. sia a_n una successione
se $\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M$ definitivam. si dice $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$

es. $a_n = -\sqrt{n}$
$\lim_{n \to \infty} -\sqrt{n} = -\infty$; $-\sqrt{n} \leq M$ definitivamente?
fisso M: se $M > 0 \to -\sqrt{n} \leq M \ \forall n$
se $M < 0 \to +\sqrt{n} \geq -M$
$n \geq (-M)^2 \to$ vero def

Def. successione crescente (decrescente) se $a_n < a_{n+1}$ ($>$) $\forall n$ — $a_n \nearrow$ ($a_n \searrow$)

es. $\frac{n}{n+1}$ crescente $\to$ $n=1$ $\frac{1}{2}$ $<$ $n=2$ $\frac{2}{3}$

se successione cresce - decresce sempre $\to$ monotona

Teorema sia a_n successione crescente (decrescente) $\longrightarrow$
allora $\lim_{n \to \infty} a_n$ esiste
ed è uguale a $\sup_n a_n$ ($\inf_n a_n$)
finito o infinito

(se non è finito $\lim_{n \to \infty} a_n \to \sup_n n^2 = +\infty$)

coroll. se a_n crescente e $\sup_n a_n < +\infty$ (="è limitato")
allora a_n ha limite finito
a_n successione limitata superiormente $\longrightarrow$

quindi: ogni successione crescente e superiorm. limitata
ha limite finito

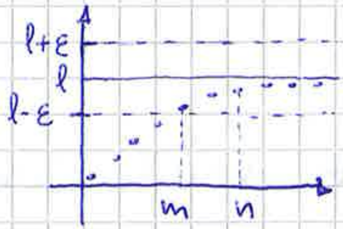
ogni success. monotona e limitata ha $\sup a_n = l$

a_n crescente x Ip $\rightarrow a_n \geq a_m \ \forall n \geq m$

$\downarrow$

$\exists m$ tale che $l - \varepsilon < a_m < a_n < l + \varepsilon$

quindi $|a_n - l| < \varepsilon$ per $\forall n \geq m$



es. $a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$

non è limitata

$\lim_{n \to \infty} a_n = l = 1$ x assurdo

$|(-1)^n - l| < \varepsilon$ se n pari $|1-1| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon$ vera

con $\varepsilon > 0$ se n dispari $|-2| < \varepsilon$, $2 < \varepsilon$ falsa se $\varepsilon = 1$

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$ crescente xk $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow 2 < \frac{9}{4}$

quindi limitata $= e$

numero di Nepero ($e = 2,718\dots$)

è il lim della successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left[\begin{array}{l} \ln = \log \\ \mathrm{Log} \rightarrow \log_{10} \end{array}\right]$$

es. $a_n = 2^n \sin(n\frac{\pi}{2})$ non ha lim

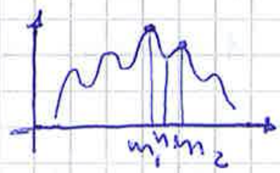
Dim. $a_{n_k} = a_{2n} = 2^{2n} \sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) = 2^{2n} \cdot 0 = 0 \to$ tende a 0

$a_{n_k} = a_{2n+1} = 2^{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \pm 2^{2n+1} \to$ tende $\pm\infty$

Teorema da ogni successione si può estrarre una sottosuccess. monotona

Dim. a_m = "picco x la successione"

$a_n \leq a_m \quad \forall n > m$



se $\exists\ \infty$ picchi $\to a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_3} \dots$

sottosuccessione decrescente $\to$ monotona

se $\exists$ nro finito di picchi

sia a_m l'ultimo picco

infatti a_{m+1} non è picco

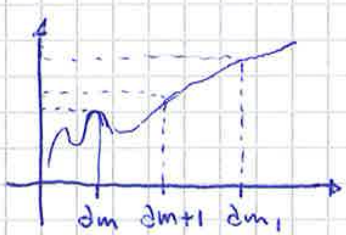
xk $\exists\ m_1 > m+1$ tale che $a_{m_1} > a_{m+1}$

neanche a_{m_1} è picco

xk $\exists\ m_2 > m_1$ tale che $a_{m_2} > a_{m_1}$

allora $a_m < a_{m+1} < a_{m_1} < a_{m_2} < \dots$

sottosuccess. crescente $\to$ monotona



a_n successione $\to \infty$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{numero}}{a_n} = 0$

$a \in \mathbb{R}$

- $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \to -1 < a < 1 \to a = \pm\frac{1}{x} = \pm\frac{1}{x^\infty} = 0 \\ \nexists & \text{se } a < -1 \end{cases}$

es. -2^n = n pari $4, 16, \ldots \to +\infty$

n dispari $-2, -8, \ldots \to -\infty$

1 sottosuccess $\to +\infty$, altra $\to -\infty$
quindi $\nexists$ lim.

es. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+5}{4n^2-6n+1} = \frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{4}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{7^n\left(1+\left(\frac{2}{7}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$

Def. dato $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

con $\forall \varepsilon > 0$, → (è 1 distanza, x forza > 0)

se $\exists n_0$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ è definitivamente vera $\forall n > n_0$

scrivo con intorni: $|a_n - l| <$ → $a_n \in I_\varepsilon(l)$

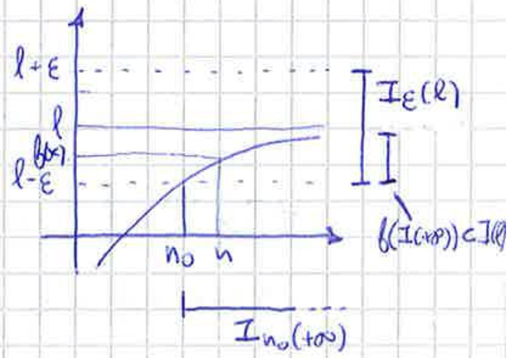
$n > n_0$ → $n \in (n_0, +\infty)$ → $n \in I_{n_0}(+\infty)$

dato $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

con $\forall \varepsilon > 0$

se $\exists n_0$ tale che $n \in I_{n_0}(+\infty)$

allora $a_n \in I_\varepsilon(l)$



generalizzando

$\forall I(l)$, $\exists I(+\infty)$

tale che $n \in I(+\infty) \Rightarrow a_n \in I(l)$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

Def. generale $\lim f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ → $\forall I(l)$ $\exists I(+\infty)$

tale che $f(I(+\infty)) \subset I(l)$ → "l'immagine dell'$I(+\infty)$ è sottoinsieme dell'$I(l)$"

= tale che $x \in I(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I(l)$

es. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, verifica $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

$\forall I(1)$ $\exists I(+\infty)$ t. che $f(I(+\infty)) \subset I_\varepsilon(1)$

= $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \pi$ t. che $x \in I_\pi(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(1)$

= $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \pi$ t. che $x > \pi \Rightarrow 1-\varepsilon < f(x) < 1+\varepsilon$

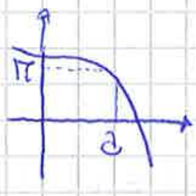
$\Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$ →

Def. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall I_\pi(-\infty) \quad \exists I_a(+\infty)$ tale che $x \in I_a(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\pi(-\infty)$

$\forall \pi \quad \exists a$ tale che $x > a \Rightarrow f(x) \in (-\infty, \pi)$

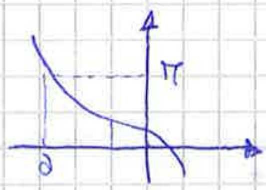
$f(x) < \pi$



Def. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\forall I_\pi(+\infty) \quad \exists I_a(-\infty)$ tale che $x \in I_a(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\pi(+\infty)$

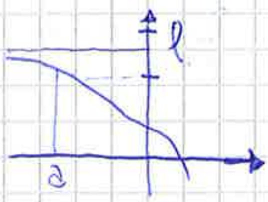
$\forall \pi \quad \exists a$ tale che $x < a \Rightarrow f(x) > \pi$



Def. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad \ell \in \mathbb{R}$

$\forall I_\varepsilon(\ell) \quad \exists I_a(-\infty)$ tale che $x \in I_a(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

$\forall \varepsilon \quad \exists a$ tale che $x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



Def. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\forall I_\pi(-\infty) \quad \exists I_a(-\infty)$ tale che $x \in I_a(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\pi(-\infty)$

$\forall \pi \quad \exists a$ tale che $x < a \Rightarrow f(x) < \pi$

es. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$\forall I_\varepsilon(4) \quad \exists I_\delta(2)$ tale che $x \in I(2) \setminus \{2\} \Rightarrow f(x) \in I(4)$

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta$ tale che $x \in (2-\delta, 2+\delta) \neq 2 \Rightarrow f(x) \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$

$|x-2| < \delta \quad \neq 2$

$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

(così x non può essere 2)

$|x^2-4| < \varepsilon \;;\; |(x+2)(x-2)| < \varepsilon \;;\; |x+2||x-2| < \varepsilon$

MAGGIORAZIONE $\to 1 < x < 3$

$|x+2||x-2| \leq 5|x-2|$

$|x-2||x+2| \leq 5|x-2| < \varepsilon$

$|x-2| < \boxed{\frac{\varepsilon}{5}}\ \delta \to$ dipende da ε

$I_\delta(2) = I_{\frac{\varepsilon}{5}}(2)$

definizioni di limiti al finito

Def. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R}$

$\forall I_\varepsilon(l) \quad \exists I_\delta(x_0)$ tale che $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta$ tale che $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \neq x_0$

$x_0-\delta < x < x_0+\delta \quad \neq x_0$

$|x-x_0| < \delta \quad \neq x_0$

$0 < |x-x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Def. funz. continua

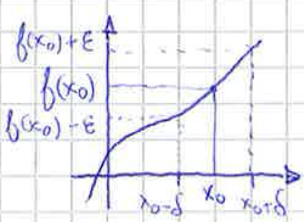
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall I_\varepsilon(f(x_0))\ \exists I_\delta(x_0)$ tale che $x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \in I f(x_0)$

tale che $f(I(x_0)) \subset I(f(x_0))$

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta$ tale che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

↓



- inutile $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ xk se continua x definita in x_0, $x_0 \in dom(f)$
- $f(x) \in I f(x_0)$ sempre verificata se $x = x_0$; $f(x_0) \in I(f(x_0))$

se invert quantificatori, cambia significato:

$\exists I_\delta(x_0)\ \forall I_\varepsilon(f(x_0)) \quad x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$

$\exists \delta \quad \forall \varepsilon \qquad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

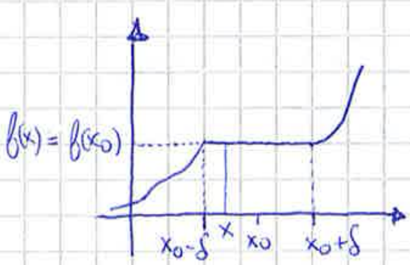
↓

$f(x) - f(x_0)$ sicuramente $< \forall \varepsilon$

solo se $f(x) = f(x_0)$, $0 < \varepsilon$

se $f(x) = f(x_0)$ in tutto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

allora $f(x)$ costante in $I_\delta(x_0)$



Def. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

$\forall I_\varepsilon(\ell) \quad \exists I_\delta^+(x_0)$ tale che $x \in I_\delta^+(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta$ tale che $x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

$x_0 < x < x_0+\delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

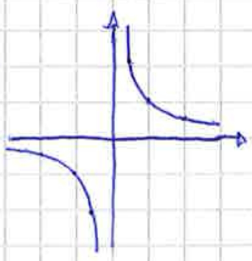
Def. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

$\forall I_\varepsilon(\ell) \quad \exists I_\delta^-(x_0)$ tale che $x \in I_\delta^-(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta$ tale che $x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

$x_0-\delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

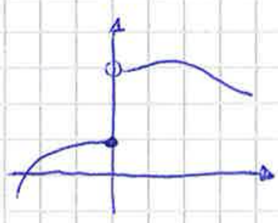
es.



continua x^{ke} per $x=0$ $\nexists$ la funzione, $x=0 \notin$ dom

$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



discontinua

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$

$\downarrow$

CONTINUITÀ UNILATERALE

se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \rightarrow$ continua da sinistra

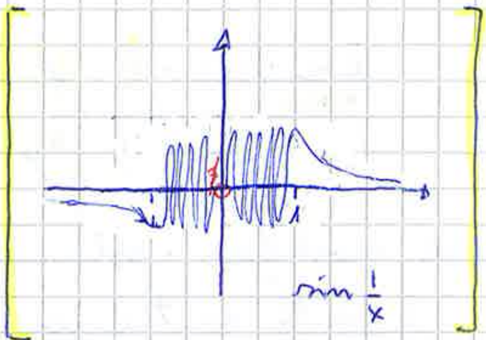
se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \rightarrow$ continua da destra

$y_n \to +\infty \quad y_n = (2n+1)\pi$

$\lim_{n\to\infty} \cos(2n+1)\pi = -1$

$\lim_{n\to\infty} x_n \neq \lim_{n\to\infty} y_n \to \nexists \lim_{x\to+\infty} \cos x$

es. $\nexists \lim_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$



$x_n \to 0^+ \quad x_n = \frac{1}{n\pi}$

$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$

$y_n \to 0^+ \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

$\lim_{n\to\infty} x_n \neq \lim_{n\to\infty} y_n \to \nexists \lim_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$

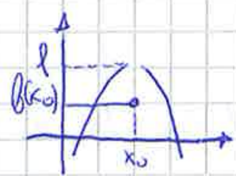
limite unico $\to \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

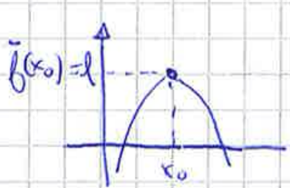
f continua $\to \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) = l$

es. $f(x) \begin{cases} 3+x^2 & x>0 \\ 3\cos x & x\leq 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} 3+x^2 = 3$

$\lim_{x\to 0^-} 3\cos x = 3$

es.





→ modifica di f

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\quad$ $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$\bar{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ → estensione per la continuità

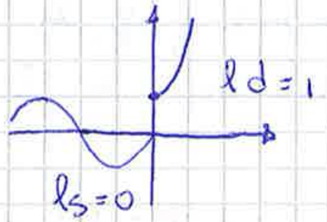
- salto (discontinuità I specie)

$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono, finiti ma diversi

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_s \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_d$

salto $= |l_s - l_d|$ → discontinua

es. $f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$



I salto

$\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$ → discontinua

se fosse $f(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$

f continua xk $0 \notin dom(f)$

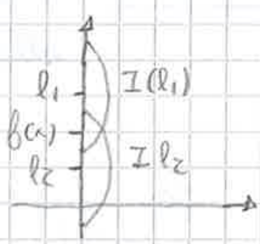
0 non considerato x continuità

suppongo $l_1 > l_2$: $l_2 - \varepsilon < l_1 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon < l_1 + \varepsilon$

risulta $f(x) \in I_\varepsilon(l_1) \cap I_\varepsilon(l_2)$

↓

NO xk supposti disgiunti



Teorema permanenza del segno

se $\lim_{x \to c} f(x) = l$ con $l > 0$ oppure $l = +\infty$

allora $\exists$(un intorno di c dove) f è positiva

↓

prop. locale

$\exists I(c)$ tale che $\forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) > 0$

Dim. $\lim_{x \to c} f(x) = l > 0 \quad l \in \mathbb{R}$

$\forall I(l) \ \exists I(c)$ tale che $x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

scelgo $I(l)$ # contenuto in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

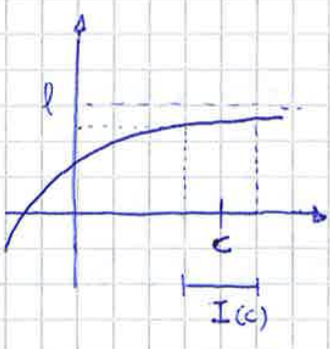
↓

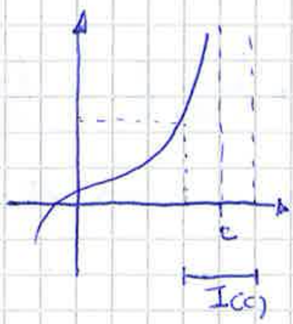
$I_{\frac{l}{2}}(l) \ \exists I(c)$ t.c. $x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I_{\frac{l}{2}}(l)$

$f(x) \in \left(l - \frac{l}{2}, l + \frac{l}{2}\right)$

$f(x) \in \left(\frac{l}{2}, \frac{3}{2} l\right)$

x Hp # $I(l) > 0 \to 0 < \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2} l$





es. $\lim_{x \to 5} f(x) = 3 \to f(5) = 3 > 0$

allora $\exists I(5)$ tale che $f(x) > 0 \quad x \in I(5)$

$\forall I(3) \ \exists I(5)$ tale che $x \in I(5) \Rightarrow f(x) \in I(3)$

$I_{\frac{1}{2}}(3) \qquad \Rightarrow f(x) \in I_{\frac{1}{2}}(3)$

$\frac{5}{2} < f(x) < \frac{7}{2}$

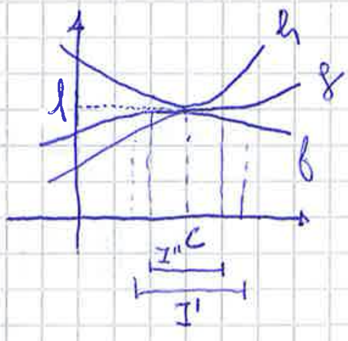
Teorema del confronto

se f, g, h definite in $I(c) \setminus \{c\}$,

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

e $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$

allora $\lim_{x \to c} g(x)$ esiste $= l$



Dim. $\lim_{x \to c} f(x) = l \to \forall I_\varepsilon(l) \ \exists I'(c)$ tale che $x \in I'(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\lim_{x \to c} h(x) = l \to \forall I_\varepsilon(l) \ \exists I''(c)$ tale che $x \in I''(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$f(x) \to \ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$h(x) \to \ l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

prendo $x \in I'(c) \cap I''(c) \setminus \{c\}$

$l - \varepsilon \underset{\substack{\text{vera} \\ \text{xk } x \in I'(c)}}{\boxed{<}} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \underset{\substack{\text{vera} \\ \text{xk } x \in I''(c)}}{\boxed{<}} l + \varepsilon$

$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \ ; \quad -\varepsilon < g(x) - l < \varepsilon$

$|g(x) - l| < \varepsilon$

$g(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\lim_{x \to c} g(x) = l$

dati: $\lim_{x \to c} f(x) = l$ $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$

- $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = +l \cdot \pm\infty = \pm\infty$

  $-l \cdot \pm\infty = \mp\infty$
- $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{\pm\infty} = 0$
- $\lim_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\pm\infty}{l} = \pm\infty$

dati: $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to c} g(x) = 0^{\pm}$

- $\lim_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \boxed{\dfrac{0^{\pm}}{\pm\infty}} = \boxed{0}$
- $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\pm\infty}{0^{+}} = \boxed{\pm\infty}$

  $\dfrac{\pm\infty}{0^{-}} = \boxed{\mp\infty}$

forme indeterminate:

$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\dfrac{0}{0}$ $(+\infty - \infty)$ $(0 \cdot \infty)$ 0^0 1^{∞} ∞^0

es. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

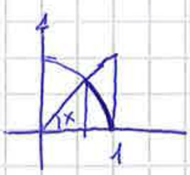
$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{x - \frac{\pi}{2}} = \dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dim. considero solo $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$, xk $\frac{\sin x}{x}$ é pari



$[f(x) = f(-x) \to$ pari
simmetrica rispetto $y]$

$\sin x < \text{arco } x < \tan x$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\cos x \to 1$, $1 \to 1$, quindi $\frac{\sin x}{x} \to 1$ x teorema del confronto

- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Dim. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim_{x \to 0} 1^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Dim. $\frac{1}{x} = y$ $\quad x \to 0$, $y \to +\infty$ $\quad \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

Teorema continuità delle funzioni composte

se f continua in un punto x_0 → (deve avere senso calcolare $f(x_0)$ e g in $f(x_0)$)
e g continua in $f(x_0)$
allora $g \circ f$ è continua in x_0

Dim. $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ xke continua x hp

$f(x) = y$

$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$ xke g continua x hp

regola della sostituzione

PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI CONTINUE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

ZERI della funzione

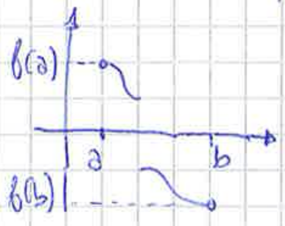
= $c \in \mathbb{R}$ è zero di f se $f(c) = 0$
specificare in quale intervallo sono gli zeri

es. $f(x) = \sin x$ infiniti zeri in $\mathbb{R}$
3 zeri su $[0, 2\pi]$
$\sin x = 0 \quad x = \pi + k\pi$

se f strettamente monotona $\Rightarrow$ f iniettiva
se iniettiva α (zero della funz.)
ha al più una controimmagine

es. $f(x) = e^x + x - 2\cos x$ su $[0,1]$
f continua xk somma funz. continue
$f(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$
$f(1) = e + 1 - 2\cos(1) = 3,7... - 2$ al max > 0
esiste almeno 1 zero in $(0,1)$
somma di 3 f crescenti $\to$ $f(x)$ crescente, monotona
esiste 1 solo zero in $(0,1)$

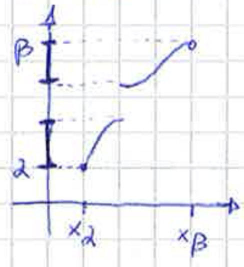
$f(x)$ dev'essere continua, altrimenti esist. zeri falso



Teorema dei valori intermedi

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
se f assume 2 valori $\alpha < \beta$
allora assume tt valori fra α e β $[\alpha, \beta]$

es. se $f(x)$ non continua, Th falso



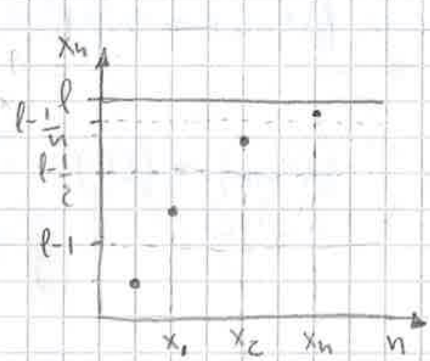
es. $f(x) = \sin x \quad I = (0, 2\pi) \quad f(I) = [-1, 1]$

$I = (0, \frac{\pi}{2}) \quad f(I) = (0, 1)$

[proprietà successioni
sia $A \subset \mathbb{R}$
allora $\exists$ una successione x_n di punti di A
tale che $\lim_{x \to \infty} x_n = \sup A$

Dim. suppongo $\sup A = l < \infty$ (= finito)
se $l \in A$, prendo successione costante $x_n = l \ \forall n$
$\Downarrow$
l è $\max A$
se $l \notin A$, prendo $l - 1 \to \exists x_1 \in A : x_{(1)} > l - 1$
$\Downarrow$
l è $\sup A$ prendo $l - \frac{1}{2} \to \exists x_2 \in A : x_{(2)} > l - \frac{1}{2}$
prendo $l - \frac{1}{n} \to \exists x_n \in A : x_{(n)} > l - \frac{1}{n}$

$l - \frac{1}{n} < x_n < l$
per $n \to \infty$
$l \to l \leftarrow l$ x th. confronto
$x_n \to l$]



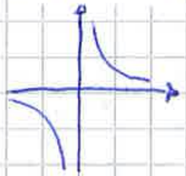
Teorema di Weierstrass

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua
allora assume in $[a, b]$ valore massimo $\to \exists x_M : f(x_M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$
e valore minimo $\to \exists x_m : f(x_m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$

$f([a, b])$ è I chiuso $= [m, M] = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$

corollario

di solito se f strettam. monotona $\Rightarrow$ f iniettiva

($\not\Leftarrow$)  f monotona sempre decresc. ma f NON iniettiva

ma se f strettam. monotona e f continua $\Big\}$ $\Leftrightarrow$ f. iniettiva

continuità della funzione inversa

se f strettam. monotona e continua $\Leftrightarrow$ f iniettiva

$\downarrow$

allora esiste f^{-1}, ed è continua

$f = O(g)$ per $x \to x_0$ se $\exists\, C$ (costante) : $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

SIMBOLI DI LANDAU

x confronto locale di funz. (= in un intorno (c))

$f, g : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

x confrontare f e g $\to$ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g $\to$ tendono tt e 2 a 0 o a ∞)

$\sim$ = "equivalente"

f è equivalente a g se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\to$ $f \sim g$ per $x \to c$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \sin x \sim x$ per $x \to 0$

o = "o piccolo"

"f è o piccolo di g" = f è trascurabile rispetto g

se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\to$ $f = o(g)$ per $x \to c$

algebra degli o piccoli:

- $o(\alpha f) = o(f) \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

es. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = 0 \qquad \sin x = o(3\sqrt{x})$
$\sin x = o(\sqrt{x})$

- $f = o(1)$ per $x \to c$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{1} = 0$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = 0$

una f che tende a 0 si dice "o piccolo di 1"

- $x^n = o(x^m)$ per $\boxed{x \to 0}$, $m < n$

es. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4}{\sin^2 x} = \frac{x^2(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1 \qquad x^4$ inutile, quel che resta tende a 0

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4}{\sin^2 x} = \frac{x^2+o(x^2)}{\sin^2 x} = 1 \qquad x^4 = o(x^2)$

- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$ per $x \to 0$

Dim. $\left.\begin{array}{l} \frac{f}{x^n} \to 0 \ \times \text{Hp} \\ \frac{g}{x^n} \to 0 \ \times \text{Hp} \end{array}\right\} \frac{f+g}{x^n} \to 0$

es. $\lim_{x\to 0} 3x + 4x^2 + 5x^3 + 7x^{12} = 3x + 4o(x) + 5o(x) + 7o(x) =$
$= 3x + o(x) + o(x) + o(x) = 3x + o(x)$

- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^m)$ per $x \to 0$, $m < n$

es. $o(x^2) - 7o(x^5) = o(x^2)$

- $x^k \cdot o(x^n) = o(x^{k+n})$ per $x \to 0$

Dim $\frac{x^k \cdot f(x)}{x^{k+n}} = \frac{x^k}{x^k} \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow{\ \frac{f(x)}{x^n} \to 0 \times \text{Hp}\ } 0$

- $\lim_{\boxed{x\to0}} \frac{e^x-1}{x} = 1 \to e^x - 1 \sim x$

$e^x - 1 = x + o(x)$

$e^x = x + 1 + o(x)$

- $\lim_{\boxed{x\to0}} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \to \log(1+x) \sim x$

$\log(1+x) = x + o(x)$

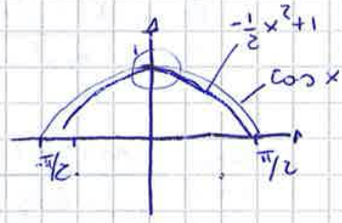
- $\lim_{\boxed{x\to0}} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \to \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x} = 1 \to (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(\cancel{\alpha} x)$; $(1+x)^\alpha = \alpha x + 1 + o(x)$

$(1+x)^\alpha = \alpha x + 1 + o(x)$

es. $\cos x = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + o(x)$

nell' $I(0)$ $\cos x$ simile a parabola $-\frac{1}{2}x^2+1$



$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x + 1 + o(x)$

o piccoli con regola di sostituzione

es. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$; se $f(x)\to0$, $f(x)=y$; $\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = 1$; $\sin f(x) \sim f(x)$

$\sin f(x) = f(x) + o(f)$

es. $\lim_{x\to0} e^{5x}$; $5x\to0$, $5x=t$; $\lim_{x\to0} e^t = \lim_{t\to0} 1 + t + o(t) = \lim_{x\to0} 1 + 5x + o(x)$

es. $\lim_{x\to0} \sqrt{1-3x^2}$; $3x^2\to0$, $3x=t$; $\lim_{t\to0}(1-t)^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to0}\frac{1}{2}t + 1 + o(t) =$

$= \lim_{x\to0} -\frac{1}{2}\cdot 3x^2 + 1 + o(x^2)$

$$\left[o(x+o(x)) = o(x) \quad \text{xk } f = g + o(g) \rightarrow x = x + o(x) \atop f \sim g \right]$$

es. $e^{\sin x}_{x\to 0} \rightarrow \sin x \to 0$

$e^t = t + 1 + o(t)$; $e^{\sin x} = \sin x + 1 + o(\sin x) = x + 1 + o(x)$

$e^{x+o(x)}$

$x + o x \to 0$

$e^t = t + 1 + o(t)$; $e^{x+o(x)} = x + o(x) + 1 + o(x + o(x)) = x + o(x) + 1$

$e^{\cos x}_{x\to 0} \rightarrow e^{\cos x - 1 + 1} = e^{\cos x - 1} \cdot e$

$\cos x - 1 \to 0$

$e^t = t + 1 + o(t)$; $e e^{\cos x - 1} = e(\cos x - \cancel{1} + \cancel{1} + o(\cos x - 1))$

$= e\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1 + o(x^2) + o\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right) =$

$= e\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1 + o(x^2)\right) = -\frac{e}{2}x^2 + e + o(x^2)$

$\log(2+x)_{x\to 0} \rightarrow \log\left(2 \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) =$

$\frac{x}{2} \to 0$

$\log(1+t) = t + o(t)$; $\log 2 + \frac{x}{2} + o(x)$

infiniti e infinitesimi

una funz si dice infinitesima / infinito per $x \to c$ o in c

se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ / se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$

$f = o(1)$

confronti tra infinitesimi

se f, g infinitesime in $c \rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to c} g(x) = 0$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad f \sim g$ (se infiniti, g ordine superiore!)

$= 0 \quad f = o(g) \rightarrow f$ ordine superiore rispetto a g

$= l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ f, g infinitesime dello stesso ordine

= tendono a 0 nello stesso modo

es. $f = 1-\cos x$ $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{(x)^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}x^2$ parte princ di $1-\cos x$ per $x \to 0$

$\varphi = x$

trova ordine di infinitesimo e parte princ. rispetto $\varphi(x) = x$ di $f(x) = \sin x - \tan x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^\alpha} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}(\cos x - 1)}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \; (\cos x - 1)}{\cos x \; x \;\; x \cdot \boxed{x^2}} = 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = 3 \to$ ordine infinitesimo $= 3$

parte princ. $\to -\frac{1}{2} \cdot x^3 = -\frac{x^3}{2}$

quindi $\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$

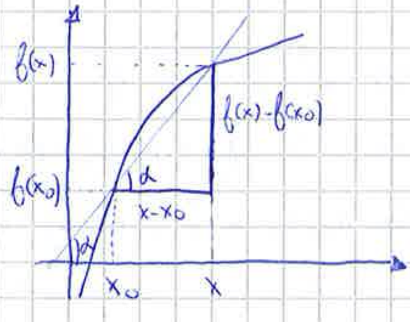
CALCOLO DIFFERENZIALE

Def. $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo e $x_0 \in I$,

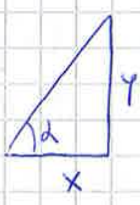
se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esiste ed è finito $= \boxed{l}$:

allora f è derivabile in x_0,

il valore del limite è la DERIVATA di f in $x_0 \to f'(x_0)$, $D(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$



$f'(x)$ è rapporto dei cateti



$\frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$

coeff. angolare = pendenza della retta $= \tan\alpha$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = rapporto incrementale

pendenza della retta che passa per $(x_0, f(x_0))$ $(x, f(x))$

Def. la retta $r(x)$ tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$
è 1 sola ed è $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

se non interessa uno specifico x_0, uso generico x:
Def. la derivata di $f = f'(x)$
è una nuova funzione, definita da $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$
se $f'(x)$ esiste ed è finito
e se f è derivabile in tt i punti del suo dom

proprietà
se f DERIVABILE $\Rightarrow$ f CONTINUA in x_0

Dim. f derivabile $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
ma anche $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}$
se $x \to x_0$
tende a $0 \to o(1)$

quindi $f(x) = f(x_0) + \boxed{o(1)} \to$ trascurabile
$f(x) = f(x_0) \to$ condizione x essere continua

algebra delle derivate
siano f, g derivabili in x; a e $b \in \mathbb{R}$

- $(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$

linearità della derivata
xk il lim della somma di rapp. incrementi
è la somma dei limiti
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

- $f(x) = ax \quad f'(x) = a$

Dim. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{ax} + a\cancel{h} - \cancel{ax}}{\cancel{h}} = a$

- $f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

Dim. $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h =$

$= \sin x\left(1 - \underbrace{\frac{h^2}{2}}_{o(h)} + o(h)\right) + \cos x \left(h + o(h)\right)$

$= \sin x + o(h) + \cos x\, h + o(h) = \sin x + \underbrace{\boxed{\cos x}}_{f'(x)} h + o(h)$

- $f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$

Dim. $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h = \cos x\left(1 - \underbrace{\frac{h^2}{2}}_{o(h)} + o(h)\right) - \sin x (h + o(h))$

$= \cos x \underbrace{\boxed{-\sin x}}_{f'(x)} h + o(h)$

- $D(g \circ f) = g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

con f derivabile in f
e g derivabile in $f(x)$

Dim. $g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(h)}_{0 \text{ per } h \to 0}) = g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + o(h)) + o(f'(x)h + o(h)) =$

$\left(f(x + \underbrace{h}_{0}) = f(x) + f'(x)h + o(h)\right)$

$= g(f(x)) + \underbrace{g'(f(x))f'(x)}_{g(f(x))'} h + \underbrace{g'(f(x))o(h) + o(f'(x)h + o(h))}_{\text{nro}\cdot o(h) + o(\text{nro}\cdot h + o(h)) = o(h)}$

- $D(e^{-x}) = e^{-x} \cdot -1 = \boxed{-e^{-x}}$

- $D(\arctan y) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Dim. $x = \arctan y \to f^{-1}$ $\quad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{f'(\tan x)} =$

$y = \tan x \to f$

$y' = 1 + \tan^2 x \to f'$ $\quad = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \dfrac{1}{1+y^2}$

- $D(\arcsin y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dim. $x = \arcsin y \to f^{-1}$ $\quad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(\sin x)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)} =$

$y = \sin x \to f$

$y' = \cos x \to f'$ $\quad = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

xk arcsin su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, il cos su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è positivo

- $D(\arccos) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $D(\sinh x) = D\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$

- $D(\cosh x) = D\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{x}) = \sinh x$

- $D(\tanh x) = D\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} =$

$= 1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

oppure $\dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

prop. f è derivabile in x_0 se f è derivabile da dx e da sx in x_0 e le derivate coincidono

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad = \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

es. $f(x) \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ 1 + x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ continue in 0 $\quad f'_+(x_0) = 2x \quad f'_+(0) = 0$ $\quad f'_-(x_0) = -\sin x \quad f'_-(0) = 0$ $\to$ derivabile in 0

$\exists$ funzioni continue $\not\Rightarrow$ NON derivabili

es. $f(x) = |x| \quad f(x) \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \to$ continua in 0

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{|x| - 0} = \frac{|x|}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{|x|} = -\frac{x}{x} = -1$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

f continua in x_0 $\to$ (se f non fosse continua in x_0 non avrebbe senso calcolare $f'(x_0)$)

ma $\boxed{\nexists\, f'(x_0)}$

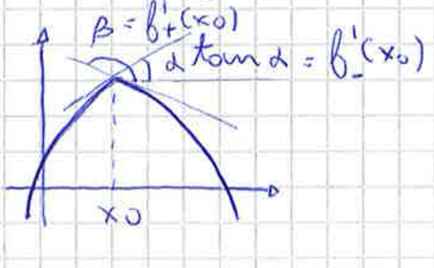
- punto angoloso

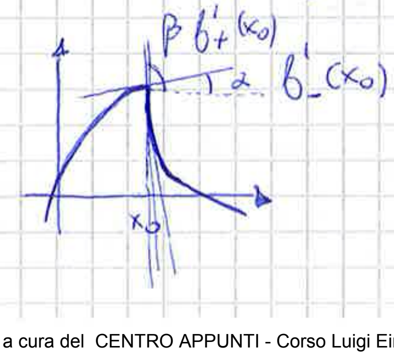
$\exists f'_+(x_0) \neq \exists f'_-(x_0)$

in x_0 c'è 1 tangente da dx e 1 da sx diverse $\quad$ es. $f(x) = |x|$

$\exists$ 1 derivata finita, l'altra ∞

in x_0 1 tangente + 1 tang verticale dove $f'(x_0) = \infty$





se $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ **NON** basta x affermare f derivabile in x_0
devo controllare continuità in x_0

es. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ x-1 & x\ge 0\end{cases}$ $\quad f'(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0} f'(x)=1$

ma $f(x)$ non è derivabile in 0 xk $f(0^-)=1$, $f(0^+)=-1$

uso derivate x ottimizzazione
= max, min (estremi della funz)

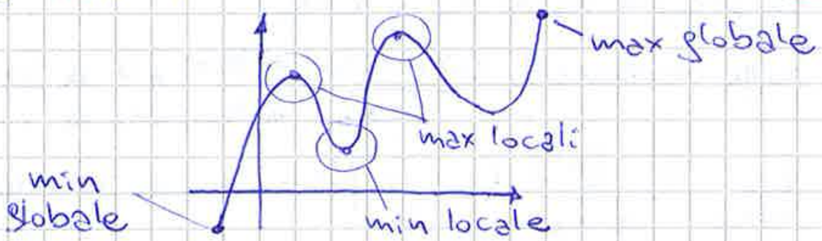
Def. $f: A\to\mathbb{R}$ $\quad A\subset\mathbb{R}$

$x_0\in A$ è minimo locale se $\exists I(x_0) : \forall x\in I(x_0) \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$

(massimo locale) " $\Rightarrow f(x)\le f(x_0)$

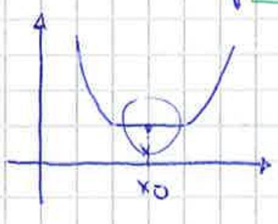
(locale xk non rispetto a tt il dom
ma solo rispetto all'intorno)

se $f(x)>f(x_0)$ $\quad \forall x\in I(x_0)\setminus\{x_0\}$ min locale stretto (forte)
$f(x)<f(x_0)$ max locale stretto (forte)



se $f(x)\ge f(x_0)$ $\quad \forall x \in dom(f)$ $\quad x_0$ è minimo globale
$f(x)\le f(x_0)$ massimo globale

nel tratto piatto x_0 è sia min che max locale



$x\in I(x_0) \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$
ma anche $f(x)\le f(x_0)$

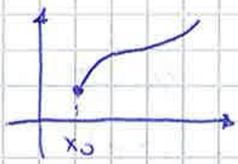
controesempi

se f non fosse definita in $I(x_0)$

$\exists$ solo $I_+(x_0)$

$\exists$ solo $f'_+(x_0) \geq 0$

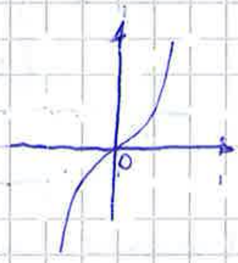
x_0 min o max ?



se x_0 non è estremo locale

anche $f'(x_0)=0$

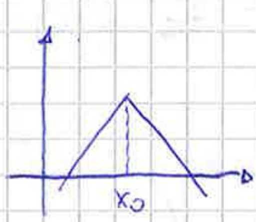
x_0 è p. critico, non estremo



se f non derivabile in x_0

$\nexists f'(x_0)$

ma x_0 è comunque estremo



dove cercare gli estremi

- fra i p. critici $\rightarrow f'(x_0)=0$
- fra i p. di non derivabilità $\rightarrow$ grafico (cuspidi, p. angolosi)
- agli estremi del dom(f)

proprietà globali delle funz. derivabili

Teorema di Rolle ("zeri della derivata")

sia $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$

supposto
- f continua in $[a,b]$ (nei punti interni)
- f derivabile in (a,b) (nei p. interni)
- $f(a)=f(b)$

allora f' ha almeno uno zero in (a,b)

$\exists c \in (a,b) : f'(c)=0$

Teorema di Lagrange

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

supposto
- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in (a,b)

allora $\exists\, c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

significato geometrico:

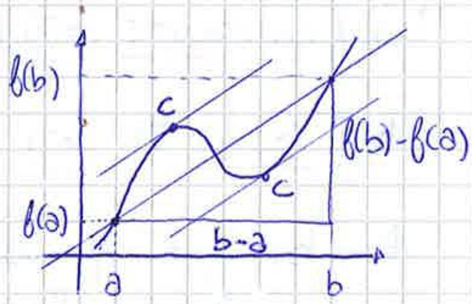
rapporto tra cateti triangolo:

= coeff. angolare della retta $\in (a, f(a))(b, f(b))$

quindi $\exists$ almeno 1 $c \in (a,b)$

la cui tangente abbia $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ossia sia // retta $\in (a, f(a)), (b, f(b))$



Dim. prendo $g: [a,b] \to \mathbb{R}$

annullo dislivello $f(b)-f(a)$ x avere stesso valore agli estremi

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$

retta $y = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{m}(x-a) + \underset{=0}{q}$

$g(x)$ continua $[a,b]$
derivabile (a,b)

xk differenza funz. continue derivabili

verifico che abbia estremi uguali:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 0 = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a)$$

posso applicare Rolle: $\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \; ; \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

2. Teorema

relazione tra monotonia e segno della derivata

sia f derivabile su intervallo I

- f crescente su I, se e solo se $f'(x) \boxed{\geq} 0 \ \forall x \in I$
- f strettamente crescente su I, se $f'(x) \boxed{>} 0 \ \forall x \in I$

Dim. mostriamo $f'(x) \geq 0 \ \forall x$:

$x \in I \rightarrow f(x+h) - f(x)$ (con $h > 0$) ≥ 0

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \left.\begin{matrix} N(x) \geq 0 \\ D(x) > 0 \end{matrix}\right\} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \text{ (permanenza segno)} \rightarrow f'_+(x) \geq 0$$

f derivabile, quindi $f'_+(x) = f'_-(x) \geq 0 \rightarrow f'(x) \geq 0$

mostriamo f crescente:

$x_1 < x_2 \rightarrow$ applico Lagrange su $[x_1, x_2]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \boxed{\geq 0}$$ — xk dimostrato $f'(x) \geq 0$

$N(x)$ $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$; $f(x_2) \geq f(x_1) \rightarrow$ f crescente

$D(x)$ $x_2 - x_1 > 0$ per Hp $x_1 < x_2$

Dim. mostro $f'(x) > 0$:

Lagrange $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

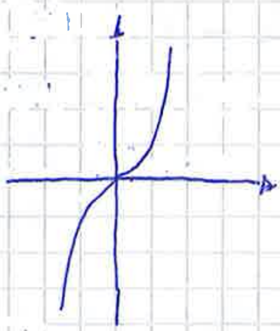
f strettam. crescente

es. $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$

esistono funz. strettam. crescenti

ma con derivata $= 0$



Def. "f di classe C^n"

dato n intero positivo e $I \subset \mathbb{R}$

$C^n(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ è derivabile $\boxed{n}$ volte su I e la $f^{\boxed{(n)}}$ è continua su I $\}$

= insieme di funzioni $f: I \to \mathbb{R}$, derivabili n volte su I la cui derivata nesima è anche continua su I

C^∞ = funz. derivabili ∞ volte (polinomi, e^x, funz. element...) e # derivate son continue

$C^0 = C$ = f è continua (ma f' non è continua)

$C^\infty \subseteq C^n(I) \subseteq \dots C^2(I) \subseteq C^1(I) \subseteq C^0(I)$

Def. D è una funzione, definita su un insieme di funzioni, tale che $D(f) = f'$

es. $D: C^2(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ → se derivo un f di C^2 (derivabile 2volte) è derivabile solo + una volta, $\in C^1$

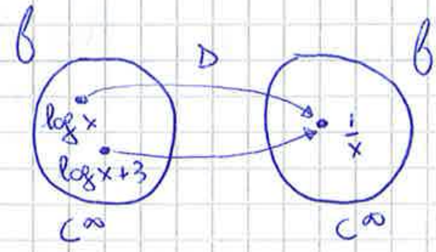
$D: C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$

$D: C^\infty \to C^\infty$

D $\boxed{\text{non}}$ è funzione iniettiva

es. $D(f) = f'$ $\quad D(\log x) = \frac{1}{x}$

$D(f+3) = f'$ $\quad D(\log x + 3) = \frac{1}{x}$



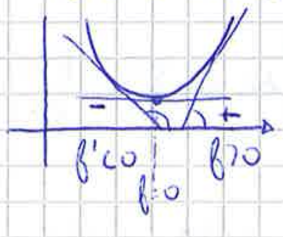
[un polinomio di grado n
può essere derivato ∞ volte
ma alla derivata $f^{(n+1)}$ diventa zero]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 164

esistono f convesse crescenti ⁄ e decrescenti ⁀
concave crescenti ⁄ e decrescenti ⁀

se f derivabile, f convessa → il grafico di f è sopra le tangenti
(concava) (sotto)

se f convessa e derivabile → f' crescente con x crescente
(concava) (decrescente) (decrescente)



Teorema

se f derivabile e f' crescente → allora f convessa
se f derivabile 2 volte e f'' crescente → allora f convessa

punti di flesso: punti in cui f'' cambia segno
= f cambia concavità

es. $f(x) = x^3 - x$

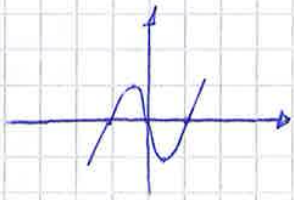
$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f''(x) = 6x$; $f''(0) = 0$

$f''(0) \geq 0$; $x \geq 0$

⊖ ∩ ∪ ⊕

$\boxed{f'' \leq 0}$ 0 $\boxed{f'' \geq 0}$



se x_0 è p. di flesso ⇒ $f''(x_0) = 0$

MA NON tutti i punti in cui $f''(x_0)$ sono flesso

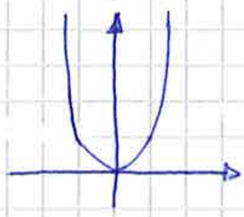
P. FLESSO ⇒ $f''(x_0) = \boxed{0}$

$f''(x_0) = 0$ ⇏ P. FLESSO !!

es. $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

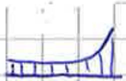
$f''(x) = 12x$; $f''(0) = 0$



ma f(x) sempre convessa
non cambia concavità in x=0

APPROSSIMAZIONE locale di funzioni
(attorno a un punto)

data una f, cerco una funz. g "+ semplice" di f,
tale che la differenza f-g sia "piccola"
differenza = resto R

es. rendere piccolo il $\max|R(x)|$ 
rendere piccola l'area tra f e g 
in media: grafici vicini

approssimazione buona se:

$$f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n) \rightarrow \text{ossia } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

quindi $R = o((x-x_0)^n)$

con $\boxed{n}$ più grande possibile!

g si cerca tra i polinomi di grado n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k} = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

es. $P_n(x) = 2 + 3x$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = 2 + 3(x-4(+4)) = 2+3(x-4)+12 = 14+3x-12 = 2+3x$$

$x_0 = 4$

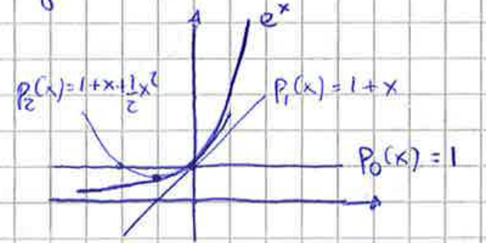
se $x = x_0 \rightarrow P_n(x) = a_0 + a_1(x_0-x_0) + \dots = a_0 + 0 = a_0$

• cerco f, polinomio di grado 2 → $P_2(x) = a + x + cx^2$

$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ → infatti $e^x - 1 - x - cx^2 = o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - 2cx}{2x} = \frac{e^x - 2c}{2} = \frac{1-2c}{2} ; \quad c = \frac{1}{2}$$

se aumento grado
non modifico termini dei $P_n(x)$
di grado precedente, aggiungo un nuovo termine



Def. polinomio di Taylor
di grado n centrato in x_0 → (= "in un $I(x_0)$")

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

$$\left(\frac{f^{(k)}}{k!} = a_k \text{ del polinomio, "} f \text{ derivata } k \text{ volte"} \right)$$

polinomio di Taylor esplicito:

$$T_n(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \dots$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}(x - x_0)^4 + \dots$$

polinomio di McLaurin
polinomio di Taylor con $x_0 = 0$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$