



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1554A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Meccanica Applicata + domande d'esame.
Prof. Ferraresi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

MECCANICA APPLICATA

ai SISTEMI Biomedici

FERRARESI

carlo.ferraresi@polito.it

6CFU

ESERCITAZIONI AL LAB 5x3h
IN GRUPPI

REALIZZATI E
SIMULATI MODELLI
MATEMATICI

matlab / simuli

+ RELAZIONE di ognuno

Da caricare prima dell'esame

è argomento d'esame

Dal 28 novembre 2014

ven 11,30-14,30 - 17,30

ESAME :

SCRITTO

4 domande aperte

Rispondere in 1 pagina

1 domanda riguarda il LABORATORIO

MATERIALE :

slide divisa in volta

APPLICAZIONI della BIOMECCANICA

- BIOMECC SPORT VS INFORTUNI
 - RIABILITAZIONE
 - INTERAZIONE CON L'AMBIENTE → URTI
 - INTERAZIONI UOMO-MACCHINA
 - STUDIO E SVILUPPO DI ARTESI-PROTESI
- TEST
 < INTERNA
 ESTERNA

PRINCIPI DI ANATOMIA

convenzioni

1) POSIZIONE ANATOMICA DI RIFERIMENTO

- Posizione eretta
 - Palmi in avanti
 - Talloni uniti
 - Braccia distese
- ↓ serve a definire 2) e 3)

2) Piani anatomici ← 1. SAGITTALE
 2. FRONTALE
 3. TRASVERSALE

DIVIDONO IL CORPO IN 2 METÀ

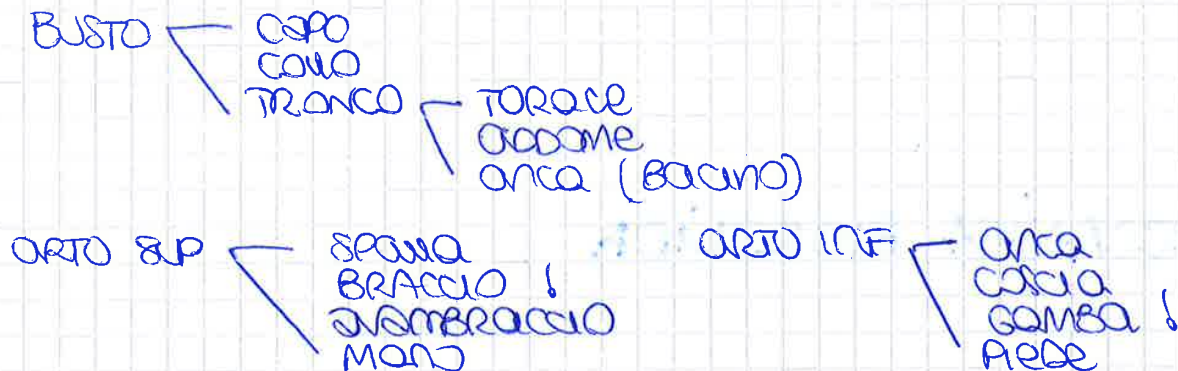
OX | EX
 POST | ANT
 su | giù

3) Assi di riferimento, ⊥ ai piani anatomici

- 1. asse longitudinale ↓ (↓ tras)
- 2. asse trasversale ↗ (⊥ sag)
- 3. asse antero-posteriore ↘ (↓ front)

4) PARTI ANATOMICHE ← 1. BUSTO → (tronco)
 2. ARTI SUPERIORI
 3. ARTI INFERIORI

⚠ BRACCIO vs AVAMBRACCIO (omero) (radio-una) ⚠ GAMBA (tibia-perone)



ARTICOLAZIONI

COLLEGANO LE OSSA

TRONCO

- CAPO
 - Occipito - Atlantoidale (C1)
 - Atlanto - Epistrofeo (C2)
- Colonna vertebrale e articolazioni intervertebrali
- vertebro-costali (rotazione x la respirazione)
- Costo-sternali

ART. SUP.

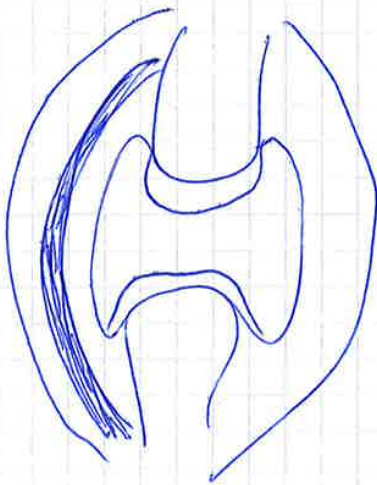
- SPALLA ^{complicata}
 - Sterno-clavicolare
 - Acromion-clavicolare
 - Scapolo-omeroale
- Gomito
 - omero-radio-ulnare
 - Proximale
- POLSO
 - RADIO-ULNARE DISTALE
 - RADIO-CARPICA
- MANO

ART. INF.

- ANCA
 - COXOFEMORALE
- Ginocchio
 - Femoro-rotuleo-tibiale
- Caviglia
 - TIBIO-TARSIKA
- PIEDE

COME SONO FATTE :

a seconda di tipologia ossa e funzione, le articolazioni sono diverse



• CAPSULA ARTICOLARE :

manicotto che avvolge l'articolazione di tessuto connettivo denso e duro

• LEGAMENTI TENUTI CHE NON SI RIGENERANO!!!

uniscono 2 ossa cioè 2 capi ossa, essenziali x non disarticolari. molto resistenti dentro o fuori la capsula

• TENDINI

UNISCOLO 1 MUSCOLO 1 capo SI RIGENERANO!!
CONTINUTI DA TESSUTO MUSCOLARE

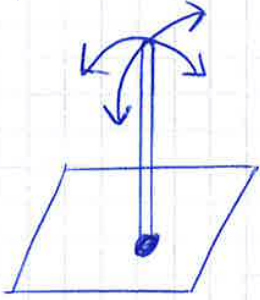
• CARTILAGINI ARTICOLARI

Rivestono le superfici articolari che si sfregano e potrebbero usurarsi
alcune volte c'è anche un disco cartilagineo composto di materiale soffice, compressibile, elastico e deformabile

• MEMBRANA SINOVIALE

Produce il liquido sinoviale = olio lubrificante

3) M. ANGOLARE

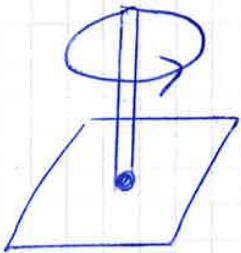


2 GdL oscuolare $av/ro/dx/sx$

Punto di contatto non varia

segmento ruota attorno ad un'asse passante x il punto di contatto

4) CIRCONDUZIONE



1 GdL angolo di inclinazione fisso

Punto di contatto non varia

asse descrive 1 cono, x l'estremità percorre una linea chiusa

segmento non ruota attorno al proprio asse

1) 2) 3) e 4) si possono combinare ma di loro

Tipi di articolazioni

1) SINARTROSI: collegamenti tra 2 ossa che non consentono movimenti relativi, anzi sono immobili no meccanica articolare (cranio)

2) ANFIARTROSI: articolazioni semimobili da movimenti flessi e limitati, anche se a 6 GdL cioè in tutti i sensi → viene interposto un disco cartilagineo (vertebre)

3) DIARTROSI: permettono ogni movimenti e sono avviate da un manicotto di tessuto connettivo (capsula) → SINOVIALI (ginocchio)

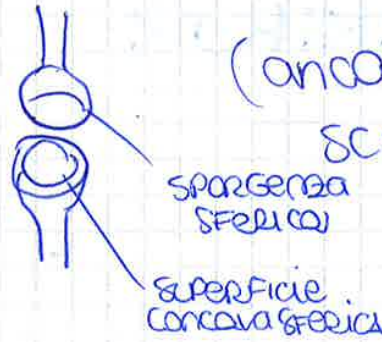
↓
VARI TIPI

5) ENARTROSI

3 GdL !!

ROTAZIONE +
CIRCONDUZ

GIUNTO SFERICO



(anca, spalla:
scapolo-omerale)

assi del movimento

ex: SPALLA (3 GdL)

1) asse TRASVERSO

Passa x le 2 spalle

2) asse ANTEROPOSTERIORE

⊥ al Piano Frontale

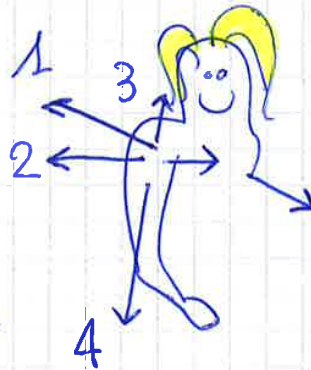
3) asse LONGITUDINALE

↓ SUDATI AL TRONCO
TRONCO ALLA SPALLA / SCAPOLA

SUDATI AL BRACCIO (ARTO)

4) ↑ asse LONGITUDINALE DEL BRACCIO

allineato con il BRACCIO, dipende dalla sua posizione



IN OGNI
ARTICOLAZIONE
SI POSSONO
EFFETTUARE
TUTTI I MOVIMENTI:

- ROTAZIONE
ATTORNO ASSE
- TRASLAZIONE
SU UN ASSE

GdL minori solo se
alcuni movimenti
SONO BLOCCATI

- Più movimenti semplici avvengono contemporaneamente nella stessa articolazione
 - Più articolazioni prendono parte all'attuazione di un determinato movimento
- tutti gli elementi di connessione partecipano al movimento articolare, che non dipende solo dalla forma delle superfici articolari

- MANDIBOLA

abbassamento / innalz
 proiezione in avanti / ind.
 lateralità
 ↙ ↘
 incisivi canini molare
 masticatore
 pre e molari

- CAPO

flessi → atlante C1
 inclinaz lat e → C1-C7
 colonna
 cervicale
 movimenti che dipendono
 dalla mobilità della
 colonna cervicale

- COLONNA VERTEBRALE

flex ventrale +C - L
 flex dorsale +L - C



- COSTE

si muovono rispetto alle ossa a cui sono collegate
 ANT - STERNO POST - VERTEBRE
 durante la respirazione

- STERNO

legato alle coste
 in avanti se coste ↑
 in basso se coste ↓

leggo slide...

Si vuole calcolare la lunghezza teorica del salto, utilizzando le leggi del moto parabolico

$$v \begin{cases} v_x : \text{MOTO UNIFORME} \\ \quad \text{(no accelerazione)} \\ v_y : \text{MOTO UNIFORMEMENTE} \\ \quad \text{ACCELERATO} \\ \quad \text{(soggetto ad accelerazione)} \\ \quad \text{costante } g \end{cases} \begin{cases} \text{LEGGI DEL MOTO} \\ v_x = v_{0x} = k \\ v_y = v_{0y} - gt \quad (g=k) \end{cases}$$

INTEGRO LE
VELOCITÀ RISPETTO
AUTEMPO x OTTENERE
GLI SPOSTAMENTI

$$\begin{cases} l = v_{0x} t \\ h = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 + h_2 = \text{si parte da } h_2!! \end{cases} \text{LEGGI DI POSIZIONE}$$

ORA IMPONGO COSA VOGLIO TROVARE A T

$$\begin{cases} L = l_1 + l_2 = v_{0x} T \\ 0 = v_{0y} T - \frac{1}{2} g T^2 + h_2 \end{cases}$$

RICAVO PRIMA T E POI L

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} g T^2 + v_{0y} T + h_2 = 0 \\ T^2 - \frac{2}{g} v_{0y} T - \frac{2}{g} h_2 = 0 \\ g T^2 - 2 v_{0y} T - 2 h_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} T = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{4 v_{0y}^2 + 8 h_2 g}}{2g} \\ T = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2 h_2 g}}{g} \end{cases}$$

essendo $\sqrt{v_{0y}^2 + 2 h_2 g} > v_{0y}$, il segno "-" non è accettabile.
c'è un'unica soluzione $T = \frac{v_{0y}}{g} + \frac{\sqrt{v_{0y}^2 + 2 h_2 g}}{g}$

SOSTITUISCO v_{0y}

$$T = \frac{v_0 \sin \beta}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \beta + 2 h_2 g}}{g} = \frac{v_0 \sin \beta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h_2 g}{(v_0 \sin \beta)^2}} \right)$$

e sostituisco in L

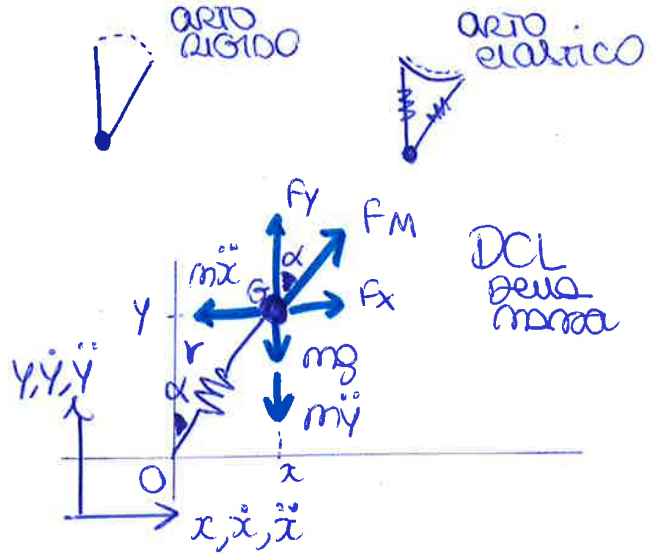
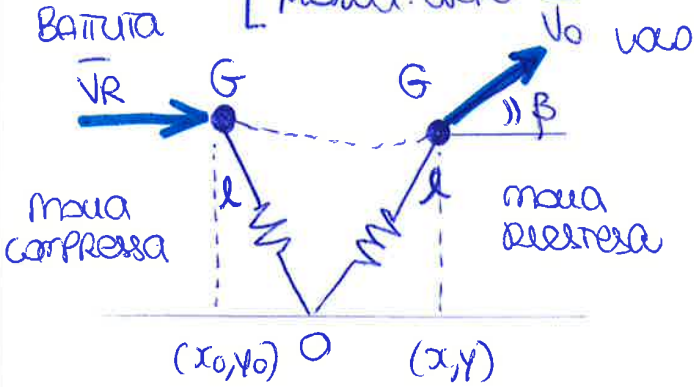
$$L = v_{0x} T = v_0 \cos \beta \frac{v_0 \sin \beta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h_2 g}{(v_0 \sin \beta)^2}} \right)$$

$$L = v_0^2 \frac{\sin(2\beta)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h_2 g}{(v_0 \sin \beta)^2}} \right)$$

② SALTO IN LUNGO: BATTUTA CON ARTO ELASTICO

Modello fisico dinamico che vale solo nella fase di battuta

Modello: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dinamico} \\ \text{Molla: ARTO } (k) \\ \text{elastico} \\ \text{Massa: ARTO } (m) \end{array} \right.$



BATTUTA: il percorso di G prevede
 - schiacciamento molla (flessione ginocchio)
 - allungamento molla (estensione)
 - $l \rightarrow r \rightarrow l$

Grandezze: $m = \text{massa}$
 $k = \text{rigidezza molla}$, difficile da individuare k biologico
 $l = \text{lunghezza iniziale molla}$
 $r = \text{lunghezza molla schiacciata (costante generica)}$ (x, y)

Massa soggetta a: Forza peso $P = mg$
 Forza molla $F_M = k(l-r)$
 Forze d'inerzia $m\ddot{x}, m\ddot{y}$ opposte a \ddot{x} e \ddot{y}

$F_y = F_M \cos \alpha$
 $F_x = F_M \sin \alpha$

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \rightarrow F_x = k(l-r) \sin \alpha = m\ddot{x} \\ \uparrow F_y = k(l-r) \cos \alpha = mg + m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} - k(l-r) \sin \alpha = 0 \\ m\ddot{y} + mg - k(l-r) \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Considerazioni geometriche

$$\begin{aligned} x &= r \sin \alpha & \rightarrow \sin \alpha &= x/r \\ y &= r \cos \alpha & \rightarrow \cos \alpha &= y/r \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Modello dinamico della battuta

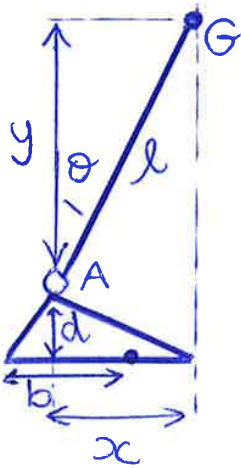
$$\begin{cases} m\ddot{x} - k(l - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{r} = 0 \\ m\ddot{y} + mg - k(l - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \frac{k}{m}(x) \left(\frac{l}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) = 0 \\ \ddot{y} + g - \frac{k}{m}(y) \left(\frac{l}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) = 0 \end{cases}$$

sono equazioni differenziali del 2° ordine occorre definire 4 condizioni al contorno: $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ posizione e velocità a $t=0$

④ POSTURA ERETTA

SI STUDIA IL CONTROLLO DELLA POSTURA ERETTA E COME ESSA VENGA MANTENUTA NEL TEMPO, POICHÉ È UNA POSIZIONE INSTABILE

- PENDOLO INVERSO = non equiubilo
- Modello: ◦ 2 segmenti rigidi = 1 piede + 1 corpo
- Caviglia = cerniera A Piana = Trocleo artrosi
- Piede + Altezza della caviglia di trascurabile
- Corpo + Baricentro G POSTO A L'AVANTI ARTICOLAZIONE DELLA Caviglia = massa distribuita lungo tutto il segmento → forze di inerzia
- STUDIO DINAMICO: momenti nel piano sagittale



PARAMETRI:

- $\overline{AG} = l =$ distanza cav-bari
- $d =$ altezza caviglia
- $m =$ massa corpo
- $I_G =$ momento d'inerzia baricentrico

VARIABILI:

- $(x, y) =$ posizione Bari. G
- $\theta =$ angolo del corpo
- $(b) =$ posizione del punto di applicazione della forza di reazione del terreno

APPROSSIMAZIONI GEOMETRICHE:

IL CORPO COMPIE PICCOLE OSCILLAZIONI

$$\theta \rightarrow 0 \quad \begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{cases}$$

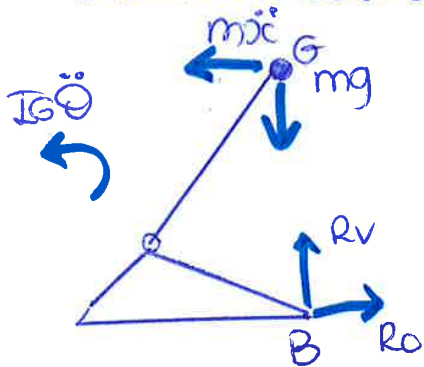
$$G \quad \begin{cases} x \approx l\theta \\ y \approx l \end{cases} = \begin{cases} \ddot{x} \approx l\ddot{\theta} \\ \ddot{y} \approx 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta \end{cases}$$

non servono i termini della velocità

DIAGRAMMA DI CORPO USATO: 2 TIPI

Forze d'inerzia ridotte al baricentro G

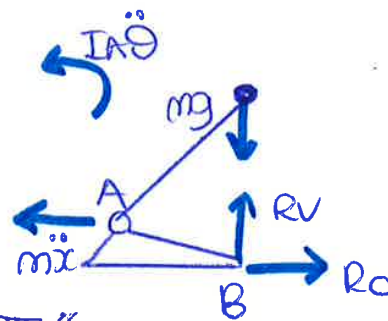


Forze statiche = peso

Forze dinamiche = inerzia

≠ modelli "ridotti"

Forze d'inerzia ridotte alla caviglia A



A = punto a velocità nulla!!

CAMBIA IL MOMENTO DI INERZIA $I_A = I_G + ml^2$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO (QUOVISIASTE MODELLO SCELTO, SONO LE STESSA)

$$\uparrow R_v = mg \quad ; \quad \rightarrow R_o = m\ddot{x} \quad ;$$

$$\text{B)} \quad I_G \ddot{\theta} + m\ddot{x}(y+h) + mg(b-x) = 0$$

$$\text{B')} \quad I_A \ddot{\theta} + m\ddot{x}(d) + mg(b-x) = 0$$

★ STRATEGIA DI ANCA:

Si agisce sulla posizione del baricentro COM piegando e flettendo l'articolazione dell'anca, movimento + facile per usare la caviglia
SOGGETTI ANZIANI / DISTURBI A POSTURA COM

★ STRATEGIA DI CAVIGLIA:

Si agisce prevalentemente sulla posizione del COP con l'azione dei muscoli della caviglia (TA)

||| importante è che b rimanga all'interno della base di appoggio (PEPE, SA)

così il COP inganne il COM

TA agisce anche sul COM ma è un effetto trascurabile perché applicata ad un sistema con grande momento d'inerzia

Questa strategia richiede un impegno muscolare maggiore rispetto alla strategia di anca

SOGGETTI GIOVANI / DISTURBI RUDOTTI



★ STRATEGIA DEL PIEDO

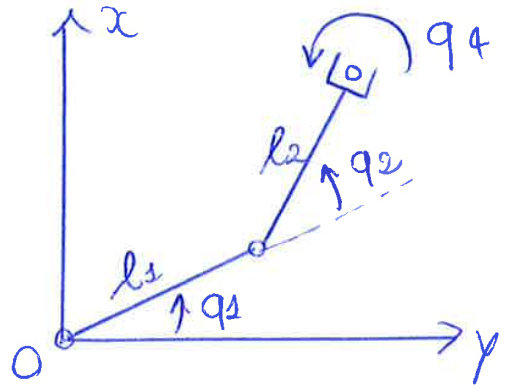
× un grande disequilibrio

non può essere mappata in quest modo

• visto dall'alto si vedono solo 3 GdL (non M3 che ruota su/su)

• sono tutti movimenti relativi

→ se si considerano solo i primi 2 GdL q_1 e q_2 si può stabilire una analogia cinematica con un artto superiore umano vincolato a muoversi in un piano orizzontale → in quest modo si può controllare il movimento totale della mano/mano



→ si possono effettuare 2 tipi di analisi:

ANALISI CINEMATICA

$P(x_p, y_p)$ END-EFFECTOR

$$l_1 = \overline{OA}$$

$$l_2 = \overline{AP}$$

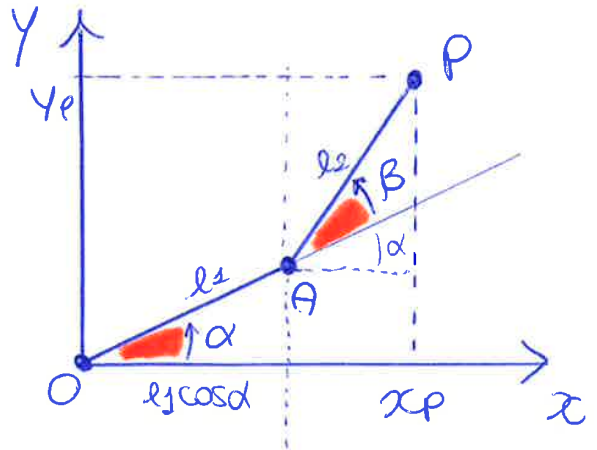
$$\alpha, \beta = 2 \text{ GdL} \leftarrow$$

x prima cosa serve la correlazione tra i 2 sistemi di coordinate

(x_p, y_p) e (α, β)

↓
coordinate
cartesiane
 (\bar{s})

↓ coordinate
dei giunti
 (\bar{q})



si raggruppano in vettori:

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \text{coordinate cartesiane dell'END-EFFECTOR}$$

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \text{coordinate dei giunti}$$

∃ 2 tipi di analisi < DIRETTA: da \bar{q} calcolo \bar{s}

INVERSA: da \bar{s} calcolo \bar{q}

dal giunti calcolo la posizione di p nel piano: 1 soluzione univoca

dalla posizione di p calcolo le coordinate degli angoli di giunto: più soluzioni

CINEMATICA DIRETTA = 1 soluzione univoca

in genere aperte!

* cinematica diretta di posizione

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ l_1 \sin \alpha + l_2 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

★ cinematica diretta di velocità (Primo rispetto ad α e poi rispetto a β)

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha - l_2 \sin(\alpha + \beta) & 0 - l_2 \sin(\alpha + \beta) \\ l_1 \cos \alpha + l_2 \cos(\alpha + \beta) & 0 + l_2 \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

↓
Derivate rispetto ad α

↓
Derivate rispetto a β

$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix}$ = velocità end-effector

$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$ = velocità rotazione giunti = velocità angolari con cui ruotano i link attorno ad O e ad A

in forma compatta $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$

si definisce la matrice jacobiana \mathbf{J} = stabilisce una correlazione univoca tra le 2 velocità

\mathbf{J} = matrice jacobiana del punto P = $\begin{bmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_p}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y_p}{\partial \alpha} & \frac{\partial y_p}{\partial \beta} \end{bmatrix}$ = derivate delle coordinate cartesiane rispetto a quelle del giunto

$J_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$ = conoscendo \mathbf{J} posso calcolare la velocità assoluta di P, se è nota $\dot{\mathbf{q}}$ grazie ai sensori posti sui link/bracci

★ cinematica diretta delle accelerazioni

Primo $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} l_1 \cos \alpha - (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) l_2 \cos(\alpha + \beta) & -(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ -\dot{\alpha} l_1 \sin \alpha - (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) l_2 \sin(\alpha + \beta) & -(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) l_2 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

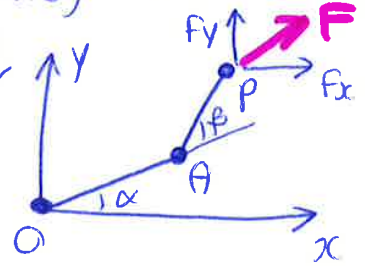
Tutto ciò è facilmente calcolabile dal computer che legge le informazioni date dai motori.

ANALISI STATICA

Le forze da trattare sono soltanto statiche e costanti.

È sempre 2 tipi di analisi $\left\{ \begin{array}{l} \text{diretta (+ soluzioni)} \\ \text{inversa (1 soluzione)} \end{array} \right. \neq \text{da prima!!}$

Si ha un carico esterno F applicato al punto P , cioè una forza esterna esercitata sui end-effector, nota e scomposta in $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$

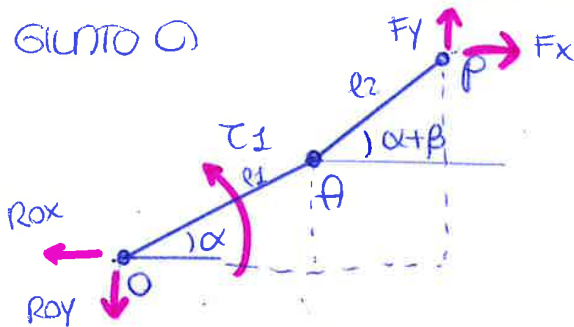


STATICA INVERSA (1 soluzione)

conoscendo F , si calcolano i momenti τ richiesti al giunto x l'equilibrio e le forze sui vincoli

Diagrammi di corpo libero rispetto ai 2 motori

GIUNTO O

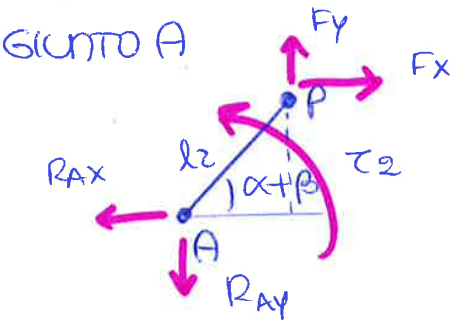


Le forze sui giunti si trovano facilmente

$$\begin{cases} R_{ox} = R_{Ax} = F_x \\ R_{oy} = R_{Ay} = F_y \end{cases}$$

Il momento $\tau = \tau_1 + \tau_2$ richiesto x l'equilibrio si può trovare in modo

GIUNTO A



$$\tau_1 = F_x (l_2 \sin(\alpha + \beta) + l_1 \sin \alpha) - F_y (l_2 \cos(\alpha + \beta) + l_1 \cos \alpha)$$

$$\tau_2 = F_x l_2 \sin(\alpha + \beta) - F_y l_2 \cos(\alpha + \beta)$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \alpha + l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \cos \alpha - l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_2 \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = -J^T \vec{F} \quad \text{ha sempre soluzione}$$

$-J^T = J$ con righe scambiate con colonne e cambio tutto di segno

(NB) OGNI PUNTO DELLA STRUTTURA HA una \neq matrice jacobiana

STATICA DIRETTA

$$\vec{F} = -J^{-T} \vec{\tau} \quad \text{c'è soluzione solo se } J \text{ è invertibile}$$

DINAMICA INVERSA

Si conoscono le forze che agiscono sulla struttura dall'esterno grazie alla sovrapposizione degli effetti, prima abbiamo considerato solo le forze statiche (come le forze peso) mentre ora vediamo solo più le forze dinamiche (come le forze d'inerzia).
 Le forze d'inerzia nascono su 1, 2 segmenti l_1 e l_2 possiedono una massa distribuita e un momento di inerzia I

⚠ momento d'inerzia dovuto alla massa I_G [kg m²] ≠ $I_G \ddot{\theta}$ [Nm] momento di forze d'inerzia dovuto alla coppia

Si riducono le forze d'inerzia ai baricentri.

Relazioni geometriche, utili a descrivere i momenti (bracci delle forze)

$$r^2 = l_1^2 + g_2^2 - 2l_1g_2 \cos(180^\circ - \beta)$$

$$r = \sqrt{l_1^2 + g_2^2 + 2l_1g_2 \cos(\beta)}$$

$$b = g_2 + l_1 \cos \beta$$

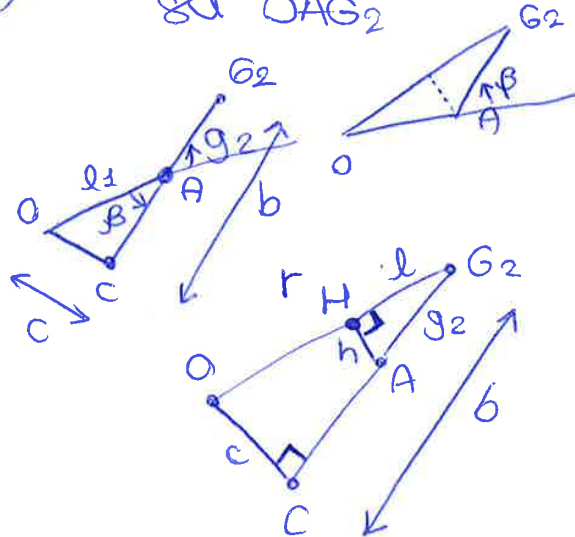
$$c = l_1 \sin \beta$$

$$\frac{l}{b} = \frac{h}{c} = \frac{g_2}{r}$$

$\hat{H}G_2A$
simile a
 OG_2C

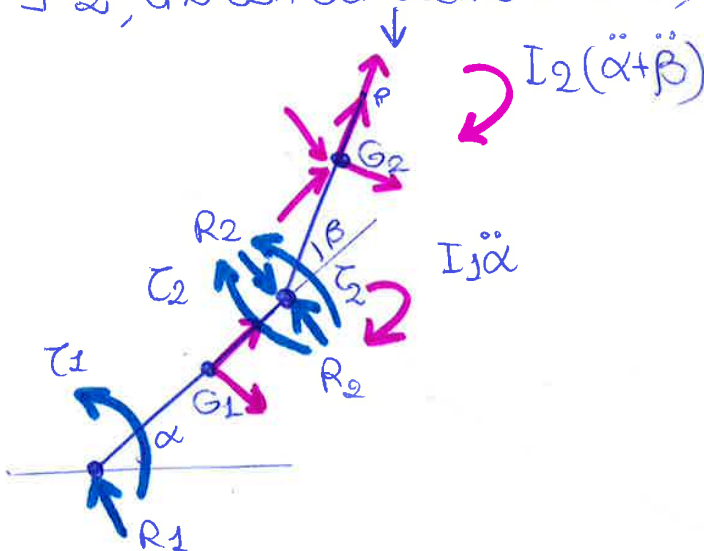
$$l = \frac{g_2}{r} b$$

TEOREMA DI CARNOT
SU OAG_2



⊙ Diagrammi di corpo libero dei membri con solo azioni e reazioni dinamiche.

Ne F 2, uno con gli elementi uniti, uno con solo AP



Si assume come verso positivo la rotazione antioraria.

2 sono i momenti delle forze d'inerzia dovuti alle rotazioni α e β

nei baricentri sono applicate le forze di inerzia opposte alle accelerazioni



- \vec{a}_{co} è l'accelerazione di Coriolis, cioè il doppio prodotto vettoriale tra accelerazione angolare di traslazione e velocità relativa

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega}_T \times \vec{v}_r = 2g_2\dot{\alpha}\dot{\beta}(-\vec{\lambda})$$

REGOLA MANO DX con α , velle uscente dal foglio
 \vec{a} } moti ruotanti danno $-\vec{\lambda}$

La forza d'inerzia è

$$\vec{F}_{co} = 2m_2g_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\vec{\lambda}$$

Ora calcolo τ

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\begin{aligned} \text{O)} \quad \tau_1 &= m_1g_1\ddot{\alpha}g_1 + 0 \cdot m_1g_1\dot{\alpha}^2 + I_1\ddot{\alpha} + I_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \\ &+ m_2g_2\dot{\beta}b - m_2g_2\dot{\beta}^2c - m_2g_22\dot{\alpha}\dot{\beta}c + m_2r\ddot{\alpha}r \\ &+ 0 \cdot m_2r\dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= m_1g_1^2\ddot{\alpha} + I_1\ddot{\alpha} + I_2\ddot{\alpha} + m_2r^2\ddot{\alpha} \\ &+ m_2g_2b\dot{\beta} + I_2\dot{\beta} \\ &- m_2g_2\dot{\beta}^2c - m_2g_22\dot{\alpha}\dot{\beta}c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ddot{\alpha} [m_1g_1^2 + m_2r^2 + I_1 + I_2] + \dot{\beta} [bm_2g_2 + I_2] \\ &- m_2g_2c [\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}] \end{aligned}$$

$$\text{A)} \quad \tau_2 = \cancel{I_1\ddot{\alpha}} + I_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + m_1g_1\ddot{\alpha}(\cancel{g_1} - g_1)$$

$$+ m_2g_2\dot{\beta}g_2 + m_2r\ddot{\alpha}l + m_2r\dot{\alpha}^2h$$

$$= \ddot{\alpha} [I_2 + m_2rl] + \dot{\beta} [I_2 + m_2g_2^2] + m_2rh\dot{\alpha}^2$$

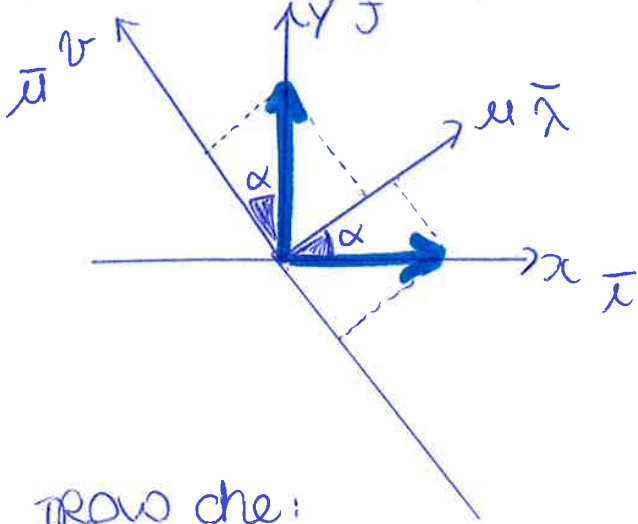
$$\text{ma } l = \frac{g_1}{g_2}b \text{ e } h = \frac{g_1}{g_2}c \quad rh = g_2c, \quad rl = g_2b$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 + I_1 + m_2r^2 + m_1g_1^2 & I_2 + bm_2g_2 \\ I_2 + m_2g_2b & I_2 + m_2g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2g_2c(\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}) \\ m_2g_2c\dot{\alpha}^2 \end{bmatrix}$$

DAE r, b, c sono calcolabili in funzione di β .

L'accelerazione di G_2 può essere ricavata anche con il teorema di RIVOLG $\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{G_2/A} \rightarrow$ ognuna con 2 componenti net

Orientamento Relativo della Terna Globale rispetto la locale (sempre definito da α)



si proiettano i versori fissi (x,y) su quelli mobili (u,v)

$$\bar{i} = \cos\alpha \bar{u} + \cos(90^\circ + \alpha) \bar{v}$$

$$\bar{j} = \cos(90^\circ - \alpha) \bar{u} + \cos\alpha \bar{v}$$

$$\bar{i} = C_{xu} \bar{u} + C_{xv} \bar{v}$$

$$\bar{j} = C_{yu} \bar{u} + C_{yv} \bar{v}$$

trovo che:

$$C_{ux} = \cos\alpha = C_{xu} = \bar{i} \cdot \bar{u}$$

$$C_{uy} = \cos(90^\circ - \alpha) = C_{yu} = \bar{i} \cdot \bar{v}$$

$$C_{vx} = \cos(90^\circ + \alpha) = C_{xv} = \bar{j} \cdot \bar{u}$$

$$C_{vy} = \cos\alpha = C_{yv} = \bar{j} \cdot \bar{v}$$

prodotto scalare tra 2 vettori (base quindi sempre commutativa)

cofatti direttori

estendendo ai sistemi tridimensionali:

$$\bar{i} = C_{ix} \bar{x} + C_{iy} \bar{y} + C_{iz} \bar{z}$$

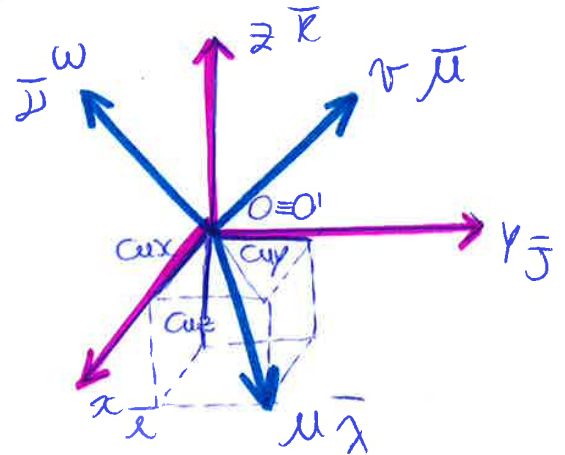
$$\bar{j} = C_{jx} \bar{x} + C_{jy} \bar{y} + C_{jz} \bar{z}$$

$$\bar{k} = C_{kx} \bar{x} + C_{ky} \bar{y} + C_{kz} \bar{z}$$

$$\bar{x} = C_{ux} \bar{i} + C_{vx} \bar{j} + C_{wx} \bar{k}$$

$$\bar{y} = C_{uy} \bar{i} + C_{vy} \bar{j} + C_{wy} \bar{k}$$

$$\bar{z} = C_{uz} \bar{i} + C_{vz} \bar{j} + C_{wz} \bar{k}$$



le proiezioni formano un parallelepipedo i cui spigoli sono 3 cofatti direttori

si costruiscono delle matrici di posizione/orientamento

$$A_i = [\bar{i} \bar{j} \bar{k}] = \begin{bmatrix} C_{ix} & C_{iy} & C_{iz} \\ C_{jx} & C_{jy} & C_{jz} \\ C_{kx} & C_{ky} & C_{kz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 3 \cos \alpha_{i,x} \\ \rightarrow 3 \cos \alpha_{i,y} \\ \rightarrow 3 \cos \alpha_{i,z} \end{matrix} = \text{matrice che rappresenta la terna locale } i \text{ rispetto alla terna globale } O$$

SIST. DI RIFERIMENTO
 numero elemento della catena

$$A_o = [\bar{x} \bar{y} \bar{z}] = \begin{bmatrix} C_{ux} & C_{uy} & C_{uz} \\ C_{vx} & C_{vy} & C_{vz} \\ C_{wx} & C_{wy} & C_{wz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 3 \cos \alpha_{o,x} \\ \rightarrow 3 \cos \alpha_{o,y} \\ \rightarrow 3 \cos \alpha_{o,z} \end{matrix} = \text{matrice che rappresenta la terna globale } O \text{ rispetto alla terna locale } i \text{ come riferimento}$$

$\bar{r} \equiv \bar{r}$ perché è lo stesso vettore espresso in 2 diversi sistemi di riferimento

esprimiamo le componenti di \bar{r}

$$r_x = \bar{r} \cdot \bar{i} = \bar{r} \cdot \bar{T} = (r_u \bar{\lambda} + r_v \bar{\mu} + r_w \bar{\nu}) \cdot \bar{T} = r_u (\bar{\lambda} \cdot \bar{i}) + r_v (\bar{\mu} \cdot \bar{i}) + r_w (\bar{\nu} \cdot \bar{i})$$

$$r_y = \bar{r} \cdot \bar{j} = \bar{r} \cdot \bar{J} = (r_u \bar{\lambda} + r_v \bar{\mu} + r_w \bar{\nu}) \cdot \bar{J} = r_u (\bar{\lambda} \cdot \bar{j}) + r_v (\bar{\mu} \cdot \bar{j}) + r_w (\bar{\nu} \cdot \bar{j})$$

$$r_z = \bar{r} \cdot \bar{k} = \bar{r} \cdot \bar{K} = (r_u \bar{\lambda} + r_v \bar{\mu} + r_w \bar{\nu}) \cdot \bar{K} = r_u (\bar{\lambda} \cdot \bar{k}) + r_v (\bar{\mu} \cdot \bar{k}) + r_w (\bar{\nu} \cdot \bar{k})$$

Dalle relazioni precedenti

$$\begin{cases} r_x = r_u C_{ux} + r_v C_{vx} + r_w C_{wx} \\ r_y = r_u C_{uy} + r_v C_{vy} + r_w C_{wy} \\ r_z = r_u C_{uz} + r_v C_{vz} + r_w C_{wz} \end{cases}$$

→ sistema

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ux} & C_{vx} & C_{wx} \\ C_{uy} & C_{vy} & C_{wy} \\ C_{uz} & C_{vz} & C_{wz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{bmatrix}$$

→ forma matriciale

$$\bar{r} = {}^0 A_i \cdot \bar{r}$$

→ forma compatta

Dal vettore espresso nel sistema locale

Moltiplicato per la matrice di orientamento delle 2 terne

Otengo il vettore espresso nel sistema globale

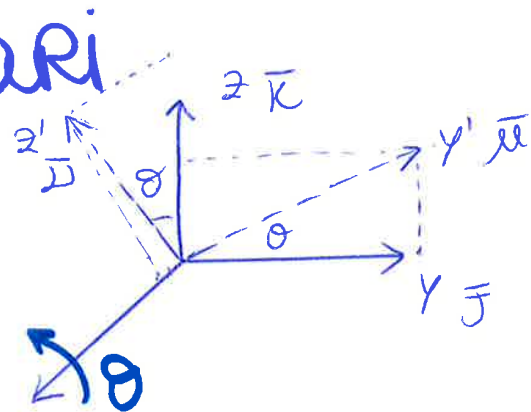
$$\bar{r} = [{}^0 A_i]^{-1} \cdot \bar{r} = [{}^0 A_i]^T \cdot \bar{r} \rightarrow \text{Relazione inversa}$$

$$\bar{r} = \bar{A}_0 \bar{r}$$

Rotazioni elementari

Per esempio ruotiamo attorno a x una terna ($x \equiv x'$)

L'orientamento della terna finale R_0' essere espresso con le matrici



$$\lambda \equiv x' \equiv x \bar{i}$$

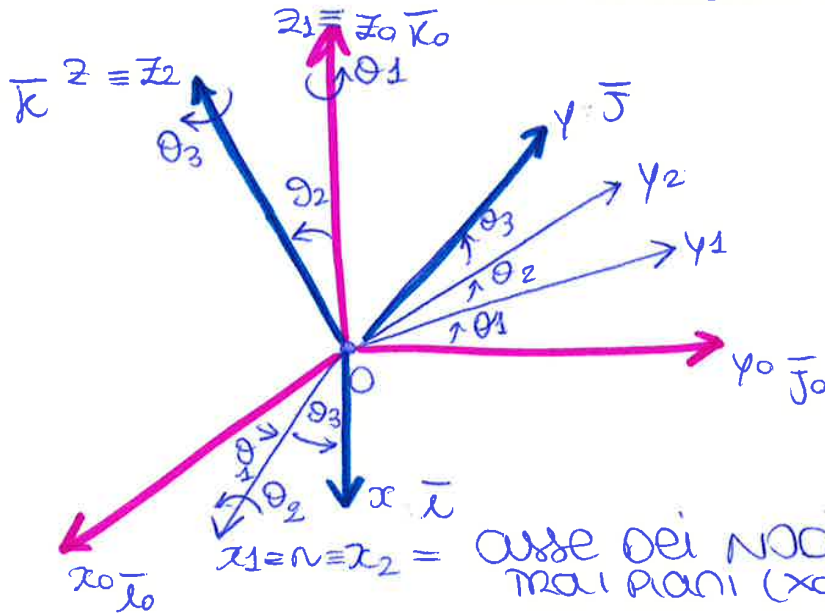
La terna globale rispetto a se stessa, cioè espressa nel proprio sistema di riferimento e

$${}^0 A_0 = [\bar{i} \bar{j} \bar{k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U = \text{matrice unitaria}$$

Terna invariante!

SI RICAVA 1 METODO = FAR RUOTARE 1 TERNA TRE VOLTE ATTORNO ai tre assi, ARRIVANDO ad una posizione qualunque $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

$3\theta = 3$ ROTAZIONI SUCCESSIVE = ORIENTAMENTO di 1 TERNA locale RISPETTO ad 1 GLOBALE RAGGIUNTA con 3 ROTAZIONI ELEMENTARI



DAGLI ANGOLI DI EUCLERO SI POSSONO RICAVARE I 9 COSENI DIRETTORI della TERNA e VICEVERSA

ASSE DEI NODI = INTERSEZIONE tra i PIANI (x_0, y_0) e (x, y)

TERNA INIZIALE (x_0, y_0, z_0)

① ROTAZIONE ATTORNO z_0 di θ_1
 Prec
 $Rot(z, \theta_1) = \begin{cases} z_0 \equiv z_1 \\ y_0 \rightarrow y_1 \\ x_0 \rightarrow x_1 \equiv n \end{cases}$

② ROTAZIONE ATTORNO x_1 di θ_2
 NT
 $Rot(x, \theta_2) = \begin{cases} z_1 \rightarrow z_2 \\ y_1 \rightarrow y_2 \\ x_1 \equiv x_2 \equiv n \end{cases}$

③ ROTAZIONE ATTORNO z_2 di θ_3
 RP
 $Rot(z, \theta_3) = \begin{cases} z_2 \equiv z \\ y_2 \rightarrow y \\ x_2 \rightarrow x \end{cases}$

TERNA FINALE (x, y, z)

LA ROTAZIONE TOTALE E'

$$R = Rot(z, \theta_1) Rot(x, \theta_2) Rot(z, \theta_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_2 & -s\theta_2 \\ 0 & +s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

PRODOTTI RIGHE x COLONNE

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_2 & +s\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & +s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2 & -c_1 s_3 - s_1 c_2 c_3 & s_1 s_2 \\ s_1 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 & -c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & s_2 c_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 c_2 s_3 & -c_1 s_3 - s_1 c_2 c_3 & +s_1 s_2 \\ s_1 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 & -c_1 s_2 \\ +s_2 s_3 & +s_2 c_3 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

E' LA MATRICE DI EUCLERO

oppure: $\dot{\bar{\Omega}} = E \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = E \dot{\bar{E}}$

$\dot{\bar{\Omega}} = E \dot{\bar{E}} + \dot{E} \bar{E}$

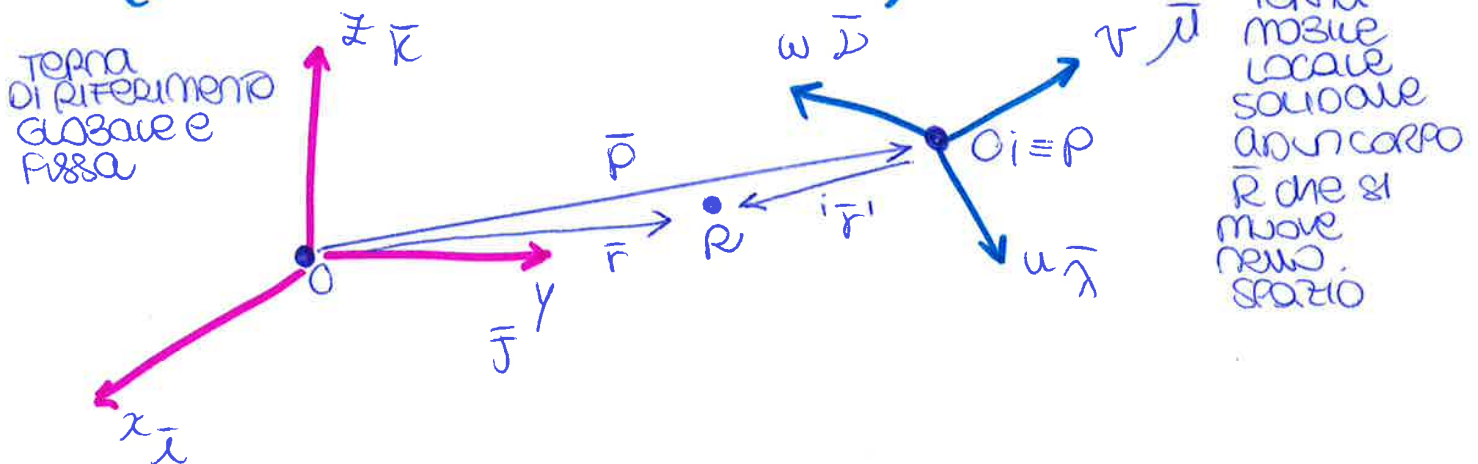
$E = \begin{bmatrix} s_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 c_3 & -s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E^{-1} = \begin{bmatrix} s_3/s_2 & c_3/s_2 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 \\ -c_2 s_3/s_2 & -c_2 c_3/s_2 & 1 \end{bmatrix}$

leggi gli angoli di Cardano [pp#]

$\dot{E} = \begin{bmatrix} -s_3 & s_2 c_3 & c_2 s_3 \\ -c_3 & -s_2 s_3 & c_2 c_3 \\ 0 & 0 & -s_2 \end{bmatrix}$

MATRICI DI POSIZIONAMENTO (DI TRASFORMAZIONE)



- R = punto = corpo che si muove nello spazio solidale a (u, v, w)
- ${}^i \bar{r}^i = O_i R$ = corpo stesso = posizione di R nel locale = posizione relativa
- $\bar{r} = \bar{O}R$ = posizione di R nel globale = posizione assoluta
- $\bar{O}O_i = \bar{p}$ = vettore che unisce le origini

$\bar{r} \neq \bar{r}^i$

$\bar{r} = {}^0 \bar{r}^i + \bar{p}$

* essere sommati i vettori devono essere espressi nello stesso sistema di riferimento
 (somma vettoriale \rightarrow regola del parallelogramma o si scompone il vettore in u, v, w componenti)

$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}$ RIFERITO AL GLOBALE

$\bar{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = p_x \bar{i} + p_y \bar{j} + p_z \bar{k}$ RIFERITO AL GLOBALE

${}^0 \bar{r}^i$ RIFERITO AL GLOBALE

${}^i \bar{r}^i = \begin{bmatrix} r'_u \\ r'_v \\ r'_w \end{bmatrix} = r'_u \bar{u} + r'_v \bar{v} + r'_w \bar{w}$ RIFERITO AL LOCALE!!

il sistema ≠ strutture osteo articolari che possono essere rappresentate come una catena cinematica seriale di elementi rigidi collegati da giunti che vengono approssimati a giunti meccanici

ex: articolazione della spalla (scapolo-omero)

- ENARTROSI
- GIUNTO SFERICO
- 3 GdL $\left\{ \begin{array}{l} \text{flex-ext} \\ \text{abd-addu} \\ \text{rotazione} \end{array} \right.$

TOPACE
SCAPOLA
SEGMENTO 0
BASE FISSA

ex: articolazione ginocchio

- TIPOLOGIA - ARTROSI
- DIARTROSI
- GIUNTO ROTOLANTE = CERNIERA PIANA TRA 2 CORPI DI FORMA CILINDRICA UNO CONCAVO ED UNO CONVESSO
- 1 GdL

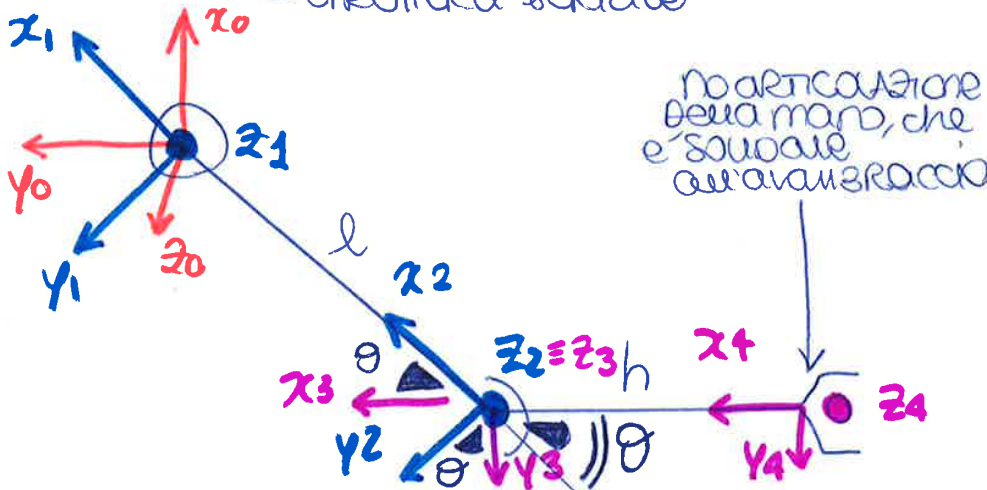
OMERO BRACCIO segmento 1

AVAMBRACCIO segmento 2

MANO

esempio: **MODELLO DI ARTO SUPERIORE**
= STRUTTURA SERIALE

a 4 GdL $\left\{ \begin{array}{l} 3+1 \\ \text{Spalla+} \\ \text{Ginocchio} \\ \text{NO MANO} \end{array} \right.$



TERNE:

- 0 = SPALLA FISSA
- 1 = SODALITA' BRACCIO
- 2 = 1 TRASLATA DI l
- 3 = SODALITA' AVAMBRACCIO
- 4 = 3 TRASLATA DI h
- l = lunghezza BRACCIO
- h = lunghezza AVAMBRACCIO

assi delle TERNE DI RIFERIMENTO (= assi delle articolazioni)

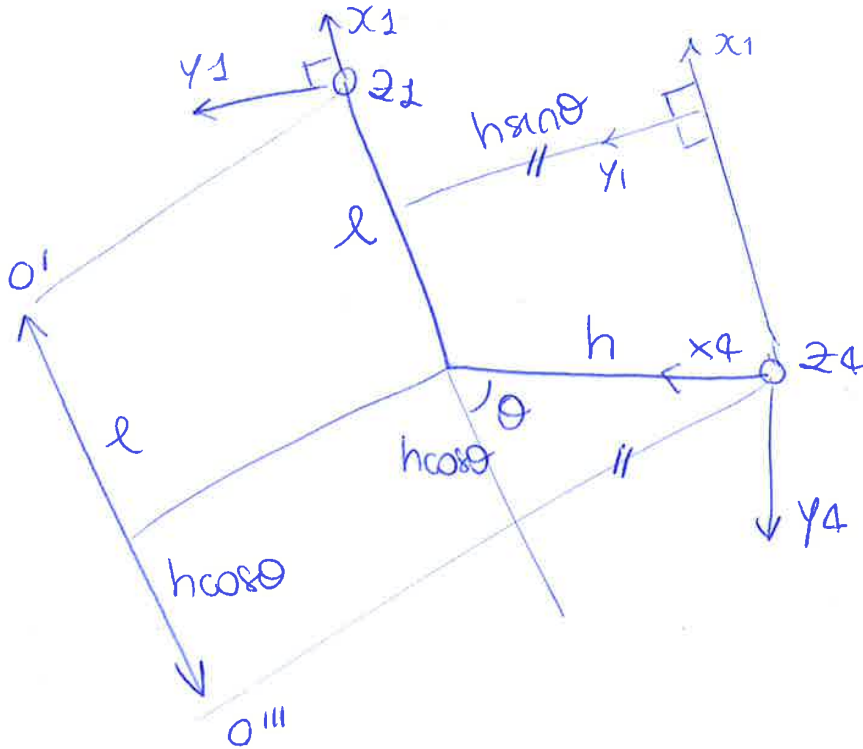
- x_0 = asse longitudinale spalla
 - y_0 = asse antero-posteriore spalla
 - z_0 = asse trasverso spalla, orientato verso l'esterno
- Basii
Sodali
alla spalla
+11.4°

θ = angolo di flessione del ginocchio!

- $x_1 \equiv x_2$ = asse longitudinale braccio
- x_1 non è contenuto in (x_0, y_0) ma può assumere un orientamento qualunque
- x_1 e x_2 hanno origine ≠
- $y_1 \parallel y_2$ $z_1 \parallel z_2$, $z_1 \perp$ PIANO FISSO

- $z_2 \equiv z_3$ = asse di flessione/estensione del ginocchio
- $x_3 \equiv x_4$ = asse longitudinale BRACCIO
- x_3, x_4 hanno origine ≠, $y_3 \parallel y_4$, $z_3 \parallel z_4$

Si poteva fare in un paragrafo grazie a delle
CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE



TRASLAZIONE DA (x)

$$O \rightarrow O''''$$

$$coe'$$

$$O' \rightarrow O''''$$

$$= -l - h \cos \theta$$

TRASLAZIONE (y)

$$= -h \sin \theta$$

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -h \cos \theta - l \\ 0 & 1 & 0 & -h \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = {}^2A_4$$

CINEMATICA ACCELERAZIONE

IN ROBOTICA, L'ACCELERAZIONE DEVE AVERE UN JERK DI UN CERTO VALORE X INIZIARE IL MOVIMENTO IN MODO GRADUALE COME FA IL NOSTRO CERVELLO → JERK = DERIVATA DELL'ACCELERAZIONE

SI DEFINISCE L'ACCELERAZIONE GENERALIZZATA, DERIVANDO \bar{v}_i

$$\bar{v}_i = J_i \dot{q}$$

- del membro i
- a 3ei componenti

$$\bar{a}_{gi} = \dot{\bar{v}}_i = \dot{J}_i \dot{q} + J_i \ddot{q}$$

- $\bar{a}_{gi} = \ddot{s}_i$
- \ddot{q} = accelerazioni dei giunti
ex: scala $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}$

$$\bar{a}_{gi} = \begin{bmatrix} \bar{a}_i \\ \dot{\bar{\omega}}_i \end{bmatrix}$$

$\bar{a}_i = \begin{bmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix}$ = accelerazione assoluta di O_i (di un certo punto del corpo, ad ex: O_i)

$\dot{\bar{\omega}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{xi} \\ \dot{\omega}_{yi} \\ \dot{\omega}_{zi} \end{bmatrix}$ = accelerazione angolare assoluta di i

• DIRETTA

$$e \bar{a}_i = \dot{J}_i \dot{q} + J_i \ddot{q}$$

• INVERSA

$$\ddot{q} = [J_i^{-1}] (\bar{a}_{gi} - \dot{J}_i \dot{q})$$

solo se J_i è invertibile
senò, J_i non è invertibile e xk
ridondante

CONSIDERAZIONI

\bar{v}_i e \bar{a}_{gi} dei membri della struttura possono essere calcolate
- analiticamente con l'analisi cinematica diretta

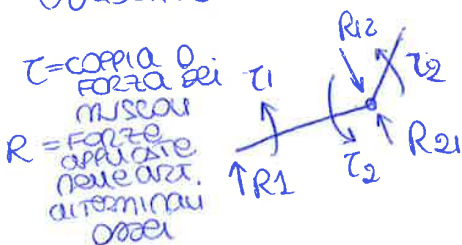
- TRAMITE RILIEVI SPERIMENTALI (IN 3D)

- conoscendo i giunti
- in robotica, xk \bar{v}_i e \bar{a}_i rappresentano l'obiettivo desiderato = traiettoria da eseguire

- come il GAIT ANALYSIS
- con tecniche STEREOFOTOMETRICHE
- in applicazioni BIOMECCANICHE, xk servono x calcolare le forze nei giunti con l'analisi inversa

costituite da azioni dei motori
 Z (FORZE MUSCOLARI) e dalle reazioni
R vincolari (FORZE INTERNE CHE AGISCONO)

SI POSSONO ANCHE CALCOLARE CON L'ANALISI DINAMICA INVERSA!



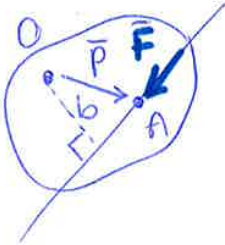
EQUAZIONI DI NEWTON-EULERO

$$\begin{cases} \bar{F}_i - \bar{F}_{i+1} + m_i \bar{g} + \bar{F}_i' = 0 \\ \bar{M}_i - \bar{M}_{i+1} + \bar{F}_i \wedge \bar{b}_i + \bar{F}_{i+1} \wedge (\bar{l}_i - \bar{b}_i) + \bar{M}_i' = 0 \end{cases}$$

momenti delle forze esterne

proietto ogni elemento sulla terna di riferimento scelta (casale) u, v, w e ottengo 6 equazioni

NB



$$\bar{M}_O = \bar{p} \wedge \bar{F}$$

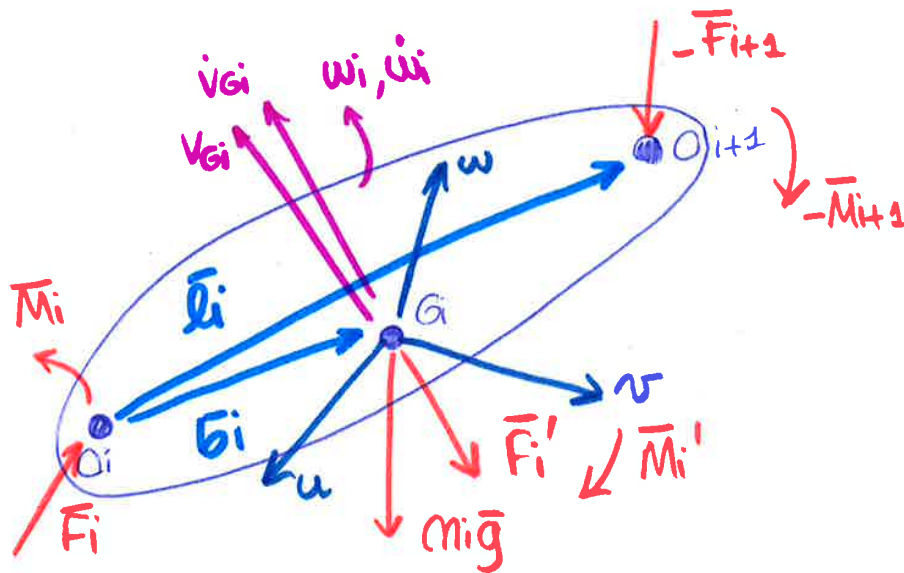
O: polo di riferimento
A: punto di applicazione di \bar{F}
 \wedge : prodotto vettoriale (non commutativo!)

$$|\bar{M}_O| = bF$$

$$(-\bar{b}_i \wedge \bar{F}_i) = \bar{F}_i \wedge \bar{b}_i$$

$$(\bar{l}_i - \bar{b}_i) \wedge (-\bar{F}_{i+1}) = \bar{F}_{i+1} \wedge (\bar{l}_i - \bar{b}_i)$$

Risultato di una connessione avanti



★ \bar{F}_i' e \bar{M}_i'

sono la risultante ed il momento risultante delle forze d'inerzia ridotte al baricentro. Sono le + complesse da individuare sic se basano sul movimento e si calcolano risolvendo la cinematica diretta x trovare \ddot{x}_G o conoscendo coordinate giunti o misurandola sperimentalmente

$$\bar{F}_i' = -\frac{d\bar{Q}_i}{dt} = -m_i \frac{d\bar{V}_{G_i}}{dt}$$

marca x acc di G cambiata di segno
Teorema della quantità di moto

$$\bar{M}_i' = -\frac{d\bar{K}_{G_i}}{dt}$$

Teorema del momento della quantità di moto (serve x calcolare le azioni giroscopiche)

$$\bar{K}_{G_i} = I_{G_i} \bar{\omega}_i$$

momento risultante della quantità di moto di un vettore riferito al baricentro
prodotto velocità angolare di i per I_{G_i}

I_{G_i} = tensore di inerzia di i

(nel piano I = momento d'inerzia di un corpo)

in componenti:

$$\begin{cases} K_G x = I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ K_G y = -I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ K_G z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{cases}$$

se la terna d'inerzia scelta, ha assi che sono centrali d'inerzia, ovvero sono assi di simmetria, allora i momenti centrifughi sono pari a zero

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Rispetto ai 3 assi, ci sono momenti d'inerzia + grandi 0 + piccoli: si preferisce esse polare quello con il momento più piccolo

NB I_G non è calcolata rispetto al sistema di riferimento globale perché, se gli assi sono solidali al corpo \vec{r} è costante. Sperimentalmente, se la terna è fissa e il corpo si muove, \vec{r} cambia istante x istante e di conseguenza anche I_G che conviene quindi riferirlo alla terna locale

${}^I I_G = \text{costante} \rightarrow$ riferito a G_{iuv}

${}^0 I_G = \text{varia nel tempo} \rightarrow$ riferito a $Oxyz$

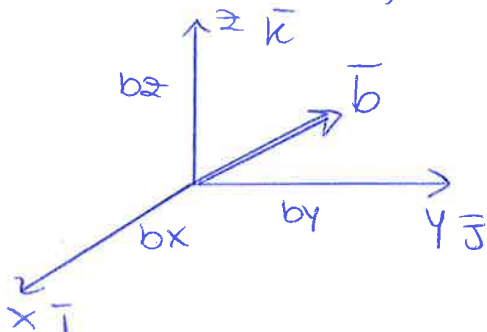
serie perché \vec{K}_G deve essere derivato nel tempo!

$${}^I I_G = \begin{bmatrix} I_{uu} & -I_{ur} & -I_{uw} \\ -I_{ur} & I_{rr} & -I_{rw} \\ -I_{uw} & -I_{rw} & -I_{ww} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{tensore d'inerzia} \\ \text{baricentrico rispetto} \\ \text{alla terna mobile } G_{iuv} \end{array}$$

si calcola ora la derivata di un vettore espresso rispetto ad assi fissi per poi passare a quella rispetto ad assi mobili

vettore generico \vec{b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{mobile} \\ \text{modulo variabile nel tempo} \end{array} \right.$ (RUOTA SI ACCORDA SI AVVINGA)

(\vec{b} diventerà poi \vec{K}_G)



terna fissa $Oxyz$
vettori costanti in direzione $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

quindi:

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vettore di} \\ \text{3 componenti} \\ \text{3 proiezioni} \end{array}$$

se lo stesso cambiano faco le parti scalari

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{b}_x \vec{i} + \dot{b}_y \vec{j} + \dot{b}_z \vec{k} = \begin{bmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \end{bmatrix}$$

essendo ${}^iV_{Gi} = {}^iI_{Gi} \dot{\omega}_i$ con I_{Gi} costante allora

$${}^i\bar{M}' = -{}^iI_{Gi} \dot{\omega}_i - \dot{\omega}_i \wedge ({}^iI_{Gi} \omega_i) \quad \text{con } \dot{\omega}_i = \dot{\omega}_u \bar{\lambda} + \dot{\omega}_v \bar{\mu} + \dot{\omega}_w \bar{\nu}$$

accelerazione Angolare dell.

sembrano 2 vettori //, x vi direbbe essere 0
ma in realtà non lo sono

la risultante delle forze d'inerzia è invece

$${}^iF_i = -m_i \frac{d({}^iV_{Gi})}{dt} \quad \text{con } {}^iV_{Gi} \text{ velocità assoluta del baricentro}$$

$${}^iV_{Gi} = {}^iA_0 {}^0V_{Gi} = A_i^T {}^0V_{Gi} \quad \text{con } A_i = [\bar{\lambda} \ \bar{\mu} \ \bar{\nu}]$$

matrice dei coseni direttori della terna locale rispetto al globale

ripetiamo le equazioni di Newton-Eulero

$$\begin{cases} \bar{F}_i - \bar{F}_{i+1} + m_i \bar{g} + \bar{F}_i' = 0 \\ \bar{M}_i - \bar{M}_{i+1} + \bar{F}_i \wedge \bar{b}_i + \bar{F}_{i+1} \wedge (\bar{l}_i - \bar{b}_i) + \bar{M}_i' = 0 \end{cases}$$

per riferire alla terna locale servono le matrici ${}^iA_{i+1}, {}^iA_0$

$$\begin{cases} {}^i\bar{F}_i - ({}^iA_{i+1})^{i+1} \bar{F}_{i+1} + m_i {}^iA_0 {}^0\bar{g} - m_i \frac{d({}^iV_{Gi})}{dt} = 0 \\ {}^i\bar{M}_i - ({}^iA_{i+1})^{i+1} \bar{M}_{i+1} + {}^i\bar{F}_i \wedge {}^i\bar{b}_i + ({}^iA_{i+1})^{i+1} \bar{F}_{i+1} \wedge (\bar{l}_i - \bar{b}_i) - {}^iI_{Gi} \dot{\omega}_i - \dot{\omega}_i \wedge ({}^iI_{Gi} \omega_i) = 0 \end{cases}$$

soltanto si risolve:

DINAMICA INERZIA

\bar{F}_i, \bar{M}_i FORZE GENERALIZZATE
WRENCH
FORZE INTERSEGMENTALI
INCOGNITE

$$\bar{Z}_i = \begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{M}_i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 6 \text{ compo.} \\ 3 \text{ compo. forze} \\ 3 \text{ compo. momento} \end{array}$$

x calcolo di parte dell'elemento + distale, l'ultimo della catena dove \bar{F}_{i+1} o non c'è o è un carico esterno noto, migrabile con un dinamometro e si procede a ritroso
TUTTI i termini sono noti tranne \bar{F}_i e \bar{M}_i che vengono calcolati

→ a ritroso non è ancora

- FORZE MUSCOLARI
- FORZE INTERARTICOLARI (di contatto tra le superfici ossee)

x la risoluzione occorre conoscere velocità ed accelerazioni di tutti i membri della catena

ex: x studiare la deambulazione si va da piede ad anca

X STUDIARE LE FORZE INTERSEGMENTALI ci sono 2 vie:

- "via ortopedica": L'ortopedico scompone le FI in forze e momenti lungo i 3 assi dell'articolazione (terna di assi anatomici) che non è però sia una terna ortogonale, ma non importa se è significativo dal punto di vista clinico
- "via della scomposizione": si separano le FI in forze muscolari e forze interarticolari (forze di contatto) X STUDIARE I GIUNTI applicando un carico

possibile modello muscolo-scheletrico dell'arto inferiore:

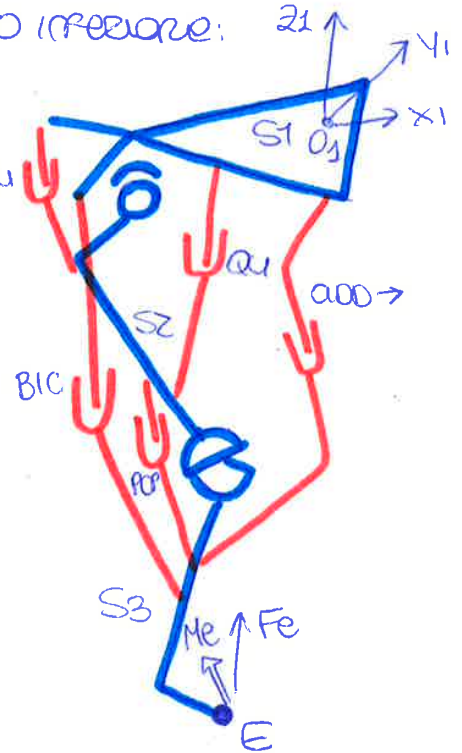
* 3 segmenti:

- S₁ = bacino
- S₂ = coscia (femore con grande trocantere) ← abdu
- S₃ = gamba piede, su cui si attaccano 4 muscoli ≠

* 2 giunti:

- HIP: collega coscia/bacino 3 GdL
- KNEE: collega coscia/gamba piede 1 GdL + altri

DAVANTI AD AZIONI DI CARICHI ESTERNI CHE PORTANO A TRAUMI AL GINOCCHIO
 ↳ DISTORSIONE DI ROTAZIONE
 ↳ DISTORSIONE DI ABDU/ADDU



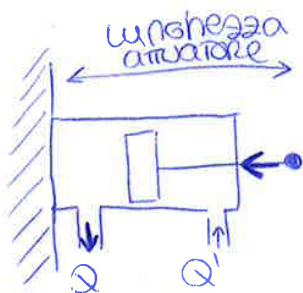
* 5 GRUPPI MUSCOLARI: (solo trazione)

- ESTENSORI FEMORALI (estens. gamba) } antagonisti
- BIARTICOLARI FEMORALI (flex gamba)
- ABDUTTORI (allungamento arto)
- ADDUTTORI (avvicinamento arto)
- POPITEO (flex gamba)

* 2 modelli:

- catena cinematica aperta seriale (BW = osteo-articolare)
- catena cinematica chiusa parallela (R&B = muscolo-scheletrico)

↓ I MUSCOLI SONO RAPPRESENTATI COME ATTUATORI LINEARI, CIOÈ: CILINDRO IDRAULICO O PNEUMATICO



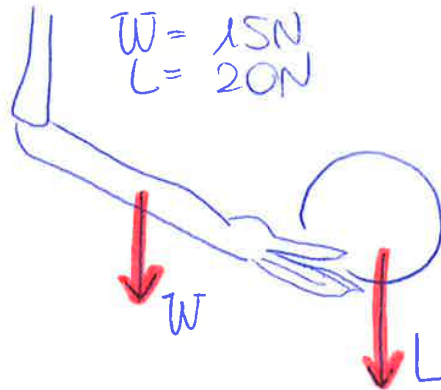
cilindro con dentro un pistone che lo divide in 2 camere collegate all'esterno. La lunghezza dell'attuatore può essere fatta variabile con un fluido che entra/esce. Siccome i muscoli possono soltanto tirare, l'attuatore si accorcia solamente.

ESEMPIO: Flessione statica avambraccio

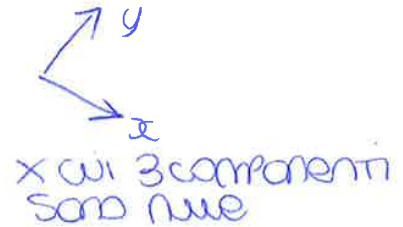
Forze muscolari calcolate con il metodo della Meccanica Newtoniana

- 1) Determinare forze intersegmentari tra braccio e avambraccio (analisi dinamica inversa)

Modello osteoarticolare statico, quindi è presente un carico nella mano x cui non serve la cinematica e non ci sono forze d'inerzia



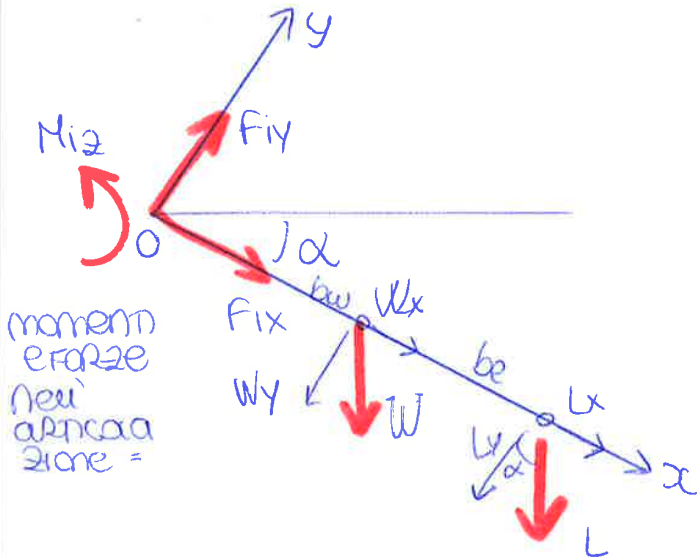
Systema di riferimento piano



x cui 3 componenti sono nulle

$$F_{iz} = M_{ix} = M_{iy} = 0$$

Diagramma di corpo libero



momenti e forze nell'articolazione =

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\overline{OL} = bl = 30\text{cm} = 0,3\text{m} \quad \text{lunghezza avambraccio}$$

$$\overline{OW} = bw = 15\text{cm} = 0,15\text{m}$$

$$\vec{F}_I = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{iz} \end{bmatrix} \quad \text{Forze intersegmentari}$$

asse x = asse longitudinale avambraccio

asse y = \perp a x, z

asse z = asse medio-laterale braccio

Scrivo le eq. di equilibrio

$$\rightarrow F_{ix} + W_x + L_x = 0$$

$$\uparrow F_{iy} = W_y + L_y$$

$$F_{iy} = 30,32\text{ N} \quad \checkmark$$

$$F_{ix} = -17,5\text{ N}$$

$$L_x = L \sin \alpha = 10\text{ N}$$

$$L_y = L \cos \alpha = 17,32\text{ N}$$

$$W_x = W \sin \alpha = 7,5\text{ N}$$

$$W_y = W \cos \alpha \approx 13\text{ N}$$

$$\circlearrowleft M_{iz} = bw W_y + bl L_y = 0,15 \cdot 13 + 0,3 \cdot 17,32 = 7,196\text{ Nm}$$

contro $M_{iz} = 719,6\text{ Ncm} \quad \checkmark$

$$M_{iz} = \overline{ow} W_y + \overline{ol} L_y + \cancel{W_x \cdot 0} + \cancel{L_x \cdot 0}$$

③ Si complica il modello: MODELLO MUSCOLO-SCHIELETTRICO con 3 flessori in sinergia

Si considerano agenti contemporaneamente
 I 3 principali flessori: BICIPITE, BRACHIALE, BRACHIORADIALE

X calcolare le forze muscolari occorre prima definire le caratteristiche geometriche

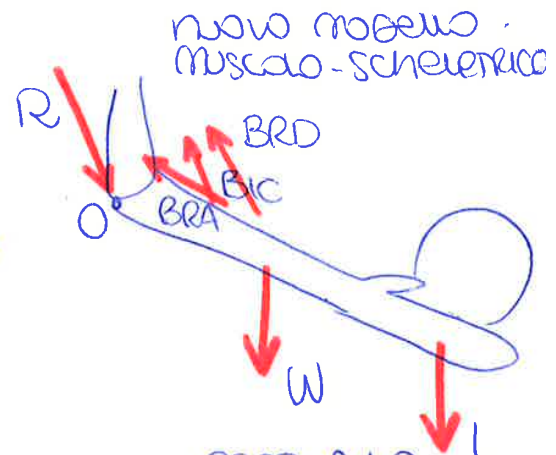
X completare il modello ed avere un numero di equazioni sufficienti x ottenere le forze, si devono aggiungere delle condizioni, cioè un criterio di ripartizione delle azioni muscolari, che si estrapola dal modello fisiologico.

• CARATT. GEOMETRICHE

BRACCI DI LEVA DEI 3 MUSCOLI

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{BIC} = 0,046m \\ b_{BRA} = 0,034m \\ b_{BRD} = 0,075m \end{array} \right.$$

IL MOMENTO DEI CARICHI ESTERNI È EQUILIBRATO DAL MOMENTO PRODOTTO DALLA SINERGIA DI 3 MUSCOLI



Abbiamo un sola equazione x l'equilibrio dei momenti, ma 3 incognite

$$M_{12} = 714,5 \text{ Ncm} = 4,6 F_{BIC} + 3,4 F_{BRA} + 7,5 F_{BRD} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PROBLEMA} \\ \text{NON DETERMINATO} \end{array} \right.$$

(prodotto da Lew) (non c'è il momento di R al pt gomito)

• MODELLO FISILOGICO

È convenzione presupporre che la forza muscolare sia al cm² delle sue dimensioni (anche se la sezione del muscolo era) definire ↓

La sezione è anch'essa calcolata convenzionalmente come rapporto tra volume e lunghezza a riposo (variabili aleatorie)

$$A = \frac{V}{l} = \frac{M}{\rho l} \quad \rho \approx 1050 \text{ kg/m}^3$$

OSTO IL RAPPORTO TRA LE AREE, SI SA CHE È AL RAPPORTO TRA LE FORZE, X CUI SI AGGIUNGO ALI 2 EQUAZIONI!

$$\frac{F_{BRA}}{F_{BIC}} = \frac{7}{4,6} = K_{BRA} \quad \frac{F_{BRD}}{F_{BIC}} = \frac{1,5}{4,6} = K_{BRD}$$

$$K_{BRA} = \frac{A_{BRA}}{A_{BIC}} \quad \begin{array}{l} F_{BRA} = K_{BRA} F_{BIC} \\ F_{BRD} = K_{BRD} F_{BIC} \end{array}$$

$$\text{Si calcolano così le forze muscolari} \quad M_{12} = F_{BIC}(b_{BIC} + b_{BRA} K_{BRA} + b_{BRD} K_{BRD})$$

$F_{BIC} = 59, \text{ N}$
 $F_{BRA} = 91,2 \text{ N}$
 $F_{BRD} = 19,5 \text{ N}$

IN REAZIONE NON SONO COSTANTI, X VARIANO AL VARIARE DELLA LUNGHEZZA RELATIVA DEL MUSCOLO

X calcolare R, che sarà ≠ dall'ipotesi (2), servono zero le direzioni delle forze muscolari

Modello muscolo-scheletrico (STRUTTURA //)

Modello fisico rudimentale SOLO GAMBA-PIEDE

Segmento RIGIDO Gamba-Piede (S_3)

Muscoli, BUONA INDIVIDUARE I PRIMARI

G Baricentro

E Punto in cui il segmento è a contatto col mondo esterno

\vec{F}_a forza interarticolare a 3 compo

\vec{F}_j forza muscolare

\vec{J}_j GdL del muscolo, rappresenta la sua deformazione spostamenti dei punti di applicazione delle forze < allung. accorc.

I muscoli esercitano solo forze di trazione
 x controllare n GdL servono almeno n+1 muscoli

Solitamente la struttura è ridondante x n muscoli cooperano nel controllo dello stesso GdL / movimento

si conoscono \vec{F}_e, \vec{F}_j'
 le incognite sono \vec{F}_a, \vec{F}_j

Si applica il PLV (forza in un punto che ha la possibilità di muoversi, produce un lavoro virtuale)

- modello osteo-articolare seriale
 si cercano P_e e P'

$\vec{q} = [q_1, \dots, q_6]^T$ gradi di libertà (o movimenti di rotazione)

$\dot{\vec{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6]^T$ velocità angolari dei giunti
 velocità articolari

} sono vettori colonna

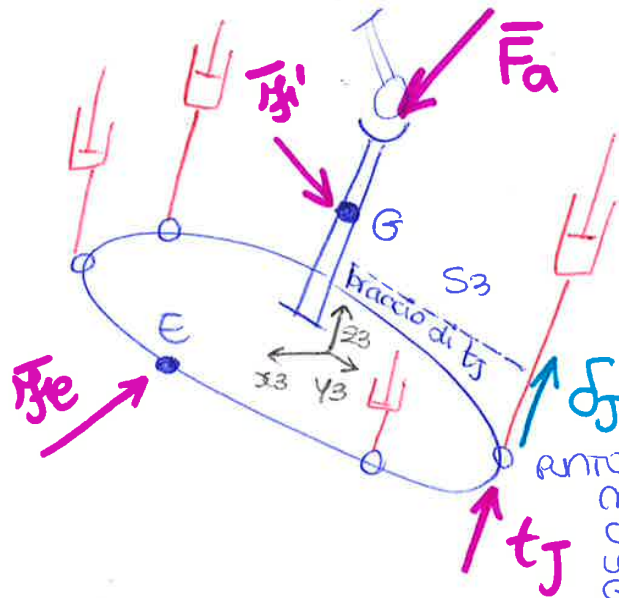
$\vec{F}_e = \begin{bmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_e \end{bmatrix} = [F_x F_y F_z M_x M_y M_z]^T$

carico esterno
 forza generalizzata applicata al punto e scomposta in una terna (x,y,z) qualsiasi

$\vec{V}_e = \begin{bmatrix} \vec{V}_e \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = [v_x v_y v_z \omega_x \omega_y \omega_z]^T$

velocità generalizzata di E
 \vec{V}_e dipende dal punto
 $\vec{\omega}$ riferita a tutti i punti = corpo

J_E matrice Jacobiana del corpo S_3 nel punto E
 lega l'insieme delle velocità $\dot{\vec{q}}$ e \vec{V}_e



OGNI MUSCOLO ESERCITA UNA FORZA IN // SUO STESSO SEGMENTO

Punto di attacco del muscolo, x conoscere servono le coordinate geometriche e la direzione del muscolo, solitamente non rettineo

- modello muscolo-scheletrico //

la potenza sviluppata dai muscoli deve essere calcolata x ogni muscolo

$$\bar{\delta} = [\delta_1 \dots \delta_m]^T$$

GDL dei muscoli insieme dei movimenti dei muscoli corse degli attuatori deformazioni dei muscoli < allung.

$$\dot{\bar{\delta}} = [\dot{\delta}_1 \dots \dot{\delta}_m]^T$$

velocità degli attuatori velocità di deformazione dei muscoli/del punto di inserzione

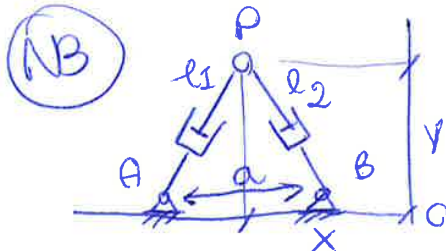
} come $\bar{q}, \dot{\bar{q}}$

$$\bar{c}_m = [t_1, \dots, t_m]^T$$

forze esercitate dai muscoli su un unico corpo rigido (S3)

$$\bar{V}_E = \begin{bmatrix} \bar{V}_E \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}$$

potenza erogata in E come ing o qualsiasi altro punto



STRUTTURA //

(al contrario di ou) seriale

diretta: dati l_1, l_2, a non nullo a calcolare (x_p, y_p) di P

(variando l_1, l_2 nel piano si muove P)

inversa: conoscendo $P = (x_p, y_p) = \bar{s}^T$ si può calcolare univocamente

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad l_1 = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}, \quad l_2 = \sqrt{(a-x_p)^2 + y_p^2}$$

e $\dot{\bar{q}} = J \dot{\bar{s}}$

$$\dot{\bar{\delta}} = J_{PE} \bar{V}_E$$

(m;1) (m;6) (6;1)

$\dot{\bar{s}}$ si ricava con un modello cinematico in // da un'analisi cinematica inversa che ha sempre 1 soluzione (\neq seriale)

J_{PE} matrice jacobiana della struttura parallela, relativa al punto E

J sempre, anche x strutture ridondanti non è sempre invertibile, in particolare nelle strutture muscolo-scheletriche in cui il numero di attuatori $e >$ numero GDL contrattati

$J_{PE} = (m;6)$ non è quadrata

POTENZA dei MUSCOLI

$$P_m = \dot{\delta}_1 t_1 + \dots + \dot{\delta}_m t_m$$

potenza del primo muscolo

incognite

$P_m < 0$ contrazione eccentrica, i muscoli frenano il movimento dell'articolazione

$P_m > 0$ contrazione concentrica, muscoli con azione motrice

$$P_m = [\dot{\delta}]^T \bar{c}_m$$

$$[\dot{\delta}]^T = [J_{PE} \bar{V}_E]^T = \bar{V}_E^T J_{PE}^T$$

Realizzazione

1 ARTO:
 appoggio 60%
 pendolamento 40%

2 ARTI:
 Doppio 20%
 Singolo 80%

contatto iniziale
 caricamento
 appoggio pieno
 scaricamento
 prepoggio
 periodo iniz.
 periodo centr.
 periodo finale

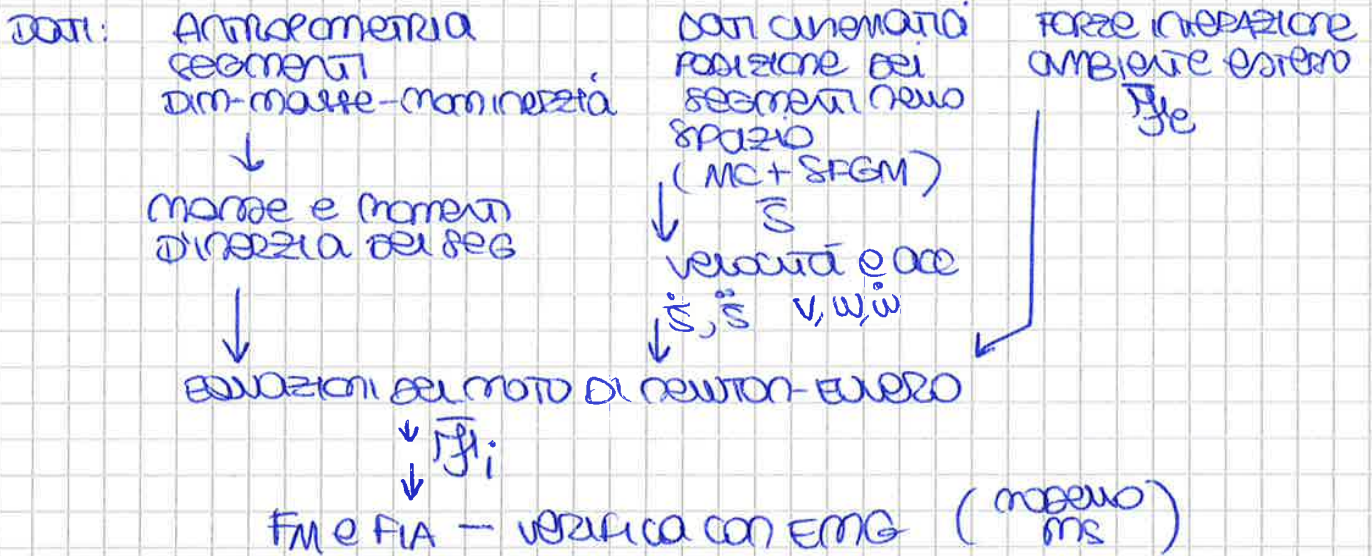
impollonatura
 piede piatto
 //
 distacco tallone
 distacco dita
 accelerata
 //
 decelerata

Gait Analysis

osservazione diretta
 analisi strumentale

- misure del movimento
 TEMPA BEVE FASI / del cammino
 lunghezza / larghezza passo (144cm / 72cm) (7-9cm)
 angolo piede θ_0
- movimenti angolari di un'ARTO → ELETTROGONIOMETRO
 misura angolo tra 2 segmenti corporei
 (PAIN PASS)
- posizione spaziale di punti notevoli
 (motion capture + stereofotogrammetria)
- dinamometria misura forze di reazione col terreno
 $F_j (F+M)$ → vettoگرامma
- EMG → attività muscolare durante il cammino

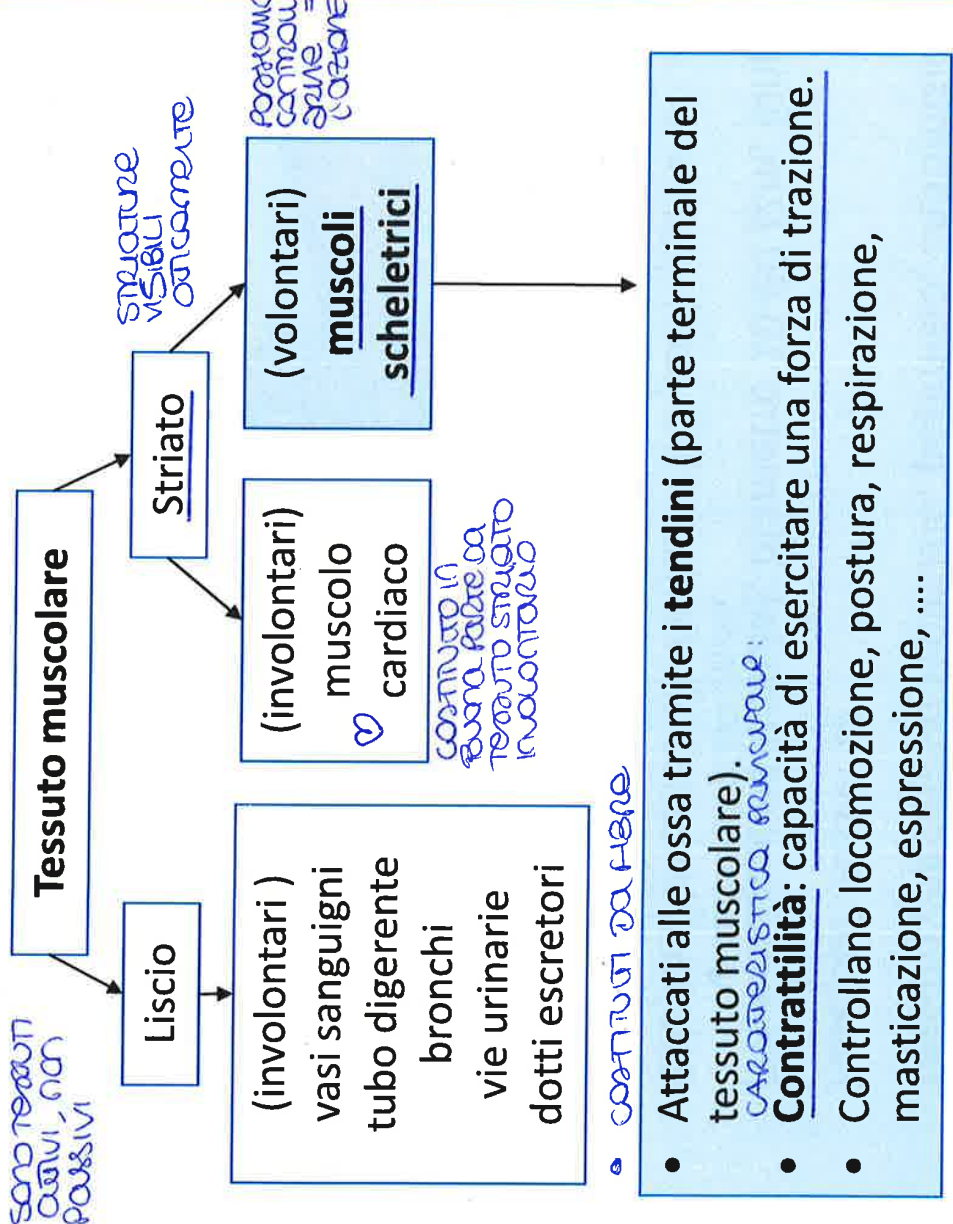
analisi dinamica inversa



- 1) definizione del modello d'arto in scelto (C.C.S.)
 3 segmenti: C, G, P rigidi
- 2) antropometria x determinare le caratteristiche dei segmenti
 dimensioni
 masse
 momenti d'inerzia
 dati strutturali dei corredi
 sessioni radiografiche
 tecniche antropometriche
- 3) identificazione geometrica dei punti significativi
 Grima
 balicentri
 CA

Meccanica dei muscoli scheletrici (= controllano il movimento dei segmenti corporei)

Su attivatori che si usano x comandare il movimento umano sono i muscoli



SONO TESSUTI
CIEVI, NON
POSSIVI

STRUTTURE
VISIBILI
OGGIAMENTE

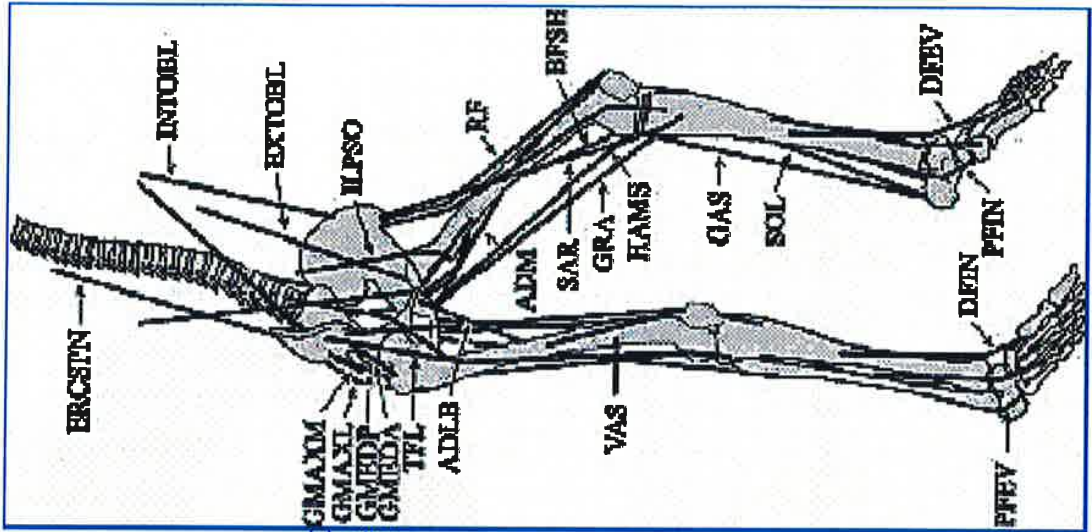
FORNISCONO
CONTRO
DOLLE
L'AZIONE

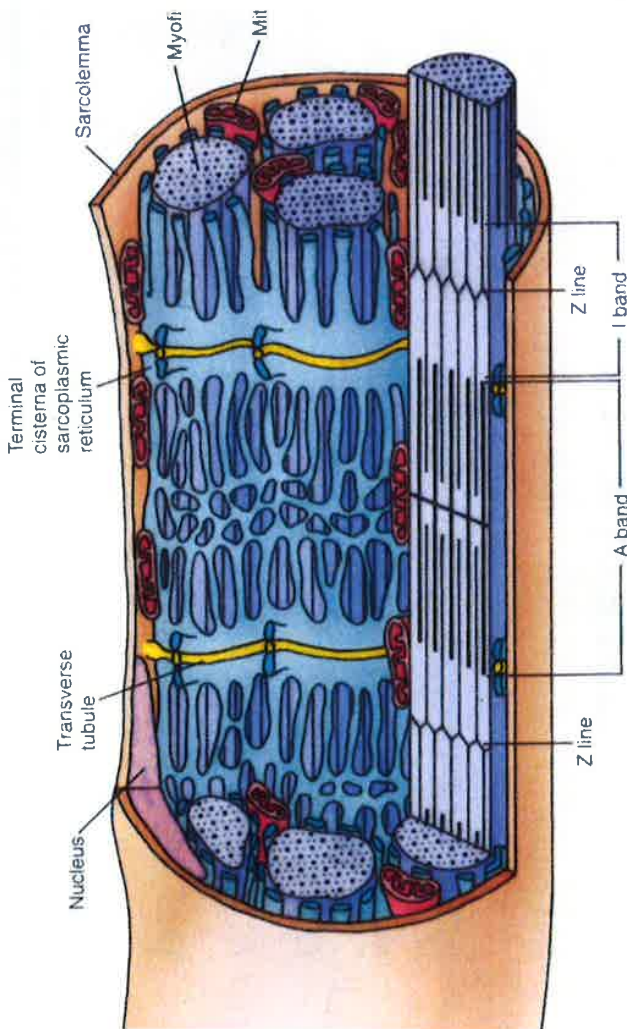
CONSTITUITO IN
BUONA PARTE DA
TESSUTO STRIATO
INVOLONTARIO

• COSTITUITI DA FIBRE

CARATTERISTICA PRINCIPALE:

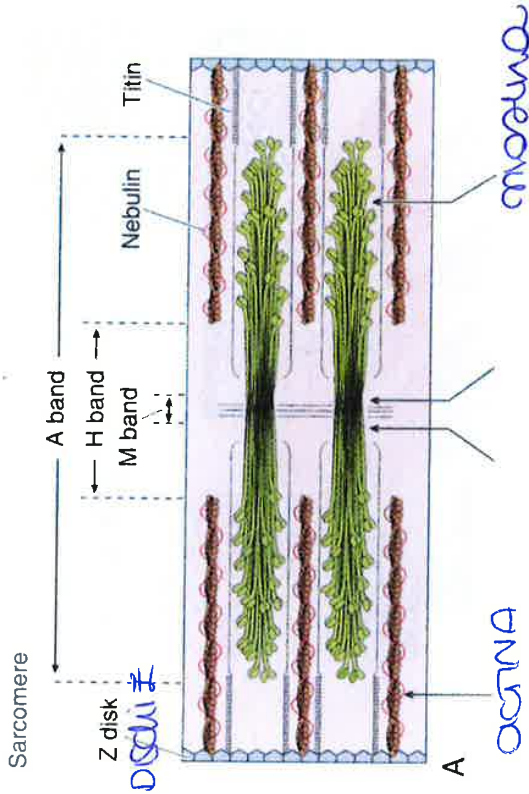
MUSCOLO
CONTRATTO — STA SVILUPPANDO UNA FORZA
INDIPENDENTEMENTE DALLA SUA
LUNGHEZZA — NON È ACCORCIATO





Sarcomero

SEZIONE DI FIBRA MUSCOLARE



Miofibrille: organizzate in unità contrattili elementari (**sarcomeri**), contengono vari tipi di filamenti, formati da tipi diversi di proteine. I due più importanti sono:

Filamento spesso di diametro 10-12 μm , di **miosina**.

Filamento sottile di diametro 6-7 μm , di **actina**, attaccato ad un disco Z.

Secondo la teoria degli **sliding filaments** o scorrimento dei filamenti, durante la contrazione la distanza tra le linee Z diminuisce, la banda H si accorcia, ma A rimane costante.

lunghezza costante

azione elettrica chimica

= movimento relativo

IFILAMENTI C.F.14
non si accorciano ma si sovrappongono

lunghezza miosina

Meccanica Applicata ai Sistemi Biomedici

Conformazione dei muscoli

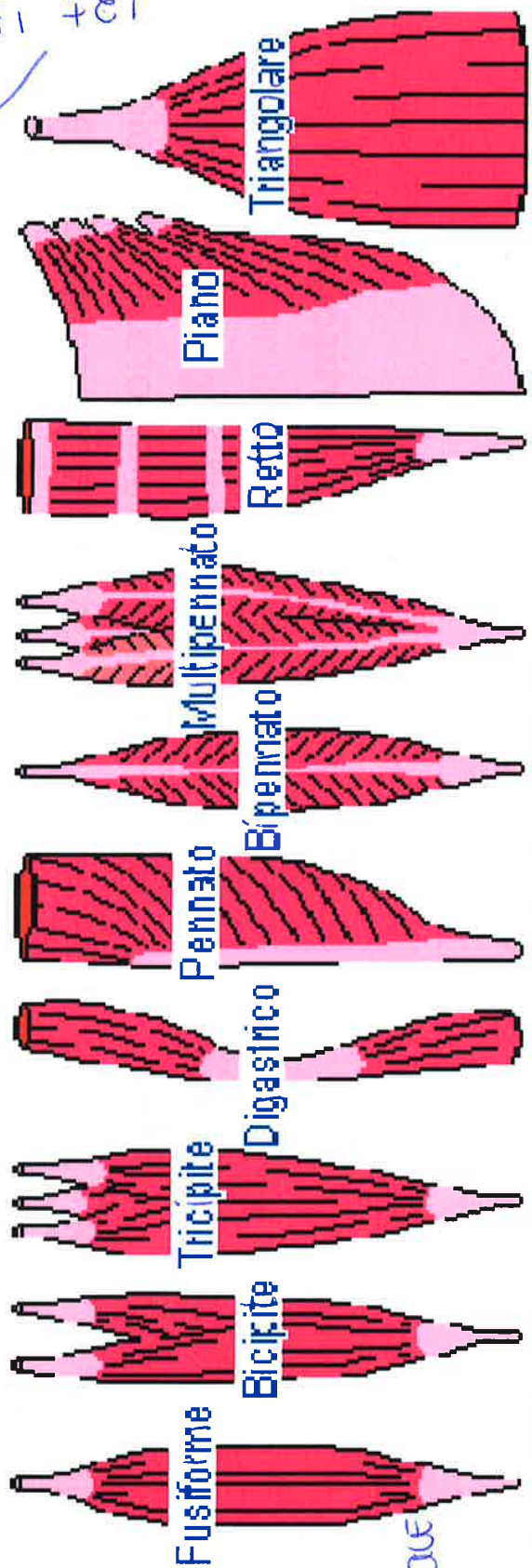
Le caratteristiche del muscolo sono influenzate dalla disposizione delle fibre rispetto alla direzione longitudinale.

9
tipologie
principali

Disposizione parallela: movimenti ampi, elevata velocità.
longitudinale tra le inserzioni pro e distale
articolazioni

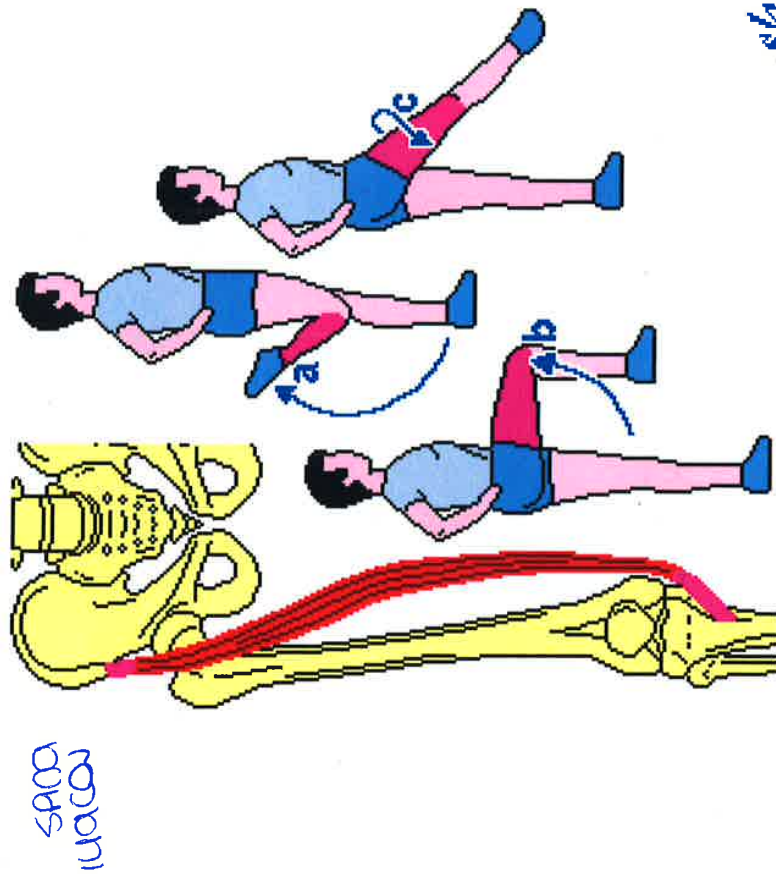
geometria = #A' funzionali
↓
GRANDI MOVIMENTI - FORZA
+ FORZA MOVIMENTI - AMPI

Disposizione obliqua: grande forza sviluppata, deformazione più limitata.
geometria piumata



↑
DIREZIONE LONGITUDINALE
↓
DIREZIONE TRASVERSALE

Attacco dei muscoli allo scheletro



Muscoli biarticolari:

le inserzioni tendinee estreme uniscono tre segmenti ossei articolati in sequenza tra di loro.

Il muscolo controlla il movimento di due articolazioni;

Es.: muscolo sartorio

*il lungo del collo utero
sia arca che sinocchio*

Ruolo dei muscoli

Muscoli agiscono in sinergia ↓

IN REAZIONE
MOVIMENTO
RECUPERA
+ MUSCOLO

Per controllare il movimento di un'articolazione sono sempre presenti almeno due muscoli, (agonista-antagonista) che agiscono in contrapposizione.

Agonista: è il muscolo che contrasta direttamente il carico esterno.

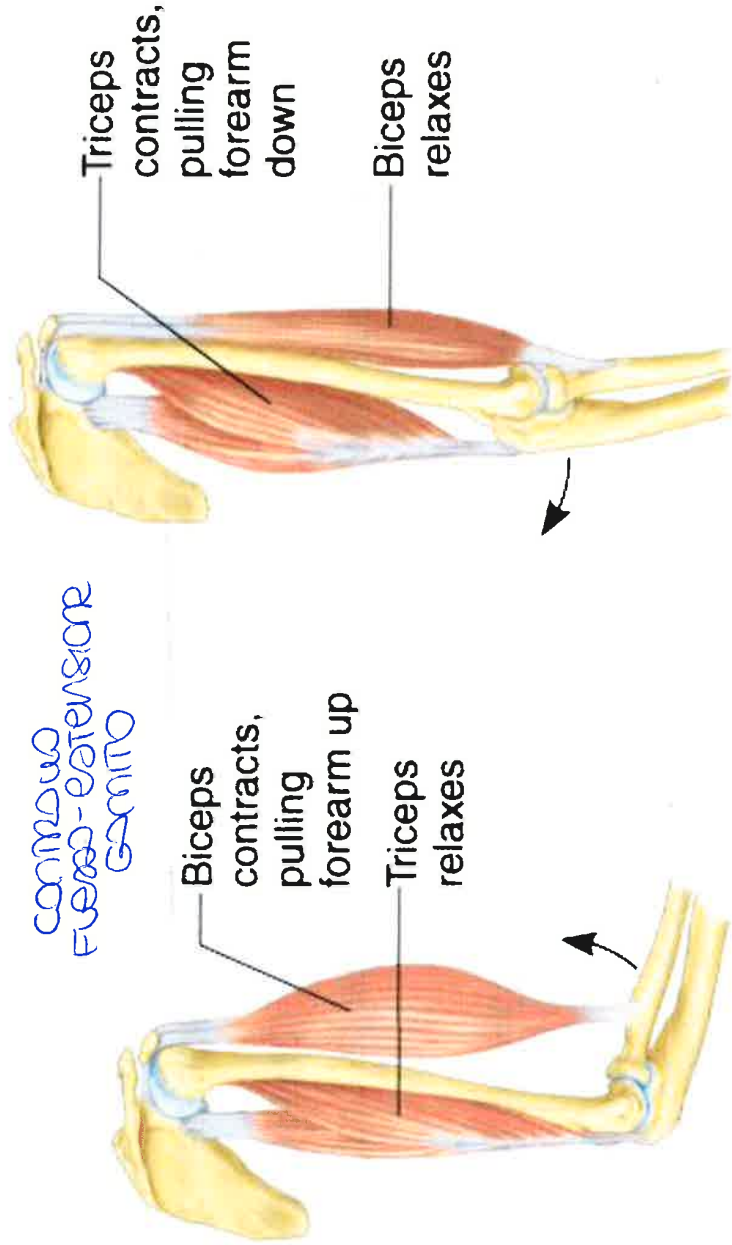
Antagonista: è il muscolo opposto, che si mantiene rilassato quando non deve contrastare un carico. Agisce anche come *modulatore* ovvero, mantenendo un certo tono, coopera con l'agonista al controllo del movimento.

2 ruoli
funzionali
presenti
in ogni
articolazione

Esempi:

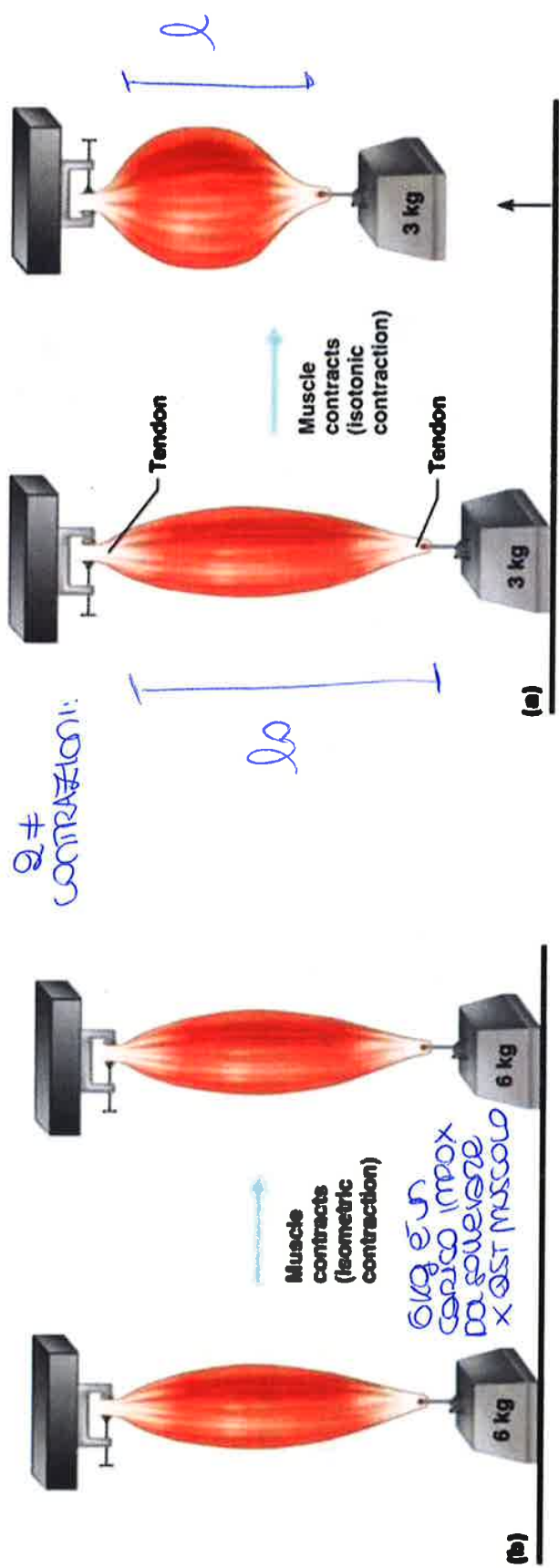
A sinistra l'agonista è il bicipite, per contrastare un peso posto sulla mano.

A destra l'agonista è il tricipite, supponendo la mano appoggiata ad una stampella per sostenere parte del peso corporeo.



isometrico / isotonica < concentrica / eccentrica
Contrazione dei muscoli
 = capacità di esercitare una forza

Durante una contrazione il muscolo esercita una forza che dipende dal grado di attivazione delle fibre muscolari.



Nella contrazione isometrica il muscolo è costretto a mantenere una lunghezza costante (o perché vincolato ad estremità fisse o perché la forza esercitata non è sufficiente a spostare il carico).

Nella contrazione isotonica il carico è costante e il muscolo può spostare il carico variando la sua lunghezza. In queste condizioni il muscolo può sia allungarsi sia accorciarsi.

INDIPENDENTE = mentre cambia posizione o lunghezza del muscolo rispetto ai punti di riferimento che è la lunghezza di riposo

esempio a far variare la sua lunghezza:
 $l < l_0 \rightarrow$ forza di contrazione
 $l > l_0 \rightarrow$ forza di allungamento

(MS) Caratterizzazione meccanica sperimentale dei muscoli

Musculi pensati come macchine attive

Dalla C.M.S. si ricava un modello

Individuazione di dati finalizzati alla definizione di un **modello**

fenomenologico in grado di descrivere il comportamento del muscolo.

CARATTERISTICHE DEL SUO FUNZIONAMENTO
DELFUNTO DI ALTA FISILOGICO

Variabili da considerare:

- tempo t *geometriche*
- lunghezza normalizzata (rispetto a quella di riposo) l/l_0 *specifico*
- forza per unità di area (tensione unitaria) $F/A = \sigma$ - che il muscolo è in grado di esercitare - o una porzione del muscolo (se assunto) - σ = TENSIONE UNITARIA
- velocità di deformazione dl/dt
- rigidità (stiffness) dF/dl *TRIGIDA SE ESERCITO TANTA FORZA X RINSURE A DEFORMARLA*
- cedevolezza (compliance) dl/dF *RECIPROCA*

DERIVATA

RAPPORTI FORZE/UNGHEZZE

- lavoro (energia) $F \cdot dl$ *FORZA PER VARIAZIONE DI LUNGHEZZA SONO 2 VETTORI (PRODOTTO SCALARE)*
- potenza $F dl/dt$ *FORZA PER VELOCITÀ*

$> 0, < 0$

FORZA SPONTANEO

come si stimolano? tramite segnale elettrico

Stimolazione dei muscoli

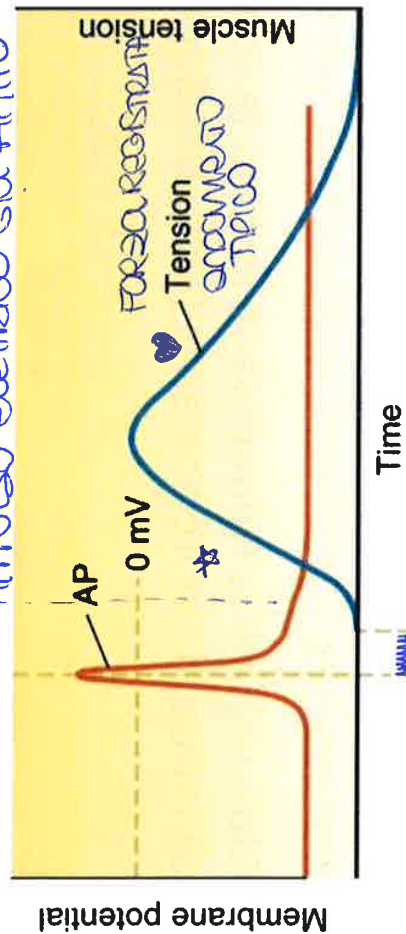
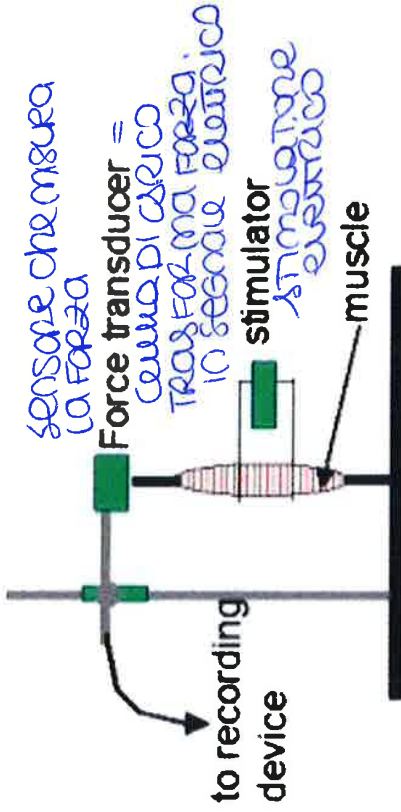
come reagisce il muscolo? dipende dal tipo di stimolo
 Ex: stimolo impulsivo

Si può stimolare la contrazione del muscolo tramite un segnale elettrico; la tensione esercitata dal muscolo viene misurata mediante una cella di carico.

Un impulso elettrico produce una singola **scossa** (twitch) costituita da una contrazione seguita da un rilassamento. ★ + ♥

Tra l'impulso elettrico e la scossa intercorre un **periodo di latenza** di pochi ms.

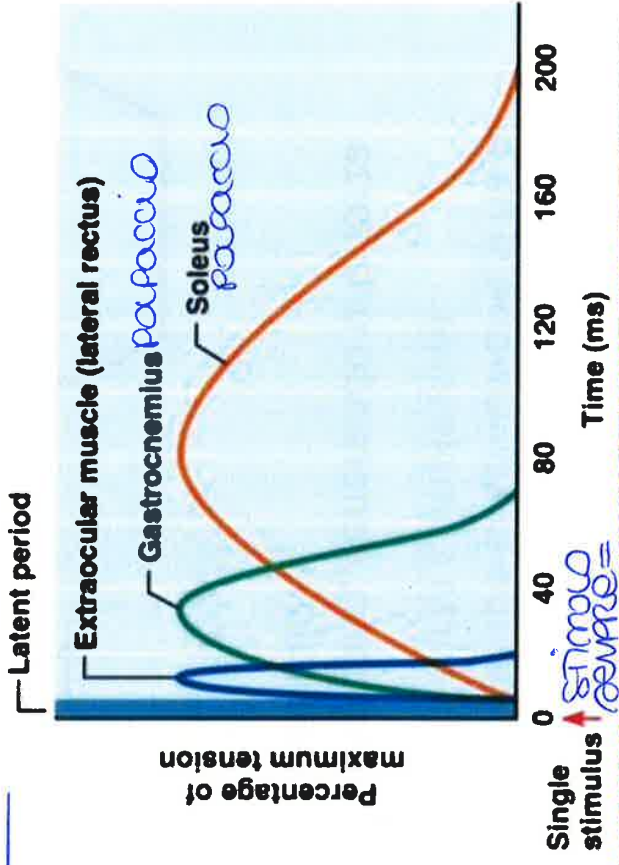
La durata di una singola scossa dipende dal tipo di muscolo 10ms / 100ms [10-102ms]



Latent period
 Latency =

TEMPO DI RITARDO

C.F.14



Meccanica Applicata ai Sistemi Biomedici

* FORA DI CONTRAZIONE: F ↑
 * FORA DI RILASSAMENTO: F ↓

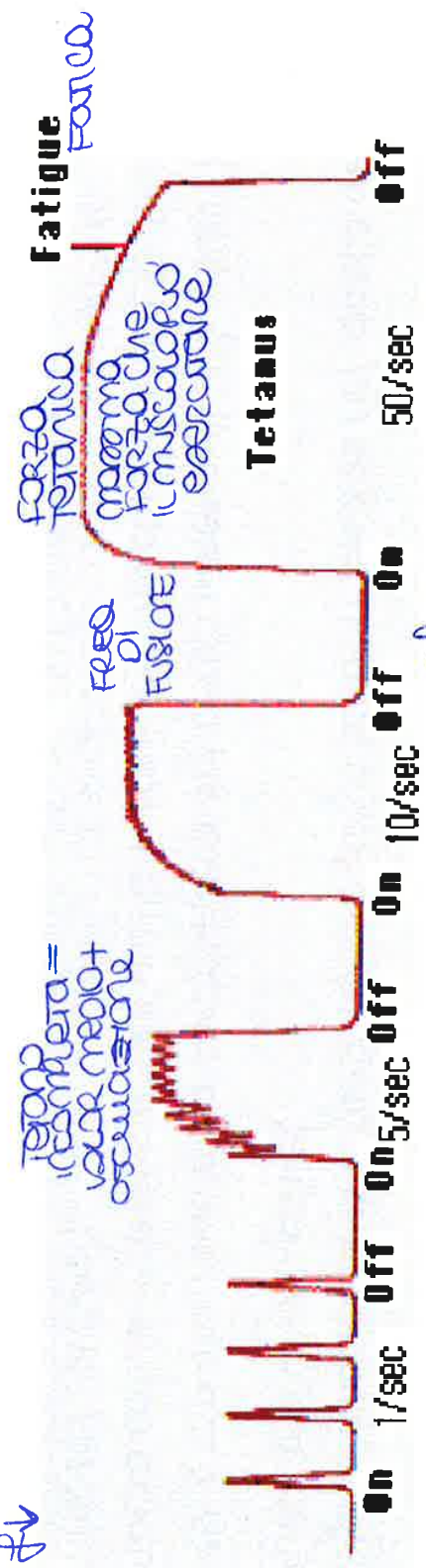
TWITCH
 ↳ scossa

legge di Ohm Σ
 $V = RI$

Effetto della frequenza

- A frequenze basse (1 Hz): il muscolo risponde con una singola contrazione ad ogni impulso. *escenti alternate*
- A frequenze più elevate (5-10 Hz): le singole contrazioni si sovrappongono, generando una forza di livello maggiore rispetto alla singola contrazione. La forza presenta un valore medio a cui si sovrappone una componente oscillatoria (tetano incompleto).
- Ad una certa frequenza (frequenza di fusione, tipicamente >50 Hz), la forza non presenta più oscillazioni e mantiene un valore costante (muscolo in tetano), salvo presentare un decadimento dovuto all'affaticamento.
- Anche la temperatura influenza il comportamento: un muscolo sartorio di rana mantenuto a 0°C raggiunge il tetano completo a circa 30 Hz.

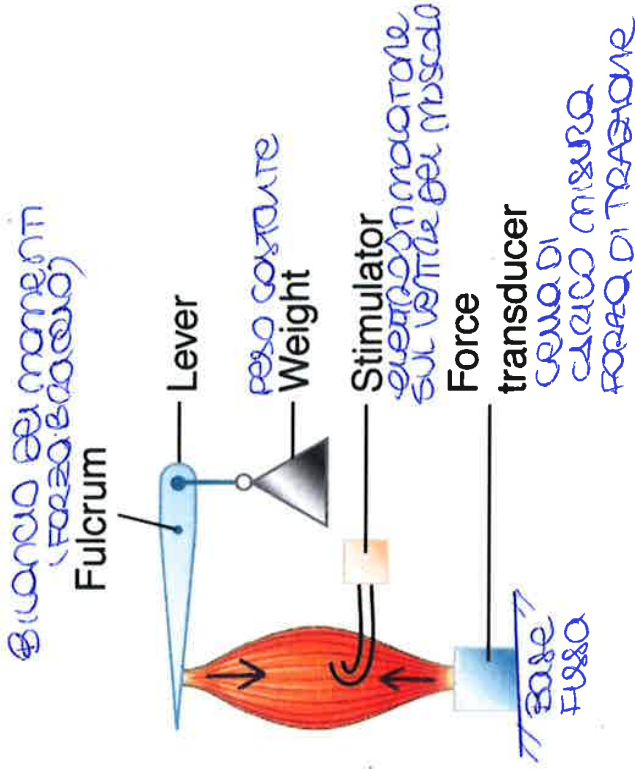
$\downarrow T = \text{tetano a } f_v$



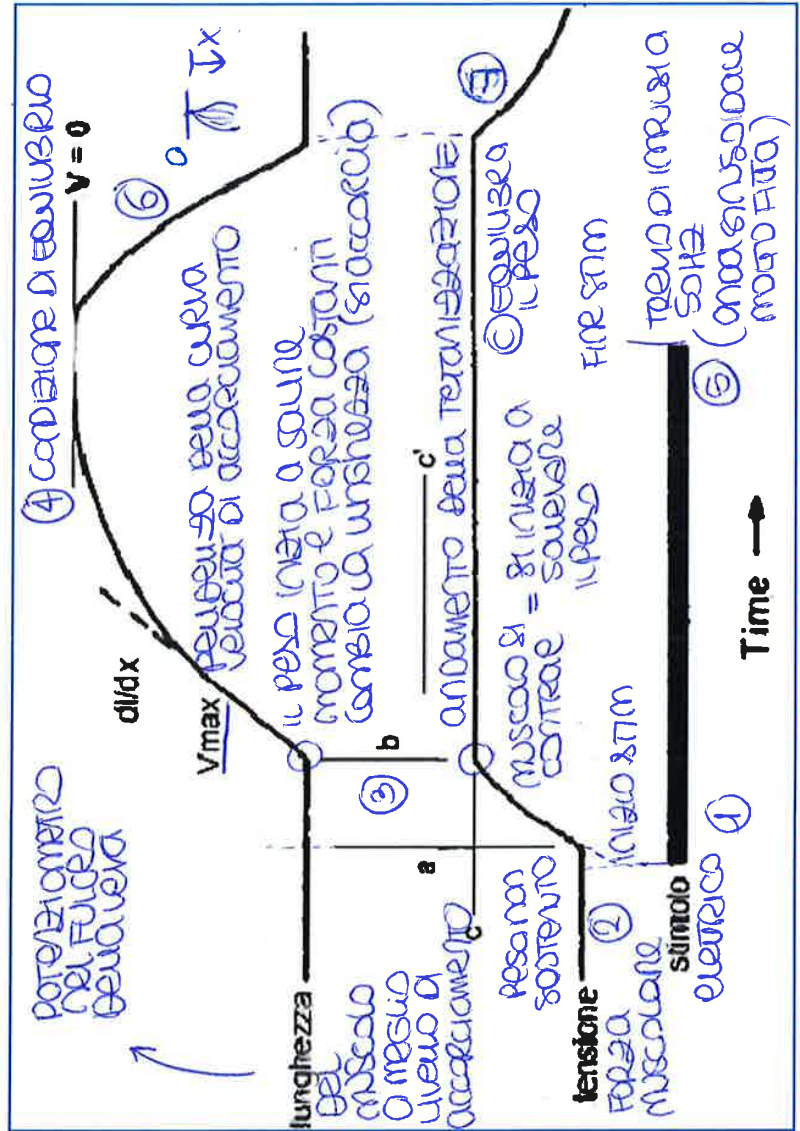
TPI Dicontrazione:

Contrazione isotonica

Il muscolo viene collegato ad una leva in modo da consentirgli di sollevare un carico costante quando si contrae.
Lo spostamento della leva e la forza del muscolo vengono registrati mediante trasduttori.



Sottoponendo il muscolo ad una stimolazione tetanica si ha un andamento delle tensioni e degli spostamenti al variare del tempo come riportato in figura.



Si registrano in funzione nel tempo alcuni secondi

FORZA DI TRAZIONE

La forza muscolare

La **tensione passiva** è misurata nel muscolo **non stimolato elettricamente**, per diversi valori di $l > l_0$.

FORZE MISURATE
 $l > l_0$ e $0 < l < l_0$
 solo per $l > l_0$

La **tensione totale** è misurata nel muscolo **stimolato in condizione isometrica**. Presenta un massimo per $l \approx l_0$ nei muscoli a fibre parallele (es. sartorio), assente invece nei muscoli pennati (es. gastrocnemio).

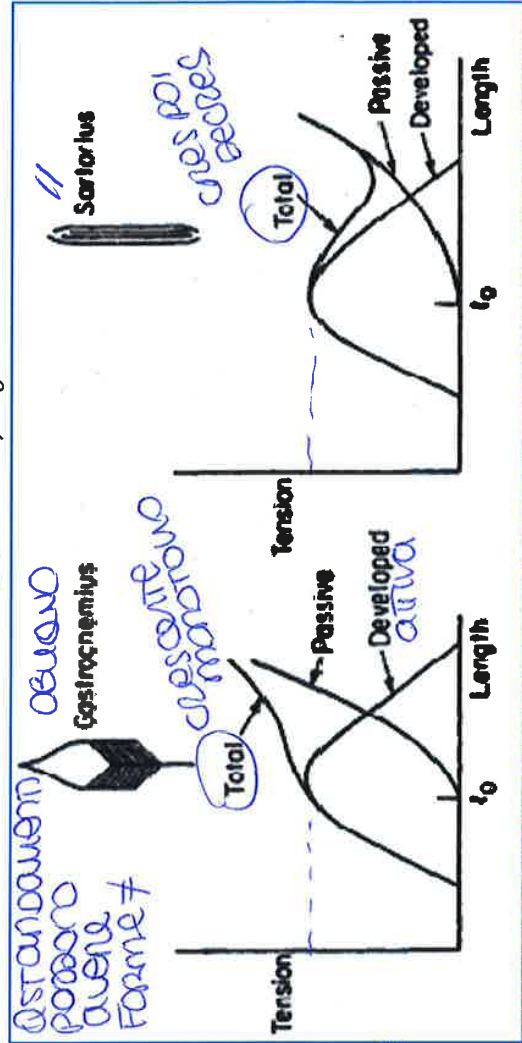
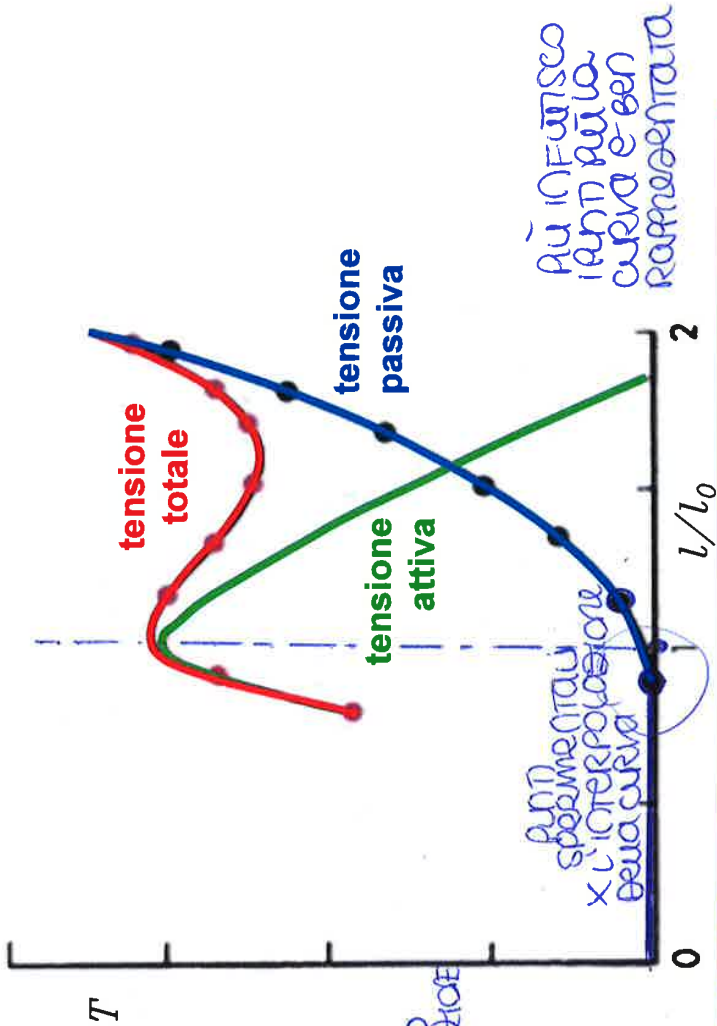
PER INTORNO DELLA CONDIZIONE DI RIPOSO

La **tensione attiva** non è misurata direttamente ma **calcolata come differenza** tra le due precedenti. E' sviluppata dal muscolo nel processo di contrazione.

OGNI MISURA SI CALCOLA LA DIFFERENZA

E' massima nell'intorno di $l = l_0$ ed ha un valore all'incirca costante per tutti i mammiferi, pari circa a **200 kPa**.

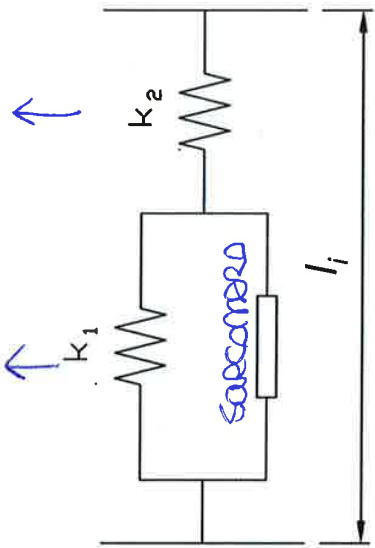
PRODOTTA DALL'INTERAZIONE ACTINA-MIOSINA
 $\approx 200 \text{ kPa}$
 0.2 MPa



POTENZIALE MODELLI MECCANICO:

Modello del muscolo

FIBRE MUSCOLARI TENDINI



si hanno bene le condizioni →

K_1 : elemento elastico in parallelo ad un **elemento contrattile**;

K_2 : elemento elastico in serie;

l_i : lunghezza iniziale del muscolo prima della contrazione.

due ideati che rappresentano la parte elastica del muscolo
 2 x K1 e K2 sono 2 sezioni del muscolo
 - FIBRE MUSCOLARI
 - TENDINI che non si contraggono

C.F.14

1 - Contrazione isometrica:

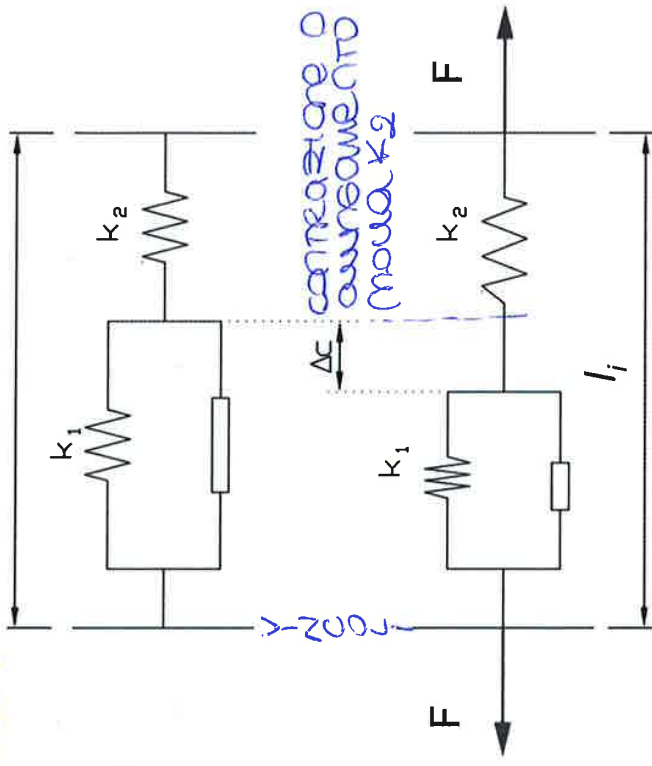
muscolo vincolato rigidamente agli estremi ($l_i = \text{cost.}$)

$F = k_2 \cdot \Delta c$
 modello lineare

Il muscolo non compie lavoro. → spostamento del punto di attacco

- PRIMO AUMENTO STATICO
- POI SI STABILISCE IL SARCOMERO
- SI ACCORCIA E K_2 SI AUMENTA X MANTENERE LA LUNGHEZZA l_i

x K1 non c'è
 spostamento del punto di attacco
 consumo energia biochimica non meccanica

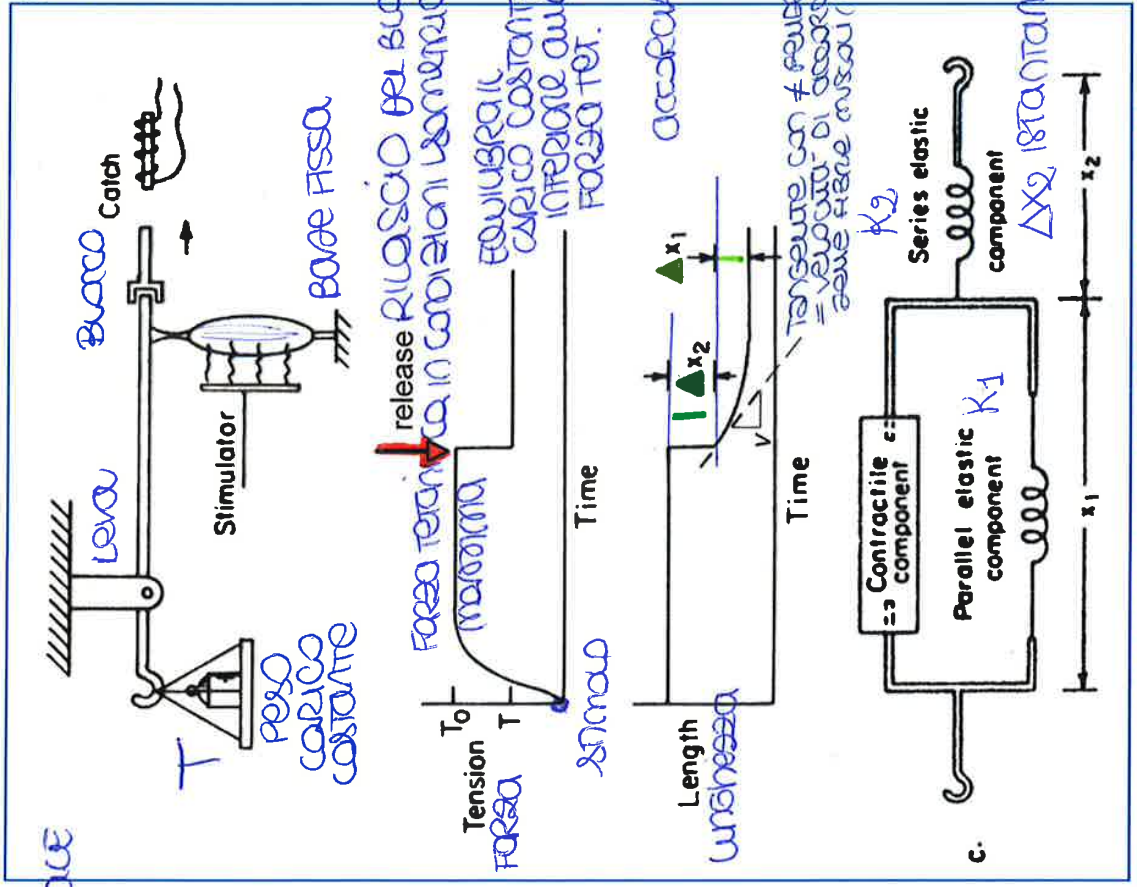


Meccanica Applicata ai Sistemi Biomedici

23/29

Esperimenti di quick-release = RILASCIO RAPIDO
 Ma i muscoli non si comportano come delle molle
 una loro componente difende anche
 dalla velocità di deformazione

Banco
strumentale



Prima del rilascio il muscolo è
 stimolato in condizione isometrica
 alla forza tetanica T_0 Massimo

Dopo il rilascio il muscolo è in
 condizione isotonica, soggetto al
 carico costante T . $T < T_0$

L'elemento elastico in serie k_2 si
 accorcia immediatamente della
 quantità Δx_2 (tendini).

L'elemento contrattile si accorcia
 della quantità Δx_1 in modo
 smorzato, evidenziando un
 comportamento visco-elastico.

PRESENZA DI ELEMENTI DIFENSIVI
 CHE INTERDIPENDONO DAL MUSCOLO IN //
 CHE ELEMENTO CONTRATTILE
 = SMORZATORE VISCOZO

Formula di Hill

$$(T + a)(v + b) = (T_0 + a)b$$

T_0 : carico isometrico, contro il quale il muscolo non può deformarsi
massima forza che riesce ad esercitare il muscolo

CARICO PRIMA DEL RIASSO

v_M : velocità di contrazione a vuoto ($T=0$)
velocità massima

NUOVA FORMULA DI HILL

$b = \text{velocità}$
 $a = \text{forza}$

$v_M = \frac{T_0 \cdot b}{a}$
massima velocità di accorciamento

$$a(v_M + b) = (T_0 + a)b \rightarrow a \cdot v_M = T_0 \cdot b \rightarrow$$

TENSIONE ADIMENSIONATA DEL MUSCOLO

$$k = \frac{a}{T_0} = \frac{b}{v_M}$$

CARICO E VELOCITÀ ADIMENSIONATI

Ponendo:

$T = T' T_0$
 $V = v_M v'$
 $a = k T_0$
 $b = k v_M$

SOSTITUISCO NUOVA FORMULA DI HILL

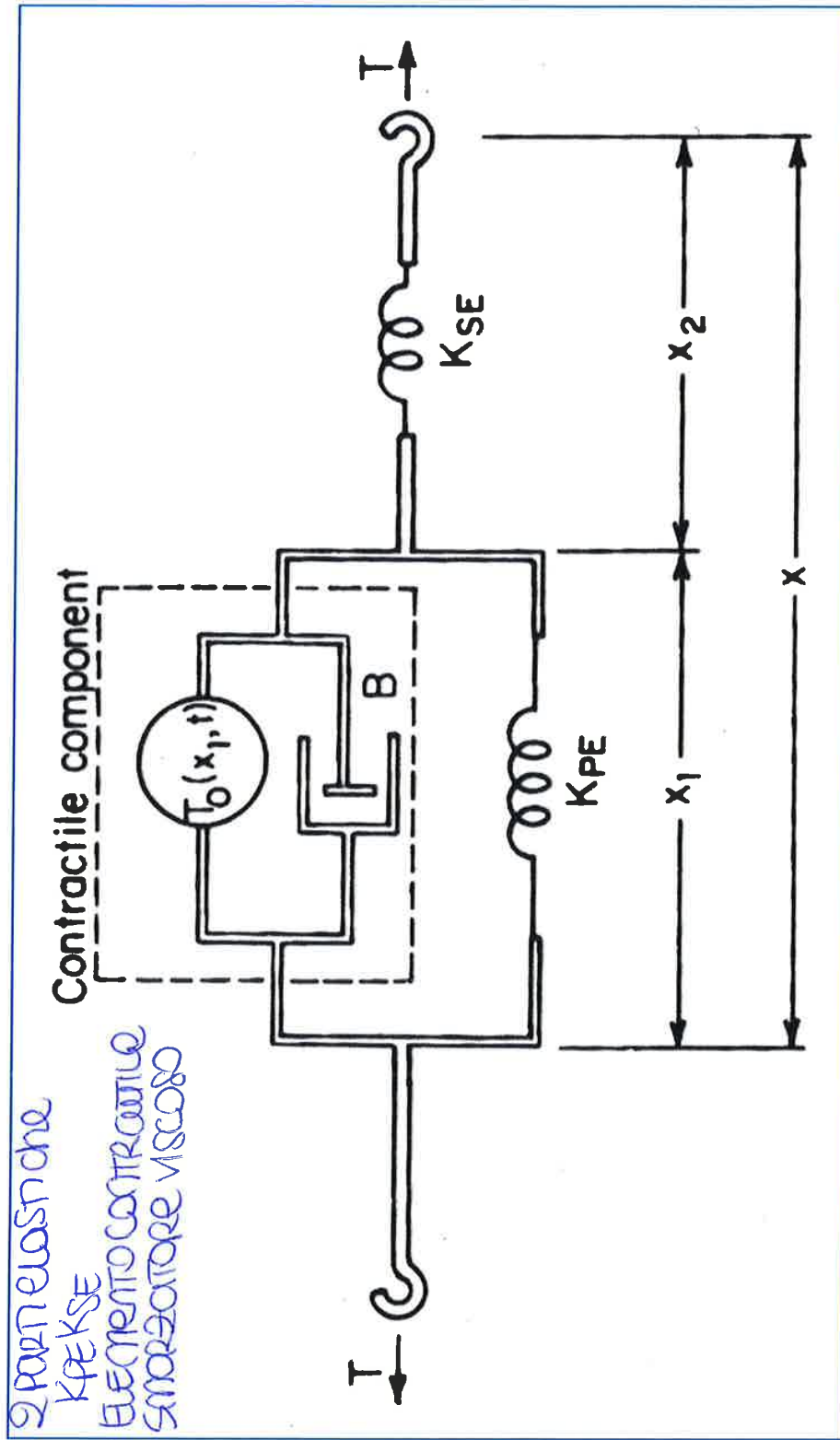
$$v' = k \frac{1 - T'}{k + T'} \quad \text{oppure} \quad T' = k \frac{1 - v'}{k + v'}$$

è la forma adimensionale della formula di Hill

Per la maggior parte dei vertebrati la costante k assume valori compresi in un range ristretto:

$$0,15 \leq k \leq 0,25$$

Modello di Hill

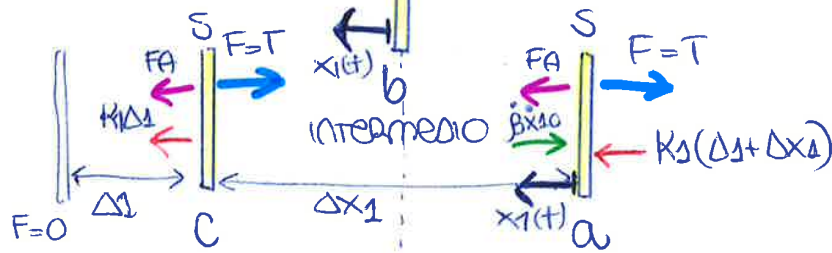
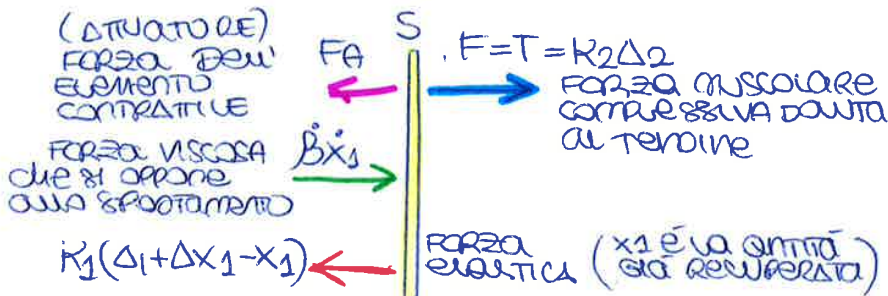


2 parti elastiche
 KPE KSE
 ELEMENTO CONTRATTILE
 SMORZATORE VISCOLO

ce' solo in condizioni dinamiche non in condizioni statiche
 ce' da considerare anche la velocita'

① Ricavare la legge del moto della funzione S durante la prova

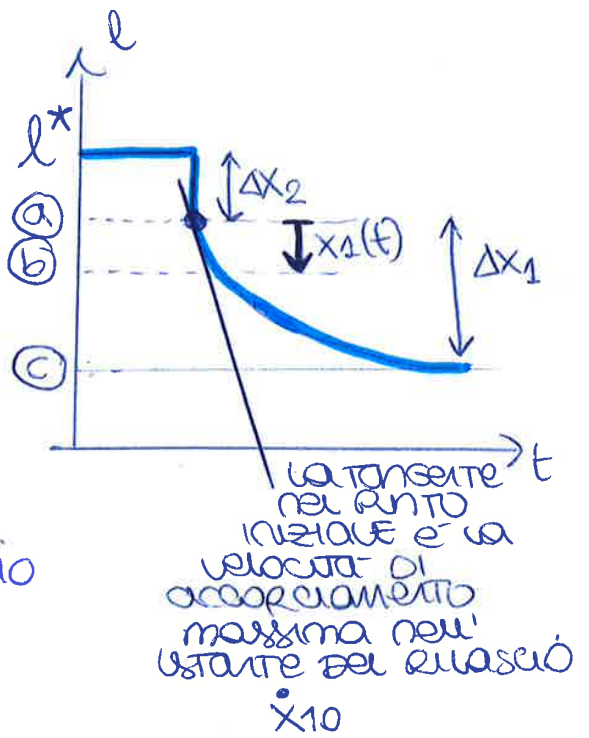
Costruzione del modello dinamico del sistema



FINE
 $F=T$
 $x_1 = \Delta x_1$
 $\dot{x}_1 = 0$

INIZIO DEL RILASCIO
 $F=T$
 $x_1 = 0$
 $\dot{x}_1 = \dot{x}_{10}$

HA RECUPERATO Δx_1 DAVANTO A TO



x_1 = spostamento funzione S
 \dot{x}_1 = velocità funzione S
 Δx_2 = già recuperata

EQUILIBRIO DELLA FUNZIONE S IN CONDIZIONE ISOTONICA

condizione isotonica generica ($0 < x_1 < \Delta x_1$) Δx_1 LO STA RECUPERANDO

EQ (b) $T + \beta \dot{x}_1 = F_A + K_1(\Delta_1 + \Delta x_1 - x_1)$

$T = F_A - \beta \dot{x}_1 - K_1 x_1 + K_1(\Delta_1 + \Delta x_1)$

→ Parte di deformazione già recuperata

RESUME ($x_1 = \Delta x_1$) È STATO RECUPERATO Δx_1
 IMPOSTO LE CONDIZIONI AL CONTORNO X C

EQ (c) $T = F_A - \beta \dot{x}_1 - K_1 x_1 + K_1 \Delta_1 + K_1 \Delta x_1 = F_A + K_1 \Delta_1$
 $= 0 \quad -K_1 \Delta_1$

all'INIZIO DEL RILASCIO ($x_1 = 0$)
 IMPOSTO LE CONDIZIONI AL CONTORNO X a

EQ (a) $T = F_A - \beta \dot{x}_{10} - K_1 x_1 + K_1(\Delta_1 + \Delta x_1)$
 $= 0$

COMBINO LE ESPRESSIONI X AVERE TUTTO IN x_1

$T = F_A$ (b) e (c)
 $-\beta \dot{x}_1 - K_1 x_1 + K_1(\Delta_1 + \Delta x_1) = K_1 \Delta_1$