NUMERO: 1552A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Biomeccanica dei Solidi + Temi d'esame. Prof.Audenino

30 settembre 2014

CARICHI di PROGETTO

PER PROGETTARE UNA STRUTTURA, DEVO DECIDERE I CARICHI
SI DIVIDONO IN:

- **STATICI**: QUANDO LA VARIABILE TEMPO NON INTERVIENE
  - SE SUL SISTEMA AGISCE UNA FORZA COSTANTE
  - SE IL CARICO NON È COSTANTE, MA LA FORZA È APPLICATA "LENTAMENTE" E PER "LUNGA" DURATA
  - DEVONO ESSERE RESISTENTI AL SOVRACCARICO E ANCHE AL COMPORTAMENTO A FATICA (CARICHI RIPETUTI)

  → SIA PROGETTAZIONE STATICA, SIA A FATICA (USANDO IL CARICO MEDIO PIÙ FREQUENTE)
  - ATTENZIONE ANCHE ALL'INVECCHIAMENTO (DEGRADARSI NEL TEMPO DELLE PROPRIETÀ) E ALL'USURA → CALCOLO AD USURA
  - I 3 PARAMETRI DELLA PROGETTAZIONE SONO QUINDI: SOVRACCARICO - FATICA - USURA
  - TEMPI CARATTERISTICI DI APPLICAZIONE DELLA FORZA MOLTO >>> DEL PERIODO DELLA PRIMA RISONANZA → COSÌ SONO TRASCURABILI LE (ALTRIMENTI, SE SONO CIRCA ≅ → DINAMICO) FORZE DI INERZIA E LA DENSITÀ (ALTRIMENTI NO)

  EX: PESO PROPRIO
  PRESSIONE IN UN VASO ARTERIOSO
  RESISTENZA AERODINAMICA DI UN AEREO

In passato, il caso dinamico si affrontava con un sovradimensionamento del caso statico → non applicabile in alcuni casi:

sovradimensionamento = dimensionamento in base al coeff. moltiplicativo delle sollecitazione statica

- ↑ velocità di rotazione
- ↑ esigenze di leggerezza e sicurezza
- calcolo dinamico richiesto da normativa (ex: valvola cardiaca)

o sperimentalmente o calcolo numerico

STUDIO DINAMICO
↓
MODELLO DI CALCOLO
↓
SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA

- modelli elementari analitica a 10+ gradi di libertà lineari (a parametri concentrati) → non ∃ nella realtà (distribuiti) → con eq. diff del 2° ordine con derivate solo rispetto al tempo non parziali (spaziali)
- sistemi lineari continui
- F.E.M. (metodo agli elementi finiti) Finite Element Method

FORZA D'INERZIA = FORZE APPLICATE

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO SULLA MASSA

$$m\ddot{x} = \underbrace{-k(x - x_A}_{} - \underbrace{l_0}_{}) + F(t) - mg$$

2 estremi della molla che si spostano, xk si muove anche il vincolo (se fosse fisso, $x_A = 0$)

l_0 → lunghezza iniziale della molla

$$m\ddot{x} = -kx + kx_A + kl_0 + F(t) - mg$$

separo le incognite dai termini noti

$$m\ddot{x} + kx = kx_A + kl_0 + F(t) - mg$$

$$m\ddot{x} + kx = k[x_A(t) + l_0] + F(t) - mg$$

$x_A(t)$: si toglie solo se il vincolo è fisso

l_0, mg: spostano l'equazione di una costante nota

CAMBIO LA VARIABILE: $x'_A(t) = x_A(t) + l_0 - \frac{mg}{k}$

L'equazione da risolvere è:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = kx'_A(t) + F(t)}$$

manca il termine di 1° grado = parte dissipativa

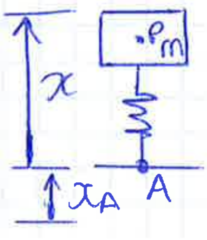
se
- vincolo fermo e sì forzante: $m\ddot{x} + kx = F(t)$
- vincolo si muove e no forzante: $m\ddot{x} + kx = x'_A(t)$

equazioni identiche

⚠ al sistema a cui ci si riferisce!
in questo caso il riferimento è inerziale!

x è riferita ad un punto fisso dello spazio

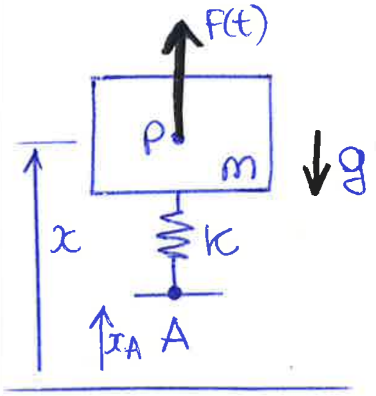
il riferimento non inerziale semplifica le equazioni, xk si è solidali al punto di vincolo A



x = compressione molla
ora ha un riferimento mobile (x_A) non più fisso

SISTEMI LINEARI A 1GdL A PARAMETRI CONCENTRATI - OSCILLATORE MECCANICO LINEARE NON SMORZATO

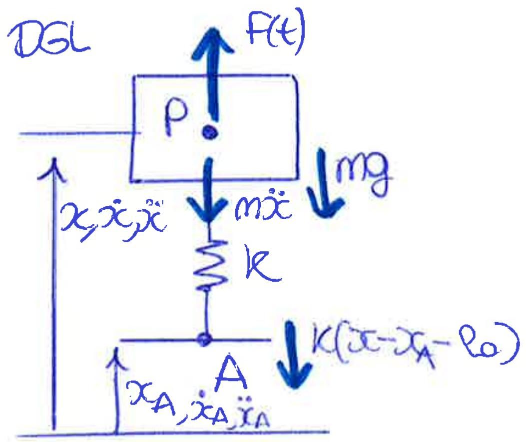
- LINEARI = ACCADE OSCILLAZIONI, RETTI DA EQ. LINEARI x CUI VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
- 1GdL
- A PARAMETRI CONCENTRATI = MASSA E RIGIDEZZA SONO CONCENTRATI IN 2 OGGETTI DIVERSI E NON SONO DISTRIBUITE UNIFORMEMENTE IN UN UNICO OGGETTO, UTILIZZA EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
- OSCILLATORE MECCANICO NON SMORZATO:



- SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE = x È RIFERITA AD UN PUNTO FISSO DELLO SPAZIO
- m = MASSA → FORZA D'INERZIA [Kg]
- K = RIGIDEZZA [N/m] → FORZA ELASTICA
- g = GRAVITÀ → FORZA PESO
- x = RIFERIMENTO INERZIALE = POSIZIONE DELLA MASSA m
- x_A = SPOSTAMENTO DEL VINCOLO, XK NON È FISSO
- F(t) = FORZA ESTERNA
- l_0 = LUNGHEZZA INIZIALE DELLA MOLLA

= MASSA PUNTIFORME SOSPESA AD UNA MOLLA CON CARATTERISTICA LINEARE

DCL



- DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO X TROVARE L'EQUAZIONE DEL SISTEMA
- INDICO VERSI POSITIVI
- Σ FORZE D'INERZIA = Σ FORZE APPLICATE
  Σ FORZE = 0

$$m\ddot{x} + mg + K(x - x_A - l_0) = F(t)$$

$$m\ddot{x} = -K(x - x_A - l_0) + F(t) - mg$$

$$m\ddot{x} + Kx = K(x_A(t) + l_0) + F(t) - mg$$

- SE IL VINCOLO FOSSE FISSO → $x_A = x_A(t) = 0$
- $Kl_0 - mg$ SPOSTANO L'EQUAZIONE DI UNA COSTANTE NOTA
- CAMBIO DI VARIABILE $x'_A(t) = x_A(t) + l_0 - \frac{mg}{K}$

$$x_A(t) = x'_A(t) - l_0 + \frac{mg}{K}$$

$\ddot{x}$ = ACCELERAZIONE ASSOLUTA

$$m\ddot{x} + Kx = Kx'_A(t) - \cancel{Kl_0} + \cancel{mg} + \cancel{Kl_0} + F(t) - \cancel{mg}$$

$$m\ddot{x} + Kx = Kx'_A(t) + F(t)$$

ABBIAMO ≠ POSSIBILITÀ = ≠ FORZANTI = ≠ ECCITAZIONI

- FORZANTE ESTERNA F(t) $\quad m\ddot{x} + Kx = F(t)$
- SPOSTAMENTO DEL VINCOLO $x'_A(t)$ $\quad m\ddot{x} + Kx = Kx'_A(t)$
- ENTRAMBE $\quad m\ddot{x} + Kx = Kx'_A(t) + F(t)$
- ACCELERAZIONI COSTANTI → FORZA PESO

OSCILLAZIONI LIBERE (NO FORZANTI, NO FORZE ESTERNE)

$F(t)=0$, $x'_A(t)=0$, $x_A=\dot{x}_A=\ddot{x}_A=0$

- OMOGENEA ASSOCIATA $\boxed{m\ddot{x}+kx=0}$
IN ENTRAMBI I SISTEMI DI RIFERIMENTO (INERZIALE E NON)

- SOLUZIONI:
  - ★ $x = x_{01}\cos(\lambda t) + x_{02}\sin(\lambda t)$
  - ★★ $x = x_0 \sin(\lambda_n t + \Phi)$
  - ★★★ $x = x_0^* e^{st}$

★ PRIMA SOLUZIONE, È UN'ARMONICA, UNA SINUSOIDE DI FASE QUALSIASI

$$x = x_{01}\cos(\lambda t) + x_{02}\sin(\lambda t)$$

SOLUZIONE COMODA X APPLICARE LE CONDIZIONI INIZIALI!! $\rightarrow x_{01}, x_{02}$ ⚠

PER TROVARE LA CONDIZIONE X AMMETTERE SOLUZIONE DERIVO E SOSTITUISCO

$\dot{x} = x_{01}\lambda\sin(\lambda t) - x_{02}\lambda\cos(\lambda t)$

$\ddot{x} = -x_{01}\lambda^2\cos(\lambda t) - x_{02}\lambda^2\sin(\lambda t) = -\lambda^2(x_{01}\cos(\lambda t) + x_{02}\sin(\lambda t))$

$\ddot{x} = -\lambda^2 x \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

$-m\lambda^2 x + kx = 0$

$\cancel{x}(-m\lambda^2 + k) = 0$

$m\lambda^2 = k$

$\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}} = \lambda_n$ PULSAZIONE PROPRIA O FREQUENZA NATURALE DEL SISTEMA

QUINDI $x = x_{01}\cos(\lambda_n t) + x_{02}\sin(\lambda_n t)$

$(\lambda_n = 2\pi f_n)$
$(\lambda_n = \frac{2\pi}{T})$

★★ SECONDA SOLUZIONE, MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$x = x_0 \sin(\lambda_n t + \Phi)$$

SOLUZIONE COMODA X CALCOLARE x MASSIMO

RICONDUCIBILE ALLA PRIMA X LE FORMULE

$x = x_0\sin\Phi\cos(\lambda_n t) + x_0\cos\Phi\sin(\lambda_n t)$

SE $\left.\begin{matrix} x_0\sin\Phi = x_{01} \\ x_0\cos\Phi = x_{02} \end{matrix}\right\}$ $x_0 = \frac{x_{01}}{\sin\Phi} = \frac{x_{02}}{\cos\Phi} \rightarrow \frac{x_{01}}{x_{02}} = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi} = \tan\Phi$

$x_{o_2}^* = \overline{x_{o_1}}$

$\Rightarrow x = \underbrace{2\operatorname{Re}(x_{o_1}^*)}_{x_{o1}} \cos \lambda_n t \; \underbrace{- 2\operatorname{I}(x_{o_1}^*)}_{x_{o_2}} \sin \lambda_n t$

$$\left.\begin{array}{l} x_{o_1} = 2\operatorname{Re}(x_{o_1}^*) \\ x_{o_2} = -2\operatorname{I}(x_{o_1}^*) \end{array}\right\}$$

LA TERZA SOLUZIONE PUO' ANCHE ESSERE SCRITTA

$x = x_o^* e^{i\lambda t}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$s \in \mathbb{C}$

SI SONO QUINDI TROVATE POSSIBILI SOLUZIONI X L'OMOGENEA ASSOCIATA. ORA MANCA LA SOLUZIONE PARTICOLARE.

OSCILLAZIONI FORZATE

SOLITAMENTE LE FORZANTI SI DEFINISCONO CON UN'ARMONICA. (ANCHE NEI CASI + COMPLESSI, VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, X CUI LA FORZANTE E' SUDDIVISA IN ARMONICHE)

X OTTENERE LA SOLUZIONE COMPLETA SI SOMMA ALL'OMOGENEA UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE TOTALE DOVE LE FORZANTI NON SONO = A ZERO.

$$F(t) = f_0 \cos(\lambda t) = f_1 \cos(\lambda t) + f_2 \sin(\lambda t)$$

*L'EQUAZIONE TOTALE DIVENTA (ECCITAZIONE ESTERNA)

$m\ddot{x} + Kx = F(t)$

$m\ddot{x} + Kx = f_0 \cos(\lambda t)$

E LA SUA SOLUZIONE E'

$\boxed{x_p = x_0 \cos(\lambda t)}$

CON MODULO $x_0 = \dfrac{f_0}{(K - m\lambda^2)}$

$x = x_0 \cos(\lambda t)$

$\dot{x} = x_0 \lambda \sin(\lambda t)$

$\ddot{x} = -x_0 \lambda^2 \cos(\lambda t)$

$-x_0 \lambda^2 m \cancel{\cos(\lambda t)} + K x_0 \cancel{\cos(\lambda t)} = f_0 \cancel{\cos(\lambda t)}$

$f_0 = K x_0 - x_0 \lambda^2 m$

$x_0 = \dfrac{f_0}{K - m\lambda^2}$

CALCOLI

IN ENTRAMBI I CASI (FORZANTE ESTERNA o ECCITAZIONE DEL VINCOLO) SI DEFINISCE LA FUNZIONE

$H(\lambda)$ = RAPPORTO DI AMPLIFICAZIONE = RISPOSTA IN FREQUENZA = FUNZIONE DELLA PULSAZIONE DELLA FORZANTE

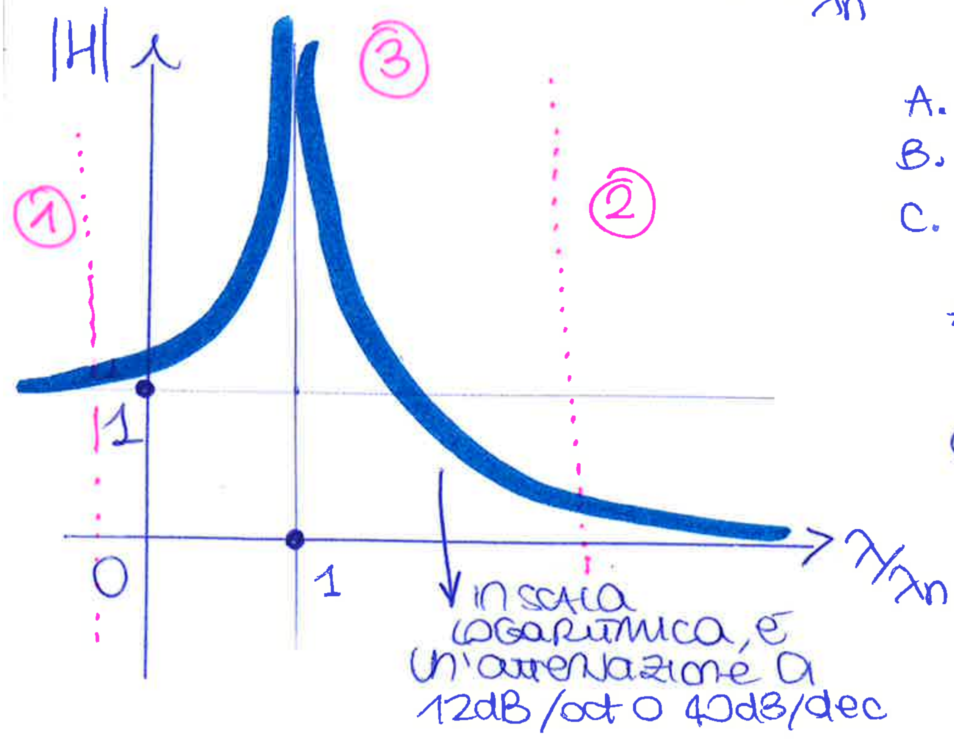
= RAPPORTO TRA AMPIEZZA DELLA RISPOSTA x_0 e QUELLA DELL'ECCITAZIONE (x'_{A0} o f_0)

$$H(\lambda) = \frac{x_0}{x'_{A0}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2} = \frac{\text{SPOSTAMENTO MASSIMO}}{\text{SPOSTAMENTO DEL VINCOLO}}$$

$$H(\lambda) = \frac{x_0}{f_0/k} = \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2} = \frac{\text{SPOSTAMENTO MASSIMO}}{\text{SPOSTAMENTO STATICO}}$$

→ f_0/k è LO SPOSTAMENTO CHE SI AVREBBE IN CONDIZIONI STATICHE SOTTO L'AZIONE DELLA FORZA f_0

↓ DIAGRAMMI DI H IN FUNZIONE DI λ/λ_n



A. se $\lambda/\lambda_n \to 0$, $H = 1$
B. se $\lambda/\lambda_n \to 1$, $H = \frac{1}{0} = \infty$
C. se $\lambda/\lambda_n \to \infty$, $H = 0$

A = FREQUENZE BASSE, IL PUNTO P SEGUE IL MOTO DEL PUNTO A $\lambda \ll \lambda_n$

C = FREQUENZE ELEVATE $\lambda \gg \lambda_n$, LA MASSA m TENDE A RESTARE FERMA SENZA ESSERE DISTURBATO DAL MOTO DI A, X CUI IL SISTEMA NON SENTE NULLA

SI DISTINGUONO IN GENERALE 3 ZONE!

+ LA SOLUZIONE COMPLETA

X UN SISTEMA ECCITATO DA FORZANTE ARMONICA F(t) CON PULSAZIONE λ

$$x = x_{om} + x_p$$

È UNA SOLUZIONE BIARMONICA

$$x(t) = C_1 \cos \lambda_n t + C_2 \sin \lambda_n t + \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{H(\lambda)\frac{f_0}{k}}_{H(\lambda)\frac{f_0}{k} = x_0} e^{i\lambda t} \right\}$$

C_1, C_2: SI TROVANO CON LE CONDIZIONI INIZIALI

LA SOLUZIONE OMOGENEA SCOMPARE E RIMANE SOLO LA PARTICOLARE SE IL SISTEMA È SMORZATO E NON CI SI OCCUPA DEL TRANSITORIO

ex. $F = f_0 \sin(\lambda t)$

$x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 0$

$$x(0) = C_1 \cdot 1 + \cancel{C_2 \cdot 0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot{x}(t) = -C_1 \lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n t + \lambda_n C_2 \cos \lambda_n t + \lambda H(\lambda)\frac{f_0}{k}$$

$$\dot{x}(t) = \cancel{-C_1 \cdot 0} + \lambda_n C_2 \cdot 1 + \lambda H(\lambda)\frac{f_0}{k} = 0$$

$$\rightarrow C_2 = -H(\lambda)\frac{f_0 \lambda}{k \lambda_n}$$

$$\rightarrow \mathrm{Re}\left\{ H(\lambda)\frac{f_0}{k} e^{i\lambda t} \right\} = \frac{f_0}{k} H(\lambda) \sin(\lambda t)$$

X K $F(t) = f_0 \sin(\lambda t)$ CON λ = FREQUENZA DELLA FORZANTE

PER CUI LA LEGGE DEL MOTO, DI UN SISTEMA ECCITATO DA FORZANTE ARMONICA F(t) CON PULSAZIONE λ, CHE PARTE DA ZERO $x(0) = 0$ E CON VELOCITÀ NULLA $\dot{x}(0) = 0$ È:

$$x(t) = \frac{f_0 H(\lambda)}{k}\left[\sin(\lambda t) - \frac{\lambda}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t)\right]$$

RAPPRESENTANO

OSCILLAZIONE FORZATA λ

OSCILLAZIONE LIBERA

NB EQUAZIONI DI STATO

- LO "STATO DI MOTO" DI UN SISTEMA A 1 GdL IN UN QUALSIASI ISTANTE È DEFINITO DA:
  - POSIZIONE / SPOSTAMENTO
  - VELOCITÀ

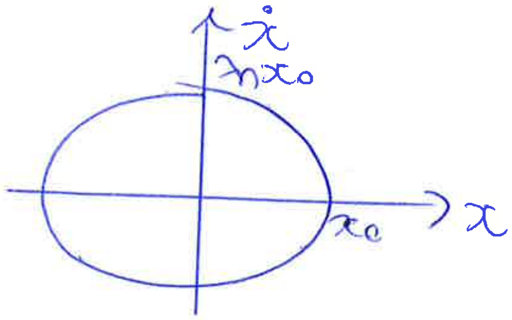
  DEL PUNTO P } SONO LE VARIABILI DI STATO

- LO "SPAZIO DEGLI STATI" È UNO SPAZIO IDENTIFICATO DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI LE COORDINATE SONO LE VARIABILI DI STATO E IN CUI SI RAPPRESENTA IL MOTO
- IL "PIANO DEGLI STATI" È LO SPAZIO A 2 DIMENSIONI DEI SISTEMI AD 1 GdL ED È UN PIANO IN CUI IN OGNI ISTANTE SI RAPPRESENTA UN PUNTO CHE CARATTERIZZA LA COPPIA DELLE VARIABILI DI STATO

=

INFATTI I PUNTI CHE RAPPRESENTANO LO STATO DEL SISTEMA IN ISTANTI SUCCESSIVI DESCRIVONO NELLO SPAZIO DEGLI STATI UNA TRAIETTORIA CHE DEFINISCE COMPLETAMENTE IL MOTO.

- MOTO LIBERO DI UN SISTEMA A 1 GdL:
  $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ HANNO UN ANDAMENTO ARMONICO NEL TEMPO
  XCIÒ LE TRAIETTORIE NEL PIANO DEGLI STATI SONO ELLISSI



- L'EQUAZIONE DEL MOTO PUÒ ESSERE TRASFORMATA CON UN VETTORE $\underline{z}$ CHE CONTIENE x e $\dot{x}$

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}$$ VETTORE DELLE VARIABILI DI STATO DEL SISTEMA

$$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\}$$ SISTEMA DI 2 EQUAZIONI DEL 1° ORDINE

INFATTI

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} - \ddot{x}_A$$ SISTEMA NON INERZIALE

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k/m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F(t) \\ \ddot{x}_A(t) \end{Bmatrix}$$

$[A]$ = MATRICE DINAMICA

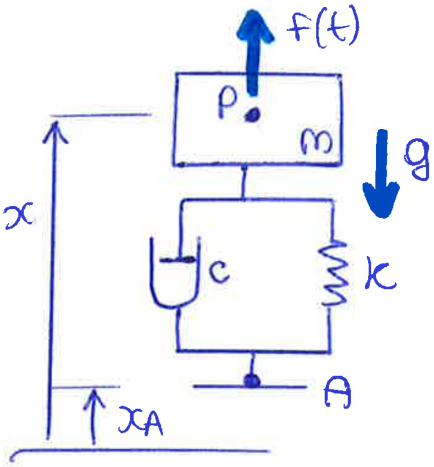
$\{z\}$

$[B]$ = MATRICE DEI GUADAGNI DI INPUT

$\{u\}$ = VETTORE DEGLI INPUT

SISTEMI LINEARI A 1GdL A PARAMETRI CONCENTRATI = OSCILLATORE MECCANICO LINEARE SMORZATO

- SMORZATORE VISCOSO = DISPOSITIVO CHE INTRODUCE NEL SISTEMA UNA FORZA $\propto$ ALLA VELOCITÀ, MA DI DIREZIONE OPPOSTA



- SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE
- DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO ED EQUAZIONE DI EQUILIBRIO

$$m\ddot{x}+mg+k(x-x_A-l_0)+c(\dot{x}-\dot{x}_A)=F(t)$$

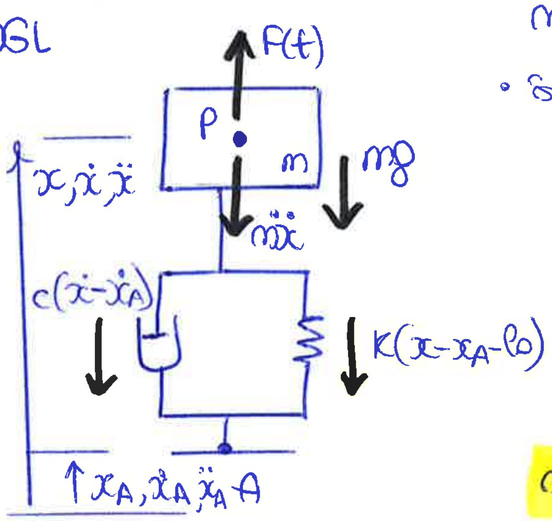
$$m\ddot{x}=-k(x-x_A-l_0)-c(\dot{x}-\dot{x}_A)+F(t)-mg$$

- METTO I TERMINI IN x A SX

$$m\ddot{x}+kx+c\dot{x}=kx_A+kl_0+c\dot{x}_A+F(t)-mg$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_A+kx_A+kl_0+F(t)-mg$$

DGL



- SOSTITUISCO LA VARIABILE

$$\begin{cases} x_A' = x_A + l_0 - \dfrac{mg}{k} \\ x_A = x_A' + \dfrac{mg}{k} - l_0 \end{cases} , \quad \dot{x}_A' = \dot{x}_A$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_A'+kx_A'+\cancel{mg}-\cancel{l_0k}+\cancel{kl_0}-\cancel{mg}+F(t)$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_A'+kx_A'+F(t)$$

- LE FUNZIONI DI RISPOSTA IN FREQUENZA SONO QUINDI $\neq$ DA QUELLE DEL SISTEMA NON SMORZATO

- ABBIAMO USATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE! LE FUNZIONI COINCIDONO, MA MI DANNO LO SPOSTAMENTO ASSOLUTO, NON QUELLO RELATIVO. X QUELLO NON INERZIALE

$x_{ass}=0$ (MASSA FERMA)

$x_{rel}=0$ (MASSA E VINCOLO SI MUOVONO ASSIEME)

♥ SOLUZIONE OMOGENEA = OSCILLAZIONI LIBERE

L'OMOGENEA ASSOCIATA È $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

HA SOLUZIONE DEL TIPO $x=x_0^* e^{st}$

INFATTI $x=x_0^* e^{st}$, $\dot{x}=s x_0^* e^{st}$, $\ddot{x}=s^2 x_0^* e^{st}$

$$ms^2 x_0^* e^{st}+csx_0^* e^{st}+kx_0^* e^{st}=0$$

$ms^2+cs+k=0$ HA 2 SOLUZIONI

$$s=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

SMORZ CRITICO 3-139

$$s = -\lambda_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

se $\zeta < 1$

$$s = \underbrace{-\zeta\lambda_n}_{Re(s)} \pm i\,\underbrace{\lambda_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{Im(s)}$$

$Re(s)$: ESPONENTE REALE NEGATIVO (DECRESCENTE)

$Im(s)$: ESPONENTE IMMAGINARIO = ARMONICA

\+ → ARMONICA SMORZATA

$$\begin{cases} \sigma = -Re(s) = \zeta\lambda_n \\ \lambda_p = Im(s) = \lambda_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

σ = VELOCITÀ DI DECADIMENTO: VELOCITÀ ALLA QUALE L'AMPIEZZA SI RIDUCE NEL TEMPO

λ_p = PULSAZIONE DELLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL SISTEMA SMORZATO

LA SOLUZIONE È

2 VETTORI CONTROROTANTI. A $t=0$ SONO C.C. E DISPOSTI SIMMETRICAMENTE RISPETTO ALL'ASSE IMMAGINARIO

$$x = e^{-\sigma t}\left[x_{01}^{*} e^{i\lambda_p t} + x_{02}^{*} e^{-i\lambda_p t}\right]$$

$$x = e^{-\sigma t}\left[x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\sin(\lambda_p t)\right]$$

SI DIMOSTRA CHE x_{01}^{*} E x_{02}^{*} SONO COMPLESSI CONIUGATI

UTILE X TROVARE LE CONDIZIONI INIZIALI

EX: $x(0) = 1\cdot\left[x_{01}\cdot 1 + 0\right] = x_{01}$

$\dot{x}(t)$ = DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$\dot{x}(t) = e^{-\sigma t}\left[-x_{01}\lambda_p\sin(\lambda_p t) + x_{02}\lambda_p\cos(\lambda_p t)\right] - \sigma e^{-\sigma t}\left[x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\sin(\lambda_p t)\right]$$

$$\dot{x}(0) = 1\left[0 + x_{02}\lambda_p\right] - \sigma\cdot 1\cdot\left[x_{01} + 0\right]$$

$$\dot{x}(0) = x_{02}\lambda_p - x_{01}\sigma = x_{02}\lambda_p - \sigma x(0) \rightarrow \begin{cases} x_{01} = x(0) \\ x_{02} = \frac{1}{\lambda_p}\left[\dot{x}(0) + \sigma x(0)\right] \end{cases}$$

LA SOLUZIONE DIVENTA

$$x = e^{-\sigma t}\left\{x(0)\cos(\lambda_p t) + \frac{1}{\lambda_p}\left(\dot{x}(0) + \sigma x(0)\right)\sin(\lambda_p t)\right\}$$

OSCILLAZIONI FORZATE

IN QUESTO CASO $F(t)$ e $x_A(t)$ SONO SOLITAMENTE SCRITTE CON UNA NOTAZIONE COMPLESSA

* $F(t) = f_0 e^{i\lambda t}$

f_0 = FORZANTE ESTERNA SULLA MASSA
$e^{i\lambda t}$ = VETTORE ROTANTE CHE VALE f_0 x $t=0$ E CHE GIRA IN SENSO ANTIORARIO CON VELOCITÀ ANGOLARE PARI A λ

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\lambda t}$$ FORZANTE ESTERNA SULLA MASSA

* $x'_A(t) = x'_A e^{i\lambda t}$ SPOSTAMENTO DEL VINCOLO

$\dot{x}'_A(t) = x'_A i\lambda e^{i\lambda t}$ VELOCITÀ DEL VINCOLO

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c x'_A i\lambda e^{i\lambda t} + k x'_A e^{i\lambda t}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = x'_A (i\lambda c + k) e^{i\lambda t}$$ FORZANTE SUL VINCOLO

DA $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}'_A + k x'_A + F(t)$

* FORZANTE ESTERNA SULLA MASSA:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\lambda t}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m} e^{i\lambda t}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\lambda_n \dot{x} + \lambda_n^2 x = \lambda_n^2 \cdot \frac{f_0}{k} e^{i\lambda t}$$

$$\frac{f_0}{\cancel{m}} \frac{\lambda_n^2}{\cancel{k}} \cdot \frac{k}{k} \cancel{m} = \checkmark$$

λ_n = PULSAZIONE PROPRIA DEL SISTEMA NON SMORZATO

$\lambda \neq \lambda_n$ = VARIABILE CHE VALE LA FREQUENZA DELLA FORZANTE

SOLUZIONE $x = x_0 e^{i\lambda t}$

$$\dot{x} = x_0 i\lambda e^{i\lambda t}$$

$$\ddot{x} = x_0 i^2 \lambda^2 e^{i\lambda t} = -x_0 \lambda^2 e^{i\lambda t}$$

$$\cancel{e^{i\lambda t}} \left(-x_0\lambda^2 + 2\zeta\lambda_n x_0 i\lambda + \lambda_n^2 x_0\right) = \frac{f_0}{k} \lambda_n^2 \left(\cancel{e^{i\lambda t}}\right)$$

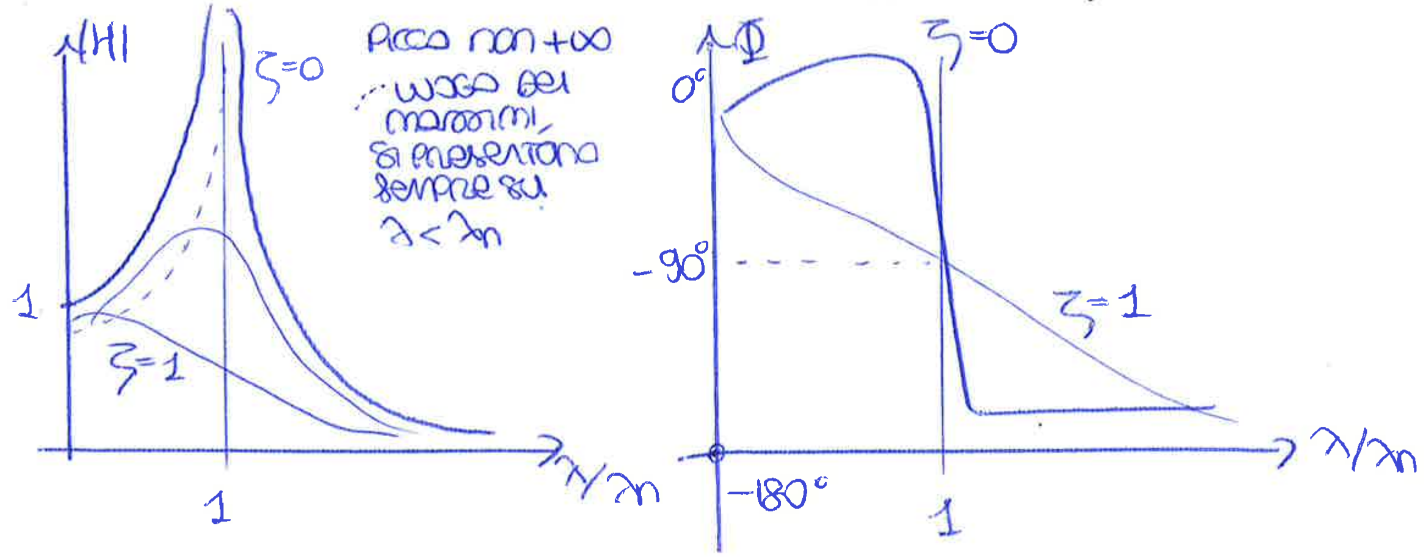
$$x_0\left(-\lambda^2 + 2\zeta\lambda_n i\lambda + \lambda_n^2\right) = \frac{f_0}{k}\lambda_n^2$$

$$x_0 = \frac{f_0}{k} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 - \lambda^2 + 2i\zeta\lambda_n\lambda} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2 + 2i\zeta\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)}$$

È UN NUMERO COMPLESSO!

TERMINE IN + RISPETTO AL CASO NON SMORZATO, CHE AVEVA UNA SOLUZIONE TOTALMENTE REALE IN FASE O CONTROFASE

$\rightarrow$ BISOGNA CALCOLARE $(a+ib)\dfrac{(a-ib)}{(a-ib)}$



se $\zeta \to 0$, le curve si riportano a curve del sistema non smorzato
se $\zeta \to \infty$, l'altezza del picco di risonanza diminuisce fino a sparire, e non si ha più alcun effetto di amplificazione

Risonanza = massimo di H, della funzione di trasferimento in riferimento ad oscillazioni forzate (massimo risultato a parità di forza)

Posizione del picco:
sistema non smorzato: (λ_n, ∞)
sistema smorzato: $\left(\lambda_n\sqrt{1-2\zeta^2}\,;\ \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

il sistema smorzato x avere il massimo della risposta deve essere eccitato un po' meno della sua frequenza naturale } $\underbrace{\lambda_n\sqrt{1-2\zeta^2}}$ $\neq \lambda_n \neq \lambda_p, < \lambda_p$

queste formule valgono x $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707$
xk al 70% di ζ_{cr} (=1) il picco non c'è più

se invece $\zeta \to 0$ → $\left(\lambda_n, \dfrac{1}{2\zeta}\right)$ formule semplificate x la posizione del picco
↓
è $|H|_{max}$ è definito fattore di qualità = Q

l'ampiezza massima dell'oscillazione vale $|x_d|_{max} = \dfrac{F_0}{c\lambda_n}$

negli ex data la $H(\lambda)$ cioè la risposta in frequenza e la massa, dalla posizione del picco trovo prima ζ e poi λ_n

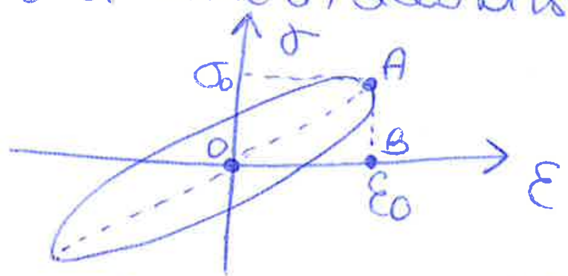
ci sono 3 parametri:
f naturale
f di risonanza in ampiezza
f di risonanza in fase
} = x sistema non smorzato
≠ x sistema smorzato

SISTEMI LINEARI A 1GdL A PARAMETRI CONCENTRATI = OSCILLATORE MECCANICO LINEARE CON SMORZAMENTO "STRUTTURALE" O ISTERETICO

Modello che rappresenta meglio alcuni sistemi (va bene x i materiali). Il modello precedente infatti non è adatto quando si parla di smorzamento interno dei materiali (non di un dispositivo smorzatore apposito esterno). Lo smorzamento interno è solitamente trascurato, nelle strutture complesse, xk molto piccolo.

- provino
- sollecitato a deformazione ε
- ε è uno spostamento armonico
- σ è la forza necessaria a produrre ε
- L'andamento di σ e ε è armonico
- $\exists$ un'energia dissipata che dà un ciclo di isteresi
- L'energia dissipata è pari all'integrale dell'area x ogni ciclo

Diagrammando σ in funzione di ε si ottiene un ciclo di isteresi



senza smorzatore avremmo solo una bisettrice

Usando il vecchio modello di smorzatore, l'ampiezza del ciclo varia con la frequenza λ, ma la realtà sperimentale ci dice che è costante!! ecco xk è nato qst modello. (= l'area del ciclo non varia)

Si esprimono:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 \cos(\lambda t) = \sigma_0 e^{i\lambda t} \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\lambda t - \Phi) = \varepsilon_0 e^{-i\Phi} e^{i\lambda t} \end{cases}$$

ε è sfasato di Φ, cioè è in ritardo rispetto a σ

Si definisce:

- $E^* = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\cos\Phi + i\sin\Phi) = E' + iE''$ = modulo elastico complesso

E' = modulo in fase = modulo di Young / rigidezza elastica $\simeq E$

$E' = E\cos\Phi \simeq E$ se $\Phi \to 0$

E'' = modulo in quadratura = misura dello smorzamento
= costante
– è la caratterizzazione dell'energia che è in grado di dissipare

$E'' = E\sin\Phi \simeq E\Phi$ se $\Phi \to 0$

OSCILLAZIONI LIBERE

L'OMOGENEA ASSOCIATA È

$$m\ddot{x}+k(1+i\eta)x=0$$

$$ms^2+k(1+i\eta)=0$$

$$s^2=-\frac{k}{m}(1+i\eta)$$

$$s=\sqrt{-\frac{k}{m}(1+i\eta)}=\pm i\lambda_n\sqrt{1+i\eta}$$

$$\sqrt{1+i\eta} \rightarrow \sqrt{\frac{\pm 1+\sqrt{1+\eta^2}}{2}}$$

$$s=\pm i\lambda_n\sqrt{1+i\eta} \qquad \left(\lambda_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$s=-\lambda_n\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\eta^2}}{2}}\pm i\lambda_n\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{2}} \quad ; \quad s\in\mathbb{C}$$

↓ PARTE REALE NEGATIVA (DECADIMENTO) FUNZIONE DI η

⊖ DEVE ESSERE NEGATIVA XK RAPPRESENTA UNA VELOCITÀ DI DECADIMENTO

⊕ È IMPOSSIBILE

↓ PARTE IMMAGINARIA DI OSCILLAMENTO = ARMONICA CON FREQUENZA $\lambda >$ DI QUELLA NATURALE

$\eta=2\zeta$ RISPETTO A PRIMA

SOLTANTO $\eta\to 0$ E X TAYLOR $\sqrt{1+\eta^2}\cong 1+\frac{\eta^2}{2}$

SI SEMPLIFICA

$$s=-\lambda_n\sqrt{\frac{-\cancel{1}+\cancel{1}+\frac{\eta^2}{2}}{2}}\pm i\lambda_n\sqrt{\frac{2+\frac{\eta^2}{2}}{2}}$$

$$s=-\lambda_n\frac{\eta}{2}\pm i\lambda_n\sqrt{1+\frac{\eta^2}{4}}=-\frac{\lambda_n\eta}{2}\pm i\lambda_n \quad (\eta\to 0)$$

TROVO:

$$\begin{cases}\sigma=-\mathrm{Re}\{s\}=\dfrac{\lambda_n\eta}{2} & \text{VELOCITÀ DI DECADIMENTO}\\ \lambda=\mathrm{Im}\{s\}=\lambda_n\sqrt{1+\dfrac{\eta^2}{4}}\cong\lambda_n & \text{PULSAZIONE DELLE OSCILLAZIONI LIBERE } (\eta\to 0)\end{cases}$$

↳ $\lambda\geq\lambda_n$ ($\neq$ DAGLI ALTRI SISTEMI VISTI PRIMA!)

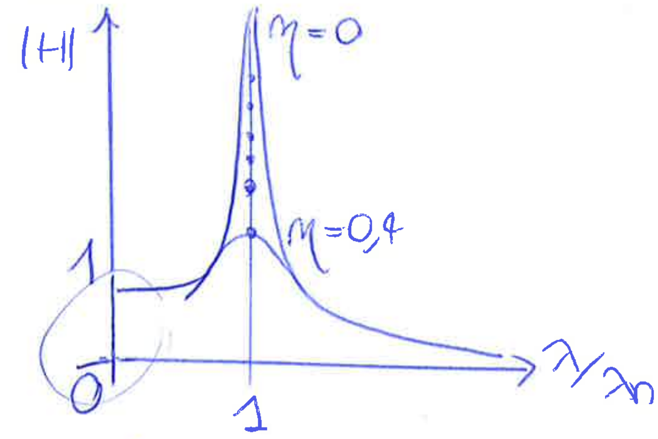
MA $\lambda\cong\lambda_n$ SE LO SMORZAMENTO È PICCOLO

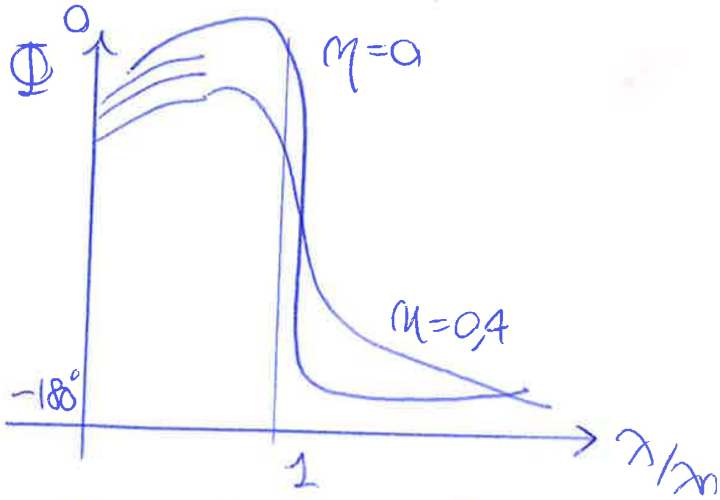
PRIMA:

$\sigma=\zeta\lambda_n\rightarrow\lambda_n\frac{\eta}{2}$ $\quad\left[\zeta=\frac{\eta}{2}\right]$

$\lambda=\lambda_p=\lambda_n\sqrt{1-\zeta^2}\rightarrow\lambda_n\sqrt{1-\frac{\eta^2}{4}}$ $\quad\left[\zeta=\frac{\eta}{2}\right]$

i grafici sono





se ↑η il picco si abbassa rispetto a prima ma rimane sempre alla stessa frequenza

se $\lambda \to 0$ Φ non $\to 0$!! ma tutte le curve si distinguono tra loro, la differenza di fase deve essere fissa

se $\lambda \to \infty$, dominano le forze di inerzia, $\Phi \to -180°$

$$|H| = \frac{k}{\sqrt{(k-m\lambda^2)^2 + k^2\eta^2}}$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-k\eta}{k-m\lambda^2}\right)$$

il fattore di qualità è $Q = |H|_{max} = \frac{1}{\eta}$

se $\lambda \to 0$ $|H| = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$ $\Phi = \operatorname{arctg}(-\eta)$

Confronto nel caso di sistemi poco smorzati

$\boxed{C_{eq} = \frac{\eta k}{\lambda_n}}$

situazione reale = transiente
dato un materiale η è tabellato $\Big\}$ $\zeta_{eq} = \frac{\eta}{2}$, $Q = \frac{1}{2\zeta}$

$C_{eq} = \frac{\eta k}{\lambda}$ solo 1 armonica

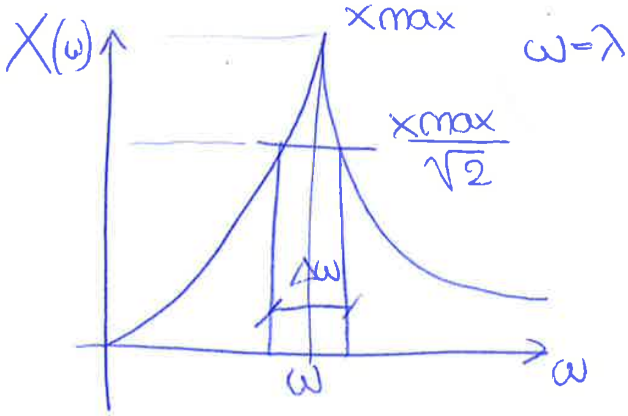
si individuano le solite 3 aree

① rigidezza } confondo il sistema con quello non smorzato (✗)
② massa

③ smorzamento } qui conta molto c
scelgo come $\lambda \to \lambda_n$
scelgo come $C_{eq} \to \eta k/\lambda_n$
minimizzo gli errori dove c conta! mentre ci sono alti errori dove c non conta (① e ②) } effetto uguale alla realtà

☆ NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

(FORMA DEL PICCO)



METODICA BASATA SU UN CANALE DI MISURA

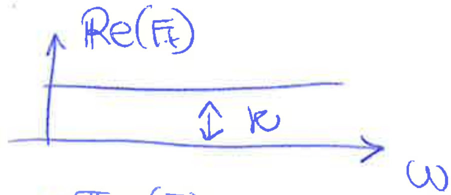
METODO DEI 2 PUNTI A METÀ DISTANZA/POTENZA

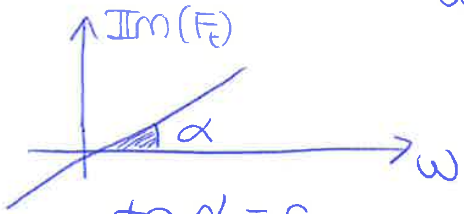
- SE LA FORZA È COSTANTE

$$2\zeta = \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \qquad \Delta\lambda = 2\zeta\lambda_n$$

- SE FOSSE A + GDL AVREI TANTI PICCHI OGNUNO DEI QUALI CORRISPONDE UNA RISONANZA

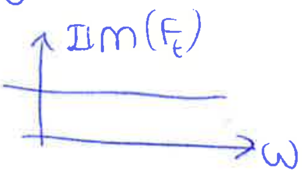
(RAPPORTO FORZA TRASMESSA, SPOSTAMENTO)





$tg\,\alpha = c$

SE STRUTTURALE =



METODICA BASATA SU 2 CANALI DI MISURA

- GRAFICI X SMORZAMENTO VISCOSO
- $Re\{F\}$ È LA PARTE IN FASE CIOÈ LA FORZA ELASTICA CHE RIMANE COSTANTE INDIPENDENTEMENTE DA ω
- $Im\{F\}$ È LA PARTE IN QUADRATURA CIOÈ LA FORZA DISSIPATIVA IN FASE CON LA VELOCITÀ - NON È COSTANTE MA TROVO UNA RETTA CHE PARTE DA 0 ED AUMENTA LINEARMENTE, SE $\uparrow\omega$
- $F_t = F(t) - m\ddot{x}(t)$ È LA FORZA TRASMESSA (DEPURATA DEL CONTENUTO D'INERZIA)

$$F_t = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

$$F_{0t} \cdot e^{i\omega t} = (k + i\omega c)x_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{F_{0t}}{x_0} = k + i\omega c$$

$i\omega c \rightarrow Im$

$k \rightarrow Re$

LA REALTÀ SPERIMENTALE FARÀ VEDERE CURVE ≠!

X SPOSTAMENTI PICCOLI BISOGNA STARE ATTENTI ALL'ERRORE, X CUI INVECE DI CONSIDERARE 2 PUNTI DISTANTI UN PERIODO, LI PRENDO DISTANTI n PERIODI

$$\frac{1}{m}\ln\left(\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2}\,\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = \delta$$

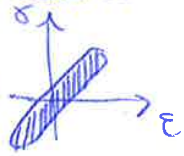
ENERGIA DISSIPATA NELLO SMORZAMENTO STRUTTURALE

SMORZAMENTO CHE SI VERIFICA INTERNAMENTE AD UN MATERIALE CAUSATO DAGLI ATTRITI TRA I PIANI CRISTALLINI

IL CICLO DI ISTERESI DIPENDE DALLA DISSIPAZIONE INTERNA DEL MATERIALE, QUINDI DAI ≠ TIPI DI MATERIALI: CURVA σ-ε O F-X

- METALLI: DISSIPAZIONE PICCOLA
- ELASTOMERI: " GRANDE → CICLO GRANDE

AREA CICLO = ENERGIA DISSIPATA IN UN CICLO DI CARICO E SCARICO



SI VERIFICA SPERIMENTALMENTE CHE L'ENERGIA DISSIPATA x CICLO

$$\Delta W = \pi X_0^2 K \eta \qquad \eta - K$$

- RELAZIONE EMPIRICA!
- ΔW NON DIPENDE DA ω!
- $\Delta W \propto K$ ENERGIA ELASTICA ACCUMULATA
- $\Delta W \propto \eta$ COEFFICIENTE CARATTERISTICO DEL SOLO MATERIALE
- FORMULA VALIDA IN UN LIMITATO CAMPO DI ω E T'

PRIMA $\Delta W = \pi X_0^2 \lambda_n C$

SE $\Delta W \to 0$, IL MOTO PUÒ ESSERE CONSIDERATO SOLO ARMONICO (NON SMORZATO)

IN QST CASO, IL DECREMENTO LOGARITMICO VALE

$$\delta = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \pi \eta \qquad \text{se } \eta \to 0$$

SI TROVA η MISURANDO IL DECREMENTO LOGARITMICO

$$\left(\delta = -\ln(1 - \pi \eta)\right) \text{ RIGOROSO}$$

UGUAGLIANDO LE ESPRESSIONI, SI OTTIENE UNO SMORZATORE VISCOSO "EQUIVALENTE"

$$\delta = \delta$$

$$\pi \eta = 2\pi \zeta_{EQ}$$

$$\zeta_{EQ} = \frac{\eta}{2}$$ SMORZATORE VISCOSO EQUIVALENTE — se $\eta \to 0$, $\zeta \to 0$

$$C_{EQ} = C_{CR}\, \zeta_{EQ} = \cancel{2}\sqrt{km}\,\frac{\eta}{\cancel{2}} = \eta \sqrt{km}$$

$$C_{EQ} = \eta \sqrt{k\,\frac{km}{k}} = \eta k \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\eta k}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\eta k}{\omega_n}$$

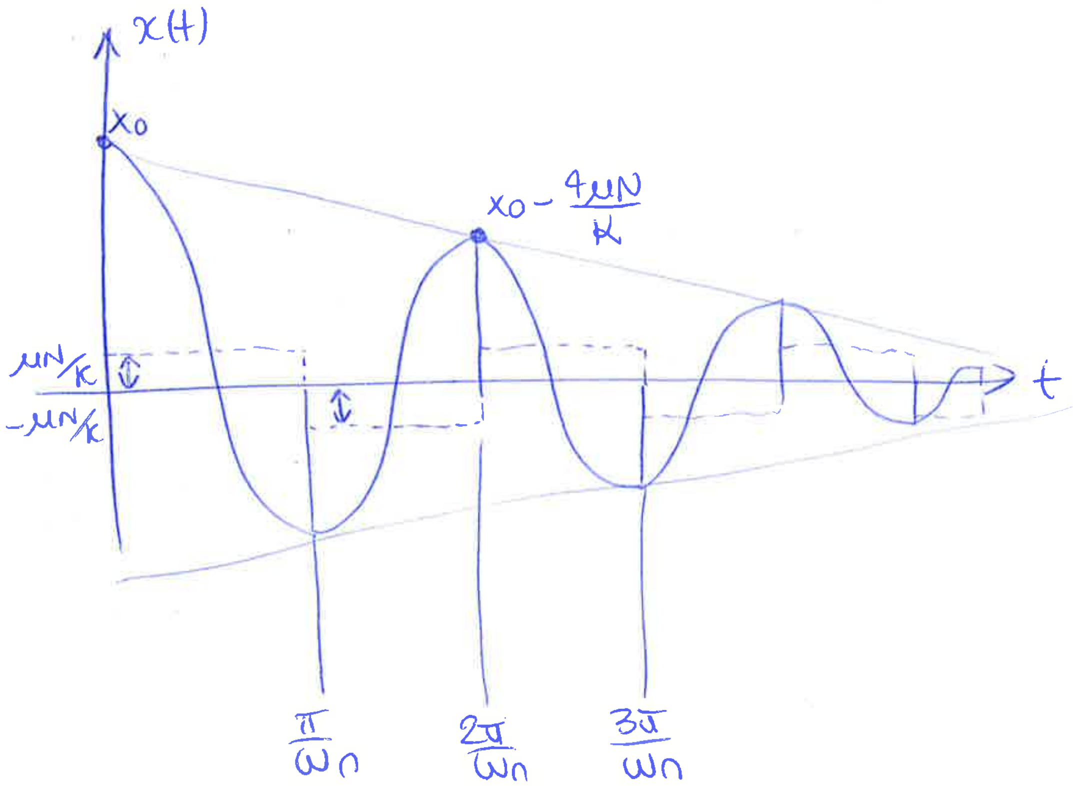
$\boxed{\text{EQUIVALENTE}}$

ENERGIA DISSIPATA

$$\frac{1}{Q} \cong \frac{\psi}{2\pi} = \eta = \tan\Phi \cong \Phi = \frac{E'}{E''} = 2\zeta = \frac{\delta}{\pi}$$

$\frac{1}{Q}$: FATTORE DI QUALITÀ — η: NEL MATERIALE — TAYLOR x $\Phi \to 0$ — Φ: DIFFERENZA DI FASE TENSIONE-DEFORMAZIONE — $\frac{E'}{E''}$: RAPPORTO TRA I MODULI ELASTICI — 2ζ: NEL DOMINIO DEL TEMPO — δ: DECREMENTO LOGARITMICO

DIAGRAMMA



sono pezzi di armoniche con valori medi sempre ≠

sono coseni ± una costante

ogni volta calcolo le condizioni iniziali x trovare le C di un pezzo poi riapplico le condizioni finali come nuove iniziali x attaccare i pezzi

al termine di ogni ciclo, lo spostamento si riduce di

$$x_m = x_{m-1} - \frac{4\mu N}{K} \quad \text{ogni ciclo } \frac{2\pi}{\omega_n}$$

la pendenza della retta d'inviluppo è quindi

$$-\frac{4\mu N}{K} \Big/ \frac{2\pi}{\omega_n} = -\frac{2\mu N \omega_n}{\pi K}$$

⊖ è l'inviluppo superiore

⊕ è l'inviluppo inferiore

non è più un inviluppo esponenziale!

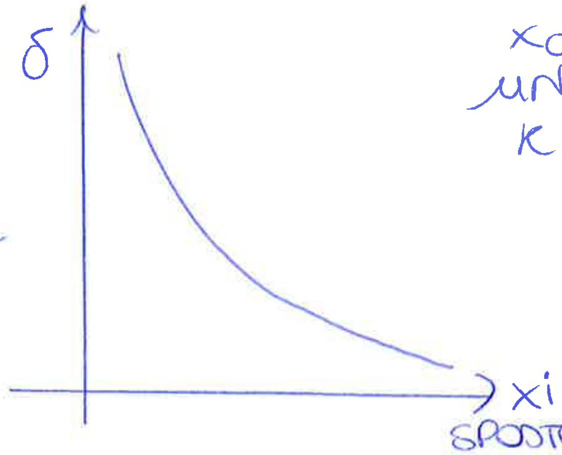
il moto non continua indefinitivamente, ma si arresta

quando l'oscillazione ↓
tutte le forze ↓
mentre quella di attrito no!
x cui ↑ C_{eq}

(a sistema inchiodato avremo $C\ \infty$)

GRAFICO δ COULOMBIANO

SI OTTIENE δ CRESCENTE AL DIMINUIRE DELL'AMPIEZZA DI VIBRAZIONE



$x_0 = 100\,m$
$\mu N = 1\,N$
$K = 1\,N/m$

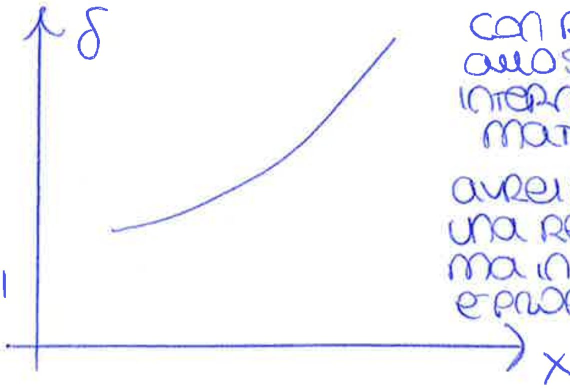
FREQUENZA BASSA

È UN SISTEMA NON LINEARE

SE ↑ X, POCO SMORZATO
SE ↓ X, VARIA DA SMORZATO A SOTTOSMORZ.

CASO REALE

SI MISURA GENERALMENTE UNA DIMINUZIONE DI δ AL DIMINUIRE DELL'AMPIEZZA = CIÒ VUOL DIRE CHE IL MATERIALE IN CONDIZIONI DI CARICO + ELEVATE (VICINE ALLO SNERVAMENTO) DISSIPA PIÙ ENERGIA DI QUANTO FACCIA A CARICHI + BASSI



CON RIFERIMENTO ALLO SMORZAMENTO INTERNO DEL MATERIALE

AVREI DOVUTO AVERE UNA RETTA LINEARE, MA IN REALTÀ NON È PROPRIO LINEARE

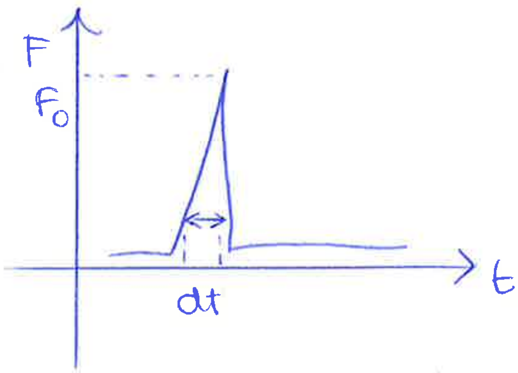
CAMPO ELASTICO SE SONO LONTANO DALLO SNERVAMENTO

VICINO ALLO SNERVAMENTO SI DISSIPA ENERGIA E SI HANNO GRANDI DEFORMAZIONI

MISURA
- MANUALE
  - MISURA SOTTOTANGENTE CON I MASSIMI
  - MISURA δ (PROBLEMI X RUMORE)
- AUTOMATICO COMPUTERIZZATO
  - MISURA δ (PROBLEMI X RUMORE)
  - INTERPOLAZIONE DELLA CURVA DI INVILUPPO CON TRATTI DI FUNZIONE ESPONENZIALE (OGNI 3 PUNTI, ASSEGNO IL VALORE CENTRALE)

SISTEMI LINEARI 1GdL CON FORZANTE IMPULSIVA

SI PARLA DI
- FENOMENI D'URTO
- ECCITAZIONI CHE DURANO ISTANTI/PERIODI MOLTO PICCOLI A INTENSITÀ ELEVATE
- $dt \to 0$, $F_0 \to \infty$



SI DEFINISCE L'IMPULSO UNITARIO $\delta(t) = \begin{cases} \delta = 0, & t \neq 0 \\ \delta \to \infty, & t = 0 \end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

CIÒ VUOL DIRE CHE L'IMPULSO DELLA FUNZIONE (=INTEGRALE NEL TEMPO) È UNITARIO.

SI DISTINGUE TRA
- IMPULSO DI UNA FUNZIONE: $\int F(t)dt$ (CON DURATA LUNGA O BREVE)
- ECCITAZIONE IMPULSIVA: $F(t) = I_0 \, \delta(t)$

$I_0 \to [Ns]$: NON DIMENSIONI DI UNA FORZA MA DI UN IMPULSO DI UNA FORZA; $\delta(t) \to \left[\frac{1}{s}\right]$

X TROVARE LA SOLUZIONE $x(t)$ DEL SISTEMA, BISOGNA FARE UN IPOTESI: SI SUPPONE CHE DURANTE UN INFINITESIMO DI TEMPO dt, IL SISTEMA NON SI MUOVA, NON HA MOVIMENTI APPREZZABILI, X CUI I CONTRIBUTI DI MOLLA E SMORZATORE DELLE FORZE DI SONO NULLI

$$\boxed{k = c = 0}$$

VALE X CIÒ IL PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO $(q = mv)$

TRA GLI ISTANTI t_1, t_2, VARIA q!

$$\Delta q = mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_i(t)\,dt$$ IMPULSO DI TUTTE LE FORZE

LA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DURANTE dt È UGUALE ALL'IMPULSO DI TUTTE LE FORZE

In realtà si parte da

$$x(t)=e^{-\sigma t}\left\{\cancel{x_{01}\cos(\lambda_p t)}+\frac{1}{\lambda_p}\left[\dot{x}(0)+\cancel{\sigma x(0)}\right]\sin(\lambda_p t)\right\}$$

se $x(0)=0$

$$x(t)=\frac{1}{\lambda_p}e^{-\sigma t}\,\dot{x}(0)\sin(\lambda_p t)$$

ma $\lambda_p=\lambda_n\sqrt{1-\xi^2}$ $\qquad \dot{x}(0)=\frac{I_0}{m}$

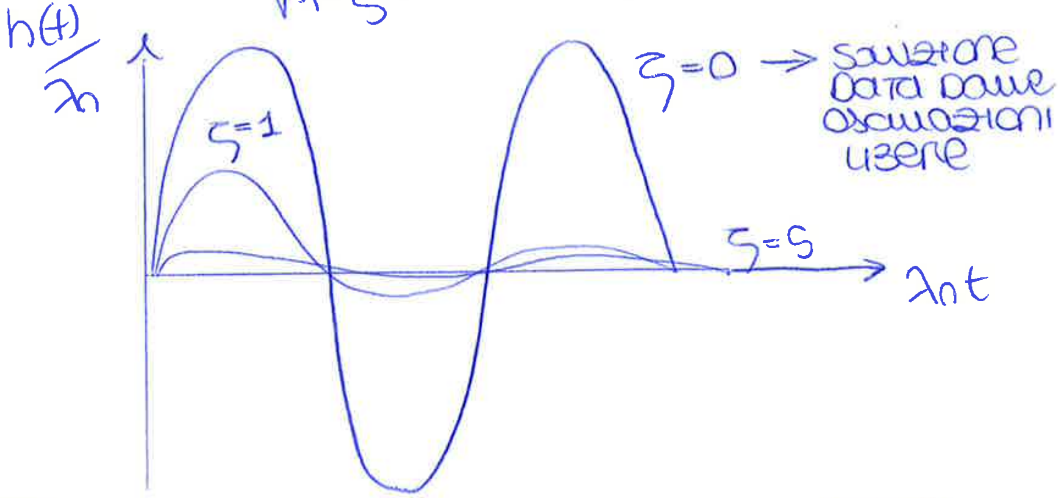
$\sigma=\xi\lambda_n$

$$x(t)=\frac{1}{\lambda_n\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\lambda_n t}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\lambda_n t\right)\dot{x}(0)$$

$\boxed{\text{SISTEMI SOTTOSMORZATI}}$

$x(t)=\frac{I_0}{m\lambda_n}h(t)$ come ricavato ↑

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\lambda_n t}\cdot\sin\left(\lambda_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)$$



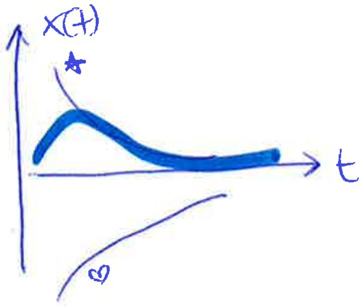
$\boxed{\text{SISTEMI SOVRASMORZATO}}$

Partendo da $s=-\xi\lambda_n\pm\lambda_n\sqrt{\xi^2-1}$, $x=x_0^{\star}e^{st}$

Trovo $x(t)=Ae^{-\lambda_n(\xi+\sqrt{\xi^2-1})t}+Be^{-\lambda_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})t}$

somma di 2 esponenziali con espo negativi

nel nostro caso $h(t)=\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left\{-\underbrace{e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\lambda_n t}}_{\heartsuit}+\underbrace{e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\lambda_n t}}_{\star}\right\}$



curve con andamento non monotono

Sistemi lineari a 1 GdL con forzante a gradino unitario (costante)

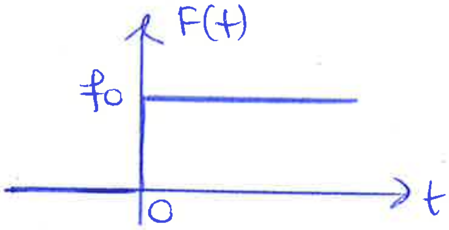
La funzione gradino unitario è $u(t)=\begin{cases}u=0, & t<0\\ u=1, & t>0\end{cases}$, cioè è l'integrale di $\delta(t)$: $\int\delta(t)dt = u(t)$.

L'eccitazione a gradino è quindi

$F = f_0 u(t)$

↓

[N] x variare l'ampiezza



è una forza costante che inizia in $t=0$, non c'era in $t=0^-$

La soluzione di $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = F(t) = F = cost$ varia per quanto riguarda l'integrale particolare. Immetto nell'equazione la soluzione $x_p = cost$ $\quad \dot{x} = \ddot{x} = 0$

$k\,cost = F \qquad cost = \frac{F}{k} \qquad x_p = \frac{F}{k}$

Quindi la soluzione è

$\boxed{\text{Sistema sottosmorzato}}$

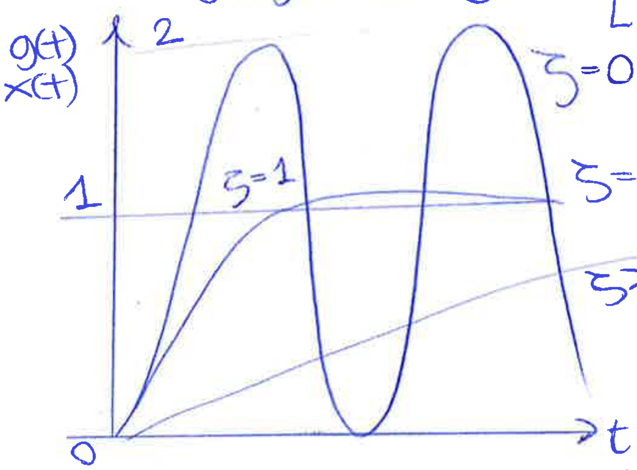
$$x(t) = e^{-\sigma t}\{x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\sin(\lambda_p t)\} + \frac{f_0}{k}$$

applico le condizioni iniziali

$\begin{cases}x(0)=0\\ \dot{x}(0)=0\end{cases}$ ottengo $\begin{cases}x_{01} = -f_0/k\\ x_{02} = -f_0/k \, \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\end{cases}$

Quindi $x(t) = \frac{f_0}{k}\, g(t)$ con $\frac{f_0}{k}$ spostamento statico

$$g(t) = 1 - e^{-\zeta\lambda_n t}\left[\cos(\lambda_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\lambda_n t\sqrt{1-\zeta^2})\right]$$



$\zeta=0$ → cosinusoide con valor medio 1

$\zeta=1$ → condizione di equilibrio statico xk $\quad x(t)=f_0/k$

$\zeta>1$ → no oscillazione, ma si arriva +o- velocemente alle condizioni di equilibrio

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 96

PER TROVARE LA RISPOSTA BISOGNA INTEGRARE

$$x(t) = \int_0^t d[x(t)] = \int_0^t \frac{F(\tau)\,d\tau}{m\lambda_n} h(t-\tau)$$

$$x(t) = \frac{1}{m\lambda_n} \underbrace{\int_0^t F(\tau) h(t-\tau)\, d\tau}_{\text{somma di tutti gli impulsi compresi}}$$

INTEGRALE DI DUHAMEL

SOLUZIONE CHE VALE SOLO x I SISTEMI LINEARI

* CALCOLATO IN FORMA CHIUSA SOLAMENTE IN UN NUMERO LIMITATO DI CASI
* PIÙ SEMPLICEMENTE VIENE COMPUTATO CON L'INTEGRAZIONE NUMERICA

SE $F(t) = 0$, SI HA UNA SOLUZIONE ARMONICA CON OSCILLAZIONI LIBERE

SE $F(t) \neq 0$, NON SI SA COSA SIA

L'INTEGRALE DI DUHAMEL NON È DETTO CHE ESISTA, DIPENDE DA $F(\tau)$

PER UN SISTEMA SOTTOSMORZATO AD ESEMPIO

SE $h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\lambda_n t\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\lambda_p t)$

$$x(t) = \frac{\sin(\lambda_p t)}{m\lambda_p e^{\zeta\lambda_n t}} \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\lambda_n \tau} \cos(\lambda_p \tau)\, d\tau - \frac{\cos(\lambda_p t)}{m\lambda_p e^{\zeta\lambda_n t}} \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\lambda_n\tau} \sin(\lambda_p\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = A(t)\sin(\lambda_p t) - B(t)\cos(\lambda_p t)$$

$A(t)$, $B(t)$ SONO 2 COEFFICIENTI CHE VANNO COMPUTATI

CONSIDERAZIONI:

INTEGRAZIONE NUMERICA:

- POSSIBILE ANCHE x SISTEMI NON LINEARI
- PERMETTE DI CALCOLARE LA RISPOSTA DI UN SISTEMA QUALSIASI AD UNA GENERICA ECCITAZIONE
- NON PERMETTE DI RICAVARE INFORMAZIONI GENERALI SUL COMPORTAMENTO DELLA RISPOSTA
- SPERIMENTAZIONE NUMERICA
- È COMPLEMENTARE AI METODI ANALITICI

SISTEMI LINEARI A 1 GdL CON VIBRAZIONI CASUALI (RANDOM)

- FORZANTE CHE NELLA PRATICA SI TROVA MOLTO
- NON SI CONOSCE L'ECCITAZIONE XKÉ LA FORZA NON È UNA VARIAZIONE DETERMINISTICA, È ESPRIMIBILE UNICAMENTE IN TERMINI STATISTICI → IN MOLTI CASI SI EFFETTUA LA REGISTRAZIONE DELLA STORIA TEMPORALE
- ESEMPI: ECCITAZIONE SISMICA, IRREGOLARITÀ DELLA STRADA, MOTO ONDOSO
- BISOGNA SCEGLIERE QUALI DATI RAPPRESENTANO MEGLIO IL CARICO
- SI STUDIA GRAZIE AI METODI STATISTICI
- SE IL CASO È DINAMICO, PER DEFINIRE LA FORZANTE SERVONO 2 FUNZIONI:
  - DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLE AMPIEZZE
  - DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

} QST 2 FUNZIONI DEFINISCONO COMPLETAMENTE UNA FORZA RANDOM

SI DEFINISCONO:

- FORZA $F(t)$ CON ANDAMENTO CASUALE
- T CAMPIONE DI DURATA T
- VALOR MEDIO $\bar{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$
- VALOR RMS $F_{RMS} = \sqrt{\overline{F^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T F^2(t)\,dt}$
- VARIANZA $\sigma^2 = \overline{(F-\bar{F})^2} = \frac{1}{T}\int_0^T [F(t)-\bar{F}]^2\,dt$

SE $\bar{F}=0$, $\sigma^2 = F_{RMS}^2$

T È UN INTERVALLO SCELTO, SI SPERA X RACCOGLIERE TUTTE LE POSSIBILI PROVE

NEL CASO DINAMICO, SOLITAMENTE $\bar{F}=0$ E $\sigma^2 = F_{RMS}^2$. QUESTO CASO È POSSIBILE SOLO NEL CASO DI SISTEMI LINEARI.

LA FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEFINISCE UNA VARIABILE ALEATORIA E NE DICE LA PROBABILITÀ DI VERIFICARSI.

SI DEFINISCONO:

- FENOMENO STAZIONARIO: LE SUE CARATTERISTICHE NON CAMBIANO SE ESSO VIENE OSSERVATO A PARTIRE DA ISTANTI ≠ (X 10 gg DI FILA)
- FENOMENO ERGODICO: SE QUALSIASI CAMPIONE DEL FENOMENO PUÒ ESSERE CONSIDERATO "TIPICO" DELL'INSIEME TOTALE DEI CAMPIONI DISPONIBILI (1 gg OGNI 2 X 10 gg)

SE IL FENOMENO È STAZIONARIO ED ERGODICO → MEDIA, VALORE RMS, VARIANZA E TUTTE LE CARATTERISTICHE STATISTICHE SONO INDIPENDENTI DAL CAMPIONE ESAMINATO. (SI SEMPLIFICA IL PROBLEMA)

↓ CIOÈ SONO COSTANTI! SI PUÒ ESTENDERE $T \to \infty$.

SI DEFINISCE:

- FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE $\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t)F(t+\tau)\,dt$

TIPI DI ECCITAZIONE CASUALE:

- RUMORE BIANCO : DSP = COSTANTE $S(\lambda) = \text{kost}$
  CONTIENE IN EGUAL MISURA TUTTE LE POSSIBILI FREQUENZE
  ASTRAZIONE
  $F_{RMS} = \infty$
  $$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \forall \tau, \tau \neq 0 \\ \infty & \tau = 0 \end{cases} \rightarrow \varphi(\tau) = \delta(\tau) \text{ DELTA DI DIRAC}$$

- TRAPEZOIDALE :

CRESCE
COSTANTE
DECRESCE

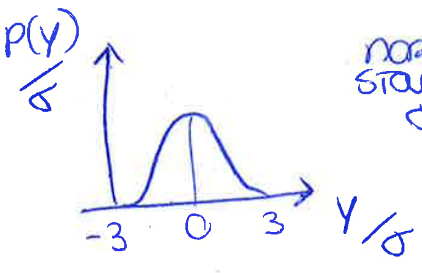
HA LE CARATTERISTICHE DI RUMORE BIANCO IN UN CAMPO LIMITATO DI FREQUENZE

- A BANDA STRETTA / A BANDA LARGA : SE IL SUO DSP SI ESTENDE x UN CAMPO DI FREQUENZE + O - AMPIO

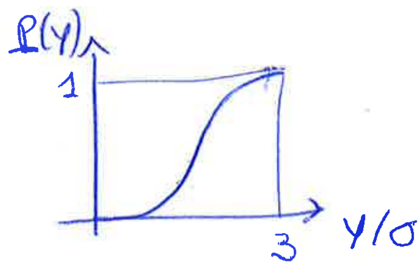
SI DEFINISCE:

- DENSITÀ DI PROBABILITÀ RELATIVA ALL'AMPIEZZA (DPA) :
  - GAUSSIANA (RANDOM): $$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}$$ DISTRIBUZIONE GAUSSIANA CON $F = 0$, $\mu = 0$, $F_{RMS} = \sigma$
  - RETTANGOLARE COSTANTE (UNIFORM RANDOM)

- FUNZIONE DI PROBABILITÀ CUMULATA : $$P(y) = \int_{-\infty}^{y} p(u)\,du$$ ESPRIME LA PROBABILITÀ CHE LA VARIABILE CIOÈ IL VALORE DELLA FUNZIONE ASSUMA UN VALORE PARI A Y O MINORE



NORMALE STANDARD $\sigma = 1$



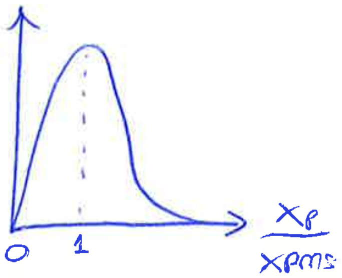
NB SI SONO DEFINITE QST 2 FUNZIONI DSP e DPA XKÈ MEDIA E VALOR RMS SONO PARAMETRI COMPUTATI SU UNA VARIABILE CASUALE, MA NON LA DEFINISCONO COMPLETAMENTE

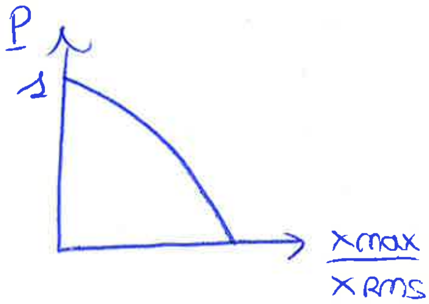
DPAC

$$P\left(\frac{x_{max}}{x_{RMS}}\right) = e^{-\left(\frac{x^2_{max}}{2x^2_{RMS}}\right)}$$

DISTRIBUZIONE ASIMMETRICA

IL VALORE rms È QUI CARATTERIZZATO DA PROBABILITÀ + ELEVATA





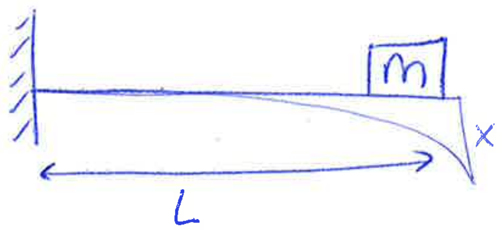
DEFINITA AL CONTRARIO DEL SOLITO

PROBABILITÀ DI AVERE UN PICCO > DI 4 VOLTE DI QUELLO RMS

DA DPAC SI PUÒ CALCOLARE QUANTE PROBABILITÀ ESISTONO CHE IL VALORE MASSIMO DELLA RISPOSTA RAGGIUNGA E SUPERI UN VALORE DATO IN UN GENERICO TEMPO t DI FUNZIONAMENTO

PROBABILITÀ CHE UNO DEI PICCHI SUPERI x_{max} : $e^{-\left(\frac{x^2_{max}}{2x^2_{RMS}}\right)} \cdot \frac{t\lambda_n}{2\pi}$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ 3-2



BRACCIO TUBOLARE A SBALZO

$L = 0{,}6\,m$, $M = 20\,kg$

$E = 72 \cdot 10^9\ N/m^2$

$\rho = 2800\ kg/m^3$

DIMENSIONARE IL BRACCIO / LA PRIMA FREQUENZA PROPRIA SIA SUPERIORE A 50Hz

MODELLO AD 1 GdL

MASSA EQUIVALENTE ALLA BARRA

$\lambda_n = 50\,Hz$

$\lambda_n = 157{,}08\ \frac{rad}{s} \cdot 2$

$\lambda_n = 314{,}16\ rad/s$

TRASCURANDO MASSA TRAVE, RIGIDEZZA TRAVE MINIMA

$\lambda_n^2 > (50^2)\ Hz \qquad \frac{k_{Min}}{m} > 50^2\ Hz \qquad k_{Min} > m\lambda_n^2 = 1{,}97 \cdot 10^6\ N/m$

LA FRECCIA DOVUTA AL CARICO F DOVUTO A m È : $x = \frac{Fl^3}{3EI}$

LA RIGIDEZZA È : $k_{MIN} = \frac{F}{x} = \frac{3EI}{l^3}$ $(F = kx)$

QUINDI : $I_1 = \frac{k_{Min} l^3}{3E} = 1{,}97 \cdot 10^{-6}\ m^4$, MA I DIPENDE DALLA SEZIONE!

IPOTESI DI PROGETTO = TRAVE A SEZIONE CIRCOLARE CON $r_i = 0{,}1\,m$ E $r_e = 0{,}11\,m$: $I_2 = \pi\,\frac{r_e^4 - r_i^4}{4} = 2{,}28 \cdot 10^{-6}\ m^4$

$I_2 > I_1$ VA BENE È UN PROGETTO CORRETTO ✓

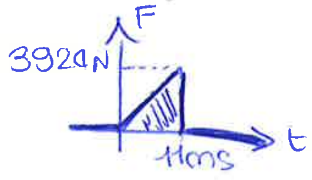
IL FENOMENO D'URTO HA DURATA NON MOLTO MINORE DEL PERIODO DELLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL SISTEMA.

→ IL MODELLO IMPULSIVO NON PORTA A RISULTATI MOLTO ACCURATI
→ MEGLIO INTEGRALE DI DUHAMEL

☆ MODELLO IMPULSIVO

FORZA MASSIMA CHE AGISCE SULLA TRAVE

$$F_{max} = m a_{max} = 20\,kg \cdot 20 \cdot 9{,}81\ m/s^2$$
$$F_{max} = 3924\,N$$

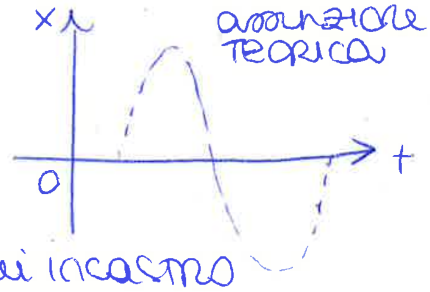


L'IMPULSO TOTALE (AREA Δ)

$$I_0 = \frac{1}{2} F_{max} \cdot t_1 =$$
$$I_0 = \frac{1}{2} 3924 \cdot 0{,}011 = 21{,}6\,NS$$

SI TRASCURA LO SMORZAMENTO, IL MOTO RISULTANTE È ARMONICO CON AMPIEZZA

$$x_0 = \frac{I_0}{m\lambda_n} = \frac{21{,}6\,Nm}{20\,kg \cdot \underbrace{337\,rad/s}_{53{,}7\,Hz}} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\,m$$



IL MASSIMO VALORE DELLA TENSIONE SI HA NEGLI INCASTRI E VALE

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W} = \frac{k\ell x_0}{I/r_e} = \frac{k\ell x_0 r_e}{I} = 105{,}6 \cdot 10^6\ N/m^2 < \sigma_R = 328\,!$$

VA BENE!

☆ INTEGRALE DUHAMEL

ESPLICITARE F(t)

$$F(t) \begin{cases} F = 357000\,t & 0 \le t \le 0{,}011 \\ F = 0 & t > 0{,}011 \end{cases}$$

$$F = \left(\frac{F_{max}}{t_1}\right) t$$ INCLINAZIONE RETTA = PENDENZA

LA RISPOSTA È QUELLA DEL <u>SISTEMA NON SMORZATO</u>

$$x(t) = A(t)\sin(\lambda_n t) - B(t)\cos(\lambda_n t)$$

TROVIAMO A(t) E B(t)

$$A(t) = \frac{357000}{m\lambda_n}\int_0^t \tau\cos(\lambda_n\tau)\,d\tau = \frac{357000}{m\lambda_n}\left[\lambda_n t \sin(\lambda_n t) + \cos(\lambda_n t) - 1\right]$$

$$B(t) = \frac{357000}{m\lambda_n}\int_0^t \tau\sin(\lambda_n\tau)\,d\tau = \frac{357000}{m\lambda_n}\left[-\lambda_n t \cos(\lambda_n t) + \sin(\lambda_n t)\right]$$

NEI PRIMI 11ms

$$A(t=0{,}011) = \qquad \text{e} \qquad B(t=0{,}011) =$$

valore RMS dell'accelerazione: (integro le leggi nei vari campi)

$$(a_{RMS})^2 = 2{,}88\cdot 10^{-6}\int_{20}^{100}\lambda^3 d\lambda + 2{,}88\int_{100}^{250} d\lambda + 2{,}81\cdot 10^{12}\int_{250}^{2000}\lambda^{-5} d\lambda = 684$$

$a_{RMS} = 26{,}15 \ m/s^2$ in coordinate inerziali $\qquad (a_{rms})^2 = \int_0^\infty S(\lambda)\, d\lambda$

in coordinate non inerziali, con smorzamento strutturale

$$x_0 = \frac{f_0}{k}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2 + i\eta}\right] \quad \text{con } f_0 = ma$$

$$|H(\lambda)| = \frac{m}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right]^2+\eta^2}}$$

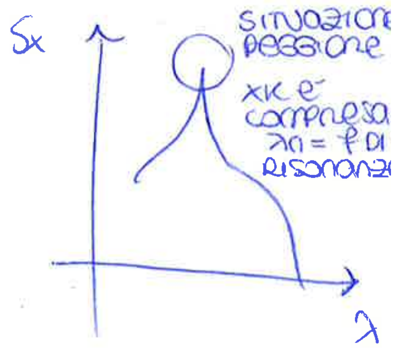
la DSP della risposta $\quad S(\lambda)_{RISP} = S(\lambda)_{ecc}\,|H(\lambda)|^2 = S_x(\lambda)$

3 campi:

$S_x(\lambda) = 2{,}23\cdot 10^{-16}\,\dfrac{\lambda^3}{''\quad ''}$ $\qquad \lambda \ \ 20 \div 100$

$S_x(\lambda) = 2{,}23\cdot 10^{-10}\,\dfrac{1}{''\quad ''}$ $\qquad \lambda \ \ 100 \div 250$

$S_x(\lambda) = 2{,}17\cdot 10^{2}\,\dfrac{\lambda^{-5}}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right]^2+\eta^2}$ $\qquad \lambda \ \ 250 \div 2000$



il valore RMS si ottiene $\int S_x$ nei 3 campi

$$(x_{RMS})^2 = 2{,}89\cdot 10^{-7} + 8{,}79\cdot 10^{-10} + 1{,}59\cdot 10^{-15} = 2{,}9\cdot 10^{-7} \ m^2$$

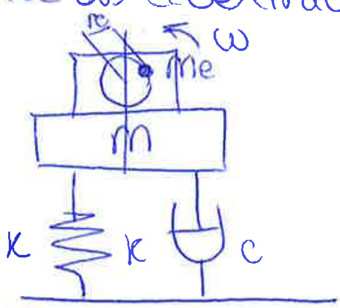
$x_{RMS} = 0{,}539 \ mm$

situazione peggiore nel 1° campo xk c'è λ_n

$\sigma_{RMS} = \dfrac{K \ell x_{oRe}}{I} = 17{,}8\cdot 10^6 \ N/m^2$ < verificata

3-1 CALCOLARE CARATTERISTICHE ELASTICHE, INERZIALI E DI SMORZAMENTO (SOLUZIONI DAI DATI O DAL GRAFICO) DI UN SISTEMA 1GdL MEDIANTE UN ECCITATORE AD ECCENTRICO

$m = 5\,kg$
$m_e = 0{,}2\,kg$
$a = 0{,}1\,m = r_e$
$\omega_1 = 100$ giri/min $\quad \lambda_1 = 1{,}667\,Hz$
$\omega_2 = 200$ giri/min $\quad \lambda_2 = 3{,}333\,Hz$



RISPOSTA
$\lambda_1 = 10{,}47\,Hz$ $\quad x_{01} = 0{,}011\,mm$ $\quad \Phi_1 = -7°$
$\lambda_2 = 20{,}94\,Hz$ $\quad x_{02} = 0{,}165\,mm$ $\quad \Phi_2 = -64°$
↓ AMPIEZZA $\quad$ ↓ RITARDO DI FASE

IL MOVIMENTO DELLA MACCHINA È LIMITATO ALLA SOLA DIREZIONE VERTICALE (1GdL)

DEVO TROVARE K, m, C!!

PROVA SPERIMENTALE: MASSA SU UN MATERIALE NON CONOSCIUTO
IMPONGO UNA VIBRAZIONE
REGISTRO LA RISPOSTA DA CUI RICAVO K, C

∃ UNA FORZA CENTRIFUGA ROTANTE: SOLO COMPONENTE VERTICALE
1 DIREZIONE XK 1 GdL
SI CONSIDERA SOLO L'ASSE DOVE SI PUÒ MUOVERE LA MASSA

↓

1) $F(t) = m_e r_e \lambda_1^2 \cos(\lambda_1 t)\ N$
2) $F(t) = m_e r_e \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 t)\ N$

TROVO L'ECCITAZIONE $\quad \boxed{F_c = m r \omega^2}$

X UN SISTEMA SMORZATO: CALCOLI SULLA $H(\lambda)$!!

$$x_0 = \frac{f_0}{k}|H(\lambda)| = \frac{f_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}} \quad , \quad \Phi = \operatorname{arctg}\left[\frac{-2\zeta\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}\right]$$

$$tg\Phi = \frac{-2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2} \rightarrow \left(\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)tg\Phi\right)^2 = \left(-2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2$$

$$\left(2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2 = \left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2 tg\Phi^2$$ SOSTITUISCO

$$x_0 = \frac{f_0}{k}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\Phi}} \quad \text{ma} \quad \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\Phi}} = \cos\Phi$$

$$x_0 = \frac{f_0}{k}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda^2 m}{k}\right)}\cos\Phi = \frac{f_0}{k-\lambda^2 m}\cos\Phi$$

$$x_0(k-\lambda^2 m) = f_0\cos\Phi$$

$$k-\lambda^2 m = \frac{f_0}{x_0}\cos\Phi$$ X TUTTI I SISTEMI SMORZATI

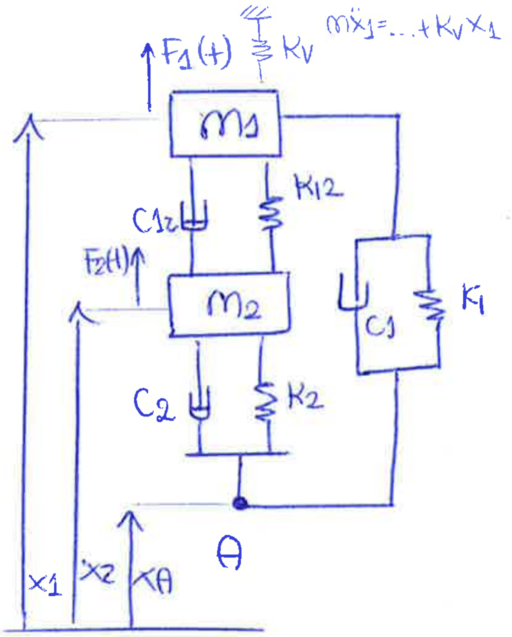
SISTEMI LINEARI a + GdL

EQ DEL MOTO

IMPO non risolverli ma saper scrivere l'equazione

potrebbe esserci un altro vincolo

● SISTEMA INERZIALE



2 masse puntiformi

possibili eccitazioni su più di un vincolo: $F_1(t)$, $F_2(t)$, $x_A(t)$

2 GdL xché le masse si muovono in un solo modo

$x_1(t)$, $x_2(t)$ spostamenti delle 2 masse dall'equilibrio statico

$x_A(t)$ spostamento del vincolo A

nell'equilibrio dinamico delle 2 masse si scrivono k, c e la differenza tra i vincoli

↑ sistema = matrice

equilibrio delle forze su ogni GdL, cioè su ogni massa

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_A) - k_1(x_1 - x_A) - c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{12}(x_1 - x_2) + F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2 - x_A) - k_2(\dot{x}_2 - x_A) - c_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_{12}(x_2 - x_1) + F_2(t) \end{cases}$$

sono 2 equazioni differenziali del 2° ordine accoppiate = non si possono risolvere separatamente

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1\dot{x}_A + k_1 x_A + F_1 \\ c_2\dot{x}_A + k_2 x_A + F_2 \end{Bmatrix}$$

il vincolo agisce su tutte e 2 le masse

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

x qualsiasi sistema lineare con smorzamento viscoso (non strutturale) con <u>n</u> gradi di libertà

le matrici sono T di ordine <u>n</u>!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 96

la matrice dinamica $[A]$ è $\begin{bmatrix} -[m]^{-1}[C] & -[m]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}$

(ricordo x 1 GdL $[A] = \begin{bmatrix} -c/m & -k/m \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)

la matrice dei guadagni degli input $[B]$ è $\begin{bmatrix} [m]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix}$

il vettore degli input $\{u\}$ coincide con il vettore delle forze esterne $\{F(t)\}$!

il vettore degli output del sistema è $\{y\} = [C]\{z\}$

con $[C]$ matrice dei guadagni degli output.

il moto del sistema può essere quindi studiato

- nello spazio delle fasi $\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + B\{u\}$
- nello spazio delle configurazioni $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$

la soluzione sarà composta da caso omogeneo + caso particolare

Sistema lineare a + GdL non smorzato e non forzato = oscillazioni libere

(soluzione omogenea associata)

EQ $[M]\{\ddot{x}\} + \underbrace{\cancel{[C]\{\dot{x}\}}}_{=0} + [K]\{x\} = \underbrace{\cancel{\{F(t)\}}}_{=0}$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

solo omogenea
no particolare

sistema di equazioni differenziali lineari omogenee del II ordine accoppiate (xk matrici non diagonali)

- accoppiamento inerziale $[M]$ non diagonale
- accoppiamento elastico $[K]$ non diagonale

la soluzione è $\{x\} = \{x_0\} e^{i\lambda t}$

$\{x_0\}$ è un vettore di ordine n

$$\{\dot{x}\} = i\lambda \{x_0\} e^{i\lambda t}$$

$$\{\ddot{x}\} = -\lambda^2 \{x_0\} e^{i\lambda t}$$

GLI AUTOVALORI SONO I QUADRATI DELLE PULSAZIONI PROPRIE DEL SISTEMA O DEI LORO RECIPROCI.

SE LI IMMETTO IN $\left(-\lambda^2[M]+[K]\right)\{x_0\}=\{0\}$ TROVO UN ∞ DI VALORI DI x_0, CIOE' GLI AUTOVETTORI $\{q\}$

GLI AUTOVETTORI SONO LE FORZE MODALI, CIOE' LE AMPIEZZE x_0 DELLE OSCILLAZIONI DELLE VARIE MASSE CHE SI VERIFICANO ALLA CORRISPONDENTE FREQUENZA PROPRIA DEL SISTEMA.

ex. $\lambda_1 = 5$ rad/s $\rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ -x_2 \end{Bmatrix}$ AUTOVETTORE CHE LEGA I PUNTI A MUOVERSI SOLO IN UN DETERMINATO MODO

$\lambda_2 - \dots \rightarrow \{\dots\}$

QUINDI NOTO IL MOTO AD 1 FREQUENZA DI UN PUNTO, SI PUO' CALCOLARE IL MOTO DI TUTTI I PUNTI

SI VINCOLA LA DEFORMATA DEL SISTEMA, CHE VALE X SOLO IN UN CERTO ISTANTE

TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NUMERI REALI E POSITIVI E IDEM LE PULSAZIONI PROPRIE $\rightarrow$ IL SISTEMA SEGUE OSCILLAZIONI ARMONICHE NON SMORZATE

GLI AUTOVETTORI SONO REALI X CUI TUTTE LE MASSE OSCILLANO IN FASE O CON UN RITARDO DI FASE DI 180°

LA SOLUZIONE COMPLETA DELL'EQUAZIONE DEL MOTO SI OTTIENE X SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI ED E'

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{q_i\}\left(K_{i_1}^* e^{i\lambda_i t} + K_{i_2}^* e^{-i\lambda_i t}\right)$$

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{q_i\}\left[C_{ic}\cos(\lambda_i t) + C_{is}\sin(\lambda_i t)\right]$$

K_{i1}^*, K_{i2}^* NUMERI COMPLESSI CONIUGATI X AVERE RISPOSTA DEL SISTEMA REALE (2n COSTANTI REALI)

C_{ic}, C_{is} COSTANTI CHE DEVONO ESSERE DETERMINATE DALLE CONDIZIONI INIZIALI

LA SOLUZIONE E' LA SOMMA DI n CONTRIBUTI QUINDI SONO n SOLUZIONI.

LA SECONDA FORMA E' LA GENERALIZZAZIONE DELLA SOLITA FORMA ED E' UN VETTORE DI n ELEMENTI, O LEGGE DEL MOTO X OGNI MASSA

IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI

$x(0) = \dots \rightarrow$ SISTEMA DI n EQ X TROVARE C_{ic} $\quad \{x(0)\} = \sum C_{ic}\{q_i\}$

DERIVO X E $\dot{x}(0) = \dots \rightarrow$ " " X TROVARE C_{is} $\quad \{\dot{x}(0)\} = \sum C_{is}\lambda_i\{q_i\}$

QUINDI GLI n AUTOVETTORI RAPPRESENTANO LE FORME MODALI DELLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL SISTEMA

AUTOVETTORE $\mathbb{R} \rightarrow$ ONDA APPARE COME STAZIONARIA

AUTOVETTORE $\mathbb{C} \rightarrow$ NON $\exists$ NODI O VENTRI, SEMBRA UN'ONDA IN MOVIMENTO

DISACCOPPIAMENTO DELLE EQ DEL MOTO (TRASFORMAZIONE DI COORDINATE)

ESAME

Se le matrici [M] e [K] sono diagonali, allora si ottiene un sistema di n EQ. differenziali del 1° ordine non accoppiate ma poi bisognerebbe cmq cercare gli autovalori e gli autovettori!!

Il disaccoppiamento si fa x trasformare il sistema a tanti GdL in uno a un. basso numero di GdL (altrimenti sarebbe abbastanza inutile)

Si parte dalla proprietà: gli autovettori sono "ortogonali" sia alla [K] che alla [M], quindi

$$(-\lambda^2[M]+[K])\{x_0\}=\{0\}$$

calcolata x un autovalore i $(-\lambda^2[M]\{q_i\}+[K]\{q_i\})=\{0\}$

$$[K]\{q_i\}=\lambda_i^2[M]\{q_i\}$$

moltiplico x $\{q_J\}^T$ (altro autovettore)

$$\{q_J\}^T[K]\{q_i\}=\lambda_i^2[M]\{q_i\}\{q_J\}^T$$

La stessa EQ si ottiene se partivo da $\{q_J\}$ e moltiplicavo per $\{q_i\}^T$

$$\{q_i\}^T[K]\{q_J\}=\lambda_J^2[M]\{q_J\}\{q_i\}^T$$

Siccome [K] è simmetrica / [M] è simmetrica

$$\{q_J\}^T\{K\}\{q_i\}=\{q_i\}^T[K]\{q_J\} \;/\; \lambda_i^2[M]\{q_i\}\{q_J\}^T=\lambda_J^2[M]\{q_i\}\{q_J\}^T$$

Sottraggo le 2 EQ unite C e ottengo:

$$\left(\frac{1}{\lambda_i^2}-\frac{1}{\lambda_J^2}\right)\{q_J\}^T[K]\{q_i\}=0$$

$$(\lambda_i^2-\lambda_J^2)\{q_J\}^T[M]\{q_i\}=0$$

se $i\neq J$ (sono 2 autovettori ≠)

$$\begin{cases}\{q_i\}^T[M]\{q_J\}=0\\ \{q_i\}^T[K]\{q_J\}=0\end{cases}$$

Relazione che definisce la proprietà di ortogonalità degli autovettori

se $i=J$

$$\{q_i\}^T[M]\{q_i\}=\bar{M}_i$$
$$\{q_i\}^T[K]\{q_i\}=\bar{K}_i$$

unico caso in cui le EQ non danno risultato nullo

$\bar{M}_i$ = massa modale
$\bar{K}_i$ = rigidezza modale
dell'i-esimo modo

$\rightarrow \lambda_i=\sqrt{\frac{\bar{K}_i}{\bar{M}_i}}$ = l'i-esima frequenza propria

M e K però non sono direttamente riconducibili ai valori fisici di partenza

Il sistema a n GdL è stato trasformato in un insieme di n sistemi ad 1 GdL, disaccoppiati tra loro

Gli autovettori sono le soluzioni di un sistema di eq. lineari omogenee e pertanto definiti a meno di una costante arbitraria. x ciascun modo quindi $\exists$ un'∞ di autovettori, tt proporzionali tra loro.
L'ampiezza delle oscillazioni di ciascuna deformata modale non è definita (servono le cond. iniz) ma è definita la forma che essa assume.
(cioè è definita solo 1 deformazione)

Quindi la matrice degli autovettori è sempre simile a se stessa (la posso moltiplicare, dividere..)
ma come si definiscono gli autovettori?
come si fissa la costante?

Bisogna "normalizzare" gli autovettori e ci sono $\neq$ modi:

- si pone = 1 il massimo elemento di ciascun autovettore (utile x rappresentazioni grafiche)
- si divide ciascun autovettore per $\sqrt{\Sigma x^2}$ radice della somma dei quadrati dei suoi elementi (diventa un versore)
- si normalizzano gli autovettori in modo tale da ottenere $\bar{M}_i = I$ o $\bar{K}_i = I$ (poiché ∞ autovettori = $\infty\,\bar{M}_i$ e $\infty\,\bar{K}_i$)

si chiama ortonormalizzazione

x cui $\{q_i\}^T[M]\{q_i\} = 1 \ \forall i$

si ottiene dividendo ciascun autovettore per la radice quadrata della corrispondente massa modale $\sqrt{\bar{M}_i}$

(utilizzato da tutti i programmi di visualizzazione delle forme modali / software a elementi finiti)

se $\bar{M}_i = I \rightarrow \bar{K}_i = \lambda_i^2$ la rigidezza modale coincide con il corrispondente autovalore e quindi con il quadrato della pulsazione propria

$\bar{M}_i \ddot{\eta}_i + \bar{K}_i \eta_i = 0$

diventa

$[I]\{\ddot{\eta}\} + [\lambda^2]\{\eta\} = \{0\}$ siamo in coordinate modali "ortonormalizzate"

con matrice degli autovalori $[\lambda^2] = \mathrm{diag}\{\lambda_i^2\}$

SE GLI AUTOVETTORI SONO ORTONORMALIZZATI,

$$\overline{M}_i \ddot{\eta}_i + \overline{K}_i \eta_i = \{q_i\}^T \{f(t)\}$$

DIVENTA

$$\ddot{\eta}_i + \lambda_i^2 \eta_i = \overline{F}_i' \qquad \overline{F}_i' = \frac{\overline{F}_i}{\overline{M}_i}$$

LA STORIA TEMPORALE DEL SISTEMA NON SMORZATO PUÒ QUINDI ESSERE CALCOLATA A PARTIRE DALLE STORIE TEMPORALI DELLE FORZANTI ESEGUENDO LE SEGUENTI OPERAZIONI:

① RISOLVO L'AUTOPROBLEMA: CALCOLO < AUTOVALORI / AUTOVETTORI DEL SISTEMA

② TROVO LE FORZE MODALI: CALCOLO DELLE STORIE TEMPORALI DELLE FORZE MODALI

③ RISOLVO LE EQ. E TROVO LE n SOLUZIONI IN TERMINI DI η COORDINATE MODALI

④ SI COMBINANO LE SOLUZIONI CON $\{x\} = [\Phi]\{\eta\}$

SI OTTIENE LA STORIA TEMPORALE DEL SISTEMA IN TERMINI DELLE COORDINATE $\{x\}$

IL MAGGIOR VANTAGGIO DI AVER DISACCOPPIATO IL SISTEMA È CHE NON TUTTI I MODI SONO UGUALMENTE IMPORTANTI NEL DETERMINARE LA RISPOSTA DEL SISTEMA.

ANCHE SE ↑ GdL, SI PRENDE IN CONSIDERAZIONE UN NUMERO LIMITATO DI MODI (A BASSE λ_n) E SI OTTIENE UNA RISPOSTA CON SUFFICIENTE PRECISIONE, RISPARMIANDO IN TERMINI DI TEMPO E DI COSTO DEL CALCOLO.

SI PRENDONO SOLO I PRIMI M MODI
SI CALCOLANO " " M AUTOVALORI E AUTOVETTORI
DEVONO ESSERE STUDIATI SOLO M SISTEMI AD 1 GdL E A BASSE λ_n

(DIFFICILE TRATTARE MODI A ↑ λ_n)

LA RISPOSTA DEL SISTEMA È

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(t)\{q_i\}$$

SI COMBINANO SOLO I PRIMI m MODI

LA MATRICE DEGLI AUTOVETTORI È RIDOTTA $[\Phi^*]$, m×n E NON È + QUADRATA.

$\{x\} = [\Phi]\{\eta\}$ È ANCORA POSSIBILE

MA NON $\{\eta\} = [\Phi]^{-1}\{x\}$ XK L'INVERSIONE DELLA MATRICE RIDOTTA NON È + POSSIBILE!

MA CI SERVE CALCOLARE LE COORDINATE MODALI DA QUELLE FISICHE, X CUI SI PREMOLTIPLICA PER $[\Phi^*]^T[M]$

$$\{x\} = [\Phi^*]\{\eta\}$$

$$[\Phi^*]^T[M]\{x\} = \underbrace{[\Phi^*]^T[M][\Phi^*]}_{\overline{M}}\{\eta\} \qquad m{\times}n \cdot n{\times}n \cdot n = m{\times}n \cdot n{\times}n \cdot n{\times}m \cdot m$$

PERMETTE DI OTTENERE GLI AUTOVALORI s (COMPLESSI A 2 A 2 CONIUGATI) E LE FORME MODALI COMPLESSE $\{z_0\}$!

→ LA PRESENZA DELLO SMORZAMENTO FA SÌ CHE GLI AUTOVALORI SIANO COMPLESSI E IDEM GLI AUTOVETTORI

AUTOVALORI

Re → SOLO OSCILLAZIONE

$\mathbb{C}$ → Re DECADIMENTO, Im OSCILLAZIONE

AUTOVETTORI

Re → MOVIMENTO DELLE MASSE TUTTE IN FASE O CONTRO FASE
ONDA "QUASI STAZIONARIA"
FORMA, MASSIMI, ZERI, SEMPRE =

$\mathbb{C}$ → MOVIMENTO DEI VARI PUNTI ANCHE SE ALLA STESSA f, CON DIFFERENZE SIA IN AMPIEZZA CHE IN FASE
FORMA SEMPRE ≠
NO "ONDA STAZIONARIA"
NO "FORME MODALI"

INTRODUCENDO LA TRASFORMAZIONE MODALE $\{x\} = [\Phi]\{m\}$
E PREMOLTIPLICANDO X $[\Phi]^T$ OTTENIAMO

$$[\bar{M}]\{\ddot{m}\} + [\bar{C}]\{\dot{m}\} + [\bar{K}]\{m\} = \{0\} \quad \text{con} \quad [\bar{C}] = [\Phi]^T[C][\Phi]$$

MA LA MATRICE MODALE DI SMORZAMENTO NON È DIAGONALE X CUI NON SI È DISACCOPPIATO IL SISTEMA XK $[\bar{C}]$ ACCOPPIA I MODI TRA LORO.

C'È UN CASO PARTICOLARE IN CUI $[\bar{C}]$ È DIAGONALE,
SE $[C]$ È ESPRESSA COME COMBINAZIONE LINEARE DI $[K]$ E $[M]$

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \rightarrow [\bar{C}] = [\Phi]^T(\alpha(M) + \beta(K))[\Phi] = \alpha[\bar{M}] + \beta[\bar{K}]$$

→ SI CHIAMA SMORZAMENTO PROPORZIONALE

IL SISTEMA È DISACCOPPIATO IN EQ $\bar{M}_i\ddot{m}_i + (\alpha\bar{M}_i + \beta\bar{K}_i)\dot{m}_i + \bar{K}m_i = 0$

SISTEMA + GDL CON SMORZAMENTO PROPORZIONALE FORZATE

SE LO SMORZAMENTO < VISCOSO / STRUTTURALE È PROPORZIONALE, LE EQ DEL MOTO ANCHE X LE OSCILLAZIONI FORZATE POSSONO VENIRE DISACCOPPIATE!

SE $c \to 0$, LA RISPOSTA È = A NON SMORZATO, TRANNE NEL CAMPO VICINO ALLA λ_n DOVE PREDOMINA LO SMORZAMENTO!

LA RISPOSTA SARANNO SEMPRE OSCILLAZIONI NON IN FASE, ANCHE SE TUTTE LE FORZANTI SONO IN FASE / SINCRONIZZATE / COERENTI

ECCITAZIONE ARMONICA

$$\{F(t)\} = \{F_0 \sin(\lambda t + \Phi)\} = \{F_{0_1} \sin(\lambda t)\} + \{F_{0_2} \cos(\lambda t)\} =$$
$$= Re(\{F_0\} e^{i\lambda t})$$

LA RISPOSTA $\{x(t)\} = Re(\{x_0\} e^{i\lambda t})$

$\to$ ANCHE SE $\{F_0\} \in Re \to \{x_0\} \in \mathbb{C}$!!!

SISTEMA + GDL CON SMORZAMENTO NON PROP OSCILLAZ FORZATE

CON SMORZAMENTO VISCOSO NON PROPORZIONALE SI RICORRE ALL'EQ DI STATO

$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\}$ → STORIA TEMPORALE DELL'ECCITAZIONE

ECCITAZIONE ARMONICA $\{F(t)\} = \dots = Re(\{F_0\} e^{i\lambda t})$

STESSA RISPOSTA $\{x(t)\} = Re(\{x_0\} e^{i\lambda t})$ IMPONGO LA SOLUZIONE

L'EQUAZIONE DEL MOTO È $\underbrace{(-\lambda^2[M] + i\lambda[C] + [K])}\{x_0\} = \{F_0\}$

$$\{x_0\} = \frac{\{F_0\}}{[K_{DIN}]} = \{F_0\}[K_{DIN}]^{-1}$$

$[K]_{din}$ RIGIDEZZA DINAMICA (SI INVERTE)

SI RISOLVE OTTENENDO $\{x_0\} = [H(\lambda)]\{F_0\}$

$[H(\lambda)] = [K]_{din}^{-1}$ = MATRICE DI DEFORMABILITÀ DINAMICA

SISTEMI + GDL
CON SMORZAMENTO STRUTTURALE
OSCILLAZIONI FORZATE

Si aggiunge la forzante alle oscillazioni libere ottenute dall'omogenea

L'EQ è $(-\lambda^2[M]+[K']+i[K''])\{x_0\} = \{F_0\}$

La matrice di rigidezza dinamica è $[K]_{DIN} = -\lambda^2[M]+[K']+i[K'']$

Il sistema è studiato introducendo uno smorzamento viscoso equivalente nell'eq del sistema con smorzamento non proporzionale

$$[C_{EQ}] = \frac{[K'']}{\lambda}$$

Si fa la stessa cosa dello smorz prop x k $C \to 0$ x cui fuori dalla zona dello smorzamento è = al non smorzato

Lo smorzamento del sistema viene introdotto nella forma di smorzamento modale, il cui valore deve essere valutato in corrispondenza della risonanza di ciascun modo. → ricavato sperimentalmente o in letteratura

Lo smorzamento modale equivalente, indipendente dalla frequenza vale $\bar{C}_{EQ} = \eta \frac{k_i}{\lambda_i}$ per ciascun modo.

SISTEMA A + GDL
CON ECCITAZIONE NON ARMONICA

- approccio "modale" → metodi x 1 GDL
- approccio "modale" non possibile → integrazione numerica

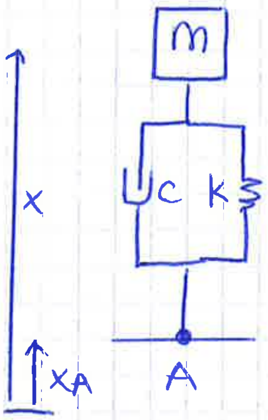
SMORZATORE DINAMICO

→ vedi domanda esame

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 96

SISTEMA M/K/C VISCOSO

sistema inerziale



$\uparrow F(t)$
$\downarrow mg$
$\downarrow m\ddot{x}$
$\downarrow c(\dot{x}-\dot{x}_A)$
$\downarrow k(x-x_A-l_0)$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = c\dot{x}_A + k(x_A-l_0) + F(t) - mg$$

$$x_A' = x_A + l_0 - \frac{mg}{k}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = \underbrace{c\dot{x}_A' + kx_A'}_{\text{SPO. VINCOLO}} + \underbrace{F(t)}_{\text{F. ESTERNA}}$$

soluzione omogenea $x_{om} = x_0^* e^{st}$

SOVRASMORZATO

$C_{CR} = 2\sqrt{mk}$

$\zeta = \frac{c}{C_{CR}}$

$c > C_{CR}$
$\zeta > 1$

$$s^2 m + sc + k = 0$$
$$\ddot{x} + 2\zeta\lambda_n\dot{x} + \lambda_n^2 x = 0$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mk}}{2m} = -\lambda_n\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}$$ 2 soluzioni reali

$$x_{om} = x_{01}^* e^{\lambda_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + x_{02}^* e^{\lambda_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$

SOTTOSMORZATO

$c < C_{CR}$
$\zeta < 1$

$$s = '' = \underbrace{-\lambda_n\zeta}_{} \pm i\underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}\,\lambda_n}_{}$$

$$\sigma = -Re(s) = \lambda_n\zeta \qquad \lambda_p = Im(s) = \lambda_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$x_{om} = e^{-\sigma t}\left[x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\sin(\lambda_p t)\right]$$

$$e^{-\sigma t}\left[x(0)\cos(\lambda_p t) + \frac{1}{\lambda_p}\left[\dot{x}(0)+\sigma x(0)\right]\sin(\lambda_p t)\right]$$

si riscrive anche $x_{om} = e^{-\sigma t}[A]\sin(\lambda_p t + \varphi)$

SMORZAMENTO CRITICO

$c = C_{CR}$, $\zeta = 1$

$$s = -\frac{c}{2m} = -\lambda_n\zeta = -\lambda_n$$

$$\begin{cases} -\lambda_n \pm 0 \\ -\frac{C_{CR}}{2m} \pm \sqrt{0} = -\frac{2\sqrt{mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = -\lambda_n \end{cases}$$

$$x_{om} = (A+Bt)\,e^{-\lambda_n t}$$

ENERGIA DISSIPATA E RAPPORTO E.DISS./E.TOTALE

$$\Delta W = \pi c \lambda_p x_0^2$$

$$C_{EQ} = \frac{\eta K}{\lambda_n}$$

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\delta = 4\pi\zeta = \varphi$$

$$\zeta_{EQ} = \frac{\eta}{2}$$

$$\eta = -\frac{\Delta W}{2\pi W}$$

SISTEMI m|K|c STRUTTURALE

andamento armonico di tensione e deformaz

$$\eta = \frac{E''}{E'} = tg(\Phi) \cong \Phi \qquad E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E(1+i\eta)$$

$$\varphi = 2\pi\Phi = 2\pi\eta \qquad K^* = K(1+i\eta)$$

$$m\ddot{x} + K(1+i\eta)x = K(1+i\eta)x_A(t) + F(t)$$

soluzione omogenea

$$x_{om} = x_0 e^{st}$$

$$s = \pm i\lambda_n\sqrt{1+i\eta} \cong -\lambda_n\frac{\eta}{2} \pm i\lambda_n \qquad (\eta \to 0)$$

$$\sigma = -Re(s) = \lambda_n\frac{\eta}{2}$$

$$\lambda = Im(s) = \lambda_n$$

$$x_{om} = [x_{01}\cos(\lambda_n t) + x_{02}\sin(\lambda_n t)]\, e^{-\sigma t}$$

soluzione particolare

$$F(t) = f_0 e^{i\lambda t}$$

$$x_p = x_0 e^{i\lambda t}$$

$$x_0 = \frac{f_0}{K}H(\lambda) = \frac{f_0}{K}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2 + i\eta}\right]$$

SISTEMA M/K/C COULOMBIANO

$F_A = \mu N$

$m\ddot{x} + \mu N \, sign(\dot{x}) + Kx = 0 \rightarrow m\ddot{x} + Kx = \pm \mu N \dot{x}$

$x(t) = A_1 \cos(\lambda_n t) + A_2 \sin(\lambda_n t) + \frac{\mu N}{K} \quad [0; \frac{T}{2}]$

$x(t) = A_3 \cos(\lambda_n t) + A_4 \sin(\lambda_n t) - \frac{\mu N}{K} \quad [\frac{T}{2}; T]$

$T = \frac{2\pi}{\lambda_n}$

VALORI FIGURA

$x_0 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{4\mu N}{K} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{4\mu N}{K} \ldots$

RETTA INVILUPPO $\quad -\frac{4\mu N}{K} / \frac{2\pi}{\lambda_n} \rightarrow \frac{2\mu N \lambda_n}{\pi K}$

ALTRI VALORI

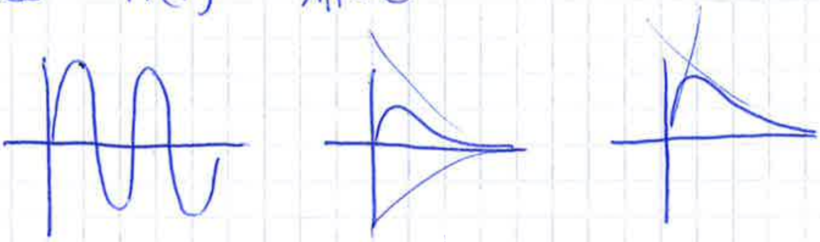
$\sigma = \frac{\lambda_n}{2\pi} \delta$

$\delta = \ln\left(\frac{x_i}{x_i - \frac{4\mu N}{K}}\right)$

$\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$

SMORZAMENTO CRITICO $\quad x(t) = (A+Bt)\,e^{-\lambda_n t}$

$h(t) = \lambda_n t\, e^{-\lambda_n t}$



$\zeta < 1 \qquad \zeta > 1 \qquad \zeta = 1$

FORZANTE A GRADINO (costante)

$F(t) = f_0\, u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

$$x_{om} = e^{-\sigma t}\left[x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\sin(\lambda_p t)\right]$$

$$x_p = \frac{f_0}{K}$$

$$x(t) = e^{-\sigma t}\left[x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\sin(\lambda_p t)\right] + \frac{f_0}{K}$$

se ottiene $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$

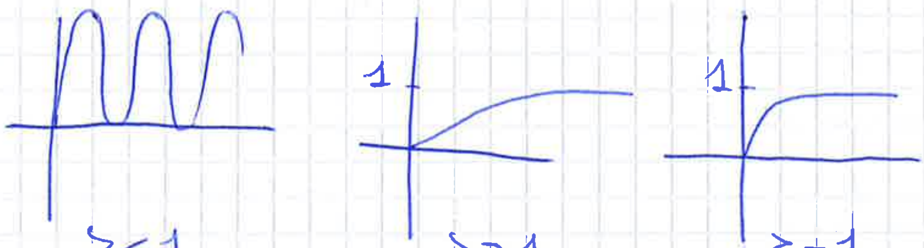
$$x_{01} = -\frac{f_0}{K}, \quad x_{02} = -\frac{f_0}{K}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$x(t) = \frac{f_0}{K}\, g(t)$$

$$g(t) = 1 - e^{-\sigma t}\left[\cos(\lambda_p t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\lambda_p t)\right] \qquad \text{sottosmo}$$

$$g(t) = 1 - \frac{1}{2}\left[e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\lambda_n t} + e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\lambda_n t}\right] \qquad \text{sovrasmo}$$

$$g(t) = 1 - (1+\lambda_n t)\,e^{-\lambda_n t} \qquad \text{critico}$$



$\zeta < 1 \qquad \zeta > 1 \qquad \zeta = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 96

FORZANTE RANDOM (VIBRAZIONI CASUALI)

FORZANTE NON DETERMINISTICA, ESPRIMIBILE SOLO IN TERMINI STATISTICI DA

- DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLE AMPIEZZE $P(y)$
- DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA $S(\lambda)$

$F(t)$, T

$$\bar{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt \quad , \quad F_{RMS} = \sqrt{\overline{F^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T F^2(t)\,dt}$$

$$\sigma^2 = \overline{(F-\bar{F})^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[F(t) - \bar{F}\right]^2 dt$$

SE $\bar{F} = 0$, $F_{RMS} = \sigma^2$

FENOMENO STAZIONARIO ED ERGODICO: $\bar{F} = K$, $F_{RMS} = K$, $\sigma^2 = K$!

$$\varphi(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t)F(t+\tau)\,dt$$

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{i\lambda\tau}\, d\tau$$

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$P(y) = \int_{-\infty}^{u} p(u)\,du$$

LA RISPOSTA È CASUALE COME L'ECCITAZIONE

$$S_x(\lambda) = S(\lambda)\,|H(\lambda)|^2 \frac{1}{K^2}$$

$$x_{RMS} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_x(\lambda)\,d\lambda}$$

SISTEMA SMORZATO $\quad |H(\lambda)|^2 = \dfrac{1}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}$

ALTRE FORMULE DAGLI ESERCIZI:

$F_C = m r \omega^2$

$F_{cv} = m e r e \lambda^2 \cos(\lambda t)$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\Phi}} = \cos\Phi$

$\Delta x = \dfrac{F\ell^3}{3EI}$

$I = \pi \dfrac{re^4 - r_i^4}{4}$

$m = \pi\rho\ell(re^2 - r_i^2) = \rho V$

$M_f = F\cdot\ell = K\ell x_0$

$\sigma_{max} = \dfrac{M_f}{W} = \dfrac{K\ell x_0}{\frac{I}{re}}$

SANTO ARCHIMEDE

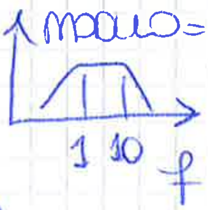
$F_A = \rho V g$

STUDI DI GRIFFIN → curve di isodisturbo (isosensazione) che definiscono la sensibilità umana alle vibrazioni globali del corpo in funzione della f di vibrazione del disturbo esterno

↓

usate x definire filtri/pesature x convertire una misura vibrazionale in una misura di disturbo

↓ FILTRI analogici (S) ↑ modulo = ampli la percezione umana ↑ o ↓ il segnale



↓ si usano x 12 ingressi ≠ (≠ fattore di scala)

- sensibilità umana 0,1 ÷ 100 Hz
- plateau con ↑ amp 4 ÷ 10 Hz
- attenuazione > 10 Hz
- impo sedile > schienale > piedi

considero ingresso ↓ filtro il segnale → calcolo fattore di cresta

$CF = \frac{\text{valori picco}}{RMS}$

↓ calcolo RMS x ogni posizione e direzione ↓ sommo RMS e trovo dose ↓ controllo normativa

(scala di confort 0-5, 0-2,5 acc)

CHINETOSI - malessere che si verifica in presenza di movimento
↓ teoria della riorganizzazione sensoriale
↓ filtro vibr → chine W_f

VIBRAZIONI DEL MANO
↓ prove di lab con vari tipi di maniglia su martinetto vibrazionale strumentate x misurare
- vibrazione in ingresso (input)
- forze trasmesse (output)

curve di mobilità → no picchi di risonanza = mano è un sistema dinamico $\xi \gg 1$

modello
vari punti braccio → spalla taglia tutto non si propagano al corpo

energia dissipata $\propto f$ (↑, ↑)

filtro W_h → white finger

x valutare l'esposizione alle vibrazioni

- esposizione giornaliera $A(8) = 0,5\ m/s^2 \sqrt{\frac{P_E}{100}}$
- valore della dose della vibrazione $VDV = K\, VDV \left(\frac{T_{exp}}{T_{meas}}\right)^{1/4}$
- punti di esposizione accumulati in 1h $P_{E,1h} = 50\,(K a_\omega)^2$
- $P_E = \left(\frac{K a_\omega}{0,5\ m/s^2}\right)^2 \frac{T}{8h}\, 100$
- $A(8)_{x,y,o z} = K a_\omega \sqrt{\frac{T_{exp}}{T_0 = 8h}}$

$\boxed{\begin{matrix} 1,4 & x,y \\ 1 & z \end{matrix} = K}$

se + mansioni

$A(8)_x = \sqrt{A_{x_1}(8)^2 + A_{x_2}(8)^2 \ldots}$

RICERCA AUTOVALORI

AUTOVALORI = PULSAZIONI PROPRIE AL QUADRATO (R)

SE LI IMMETTO NELL'EQ OTTENGO GLI AUTOVETTORI q

AUTOVETTORI = AMPIEZZE DELLE OSCILLAZIONI (R)
FORME MODALI DELLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL SISTEMA

→ LE MASSE OSCILLANO IN FASE O CON UN RITARDO DI FASE 180°

SOLUZIONE $\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{q_i\}\left(K_{1i}^{*} e^{i\lambda_i t} + K_{2i}^{*} e^{-i\lambda_i t}\right)$

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{q_i\}\left[C_{ic}\cos(\lambda_i t) + C_{is}\sin(\lambda_i t)\right]$$

$$\{x(0)\} = \sum_{i=1}^{n} C_{ic}\{q_i\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \sum_{i=1}^{n} C_{is}\lambda_i\{q_i\}$$

$$\{C_{ic}\} = [\Phi]^{-1}\{x(0)\} \qquad \{\lambda C_{is}\} = [\Phi]^{-1}\{\dot{x}(0)\}$$

NOTA A MENO DI UNA COSTANTE DA TROVARE CON LE CONDIZIONI INIZIALI

TRASFORMAZIONE COORDINATE

DISACCOPPIARE LE EQ. DEL MOTO X CONSIDERARE POCHI GDL

EQ $([K] - \lambda^2[M])\{x_0\} = 0$

CALCOLATA X AUTOVALORI λ_i $\quad [K]\{q_i\} = \lambda_i^2[M]\{q_i\}$

$$\{q_j\}^T[K]\{q_i\} = \lambda_i^2[M]\{q_i\}\{q_j\}^T$$

IDEM SE FACCIO L'INVERSO $\quad \{q_i\}^T[K]\{q_j\} = \lambda_j^2[M]\{q_j\}\{q_i\}^T$

$[K], [M]$ SIMMETRICHE $\quad \{q_i\}^T[K]\{q_j\} = \{q_j\}^T[K]\{q_i\} \;//\; \lambda_i^2 \ldots$

LE SOTTRAGGO $\quad 0 = \{q_j\}^T[K]\{q_i\}\left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_j^2}\right)$

$$0 = \{q_j\}^T[M]\{q_i\}(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)$$

SE $i \neq j$
$\{q_j\}^T[K]\{q_i\} = 0$
$\{q_j\}^T[M]\{q_i\} = 0$
ORTOGONALITÀ

SE $i = j$
$\{q_i\}^T[K]\{q_i\} = \bar{K}_i$ RIGIDEZZA MODALE
$\{q_i\}^T[M]\{q_i\} = \bar{M}_i$ MASSA MODALE

$\lambda_i = \sqrt{\frac{\bar{K}_i}{\bar{M}_i}}$

MATRICI DIAGONALI
$$[\bar{M}] = \mathrm{diag}\{\bar{M}_i\} = [\Phi]^T[M][\Phi]$$
$$[\bar{K}] = \mathrm{diag}\{\bar{K}_i\} = [\Phi]^T[K][\Phi]$$

LA MATRICE DEGLI AUTOVETTORI $[\Phi]$ È USATA PER ESEGUIRE UNA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$\{x\} = [\Phi]\{\eta\}$ = DEFORMATA DEL SISTEMA = COMBINAZIONE LINEARE DI AUTOVETTORI X MEZZO DI N COEFFICIENTI η

$\{\eta\} = [\Phi]^{-1}\{x\}$ = COORDINATE MODALI NEL SISTEMA DEGLI AUTOVETTORI

SISTEMA + GdL SMORZATO VISCOSO

- $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

SOLUZIONE OMOGENEA

$$\{x\}_{OM} = \{x_0\} e^{i\lambda t} \qquad \{x_0\}, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(-\lambda^2[M] + i\lambda[C] + [K])\{x_0\} = \{0\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \{x_0\} = \{0\} \\ \det(-\lambda^2[M] + i\lambda[C] + [K]) = 0 \end{array}\right.$$

- SOLUZIONE NELLO SPAZIO DEGLI STATI:

$$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + \cancel{[B]\{u\}}$$

$$\{\dot{z}\} - [A]\{z\} = \{0\}$$

SOLUZIONE OMOGENEA

$$\{z\} = \{z_0\} e^{st}$$

$$([A] - s[I])\{z_0\} = \{0\}$$

AUTOVALORI s COMPLESSI
FORME MODALI $\{z_0\}$ COMPLESSE

TRASFORMAZIONE MODALE

$$[\bar{M}]\{\ddot{\eta}\} + [\bar{C}]\{\dot{\eta}\} + [\bar{K}]\{\eta\} = \{0\}$$

$\downarrow$

MA $[\bar{C}]$ NON È DIAGONALE
LE EQ NON SONO DISACCOPPIATE
E $\eta_i \in \mathbb{C}$