NUMERO: 1551A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Biomecanica dei Fluidi + Esercizi. Prof.Gallo

BIOMECCANICA dei FLUIDI

5 CREDITI

DIEGO GALLO diego.gallo@polito.it DIMEAS
GIUSEPPE ISU giuseppe.isu@ " " ESERCITAZ IN AULA e LIM
UMBERTO MORBIDUCCI " "

ESAME SCRITTO 2h + CORREZIONE (x RITIRARSI..)

2 es 16 (8+8) ← 1 BERNOULLI, 1 BILANCIO
2 dom teoria + 16

/32

non SI RIFIUTA IL VOTO (una volta corretto)
no ORALE

NO LEZIONE
23 ott
17/18 Dic
7/8 Gen

LIBRO: "Fenomeni di trasporto" Bird, Lightfoot
+ GRANDE
SOPRATT x I BILANCI

DEFINIZIONI:

DENSITÀ: RAPPORTO TRA MASSA E VOLUME DI UNA SOSTANZA

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \quad \left[\frac{Kg}{m^3}\right] \quad \left[\frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{Kg}{m^3}\right]$$

X I LIQUIDI: ρ VARIA POCO AL VARIARE DI ΔT E Δp

→ ρ È QUINDI CONSIDERATA COSTANTE

EX: DENSITÀ DEL SANGUE ($\nexists \Delta T$) XK TUTTI I FLUIDI BIOLOGICI HANNO $T = 37°C$ DIPENDONO INFATTI SOLO DALL'EMATOCRITO LA % DI GLOBULI ROSSI NEL SANGUE (43%)

X I GAS: ρ DIPENDE DA p E T, PARAMETRI DA PRECISARE

INFATTI,

X I GAS IDEALI: $pV = nRT$ EQ. DI STATO

n = MOLI
R = COSTANTE UNIVERSALE
M = MASSA MOLECOLARE
m = MASSA

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad XK \quad n = \frac{m}{M}$$

$$\boxed{\frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \rho}$$

PESO SPECIFICO, DATO DAL CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE: RAPPORTO TRA PESO DI UN CORPO ED IL SUO VOLUME

$$\boxed{\gamma = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \left(\frac{m}{V}\right) g = \rho g} \quad \left[\frac{N}{m^3}\right] \quad \left[\frac{dyn}{cm^3} = 10 \frac{N}{m^3}\right]$$

γ È DIRETTAMENTE DIPENDENTE DA ρ

COMPRIMIBILITÀ: ESPRIME QUANTO VARIA PERCENTUALMENTE IL VOLUME DI UN FLUIDO A CAUSA DI UNA VARIAZIONE DI PRESSIONE.

INFATTI IN CONDIZIONI ISOTERME $T = k$ IMPLICA

$pV = k$

↳ INVERSAMENTE PROPORZIONALI

$$p\,dV = -V\,dp$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

$$p = -\frac{dp}{dV/V} \rightarrow \boxed{p = E}$$

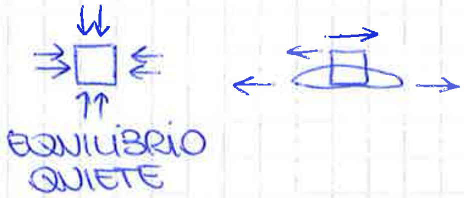
IL MODULO DI COMPRIMIBILITÀ ISOTERMA X UN GAS È PARI ALLA PRESSIONE STESSA, X CUI I GAS RISULTANO COMPRIMIBILI FACILMENTE.

LE DIFFERENZE TRA LIQUIDI E GAS DELLE PROPRIETÀ ELENCATE SONO DOVUTE ALLA DIVERSA FORZA DEI LEGAMI TRA ATOMI E MOLECOLE NELLA FASE LIQUIDA ED IN QUELLA GASSOSA → ∃ CIOÈ DIFFERENZE NELL'ARRANGIAMENTO MOLECOLARE TRA LIQUIDI E GAS → MA SI POSSONO TRATTARE IN MODO UNIFICATO LE LORO PROPRIETÀ MECCANICHE! (X QUESTO NOI PARLIAMO DI FLUIDI)

SCORRIMENTO

LA CARATTERISTICA PRINCIPALE DEI FLUIDI È LA POSSIBILITÀ DI SCORRIMENTO DI UNA QUALSIASI PARTE DI FLUIDO RISPETTO AD UN'ALTRA ADIACENTE! A QUESTO SCORRIMENTO SI OPPONE UNA FORZA DI ATTRITO INTERNO, MA IL FLUIDO NON PUÒ RESISTERE ALLO SCORRIMENTO! NON ∃ UNA FORZA DI ATTRITO STATICO CHE LO BLOCCA

C'È EQUILIBRIO SOLO QUANDO VIENE APPLICATA UNA FORZA ESTERNA → SE UN FLUIDO È IN QUIETE, LE FORZE TRA GLI ELEMENTI DI FLUIDO DEVONO ESSERE ⊥ ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE, ALTRIMENTI I VARI ELEMENTI INIZIEREBBERO A SCORRERE L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO, ABBANDONANDO LO STATO DI QUIETE!



LA PRESSIONE:
- È UNO SCALARE!
- NON HA CARATTERISTICHE DIREZIONALI
  NON DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE DELLA SUPERFICIE SU CUI È MISURATA
- VALE X SUPERFICI IN QUALSIASI ORIENTAZIONE

UNITÀ DI MISURA:

$[Pa]$ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ $\left[\frac{dyn}{cm^2} = 0,1\ Pa\right]$

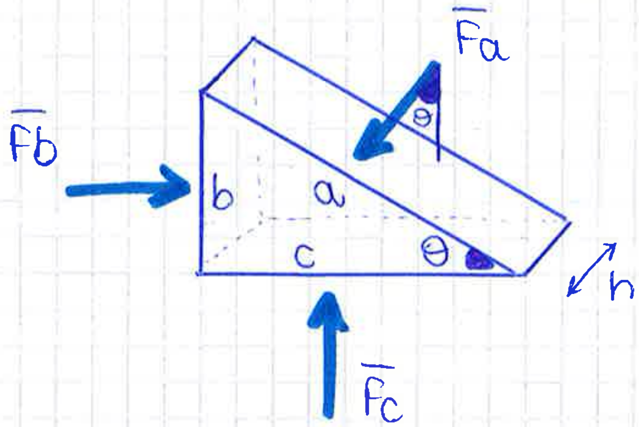
$[bar = 10^5\ Pa]$

$[patm = 1,01325 \cdot 10^5\ Pa = 1,01325\ bar]$

$[mmHg = Torr = 133,22\ Pa]$

NON DIREZIONALITÀ DELLA PRESSIONE

DIMO PRISMA DI FLUIDO, SEPARATO DAL RESTO DA UNA SUPERFICIE INDEFORMABILE



PRISMA IN QUIETE SOTTO LE FORZE DI PRESSIONE, ⊥ ALLA SUPERFICIE SU CUI AGISCONO E COSTANTI!

ABBIAMO, *DA $F = pS$:

$F_a = p_a S_a = p_a ah$

$F_b = p_b bh$

$F_c = p_c ch$

*DALLA TRIGONOMETRIA:

$\begin{cases} F_b = F_a \sin\theta \\ F_c = F_a \cos\theta \end{cases}$

$c = a\cos\theta$

$b = a\sin\theta$

NB nelle equazioni di equilibrio, non si è tenuto conto di eventuali forze di volume agenti sul prisma, in quanto al passaggio al limite esse scompaiono

EQ↑ $F_c = F_a \cos\theta + \rho g \, dV$

$F_c = F_a \cos\theta + \cancel{\rho g \frac{1}{2} bch} \to 0$

le forze di volume si possono trascurare

$dV = \theta \, dS$ il volume tende a zero più velocemente dell'area (è un infinitesimo di ordine superiore a dS)

EQUILIBRIO STATICO di un FLUIDO

= in un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulle, in un sistema di riferimento inerziale, x cui le forze agenti devono avere risultante = 0

in un elemento di fluido agiscono 2 forze:

- F_p di pressione (di superficie)
- F_v di volume

per cui l'equilibrio statico deve essere $\boxed{F_p + F_v = 0}$

cioè è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse.

solitamente facciamo i 2 equilibri ↑ verti. e → orizz.

la pressione non cambia con la direzione, ma con il punto di applicazione, cioè con la posizione!

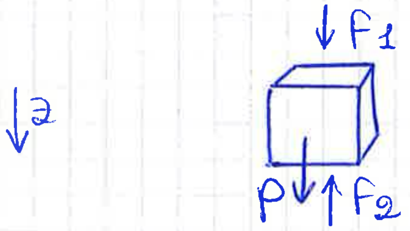
Le 3 relazioni si riassumono in

$$\boxed{\bar{\nabla} p = \text{grad}\, p = \rho \bar{f}}$$

→ Se in un fluido in quiete agisce una forza di volume, la pressione nel fluido non può essere costante, ma varia secondo l'equazione (1).

→ La forza di volume tende a spostare l'elemento di fluido, determinando una reazione del fluido che si manifesta con una variazione di pressione

→ La pressione aumenterà quindi lungo il verso positivo della direzione della forza, così che la risultante delle forze di pressione è opposta alla forza di volume



$F_1 + F_2 = P$

per cui $F_2 > F_1$, infatti aumentano ↓

x motivi energetici, se la forza di volume agente sul fluido è conservativa, possiamo scrivere, dividendo x la massa

$$\bar{f} = -\bar{\nabla} E_{p,m}$$

$\nabla E_{p,m}$ = gradiente di energia potenziale x unità di massa

In condizioni di equilibrio statico, quindi:

$$\bar{\nabla} p = \rho \bar{f} = -\rho \bar{\nabla} E_{p,m}$$

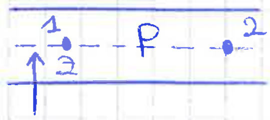
Il gradiente di pressione ha:

- stessa direzione
- verso opposto

} del gradiente di energia potenziale (se $\uparrow \Delta E$, allora $\downarrow \Delta p$)

= Le superfici equipotenziali coincidono con le superfici isobariche!

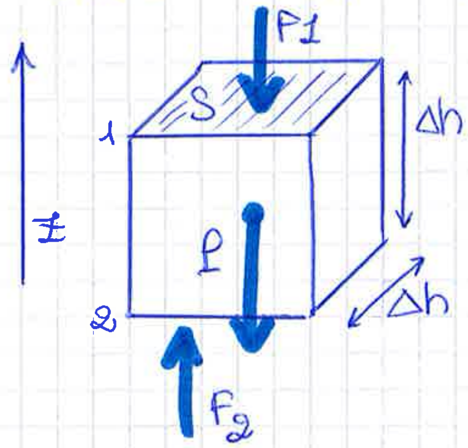
ex: in un condotto orizzontale lungo la linea non varia z, quindi nemmeno p → $p_1 = p_2$...



superfici a stessa altezza possiedono la stessa pressione

DIMO

volume elementare di fluido: cubetto di lato Δh, pesante!



Δh considerato in termini assoluti

$S = (\Delta h)^2$, $F_1 = p_1 S$

$V = (\Delta h)^3$, $F_2 = p_2 S$

$P = \rho g V = mg$

EQ. ↑ $\bar{F_2} = \bar{F_1} + \bar{P}$

$p_2 S = p_1 S + \rho g V$

$p_2 S = p_1 S + \rho g \Delta h S$

$p_2 = p_1 + \rho g \Delta h$

$\Delta p = g \rho \Delta h \longrightarrow \Delta p \propto \Delta h, \rho$

la pressione varia proporzionalmente con la densità e la variazione di quota

se considero l'asse z ↑

$p_2 = p_1 - \rho g (z)$ < la pressione cresce andando verso l'alto, mentre la forza peso no (z variabile)

se considero l'asse z ↓

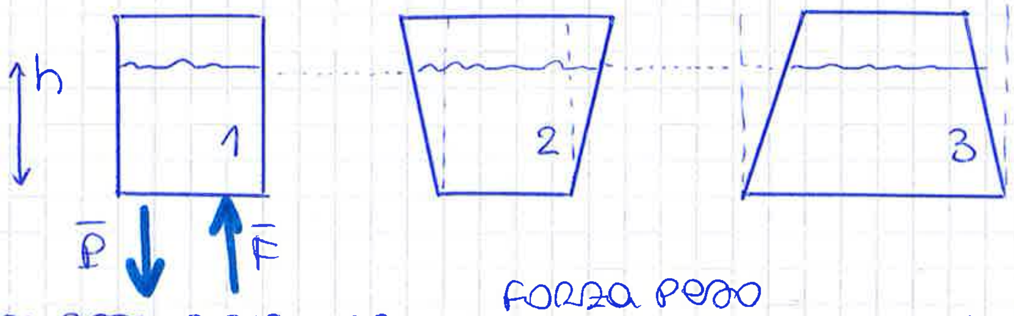
$p_2 = p_1 + \rho g (z)$ — pressione e forza peso hanno verso concorde

PARADOSSO IDROSTATICO

CONSEGUENZA DELLA LEGGE DI STEVINO E DEI VASI COMUNICANTI: LA PRESSIONE DIPENDE SOLO DALLA PROFONDITÀ ALLA QUALE ESSA VIENE MISURATA E NON DALLA FORMA DEL RECIPIENTE CHE CONTIENE IL FLUIDO.

(IN TUBI STRETTI MA SUFFICIENTEMENTE ALTI È POSSIBILE PRODURRE PRESSIONI NOTEVOLI ANCHE CON UNA PICCOLA QUANTITÀ DI LIQUIDO SE L'ALTEZZA DELLA COLONNA LIQUIDA È MOLTO ELEVATA)

SI CONSIDERANO 3 CONTENITORI, DI FORMA DIVERSA, UGUAL BASE, RIEMPITI CON LO STESSO LIQUIDO, FINO ALL'ALTEZZA h.



NEI 3 CONTENITORI VARIA IL PESO MA NON LA PRESSIONE (=h) PERCHÉ?

SU DI ESSI AGISCONO < FORZA PESO / FORZA DI PRESSIONE SUL FONDO

LA PRESSIONE SUL FONDO DI OGNI RECIPIENTE, DOVUTA AL PESO DEL LIQUIDO, SECONDO LA LEGGE DI STEVINO, ASSUME LO STESSO VALORE NEI 3 VASI.

X L'EQ ↑ $\bar{P} = \bar{F}$ ⟶ PARADOSSO!

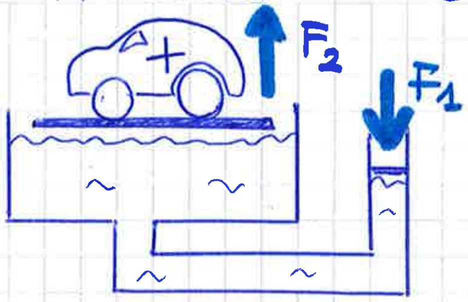
$$mg = pA$$
$$\rho V g = pA$$
$$\rho g A h = pA$$
$$p = \rho g h$$

- LA FORZA SUL FONDO È = AL PESO DEL VOLUME, CHE PERÒ È DIVERSO X I 3 CONTENITORI!
- LA PRESSIONE SUL FONDO È LA STESSA, NONOSTANTE PESI ≠, IN CONSEGUENZA A VOLUMI ≠!

IL PARADOSSO IDROSTATICO CONSISTE IN QUESTO: PUR ESSENDO IL PESO DEL LIQUIDO CONTENUTO NEI VARI RECIPIENTI DIVERSO A SECONDA DEI CASI, LA FORZA ESERCITATA SUL FONDO, IN QUESTE CONDIZIONI, È = X TUTTE 3 I RECIPIENTI E PARI AL PESO DEL LIQUIDO CONTENUTO NELL'①

In un piccolo volume di gas, Δp è $<< p_0$, x cui la pressione nel gas è dunque costante e pari al valore di pressione esterna di cui segue le eventuali variazioni.

EX: elevatore idraulico - moltiplicatore di forza



applicando F1 produco F2:
le pressioni sono uguali x Pascal

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$\rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

essendo $S_2 >> S_1 \rightarrow F_2 >> F_1$

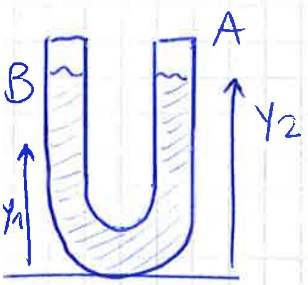
Si riesce ad amplificare la forza applicata, ma il guadagno non è gratis, perché il volume di liquido è costante e si perde in spostamento.

Applicazioni di Stevino e Pascal:

MANOMETRO A U dispositivo x misurare le pressioni e le densità

tubo a forma di U riempito di liquido.
- se le pressioni agenti sulle superfici libere sono le stesse, i peli liberi sono sullo stesso livello x il principio dei vasi comunicanti
- se i 2 rami comunicano con ambienti a ≠ pressioni (ex: $p_1 > p_2$) si produce un dislivello tra le 2 superfici libere dato dalla legge di Stevino.

Da $h = y_2 - y_1$ si ottiene la p di un ambiente rispetto, ad esempio, a quella atmosferica



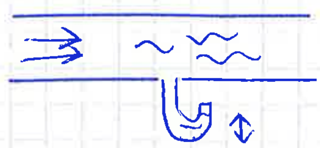
$$P_B + \rho g y_1 = P_A + \rho g y_2$$

$$P_B - P_A = \rho g (y_2 - y_1)$$

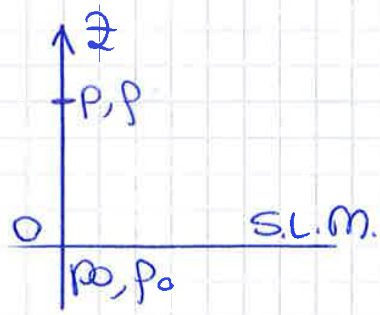
collego il manometro ad un ambiente di cui voglio conoscere p

$$\Delta p = \rho g h_m$$

manometro differenziale in un punto del condotto x conoscere la pressione



$\frac{p}{\rho} = k \rightarrow$ in queste condizioni la densità è proporzionale alla pressione



si considera asse z verticale verso l'alto con origine al livello del mare, dove ci sono p_0 e ρ_0

ad una generica quota z, si hanno p e ρ.

ma $\frac{p}{\rho} = k \rightarrow \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{p\rho_0}{p_0}$

applicando la legge di Stevino, che vale anche x i gas:

$dp = -\rho\, dz\, g$ in termini infinitesimi

$$dp = -\frac{p\rho_0}{p_0}\, g\, dz$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, dz$$

$$\ln p - \ln p_0 = -g\frac{\rho_0}{p_0} z$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -g\frac{\rho_0}{p_0} z$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-g\frac{\rho_0}{p_0} z}$$

nell'atmosfera isoterma, la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza:

$$\boxed{p = p_0\, e^{-g\frac{\rho_0}{p_0} z}}$$

se $\rho = k \rightarrow$ la Δp è lineare!

se $\rho(z) \rightarrow$ la Δp è esponenziale e dipende da ρ (GAS)

RIFACENDO L'EQUILIBRIO SI HA

$S' = S = mg$

EQ? $S = P'$

$mg = m'g$

$m = m'$

$\rho V = \rho' V'$

$\rho = \rho'$ $\rightarrow$ non esatto!

x cui non sussiste più una condizione di equilibrio! $P' \neq S$

in questo caso si ha una risultante:

$$\boxed{R = P' - S = (m' - m) g = (\rho' - \rho) V g}$$

R va nella stessa direzione di S nell'equilibrio

se $\rho' = \rho$: corpo in equilibrio, non si muove!

se $\rho' > \rho$: $R \downarrow$, il corpo affonda $(P' > S)$

se $\rho' < \rho$: $R \uparrow$, il corpo galleggia $(P' < S)$

$\bar{R}$ stessa direzione di $\bar{g}$!

in tutti i casi, il corpo riceve una spinta verso l'alto

$\boxed{F_A = -\rho V g}$ pari al peso del volume di fluido spostato!

F_A è la spinta di archimede: è risultante delle forze esterne applicate al volume dal fluido circostante e si deve ritenere applicata nel centro di massa del fluido spostato!

il corpo che occupa il volume V ha in generale il centro di massa in una posizione $\neq$, x cui oltre alla spinta, $\exists$ un momento risultante

$\downarrow$

EQUAZIONI DI BILANCIO MACRO

DEFINIZIONE DI BILANCI

I BILANCI SONO LA SCRITTURA DI EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DI UN CERTO PARAMETRO FISICO.
SI ESPRIMONO CON LA COSTANZA DI UNA CERTA SOMMA DI PARAMETRI: $\boxed{\sum_i A_i = k}$

3 TIPI DI BILANCIO: $\left\{\begin{array}{l}\text{MASSA} \\ \text{ENERGIA} \\ \text{QUANTITÀ DI MOTO}\end{array}\right.$

I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI DERIVANO DALLA MECCANICA RAZIONALE → CIOÈ SI CONSIDERA IL FLUIDO COME UN CONTINUO, IN UNA SCALA MACROSCOPICA.
QUESTI PRINCIPI SONO ESPRESSI DA RELAZIONI CHIAMATE BILANCI E CHE RIGUARDANO MASSA, ENERGIE E QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA CONSIDERATO.

∃ 2 TIPI DI SISTEMI (ENTRAMBI SÌ TRASPORTO ENERGIA) <
- CHIUSO: NO TRASPORTO MASSA
- APERTO: SÌ TRASPORTO MASSA

LA SCRITTURA DEI BILANCI VARIA SECONDO IL TIPO DI SISTEMA!
NEL SISTEMA APERTO SCHEMATIZZIAMO UN VOLUME DEFINITO, IL VOLUME DI CONTROLLO. (= VOLUME ASSEGNATO NELLO SPAZIO)

BILANCIO DI ENERGIA (MACROSCOPICO)

O CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA, XK L'ENERGIA NON SI CREA E NON SI DISTRUGGE.

$$e = K$$

$$e = \underbrace{e_I}_{\text{ENERGIA INTERNA}} + \underbrace{e_K}_{\text{ENERGIA CINETICA}} + \underbrace{e_P}_{\text{ENERGIA POTENZIALE}} + \underbrace{e_{ALTRE}}_{\text{ALTRE}} = K$$

IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA STABILISCE CHE IL CONTENUTO ENERGETICO DI UN SISTEMA VARIA NEL TEMPO IN FUNZIONE DELL'ENERGIA IN TRANSITO ATTRAVERSO LA SUA SUPERFICIE (POTENZA SCAMBIATA)

CONSIDERO SOLO I SISTEMI APERTI (+ COMPLESSA)

$$\frac{dU_V}{dt} = \sum_i \dot{m}_{IN,i} U_{IN,i} - \sum_J \dot{m}_{OUT,J} U_{OUT,J} + \dot{Q} + \dot{L}$$

- $\dot{Q}$ = POTENZA TERMICA (SCAMBI DI CALORE)
- $\dot{L}$ = POTENZA MECCANICA (LAVORO DELLE FORZE ESTERNE)
- U = CONTENUTO ENERGETICO DELL'UNITÀ DI MASSA
- $\frac{dU_V}{dt}$ = VARIAZIONE DEL CONTENUTO ENERGETICO DELLA MASSA NEL VOLUME DI CONTROLLO IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$U = \underbrace{u}_{\text{ENERGIA INTERNA}} + \underbrace{\frac{1}{2}w^2}_{\text{ENERGIA CINETICA}} + \underbrace{\sum_i \varphi_i}_{\text{SOMMA ENERGIE POTENZIALI}}$$

(ex: GRAVITAZIONALE)

$$U = u + \frac{1}{2}w^2 + gz + \cancel{\sum_i \varphi_{i\,ALTRE}}_{=0}$$

ASSUMIAMO L'ASSENZA DI CAMPI ELETTROMAGNETICI ED ENERGIE CHIMICHE ...

ORA SOSTITUISCO NELL'EQ DI CONSERVAZIONE

$$\frac{dU_V}{dt} = \sum_i \dot{m}_{IN_i}\left(u_{IN} + \frac{1}{2}w^2_{IN} + gz_{IN}\right) - \sum_J \dot{m}_{OUT,J}\left(u_{OUT} + gz_{OUT} + \frac{1}{2}w^2_{OUT}\right) + \dot{Q} + \dot{L}$$

SECONDO IL 2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$ds = \frac{du + p\,dv}{t} \qquad \text{ma } v = k \rightarrow p\,dv = 0$$

$$ds = \frac{du}{t} \qquad \text{INTEGRIAMO}$$

$$\int_1^2 ds\,t = \int_1^2 du$$

CALORE

LAVORO DELLE RESISTENZE PASSIVE CHE ESPRIMELE DISSIPAZIONI

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 t\,ds = Q_{12} + L_{w12}$$

CALORE E DISSIPAZIONI FANNO VARIARE L'ENTROPIA DEL SISTEMA

$$Q_{12} = u_2 - u_1 - L_{w12}$$

SOSTITUISCO E SEMPLIFICO:

$$(\cancel{u_1} + gz_1 + p_1 v + \tfrac{1}{2}w_1^2) - (\cancel{u_2} + gz_2 + p_2 v + \tfrac{1}{2}w_2^2) + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} - L_{w_{12}} + L_{M12} = 0$$

ASSUMIAMO $L_{M_{12}} = 0$ NO ORGANI MECCANICI IN MOVIMENTO

$$gz_1 + p_1 v + \tfrac{1}{2}w_1^2 - (gz_2 + p_2 v + \tfrac{1}{2}w_2^2) - L_{w_{12}} = 0$$

MOLTIPLICO $\times \rho$

$$p_1 + \rho g z_1 + \tfrac{1}{2}\rho w_1^2 - p_2 - \rho g z_2 - \tfrac{1}{2}\rho w_2^2 - \rho L_{w_{12}} = 0$$

$$-\Delta p_R$$

DIMENSIONALMENTE È DIVENTATO UNA PRESSIONE

R = RESISTENZE

$$(p_2 - p_1) + (\tfrac{1}{2}\rho w_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho w_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + \Delta p_R = 0$$

$$(p_2 - p_1) + \tfrac{1}{2}\rho (w_2^2 - w_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + \Delta p_R = 0$$

ASSUMIAMO DI ESSERE IN ASSENZA DI DISSIPAZIONI

$\Delta p_R = 0$! OVVERO SIAMO IN CONDIZIONI IDEALI

(DI SOLITO $\Delta p_R \geq 0$: È LA PERDITA DI CARICO)

ESEMPIO 1: VALUTAZIONE DEI GRADIENTI DI PRESSIONE IN AMBITO CARDIOVASCOLARE

$$\Delta p = \rho g \cancel{(z_2 - z_1)} + \frac{1}{2}\rho \cancel{(w_2^2} - w_1^2)$$

ASSUNZIONI →
- TRASCURABILE $z_2 = z_1$
- $w_2 = 0$ VELOCITÀ TERMINALE NULLA

$w_{CAPILLARI} << w_{ARTERIA}$

$w_2 << w_1$ → MISURABILE CON ECODOPPLER

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho w_1^2$$

- DENSITÀ DEL SANGUE $\rho = 1060 \ \frac{kg}{m^3}$

- $\Delta p = 530\, w_1^2$ [Pa]
- $\Delta p = \frac{530}{133{,}22} w_1^2 \cong 4 w_1^2$ [mmHg]

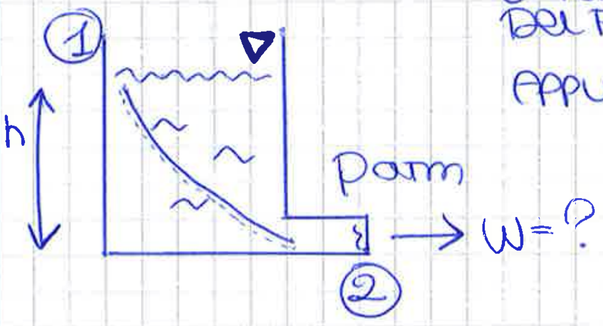
OTTENGO LA CADUTA DI PRESSIONE TRA IL PUNTO DI MISURA DI w_1 E I CAPILLARI

SOLITAMENTE $w_1 = 1$ m/s IN AORTA

→ $\Delta p = 4$ mmHg VEROSIMILE!!

ESEMPIO 2: SERBATOIO

DETERMINARE LA VELOCITÀ DI USCITA DEL FLUIDO



APPLICO BERNOULLI

SCELGO 1 – 2

1: PELO LIBERO
$p_1 = p_{atm}$
$w = w_1$
$z_1 = h$

2: → USCITA
- CERCO INCOGNITA
- HO MOLTE VARIABILI DATE

$p_2 = p_{atm}$ $w_2 = ?$
$z_2 = 0$

$$\cancel{p_2} - \cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho(w_2^2 - w_1^2) + g\rho\underbrace{(z_2 - z_1)}_{}^{(0-h)} = 0$$

$(p_{atm} - p_{atm})$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho}(w_2^2 - w_1^2) - g\cancel{\rho}h = 0$$

$$\frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2) - gh = 0$$

CIRCUITI IDRAULICI

Come si applica l'eq. di Bernoulli a casi reali:
ad esempio x dimensionare un circuito:
(scritta in termini di energie)

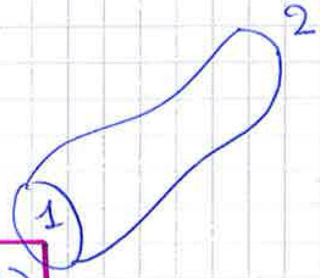
$$\frac{p_1-p_2}{\rho}+g(z_1-z_2)+\frac{1}{2}(w_1^2-w_2^2)+L_m-L_w=0$$

solo ipotesi ① e ② $\left[\frac{J}{kg}\right]$

L_m ↓ lavoro meccanico; L_w ↓ dissipazioni

Trascuriamo per il momento L_w ($L_w=0$)

EQ → energia necessaria x un fluido x passare da stato 1 a stato 2 = L_m



ex: pompa che ci fornisca la potenza ricavata dall'equazione
↓

$$\boxed{L_m=\frac{p_2-p_1}{\rho}+g(z_2-z_1)+\frac{1}{2}(w_2^2-w_1^2)}$$

si parla di **PREVALENZA** = gH [N]
= incremento di energia meccanica che subisce il fluido per kg di massa nell'attraversare la macchina = rappresenta il lavoro ideale scambiato tra fluido e macchina
↓
in genere è una specifica delle pompe

si esprime anche il **SALTO H** in [m]

$$\boxed{H=\frac{p_2-p_1}{\rho g}+(z_2-z_1)+\frac{1}{2g}(w_2^2-w_1^2)}$$

Δp_f tiene conto di tutti i tipi di perdite ← attrito, dissipazione negli angoli...

$$H = \cancel{\frac{p_2 - p_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{1}{2g}\left(w_2^2 - w_1^2\right)} + (z_2 - z_1) + \Delta p_f$$

$p_{atm} = p_1 = p_2$ dei pelI liberi — la variazione di quota tra il ∇ dei 2 bacini è tale da non indurre variazioni nella p_{atm}

se i serbatoi sono uguali $d_1 = d_2$ — la velocità con cui variano i peli sia trascurabile

salto geodetico: differenza di quota tra i 2 ∇

espresso sempre in metri = perdite di carico

Le perdite che il fluido subisce nell'attraversamento dell'impianto (non nella macchina) sono di 2 tipi:

- **perdite distribuite**

Derivano dall'attrito che il fluido esercita sulla parete del condotto

$$\boxed{\Delta p_{f_{distr}} = \lambda \frac{w^2 L}{2g D}} \quad [m]$$

λ = coeff. di attrito $= f(Re, \varepsilon/D)$

Re = numero di Reynolds

ε/D = scabrezza relativa, rapporto tra rugosità ε e diametro D

Formula x tubazioni circolari!

Qst perdite dipendono dalle modalità con le quali avviene il movimento del fluido, cioè da:

- caratt. fisiche del fluido
- superficie di contorno
- velocità del fluido

- **perdite concentrate**

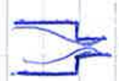
$$\boxed{\Delta p_{f_{conc}} = \sum \xi \frac{w^2}{2g}} \quad [m]$$

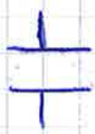
Formula dimostrata sperimentalmente

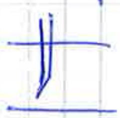
ξ = coeff. di resistenza localizzata

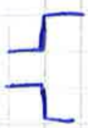
Le perdite concentrate sono espresse in funzione della quota cinetica e sono dovute alla presenza di curve, gomiti, strozzature

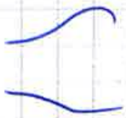
ex: brusco restringimento

D_1  D_2

tubo addizione interno 

saracinesca 

→ brusco allargamento 

divergente 

x Re alti, non esiste un legame analitico che permette il calcolo di λ: tutte le informazioni disponibili sono di origine sperimentale e sono raccolte in forma grafica nell' **Abaco di Moody**, che fornisce λ in funzione di Re e della scabrezza relativa $\varepsilon/D \rightarrow \lambda = (Re, \varepsilon/D)$

L'abaco funziona x qualsiasi regime di flusso! ma x il regime laminare meglio usare la formula

Comunque, per Re alti, la dipendenza delle perdite
- da Re, è trascurabile, mentre
- dalla scabrezza relativa invece no

↓ fondamentale! ci serve λ x calcolare le perdite distribuite

ABACO DI MOODY

serve x determinare λ < Re in ascissa; $\frac{\varepsilon}{D}$ = scabrezza relativa curve

trovo Re in ascissa (ex. Re $5 \cdot 10^6$)

trovo la mia curva sul grafico (ex. 0,01)

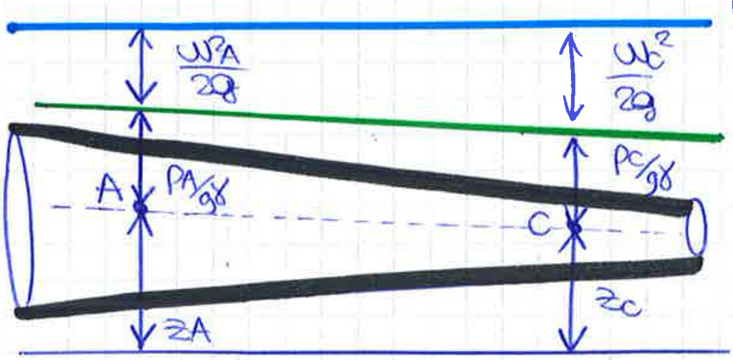
trovo l'intersezione tra le 2 curve
↓
sull'ordinata trovo λ

Qst grafico vale solo x Re alti!! sicuramente non x il moto laminare!

Linea dei CARICHI TOTALI (LCT)

PER L'EQUAZIONE DI BERNOULLI, LUNGO UN CONDOTTO, LA Σ DEI TERMINI DELLA 3 PRESSIONI DEVE ESSERE COSTANTE

→ LINEA ORIZZONTALE DEI CARICHI TOTALI



LCT = Σ PRESSIONI = BERNOULLI IDEALE

LP = Σ P. STATICA e GEODETICA

TUBO $P_A > P_C$

$z = 0$

LA LINEA PIEZOMETRICA INVECE NON TIENE CONTO DEI TERMINI DI PRESSIONE CINETICA, PER CUI

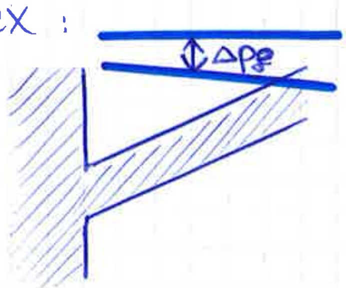
$$LCT - LP = \frac{w^2}{2g} = \text{altezza cinetica}$$

ANDANDO VERSO DX → ABBIAMO CHE $\downarrow z$, $\downarrow$ P. STATICA, $\uparrow$ P. CINETICA
POICHÉ IL MOTO AVVIENE SECONDO GRADIENTE
e $P_A > P_C$

⚠ LA LINEA PIEZOMETRICA NON SI PUÒ TRACCIARE ...... IN PRESENZA DI IMBOCCHI / STRIZIONI... XK QUI NON È LECITA L'IPOTESI DI CORRENTI LINEARI!

⚠ LA DIFFERENZA TRA LA LCT IDEALE E LA LCT REALE SONO LE PERDITE DI CARICO

ex:

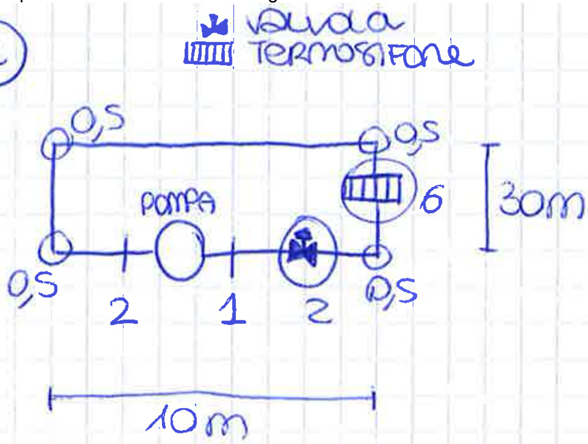


LCT IDEALE

LCT REALE!
SCENDE X CI SONO DELLE PERDITE DISTRIBUITE LUNGO IL TUBO!

⚠ UNA POMPA FA FARE UN SALTO DI ENERGIA PARI A ΔH ALLA LCT REALE.

EX (2)



$\omega = 0{,}75\ m/s$

$\varepsilon = 10\ \mu m$

$\dot{m} = 0{,}06\ kg/s$

$\rho = 979\ kg/m^3$

$\mu = 0{,}000434\ Pa\,s$

ξ SUL DISEGNO

$D = ?$
$gH = ?$
$P_R = ?$

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{0{,}06}{979} = 6{,}13 \cdot 10^{-5}\ m^3/s$$

$$\omega = \frac{\dot{V}}{A} \rightarrow A = \frac{\dot{V}}{\omega} = 8{,}1716 \cdot 10^{-5}\ m^2$$

$$A = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0{,}01\ m = 10mm$$

$L = 80\ m$

BERNOULLI (12)

$$H = (\cancel{z_2 - z_1}) + \left(\frac{\cancel{p_2 - p_1}}{\rho g}\right) + \frac{1}{2g}(\cancel{\omega_2^2 - \omega_1^2}) + \Delta p_f$$

$p_1 = p_2$
$z_1 = z_2$
$\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$H = \frac{\omega^2}{2g}\left(\Sigma_i \xi_i + \lambda \frac{L}{D}\right)$$

$$Re = \frac{\rho \omega D}{\mu} = \frac{979 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}01}{0{,}000434}$$

$$Re \cong 17 \cdot 10^3, \quad \frac{\varepsilon}{D} = 10^{-3}$$ MOODY

$\lambda = 0{,}029$ REGIME DI MOTO TURBOLENTO

$$H = \frac{(0{,}75)^2}{2 \cdot 9{,}81}\left(10 + \frac{80}{0{,}01} 0{,}029\right)$$

$H = 6{,}938m$ $\quad gH = 68{,}0625\ J$ $\quad P_R = 4{,}08375\ W$ POTENZA REALE

PREVALENZA = DISSIPAZIONI

La misura di pressione si effettua tramite un manometro differenziale applicato alle estremità dei 2 tubi concentrici.

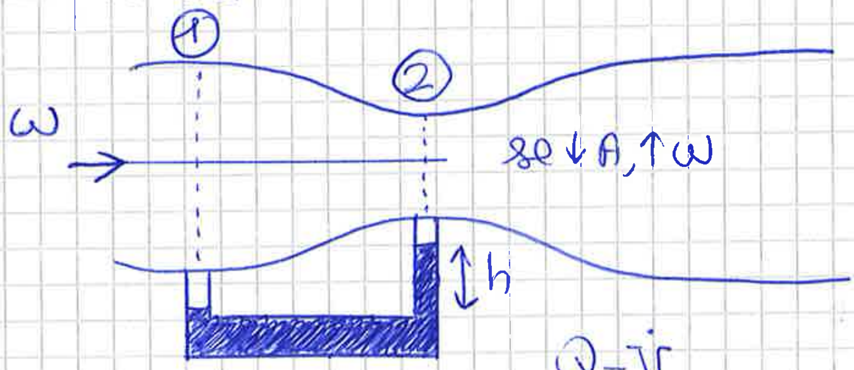
$$(p_1 - p_2) = \rho_m g h$$

- Le approssimazioni effettuate portano comunque a misurazioni rozze.
- Il tubo deve essere allineato perfettamente con la direzione della corrente per rendere effettivamente il punto 2 di ristagno, per cui $w_2 = 0$, in caso contrario si misura una velocità minore di quella reale di w_1
- x sst problema si fanno più misure con ≠ tubi e si prende quella dove $(p_1 - p_2)$ è maggiore
- oppure si mette 2 dietro al tubo!

- nel video, Δp si misura grazie ad un diaframma, che separa le 2 camere del tubo e si muove → può misurare la velocità in tutte e 2 le direzioni

• Tubo di Venturi

= dispositivo che permette di misurare una portata, il cui principio di funzionamento è basato sull'eq. di Bernoulli



x la conservazione della massa e della portata

$$Q_1 = Q_2$$

$$w_1 A_1 = w_2 A_2$$

essendo $A_2 < A_1$ a causa della strizione, $w_2 > w_1$ si ha un accelerazione del flusso!!

sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho w_2^2 + \cancel{\rho g h_2} + p_2 = \frac{1}{2}\rho w_1^2 + \cancel{\rho g h_1} + p_1 \\ A_1 w_1 = A_2 w_2 \rightarrow w = Q/A \end{cases}$$

→ xe 1 e 2 sono alla stessa quota

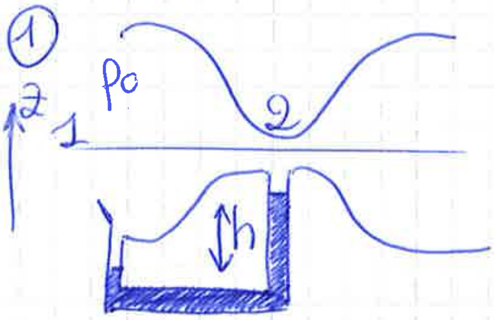
allora:

$$\frac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{A_2^2} + p_2 = \frac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{A_1^2} + p_1$$

Dall'eq. di Bernoulli segue che deve prodursi una differenza di pressione $p_1 - p_2$ x compensare la variazione di velocità!

ESERCIZI:

1



$\dot{m} = ?$

$\rho = \rho_0 = 800\ kg/m^3$ $\quad \rho_M = \rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$

$A_1 = 0{,}8\,m^2$

$A_2 = 0{,}6\,m^2$

$h = 0{,}04\,m$

$$Q_1 = Q_2 = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 = \dot{V} \rightarrow \dot{m} = \dot{V}\rho_0$$

EQ. BERNOULLI

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\omega_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\omega_2^2 + \rho g z_2$$

$$(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}\rho(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \cancel{\rho g (z_1 - z_2)} = 0$$

TRATTO ORIZZONTALE

$= \rho_M g h$ MISURA DEL MANOMETRO DIFFERENZIALE

$$\rho_M g h + \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\dot{V}_1}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{\dot{V}_2}{A_2}\right)^2\right) = 0 \qquad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}$$

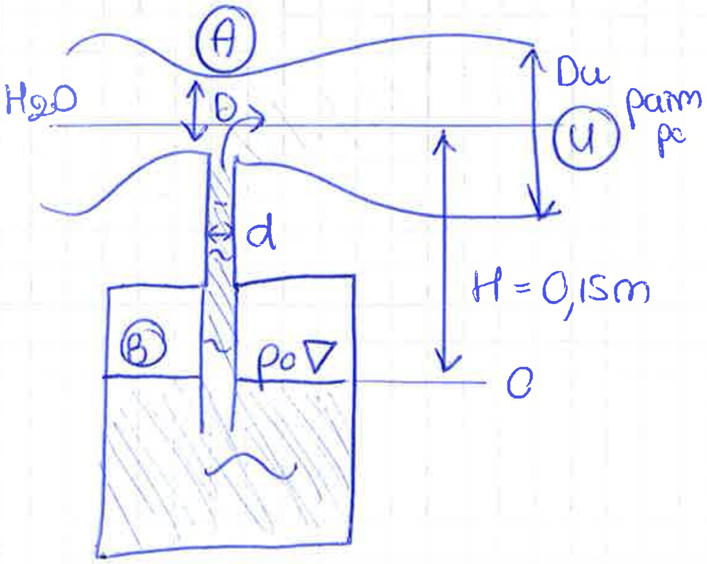
$$\rho_M g h + \frac{1}{2}\rho \dot{V}^2\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) = 0$$

$$\dot{V}^2 = \frac{-\rho_M g h 2}{\rho\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)} = \frac{2\rho_M g h}{\rho\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)}$$

$$\dot{V} = A_2\sqrt{\frac{2\rho_M g h}{\rho_0\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}} = 0{,}898\ m^3/s$$

$$\dot{m} = \dot{V}\rho_0 = 718{,}76\ kg/s$$

④ INSETTICIDA



$d = 0{,}0004\ m$

$D_u = 0{,}0025\ m$

$D = ?$

$p_{(A)} = ?$

A = ACQUA
I = INSETTICIDA

$\rho_A = \rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3 = \rho$

$Q_A = 4\ l/min$

$Q_i = 75\ ml/min = 0{,}075\ l/min$

BERNOULLI AB

$p_B = p_0 = 0$ è il nostro riferimento

velocità di abbassamento del pelo libero del serbatoio di insetticida trascurabile

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{w_{AI}^2}{2} + gH = \cancel{\frac{p_B}{\rho}} + \cancel{\frac{w_B^2}{2}} + \cancel{g \cdot 0}$$

$$p_A = -\rho_A g H - \frac{1}{2}\rho_A w_{AI}^2 \qquad w_{AI} = ?$$

$$Q_I = w_{AI} A_{AI} = w_{AI}\, \pi \frac{d^2}{4}$$

$$w_{AI} = \frac{4 Q_I}{\pi d^2} = 9{,}95\ m/s$$

$$p_A = -50\,972\ Pa$$

$1l = 1dm^3$
$1min = 60\,s$
$1l = 1dm^3 = 0{,}001\ m^3$

$$\begin{cases} Q_A = 4 \cdot \dfrac{0{,}001}{60}\ \dfrac{m^3}{s} \\ Q_I = 0{,}075 \cdot \dfrac{0{,}001}{60}\ \dfrac{m^3}{s} \end{cases}$$

$p_A < 0$, vuol dire che è una pressione minore rispetto al riferimento p_0
GIUSTO! xké l'insetticida deve risalire verso A

BERNOULLI (AU)

$$Q_u = w_u \pi \frac{D_u^2}{4} = w_u A_u = \boxed{Q_I + Q_A}$$

$$w_u = \frac{4(Q_I + Q_A)}{\pi D_u^2} = 13{,}8\ m/s$$

$p_u = p_0 = 0$

$$\frac{p_A}{\rho_A} + \frac{w_{AA}^2}{2} = \cancel{\frac{p_u}{\rho}} + \frac{w_u^2}{2} \qquad w_{AA} = \sqrt{2\left(\frac{w_u^2}{2} - \frac{p_A}{\rho_A}\right)} = 17\ m/s$$

$$Q_A = w_{AA} \pi \frac{D^2}{4} \rightarrow D = 2{,}23\ mm$$

ALTE VELOCITÀ DI CONVEZIONE VOGLIONO DIRE UN SISTEMA DI TRASPORTO MOLTO EFFICIENTE! → (APPARATI)
MENTRE I TEMPI DI DIFFUSIONE SONO DEI GIORNI!
PICCOLISSIMI TEMPI DI DIFFUSIONE VOGLIONO DIRE UN SISTEMA DI TRASPORTO MOLTO EFFICIENTE! → (STRUTTURE SUBCELLULARI e CELLULE)
A DIMENSIONI DI 300/500 μm, ABBIAMO L'UGUAGLIANZA TRA LE VELOCITÀ DI DIFFUSIONE E DI CONVEZIONE ($V_D = V_C$)

ex O_2: PRIMA CIRCOLA NEL SANGUE POI DIFFONDE NEI TESSUTI (CONV + DIFF.)

CONVEZIONE E DIFFUSIONE SONO I 2 FENOMENI DI TRASPORTO PRINCIPALI x I SISTEMI BIOLOGICI CHE SI FANNO CARICO DI MANTENERE L'OMEOSTASI (= CONDIZIONI OTTIMALI x LA SOPRAVVIVENZA DELLE CELLULE). CIASCUN MECCANISMO AGISCE x LA SUA PARTE DI COMPETENZA: LADDOVE LE DIMENSIONI DELLE PORZIONI BIOLOGICHE SONO GRANDI (> 500 μm) ABBIAMO CONVEZIONE (MIGLIOR EFFICIENZA);
LADDOVE LE DIMENSIONI DI INTERESSE RIGUARDANO INSIEMI DI CELLULE (< 500 μm) ABBIAMO DIFFUSIONE.
GROSSOLANAMENTE LO STRATO PERFUSO x DIFFUSIONE È DI CIRCA 100 μm!

GLI **APPROCCI** x LO STUDIO DEI FENOMENI FISICI SONO DI 3 TIPI:

- METODO SPERIMENTALE (a)
- METODO TEORICO (b)
- METODO NUMERICO (c)

OGNUNO PRESENTA VANTAGGI E SVANTAGGI

a. SI RIPRODUCE SPERIMENTALMENTE IL FENOMENO E LO SI STUDIA
+ REALISTICO
− ELEVATI COSTI − DIFFICOLTÀ DI MISURA − NON SEMPRE PRATICABILE
− RICHIEDE DISPOSITIVI E STRUMENTAZIONE
MENO UTILIZZATO XK NON È MOLTO REALISTICO x LO STUDIO DI SISTEMI BIOLOGICI

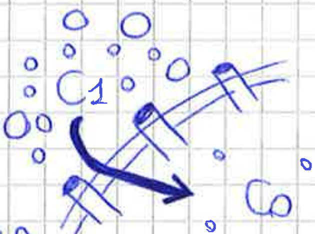
Lo studio dei fenomeni di trasporto è un problema di scala! (xk variano da scala a scala)

↓ (↑↑) convezione ↓ (↓↓) diffusione

Definiamo il concetto di **continuo**:

La materia è x sua natura discreta; l'approccio del continuo la tratta come se fosse definita uniformemente nello spazio (sopra la scala molecolare).

Ex: membrana cellulare



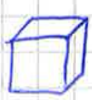
canali che permettono il passaggio di molecole grazie al gradiente di concentrazione ed alla dimensione delle molecole stesse ed alla loro carica
= tutte queste caratteristiche riguardanti il passaggio possono essere raccolte in un numero unico: la permeabilità K
senza tener conto di tutti i fenomeni che avvengono a livello molecolare, ma abbiamo una media statistica di quello che succede

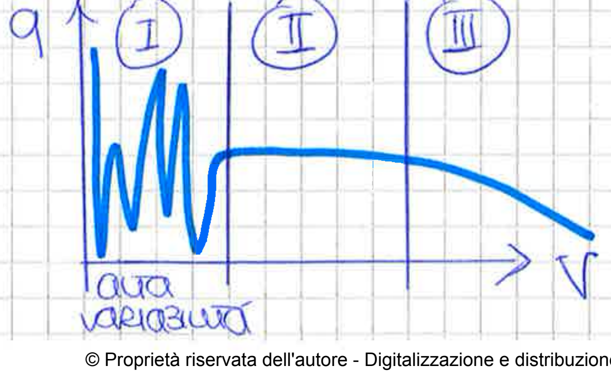
Le equazioni a livello dei continui descrivono quindi proprietà medie, rispetto a ciò che avviene a livello molecolare.

I comportamenti fisici ad alta scala sono derivati e spiegati con i livelli più bassi.

I bilanci che affronteremo sono interpretabili come equazioni descrittive dei continui, ma sono derivati da equazioni a livello molecolare

Come varia q in funzione del volume: q = qualunque grandezza
ex: densità
ex: volume pieno di gas





I V piccolo, q molto variabile (si prendono poche molecole)

II ↑V, q si stabilizza (si prende una media sufficientemente rappresentativa di q)

IMPO XK TUTTE LE EQUAZIONI DI BILANCIO SONO VETTORIALI E SI POSSONO SCRIVERE IN PIÙ COMPONENTI SCALARI UTILIZZANDO QUESTI SISTEMI DI RIFERIMENTO, CIOÈ IN UN SISTEMA DI 3 EQUAZIONI SCALARI CHE RAPPRESENTANO LE PROIEZIONI DELL'EQUAZIONE VETTORIALE SU 3 ASSI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO.

$c = c(x,y,z,t)$

BISOGNA DEFINIRE ANCHE COME CI SI RELAZIONA ALLA VARIABILE DEL TEMPO t ED $\exists$ 2 **APPROCCI**:

- EULERIANO (ponte): CONSIDERIAMO UN PUNTO FISSO DELLO SPAZIO E VEDIAMO COSA SUCCEDE IN QUEL PUNTO NEL CORSO DEL TEMPO
- LAGRANGIANO (barca): CONSIDERIAMO UNA MASSA E SEGUIAMO LA SUA EVOLUZIONE NEL CORSO DEL TEMPO

GENERICA GRANDEZZA C IN FUNZIONE DELLO SPAZIO E DEL TEMPO: $C = C(x,y,z,t)$

E $\quad C \rightarrow \dfrac{\partial c}{\partial t}$ VARIAZIONE SOLO NEL TEMPO, SPAZIO FISSO = DERIVATA (PARZIALE) EULERIANA

L $\quad C \rightarrow \dfrac{Dc}{Dt} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial c}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial c}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial c}{\partial z}$ = DERIVATA LAGRANGIANA O SOSTANZIALE

v_y → VELOCITÀ DELLA PORZIONE DI MATERIA CHE SI SEGUE

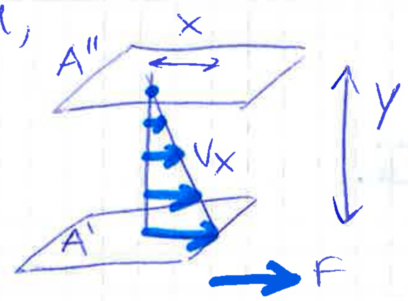
PIÙ GENERICA

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

La viscosità è la difficoltà di uno strato di fluido reale a scorrere con una velocità ≠ dallo strato di liquido adiacente (μ)

(se ↑, si trasmette poco la velocità da uno strato all'altro)

implica quindi che sia presente uno scambio di forze tra gli strati adiacenti → F/A forze tangenziali rappresentate con τ e detti sforzi viscosi, e sono $\propto$ a μ.



La legge di Newton in termini infinitesimi:

$$\frac{dv_x}{dy} = \lim_{[y\in A'' - y \in A'] \to 0} \frac{\overbrace{V_x(y\in A'')}^{\text{piastra immobile}} - V_x(y \in A')}{y \in A'' - y \in A'} =$$

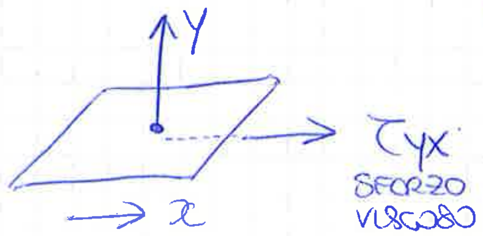
considero le 2 piastre infinitamente vicine

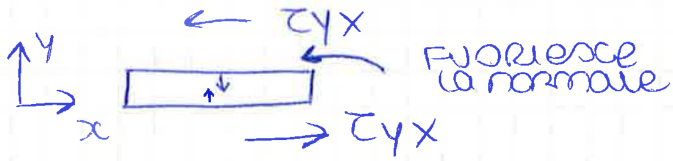
$$= \frac{0 - V_x}{\Delta y} = -\frac{V_x}{\Delta y} \quad \text{quindi} \quad \boxed{\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}}$$

Legge di Newton della viscosità

direzione di v, cioè di τ

normale alla superficie su cui agisce τ, identifica la superficie





quando y entra, τ opposta x, quindi $\tau < 0$

quando y esce, τ concorde x, quindi $\tau > 0$ = positiva se è applicata alla faccia opposta da cui esce la normale

S.I. $\tau = [Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right]$ C.G.S. $\tau = \left[\frac{dyn}{cm^2}\right]$

$\frac{dv}{dy} = \left[\frac{1}{s}\right]$ $\frac{dv}{dy} = \left[\frac{1}{s}\right]$

$\mu = \left[\frac{N}{m^2} s\right] = [Pa \cdot s]$ $\mu = \left[\frac{g}{cm\,s}\right] = [poise]$ → meglio $cP = 0{,}01\ P$

a livello dei contatti non si osserva la migrazione delle molecole, x cui $V=0$!

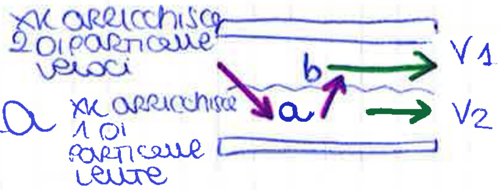
τ_{yx} = flusso viscoso della componente x della q. di moto nella direzione y

Il flusso viscoso è dovuto al trasporto molecolare.

alcune particelle passano tra gli strati:

a) • da veloce a lento → accelera

b) • da lento a veloce → decelera



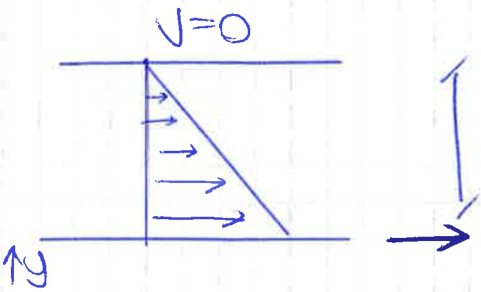
Un'altra grandezza è la **viscosità cinematica**

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \quad \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

rapporto tra viscosità e densità

Esempio del calcolo di flusso di q. di moto:

2 piastre // come nell'esperimento di Newton



$V = 0{,}3\ m/s$

$\Delta y = 0{,}3\ mm$

$\mu = 0{,}7\ cP = 0{,}7 \cdot 10^{-2}\ P = 0{,}7 \cdot 10^{-2}\ \frac{g}{cm\,s}$

$\mu = 0{,}0007\ Pa\,s$

divido per 1000

divido x 10

essendo un profilo lineare:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{0{,}3\ m/s}{0{,}0003\ m} = 1000\ s^{-1}$$

$\Delta p = 0$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = 0{,}0007 \cdot 1000\ Pa = 0{,}7\ Pa$$

τ_{yx} flusso di q. di moto x unità di superficie

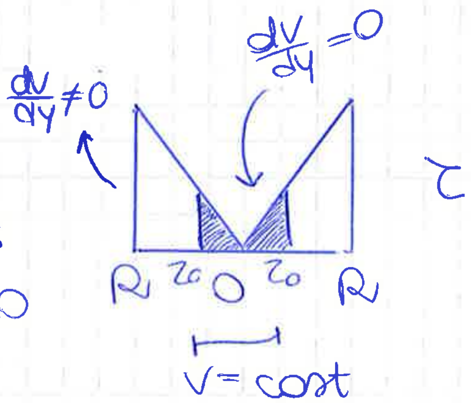
$$P = \rho \pi R^2 L g = \rho g V$$

$$F = \tau A = \tau \, 2\pi R L$$ AREA SU CUI AGISCE τ

EQUILIBRIO $F = P$

$$\rho R g = \tau 2$$

$$\tau = \frac{\rho R g}{2} = \rho g \frac{R}{2}$$



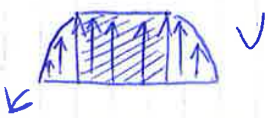
QUINDI $\tau \propto R$ RAGGIO DEL CILINDRO!

MA X IL FLUIDO ALLA BINGHAM ABBIAMO MOTO SOLO SE $\tau > \tau_0$.

QUINDI V = cost XK $\frac{dv}{dy} = 0$

$\frac{dv}{dy}$ CRESCE LINEARMENTE CON LA r

LA V HA UN PROFILO PARABOLICO



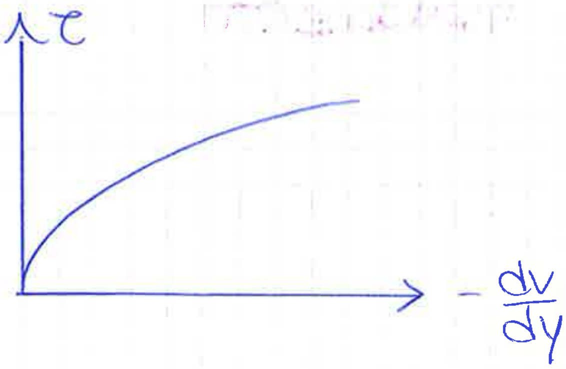
FORMA DELL'USCITA DEL FLUIDO DA UN TUBETTO

FLUIDI PSEUDOPLASTICI ($n < 1$) (SHEAR THINNING) SCORREVOLE

$$\tau_{yx} = -\mu \left| \frac{dv}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv}{dy}$$

SE $\uparrow \frac{dv}{dy} \rightarrow \downarrow \mu$ LA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE REGOLA LA VISCOSITÀ DEL FLUIDO

KETCHUP, SANGUE, VERNICI



BILANCI di STRATO

BILANCIO DI QUANTITÀ di MOTO

QUANTITÀ DI MOTO $\boxed{\bar{q} = m\bar{v}}$

se $m = \text{cost}$, possiamo riscrivere la II legge di Newton in termini di Q. di moto:

II legge di Newton $\boxed{\bar{F} = \bar{a}m = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt}}$ (se $m = \text{cost}$)

La forza è uguale alla variazione nel tempo della quantità di moto cioè al flusso di Q di moto.

In un sistema aperto:

$$\left\{\begin{matrix}\text{velocità di}\\ \text{accumulo di}\\ \text{Q. di m}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{V di ingresso}\\ \text{di Q di m}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{V uscita}\\ \text{di Q di m}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma\text{ forze}\\ \text{esterne}\\ \text{agenti}\end{matrix}\right\}$$

forze di superficie (pressioni)

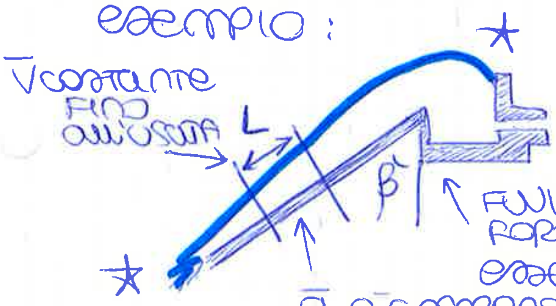
forze di volume (peso)

Ipotizzo un regime stazionario, cioè non vi sono variazioni del patrimonio della Q di moto all'interno del volume di controllo:

$$\left\{\begin{matrix}\text{flusso di Q di m}\\ \text{entrante}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{flusso di Q di m}\\ \text{uscente}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma\text{ forze}\\ \text{esterne}\end{matrix}\right\} = 0$$

Sfruttando la II legge della dinamica, il bilancio di Q. di moto può essere espresso come bilancio di forze = **approccio meccanico**:

esempio:



* perturbazioni di entrata e di uscita

fluido accelerato da $\bar{g}$ forza di gravità

essendo $\downarrow V$, l'attrito è basso

$\bar{g}$ è compensata dalle forze di attrito, x cui $\bar{V} = \text{cost}$

SOMMANDO I TERMINI:

$$W\cancel{\Delta x}\rho V_z^2\Big|_{z=0} - W\cancel{\Delta x}\rho V_z^2\Big|_{z=L} + \tau_{xz}\Big|_x LW - \tau_{xz}\Big|_{x+\Delta x} LW +$$

$$+ LW\Delta x\,\rho g\cos\beta = 0$$

siccome:

$V_0 = V_L = \cos t$
x il nostro tipo di analisi!

$$\cancel{LW}\left(\tau_{xz}\Big|_x - \tau_{xz}\Big|_{x+\Delta x} + \Delta x\,\rho g\cos\beta\right) = 0$$

$$\frac{\tau_{xz}\big|_x - \tau_{xz}\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g\cos\beta = 0$$

$$\rho g\cos\beta = \frac{\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_x}{\Delta x}$$

$$\cancel{\lim_{\Delta x \to 0}}(\rho g\cos\beta) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_x}{\Delta x}\right]$$

non compare Δx

definizione di derivata

$$\rho g\cos\beta = \frac{d(\tau_{xz})}{dx}$$

equazione differenziale x il flusso di quantità di moto per τ

$\int dx$: integriamo in dx:

$$\tau_{xz} = \rho g x\cos\beta + C_1$$

per trovare C_1 servono delle condizioni al contorno:

★ se $x=0$, $\tau_{xz}=0$ — non abbiamo flusso di q.di moto tra aria e H_2O, il liquido non accelera l'aria $\tau_{xz}(x=0)=0$

quindi

$$0 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

quindi $\boxed{\tau_{xz} = \rho g x\cos\beta}$

$$V_{max} = V_z(x=0) = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 \cos\beta$$ velocità massima

$$\bar{V_z} = \frac{\iint V_z \, dx dy}{\iint dx dy}$$ integro velocità lungo una sezione
dy: W - 0
dx: δ - 0

velocità media

$$\bar{V_z} = \frac{\int_0^W \int_0^\delta V_z \, dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{\cancel{W} \int_0^\delta V_z dx}{\cancel{W}\delta} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta V_z dx$$

$$\bar{V_z} = \frac{1}{\cancel{\delta}}\frac{\rho g}{2\mu}\delta^{\cancel{2}}\cos\beta \left[x - \frac{1}{3\delta^2}x^3\right]_0^\delta$$

$$\bar{V_z} = \frac{\rho g}{2\mu}\delta \cos\beta \frac{2}{3}\delta = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2\cos\beta$$

$\dot{V} = \bar{V_z} A$
$A = \delta W$

$$\dot{V} = \left(\int_0^W \int_0^\delta V_z \, dx dy\right) A = Q$$

$$\dot{V} = \bar{V_z} A = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^3 \cos\beta \, W$$ portata volumica

$$\dot{M} = \rho \dot{V} = \frac{\rho^2 g}{3\mu}\delta^3 \cos\beta$$ portata massica

Resume':

Il bilancio di moto così trovato è stato scritto secondo un **approccio meccanico**

- bilancio di moto x uno strato finito = bilancio di forze
  - flussi Q di moto
  - flussi di qm convettivi
  - forze esterne (peso)
- ponendo $\lim_{\Delta x \to 0}$ otteniamo
- equazione differenziale del flusso di Q di moto τ
- integriamo $\int dx$ + BC
- profilo delle τ
- introduciamo l'eq. costitutiva $\left(\text{ex } \tau = -\mu \frac{dV_z}{dx} \text{ x newtoniano}\right)$
- equazione differenziale delle velocità

$\rho v_y|_y \, dx\,dz \quad , \; -\rho v_y|_{y+\Delta y} \, dx\,dz$ PORTATE ENTRANTE IN y E USCENTE IN y+Δy

$\rho v_z|_z \, dx\,dy \quad , \; -\rho v_z|_{z+\Delta z} \, dx\,dy$ PORTATE ENTRANTE IN z E USCENTE IN z+Δz

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE:

$$dx\,dy\,dz \frac{\partial\rho}{\partial t} = dy\,dz\left(\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}\right) + dx\,dz\left(\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}\right) + dx\,dy\left(\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}\right)$$

DIVIDO x IL dV

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}}{dx} + \frac{\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}}{dy} + \frac{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}}{dz}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \lim_{\Delta x \to 0}(\text{''}) + \lim_{\Delta y \to 0}(\text{''}) + \lim_{\Delta z \to 0}(\text{''})$$

FACCIO IL LIMITE $\Delta V \to 0$, $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

($\frac{\partial\rho}{\partial t}$ non varia)

DERIVATA DEL PRODOTTO DI 2 FUNZIONI

$$d(fg) = df \cdot g + f\,dg$$

$$\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial\rho}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial\rho}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial\rho}{\partial z}} + \rho\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho\frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

IPOTESI DI INCOMPRIMIBILITÀ, $\rho = \text{kost}$, $\partial\rho = 0$

RACCOLGO ρ

$$\cancel{\rho}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

OPERATORE DIVERGENZA, IN NOTAZIONE COMPATTA:

$$\boxed{\operatorname{div}\bar{V} = 0}$$

$(\nabla \cdot \bar{v} = 0)$

BILANCIO DI MASSA x FLUIDI INCOMPRIMIBILI

O EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$\operatorname{div} = \nabla \cdot \bar{v}$ $\quad$ $\operatorname{grad} = \nabla\bar{v}$ $\quad$ laplace $\nabla^2\bar{v} = \nabla \cdot \nabla\bar{v} =$ DIV del grad $\bar{v}$

L'EQUAZIONE TOTALE DIVENTA:

$$dy\,dz\left(\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}\right) + dx\,dz\left(\rho v_x v_y|_y - \rho v_x v_y|_{y+\Delta y}\right) + dx\,dy\left(\rho v_x v_z|_z - \rho v_x v_z|_{z+\Delta z}\right)$$

VARIAZIONE DI Q. DI MOTO X TRASPORTO CONVETTIVO

DIVIDO X dV:

$$\left(\frac{\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}}{dx}\right) + \left(\frac{\rho v_x v_y|_y - \rho v_x v_y|_{y+\Delta y}}{dx}\right) + \left(\frac{\rho v_x v_z|_z - \rho v_x v_z|_{z+\Delta z}}{dz}\right)$$

LIMITE $dV \to 0$:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z)$$

APPORTO CONVETTIVO DELLA Q DI MOTO NELLA DIREZIONE X

IPOTESI DI FLUIDO INCOMPRIMIBILE, $\rho = cost$, $\partial\rho = 0$

$$-\rho\left(+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

RACCOLGO:

$$-\rho\left\{v_x\underbrace{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]}_{=0 \text{ X IL BILANCIO DELLA MASSA}} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right\}$$

$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{V} = 0}$

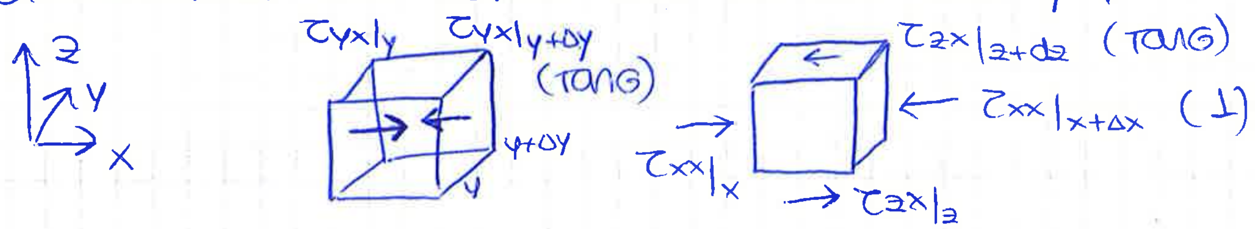
TRASPORTO CONVETTIVO CON ACCUMULO NEL TEMPO

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

PEZZO INIZIALE DELL'EQUAZIONE CON AGGIUNTO IL $\rho\frac{\partial V}{\partial t}$ DELLA VELOCITÀ DI ACCUMULO DELLA Q DI MOTO

È LA **DERIVATA SOSTANZIALE** $\boxed{\rho\frac{Dv_x}{Dt}}$

② X IL TRASPORTO MOLECOLARE, SI RICORDA CHE τ_{yx} È IL FLUSSO DELLA COMPONENTE DELLA Q DI MOTO IN DIREZIONE X ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE ⊥ ALL'ASSE Y:



IN FORMA VETTORIALE:

$$\boxed{\underset{a)}{\rho \frac{D\bar{V}}{Dt}} = \underset{b)}{-\nabla p} \underset{c)}{- \nabla \cdot \bar{\tau}} + \underset{d)}{\rho \bar{g}}} \rightarrow \text{BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO}$$

b) GRADIENTE PRESSIONE

c) DIVERGENZA DEL TENSORE DELLE TENSIONI

È LEGATO ALLA II LEGGE DELLA DINAMICA (O DI NEWTON)

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

COSA RAPPRESENTANO:

a) MASSA × UNITA' DI VOLUME MOLTIPLICATA × UN'ACCELERAZIONE ($\bar{F} = m\bar{a}$)

b) FORZE DI PRESSIONE AGENTI SULL'ELEMENTO × UNITA' DI VOLUME

c) FORZA VISCOSA SULL'ELEMENTO PER UNITA' DI VOLUME

d) FORZA GRAVITAZIONALE (FORZA PESO) SULL'ELEMENTO × UNITA' DI VOLUME

IL FLUIDO È QUINDI ACCELERATO DALLE FORZE CHE AGISCONO E CHE HANNO COMPONENTI ≠.

L'EQUAZIONE DEL MOTO CI DICE CHE UN ELEMENTO DI VOLUME IN MOTO COL FLUIDO VIENE ACCELERATO A CAUSA DELLE FORZE CHE AGISCONO SU DI ESSO. IN ALTRI TERMINI SI RITROVA LA II LEGGE DI NEWTON DELLA DINAMICA NELLA FORMA $m\bar{a} = \Sigma F_i$.

SI RILEVA CHE IL BILANCIO DI Q di MOTO È PERFETTAMENTE EQUIVALENTE ALLA II LEGGE DI NEWTON.

COME SI PUÒ SEMPLIFICARE QST EQUAZIONE?

CON DELLE ASSUNZIONI: INTRODUCIAMO L'EQUAZIONE COSTITUTIVA DEL FLUIDO NELLA τ.

[EQUAZIONI 2-29, 2-33]

SCRIVIAMO LA COMPONENTE X DELL'EQUAZIONE DI N-S ESPANDENDO Dv_x/Dt :

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt} = \rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) =$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

FORZE INERZIALI TRANSITORIE

FORZE DI GRAVITÀ

FORZE DI PRESSIONE

FORZE CONVETTIVE

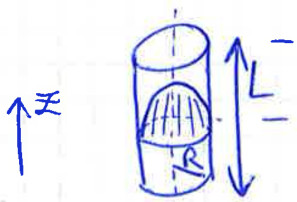
FORZE VISCOSE x u.d.a

μ = VISCOSITÀ

esempi di moto di fluido incomprimibile

1) MOTO IN TUBO CIRCOLARE

PRIMA METODOLOGIA, SI PARTE DALL'EQUAZIONE GENERALE DEL MOTO



- SI VUOLE TROVARE IL PROFILO DELLE VELOCITÀ
- COORDINATE CILINDRICHE : z, $v_z = ?$

- CONSIDERIAMO UN MOTO SVILUPPATO, CIOÈ $v_z \neq v_z(z)$ NON DIPENDE DALLA QUOTA
- x SIMMETRIA, $v_z \neq v_z(\theta)$;
- x MOTO STAZIONARIO $v_z \neq v_z(t)$
- RISULTA $v_z = v_z(r)$ → SI CONSIDERA QUINDI UNO STRATO ∞^{simo} dr
- ABBIAMO CHE $v_R = v_\theta = 0$, SOLO $v_z \neq 0$

L'EQUAZIONE È

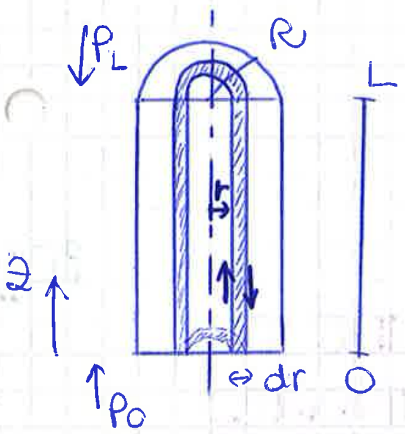
$$\boxed{3\text{-}44}\quad \rho\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}}_{\text{stazionario}} + \underbrace{\cancel{v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}}}_{v_R=0} + \underbrace{\cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}}_{\text{simmetria}} + \underbrace{\cancel{v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}}}_{\text{moto sviluppato}}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}}_{\text{simmetria}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}}_{\text{moto sviluppato}}\right) + \rho g_z$$

APPROCCIO FLUIDODINAMICO

RIMANE:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \rho g_z$$

SECONDA METODOLOGIA:



BILANCIO DI FORZE SU UN VOLUMETTO INFINITESIMO dr

$V_z = V_z(r)$

AGISCONO SOLO LE τ, FORZE DI V E FORZE DI P

(MOTO SVILUPPATO, VELOCITÀ COSTANTE)
NO FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO

FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO DELLA PARETE LATERALE r:

$2\pi r L \, \tau_{rz}|_r$ = AREA $\cdot\, \tau_{rz}|_r$ ENTRANTE

$-2\pi(r+dr) L \, \tau_{rz}|_{r+dr}$ USCENTE

FORZA DI PRESSIONE SU SUPERFICIE $z=0$ E $z=L$:

$2\pi r\, dr\, p_0$ = AREA CORONA CIRCOLARE $p_0 = [\pi(r+dr)^2 - \pi r^2] p_0$

$-2\pi r\, dr\, p_L$ $= (\cancel{\pi r^2} + \underbrace{\pi dr^2}_{=0 \text{ X TRASCURABILE}} + 2\pi r dr - \cancel{\pi r^2}) p_0$

CONSIDERIAMO $\mathcal{P} = p + \rho g_z$

METTO INSIEME I TERMINI DEL BILANCIO

$$2\pi r L \, \tau_{rz}|_r - 2\pi(r+dr) L \tau_{rz}|_{r+dr} + 2\pi r\, dr\, \mathcal{P}_0 - 2\pi r\, dr\, \mathcal{P}_L = 0$$

DIVIDO x $2\pi\, dr\, L$

$$\frac{r}{dr} \tau_{rz}|_r - \left(\frac{r+dr}{dr}\right) \tau_{rz}|_{r+dr} + \frac{r}{L}\mathcal{P}_0 - \frac{r}{L}\mathcal{P}_L = 0$$

LIMITE $dr \to 0$

$$\lim_{dr\to 0} \frac{r\tau_{rz}|_r - (r+dr)\tau_{rz}|_{r+dr}}{dr} + r\frac{\mathcal{P}_0}{L} - r\frac{\mathcal{P}_L}{L} = 0$$

$$-\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) + r\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = r\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}$$

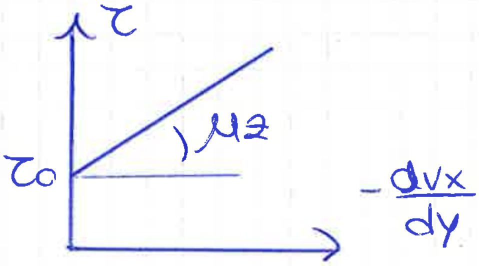
INTEGRIAMO IN dr

$$r\tau_{rz} = \frac{1}{2L}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) r^2 + C_1$$

(2) SEMPRE TUBO CIRCOLARE, MA FLUIDO ALLA BINGHAM

EQUAZIONE COSTITUTIVA:

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -\mu_2 \dfrac{dv_x}{dy} + \tau_0 & r > r_0,\ \tau > \tau_0 \\ \dfrac{dv_x}{dy} = 0 & r \leq r_0,\ \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$



SI PARTE DALL'ESPRESSIONE x I TUBI CIRCOLARI:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r$$ che vale x qualsiasi fluido

Scindo in 2 regioni:

- PER $r > r_0$:

$$\tau_{rz} = \tau_0 - \mu \frac{dv_z}{dr}$$ EQUAZIONE COSTITUTIVA

$$\tau_0 - \mu \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r$$

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{\mu 2L}\right) r + \frac{\tau_0}{\mu}$$

TERMINE IN PIÙ RISPETTO A PRIMA

INTEGRIAMO in dr

$$v_z(r) = \frac{1}{\mu}\left[-\frac{P_0 - P_L}{4L} r^2 + \tau_0 r\right] + C_2$$

BC_2: $v_z(R) = 0$

$$C_2 = \frac{P_0 - P_L}{4L\mu} R^2 - \tau_0 R \frac{1}{\mu}$$

TERMINE IN PIÙ

QUINDI:

$$v_z(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \frac{\tau_0}{\mu} R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

LEGGE DI BUCKINGHAM-REINER per $r > r_0$

NON SI PUÒ INTRODURRE LA CONDIZIONE AL CONTORNO DI C_1, XK $r \neq 0$!

X UN FLUIDO NEWTONIANO: $\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} r - \frac{C_1}{\mu r}$$

$$\int \frac{1}{r} = \ln(r)$$

SI INTEGRA IN dr:

$$v_z(r) = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(r) + C_2$$

SI DEVONO INTRODURRE 2 CONDIZIONI AL CONTORNO SULLA VELOCITÀ: NULLA SULLE 2 PARETI!

$v_z(kR) = 0$: BC_1

$v_z(R) = 0$: BC_2

$$\begin{cases} 0 = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} k^2 R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(kR) + C_2 & : BC_1 \\ 0 = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(R) + C_2 & : BC_2 \end{cases}$$

X RISOLVERLO SOTTRAGGO LE EQUAZIONI

RICORDO: $\ln(kR) = \ln k + \ln(R)$

$$-\ln(k) = \ln(k^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{P_0 - P_L}{4L} \cdot \frac{1 - k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} \\ C_2 = +\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \frac{1 - k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} \cdot \ln(R)\right] \end{cases}$$

QUINDI:

NUOVO TERMINE

$$\boxed{v_z(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1 - k^2}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]}$$

$$\frac{L\cancel{\rho}|\cancel{V}|\omega}{\cancel{\rho}|V|^{\cancel{2}}}\frac{Dv_x'}{Dt} = -\frac{\delta p'}{\delta x'} + \frac{\mu|\cancel{V}|}{L^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{L}}{\rho|V|^{\cancel{2}}}\left[\frac{\delta^2 v_x'}{\delta x'^2}+\frac{\delta^2 v_x'}{\delta y'^2}+\frac{\delta^2 v_x'}{\delta z'^2}\right]$$

$$\underbrace{\frac{L\omega}{|V|}}\frac{Dv_x'}{Dt} = -\frac{\delta p'}{\delta x'} + \underbrace{\mu\frac{1}{\rho|V|L}}\left[\frac{\delta^2 v_x'}{\delta x'^2}+\frac{\delta^2 v_x'}{\delta y'^2}+\frac{\delta^2 v_x'}{\delta z'^2}\right]$$

TERMINI COSTANTI

$$\frac{\mu}{\rho|V|L} = \frac{1}{Re} \qquad \left(Re = \frac{\rho|V|L}{\mu}\right)$$

$$\frac{L\omega}{|V|} = \frac{\alpha^2}{Re} \qquad \left(\alpha^2 = \frac{\omega\rho L^2}{\mu}\right)$$

Re e α^2 sono adimensionali

L'EQUAZIONE FINALE ADIMENSIONALE É:

$$\boxed{\frac{\alpha^2}{Re}\frac{Dv_x'}{Dt} = -\frac{\delta p'}{\delta x'} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\delta^2 v_x'}{\delta x'^2}+\frac{\delta^2 v_x'}{\delta y'^2}+\frac{\delta^2 v_x'}{\delta z'^2}\right]}$$

QUINDI α^2 e Re SONO GLI UNICI PARAMETRI FISICI CHE CI REGOLANO IL MOTO!

SE ABBIAMO GEOMETRIE SIMILI (ex: 2 condotti cilindrici anche con $\Phi \neq$) e stessi α^2 e Re allora × i 2 moti abbiamo la stessa soluzione di Navier-Stokes.

- → stessi parametri fisici
- → stessa eq. da risolvere (NS)
- → stessa soluzione

QUESTO CONCETTO È NOTO COME **SIMILARITÀ DINAMICA** E PERMETTE DI STUDIARE MOTI NON STUDIABILI IN ALTRI MODI → AD ESEMPIO IL MOTO PULSATILE

IN CONDIZIONI NON STAZIONARIE, L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DIVENTA:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{p_1 - p_2}{\mu l} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}$$

ν = VISCOSITÀ CINEMATICA

CONSIDERIAMO UN MOTO PERIODICO:
(AD ESEMPIO QUELLO CHE AVVIENE NEL SISTEMA ARTERIOSO)
→ PERIODO = CICLO CARDIACO

IL GRADIENTE DI PRESSIONE È PERIODICO E SI ESPRIME COME SERIE DI FOURIER

CONSIDERIAMO UNA SINGOLA ARMONICA x SEMPLICITÀ

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = A e^{int}$$

MOTO PERIODICO CON FREQUENZA $f = \frac{n}{2\pi}$

(RICORDIAMO CHE VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{A}{\mu} e^{int}$$

EQUAZIONE DIFF. DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEA

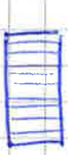
↓

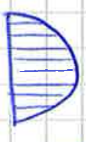
SOLUZIONE DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA + SOLUZIONE DELL'EQ. PARTICOLARE

LA SOLUZIONE È QUINDI LA SOVRAPPOSIZIONE DI UNA COMPONENTE MEDIA (OMOGEN.) + UNA COMPONENTE PULSATILE (PARTICOLARE)

α^2 INDICA QUANTO PESANO LE 2 COMPONENTI NELLA MIA EQUAZIONE

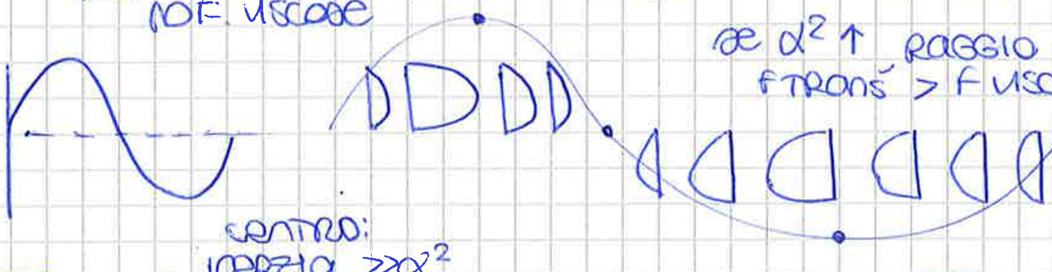
IL PROFILO DELLE VELOCITÀ È MODIFICATO DA α^2

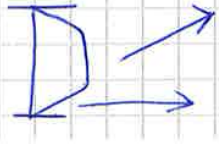

CASO SOLO INERZIALE, NO F. VISCOSE


ANCHE FORZE VISCOSE

$\alpha^2 \downarrow$, RAGGIO PICCOLO: F VISCOSE > F TRANS → STAZIONARIO

SE $\alpha^2 \uparrow$ RAGGIO GRANDE: F TRANS > F VISC, PROFILO POCO MODIFICATO DALLE F. VISCOSE

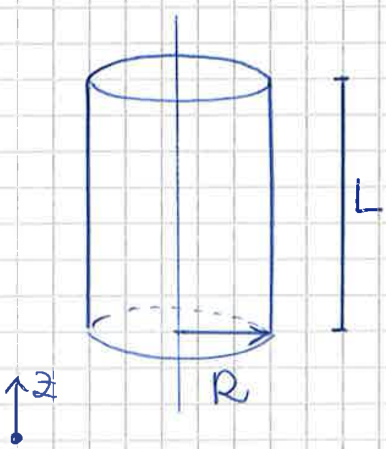



CENTRO: INERZIA $>> \alpha^2$

PARETI: $<< \alpha^2$ VISCOSI, $<< w$

EQUAZIONE di POISEUILLE

MOTO DI UN FLUIDO IN UN CONDOTTO CILINDRICO



EQ. DIFFERENZIALE

$$\frac{\Delta P}{L} = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]$$

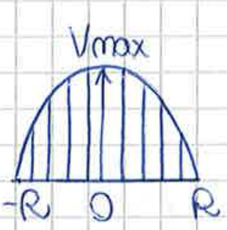
perché $v_z = v_z(r)$

ED IPOTESI DI FLUIDO NEWTONIANO

INTEGRANDO 2 VOLTE CON BC_1 e BC_2:

$$v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

PROFILO DI VELOCITÀ PARABOLICO



SULL'ASSE ABBIAMO IL MASSIMO DELLA VELOCITÀ.

CALCOLO LA PORTATA VOLUMICA:

$$Q = \dot{V} = A\bar{w}$$

$$Q = \int_0^R 2\pi \cdot r \cdot v_z(r)\, dr$$

INTEGRIAMO IN COORDINATE CILINDRICHE

$$Q = 2\pi \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr =$$

$$Q = 2\pi \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R^2}\right]_0^R =$$

$$Q = 2\pi \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[\frac{2R^2 - R^2}{4}\right] = 2\pi \frac{\Delta P}{16\mu L} R^4$$

$$Q = \pi \frac{\Delta P}{8\mu L} R^4 = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta P$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{8\mu L}{\pi R^4} Q}$$

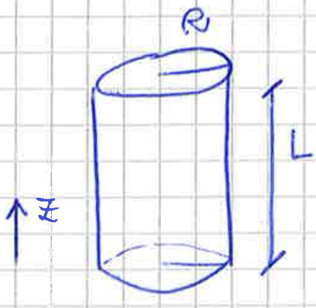
LEGGE DI POISEUILLE = LEGAME TRA GRADIENTE DI PRESSIONE e PORTATA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 216

LA LEGGE DI POISEUILLE (HAGEN-POISEUILLE)

è limitata al seguente ambito di validità:

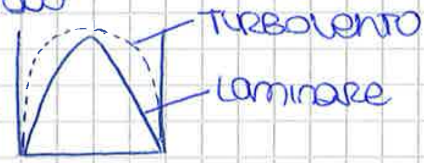
- stazionarietà
  - no dipendenza dal tempo ($\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}$)
- fluido newtoniano
- regime di moto laminare ($Re < 2000$)
- condotto cilindrico, assialsimmetrico, a sezione costante
- velocità nulla alla parete
  - condizione al contorno impostata
- moto sviluppato
  - no dipendenza da L/Z
- pareti rigide non deformabili



Vediamo cosa succede se si fanno cadere ad una ad una queste ipotesi:

— Flusso non assialsimmetrico

- moto non cilindrico
- capita sempre in vivo nei vasi
- profilo di velocità legg. diverso dal parabolico
- la simmetria si perde anche nel caso di moto turbolento $Re > 10000$
- si perdono le condizioni al contorno imposte

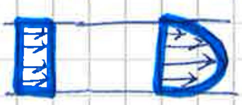


→ non è detto valga la legge di Poiseuille

— Flusso non sviluppato

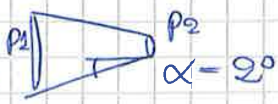
- "entrance effects" = effetti di ingresso

moto svilup



da piatto a sviluppato, con modifiche maggiori lungo la parete

- non si ha sezione costante ma cono o "tapering" = riduzione sezione trasversale



↓ sezione ↑ velocità v_2 ↓ pressione a valle p_2 ↑ ΔP rispetto a Bernoulli

$\Delta P = P_1 - P_2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 216

FLUIDI BIOLOGICI

SANGUE

Il sangue è una sospensione in soluzione acquosa chiamata plasma. (ed è un tessuto)

I costituenti del sangue sono (meglio del plasma)

- proteine:
  - albumina — presente in maggiore concentraz
  - globuline — dimensione maggiore delle albumine
  - fibrinogeno
- lipidi
- glucosio
- amminoacidi

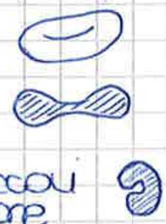
[In condizioni normali, la densità del plasma è $\rho_P = 1035\ kg/m^3$]

- urea
- lattati
- ioni inorganici: Na^+, K^+, Ca^+, Mg^{++}, Cl^-

Parte corpuscolata presente nel plasma:

- eritrociti = G. rossi
- leucociti = G. bianchi
- trombociti = piastrine

forma discoidale biconcava
sono deformabili x passare in vasi + piccoli della loro dimensione si piegano



Possiamo considerare il sangue come un fluido omogeneo x vasi di grande diametro $\boxed{\Phi \geq 0{,}3\ mm}$

perché la parte corpuscolata assume dimensioni max $9{,}5\ \mu m$ → si va sopra di almeno un ordine di grandezza

(parte corpuscolata = seconda fase)

- **BULL**, DERIVA DA EINSTEIN

$$\mu_S = \mu_P (1 + 2{,}5\,Ht)$$

ASSUNZIONI TROPPO PESANTI
SI USA PERÒ IN CLINICA!

X PASSARE TRA LE 2 RELAZIONI

$$\frac{1}{1-2{,}5C} \quad (\text{con } C = 0{,}05) \quad \frac{1}{1-2{,}5C} \cdot \frac{1+2{,}5C}{1+2{,}5C}$$

$$= \frac{1+2{,}5c}{1-(2{,}5)^2c^2} = \frac{1+2{,}5c}{1-6{,}25c^2} = \frac{1+2{,}5c}{1-6{,}25\cdot 0{,}0025} \cong \frac{1+2{,}5c}{1{,}1}$$

$$\cong 1+2{,}5C \rightarrow C = Ht$$

SI TRASCURA IL 10%

C: 0,05 — 5%

Ht: 0,45 — 45/47%

SONO APPROSSIMAZIONI TROPPO GRANDI!

- **TAYLOR**

$$\mu_S = \mu_P \left(1 + 2{,}5 \underbrace{\frac{\frac{\mu_r}{\mu_p} + 0{,}4}{\frac{\mu_r}{\mu_p} + 1}}_{\text{AGGIUNGE UN FATTORE CORRETTIVO}} C\right)$$

PER CONCENTRAZIONI ≥ 5% DIVENTA INFLUENTE L'INTERAZIONE TRA LE ≠ PARTICELLE → ELASTICITÀ PROPRIA DEI GLOBULI ROSSI E LORO TENDENZA A FORMARE ROULEAUX

μ_r = VISCOSITÀ DEL CONTENUTO DELLE SFERE = VISCOSITÀ EMOGLOBINA

μ_p = VISCOSITÀ DELLA SOSPENSIONE

- **JEFFERY**

$$\mu_S = \mu_P \frac{1+C}{1-bC}$$

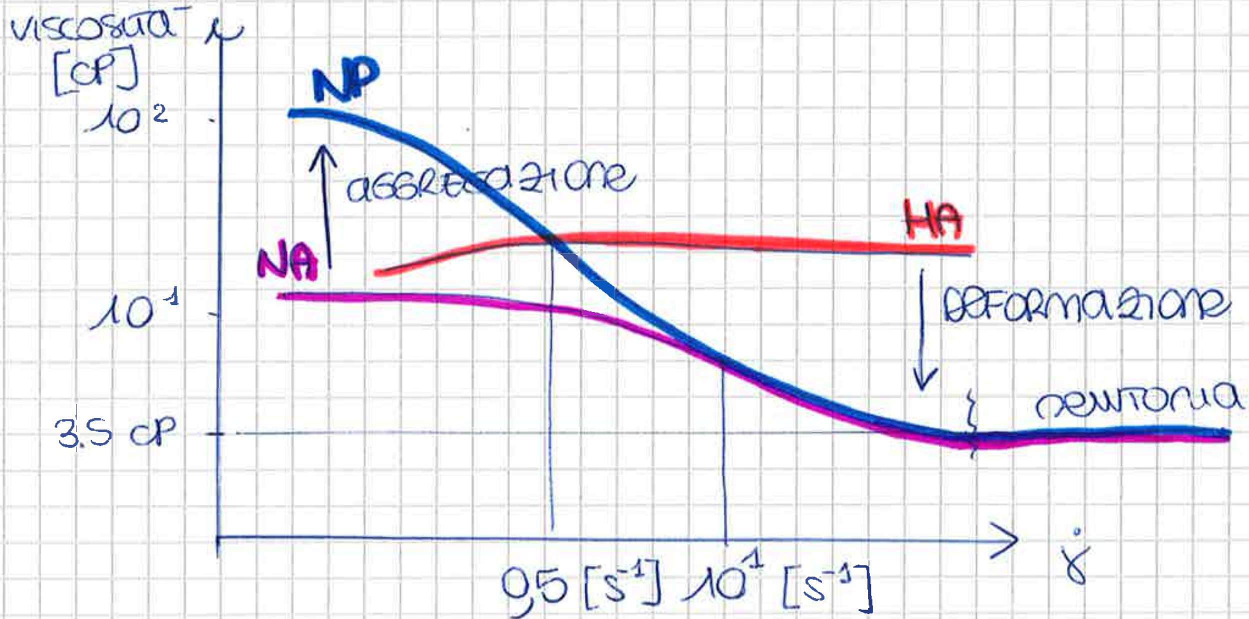
PRENDE IN CONSIDERAZIONE LA MORFOLOGIA DELLE PARTICELLE
b = FATTORE DI FORMA " "
C = CONCENTRAZIONE VOLUMETRICA " "

CORREGGE IL FATTORE DI FORMA, XKÈ LE PARTICELLE NON SONO IN REALTÀ PERFETTAMENTE SFERICHE

L'effetto delle proteine nel sangue, invece:
fa variare la viscosità del plasma:

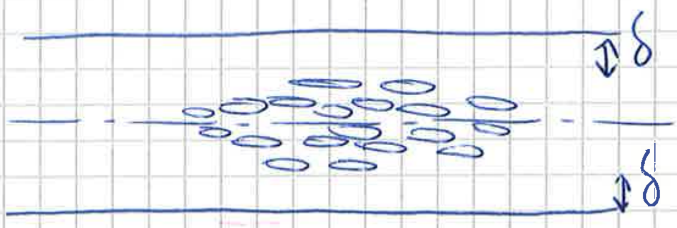
↑ di volume della globulina
↑ interazione con il fluido
↑ viscosità

Come influisce il fibrinogeno nei rouleaux?



NP = normal plasma = sangue intero con ematocrito 45%
(è il riferimento x tutti gli studi sulla viscosità)

NA = tutto il fibrinogeno e globuline (globuli in soluzione di Ringer)
x $\dot{\gamma}$ alti, coincide con NP
per $\dot{\gamma} < 10^1$, le 2 curve si discostano xké <u>non</u> avviene la formazione dei rouleaux



IL PLASMA HA VISCOSITÀ PIÙ BASSA x CUI GLI SFORZI TANGENZIALI SULLA PARETE SARANNO MINORI CHE SE CI FOSSERO STATI I GR

→ − SOLLECITAZIONI SULLA PARETE

applicazioni alla pratica clinica

PIÙ SEMPLICE MODELLIZZAZIONE DEL SANGUE:

- LEGGE DI POISEUILLE
- SI TIENE CONTO DELLA PULSATILITÀ (MOTO NON STAZIONARIO)
  → SOLUZIONE DI WOMERSLEY

POI SI PASSA ALLO STUDIO SPERIMENTALE DEI FLUSSI

- MODELLO DI VETRO DELLA BIFORCAZIONE CAROTIDEA E INIEZIONE DI INCHIOSTRO
- → CFD: FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE
  SI DIVIDE IN VOLUMETTI ELEMENTARI E SU OGNUNO BILANCIO DI MASSA E DI Q. DI MOTO

AVANZANO SEMPRE DI PIÙ LE CAPACITÀ MODELLISTICHE

INTEGRAZIONE TRA

METODI TEORICI CFD
IMMAGINI IN CLINICA } ARRICCHISCE LA CONOSCENZA MEDICA

DALLE IMMAGINI CLINICHE VENGONO FATTE DELLE MISURE → TECNICHE DI OTTIMIZZAZ IMMAGINE → TECNICHE DI VISUALIZZ

IN PARALLELO

MODELLIZZ $\xrightarrow[\text{CALCOLI CON APPROSSIMAZ}]{}$ PROFILI DI VELOCITÀ NEL DOMINIO

MOTO TURBOLENTO

TURBOLENZA = FENOMENO GIORNALIERO

FUMO PASSIVO / ATTIVO SIGARETTA
LATTE + CAFFÈ
LINEE DI CORRENTE DI FIUME SU PILONI PONTE
MOTO NUBI
MARE MOSSO

HORACE LAMB = SCIENZIATO FINE 1800

L'OSSERVAZIONE DEI FLUSSI TURBOLENTI È UN'ESPERIENZA QUOTIDIANA CHE IDENTIFICHIAMO CON IL MOTO NON STAZIONARIO, IRREGOLARE ED APPARENTEMENTE CAOTICO DI UN FLUIDO

STANZA SATURA DI FUMO DI UNA SIGARETTA VELOCEMENTE → XK SI INNESCA UN MOTO TURBOLENTO CON CUI SI DIFFONDE IL FUMO (NON È UNA SEMPLICE DIFFUSIONE MOLECOLARE)

MISCELAMENTO IMMEDIATO DI LATTE E CAFFÈ GIRANDO IL CUCCHIAINO DI SCALA MACRO SU MOLECOLE → INNESCAMENTO DEL MOTO TURBOLENTO DOVUTO ALL'AGITAZIONE CREATA DAL CUCCHIAINO

IL MOTO TURBOLENTO CAUSA UN TRASPORTO DI ENERGIA DA SCALE + GRANDI (MACROSCOPICHE) FINO A SCALE PIÙ PICCOLE (MICROSCOPICHE / MOLECOLARI) DOVE L'ENERGIA VIENE POI DISSIPATA, SPESSO SOTTO FORMA DI CALORE.

LA TURBOLENZA È UN FENOMENO FISICO NON DETERMINISTICO, DESCRIVIBILE SOLO STATISTICAMENTE!

UN PROCESSO ALEATORIO È STAZIONARIO SE IL COMPORTAMENTO STATISTICO È INDIPENDENTE DALLA TRASLAZIONE RISPETTO ALL'ORIGINE DEI TEMPI.

UN PROCESSO ALEATORIO È STAZIONARIO IN SENSO STRETTO SE LE VARIABILI STATISTICHE DEL FENOMENO SONO TRASLABILI NEL TEMPO SENZA VARIARE, CIOÈ SONO INDIPENDENTI DALL'ORIGINE DEI TEMPI → MEDIA, DS, VARIANZA, KURTOSIS.

↓

NON ∃ NELLA REALTÀ

SI USANO QUINDI I PROCESSI STAZIONARI IN SENSO DEBOLE IN CUI SOLO IL VALOR MEDIO E LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE SONO INDIPENDENTI

UN PROCESSO È STAZIONARIO ED ERGODICO SE UNA SOLA MISURA È RAPPRESENTATIVA DI TUTTO IL PROCESSO IN GENERALE.