



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1548A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Zito

MATERIA: Tecnica delle Costruzioni II parte, Prof. Carbone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



"Oberbaum Bridge - Berlin"

APPUNTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
Prof. Ing. Vincenzo Ilario Carbone

- CAPITOLO 6 -
"Plasticita'"



alessandro zito



Alcuni consigli per l'apprendimento della materia:

- Eserciziari :

- Bertero, Grasso : Esercizi di Scienza delle costruzioni;
- Algostino : Esercizi di Scienza delle Costruzioni.

-Teoria :

- Belluzzi : Scienza delle Costruzioni.

Materiale in rete:

- Esercizi + teoria sulle linee di influenza (materiale in inglese)

Su barra di ricerca Google : scrivete Influence Lines

- Video lezioni di Tecnica delle Costruzioni:

Su barra di ricerca YouTube : scrivete Tecnica delle Costruzioni. Troverete una sessantina di lezioni, canale di videolezioni universitarie.



In generale, quando avvengono DEFORMAZIONI NON ELASTICHE, il REGIME STATICO provocato da FORZE DATE risulta diverso da quello che si avrebbe se le DEFORMAZIONI fossero ELASTICHE.

In particolare:

- Se la STRUTTURA è ISOSTATICA \Rightarrow si modificherà soltanto la DISTRIBUZIONE delle TENSIONI
- Se la STRUTTURA è IPERSTATICA \Rightarrow si modificheranno i VALORI delle REAZIONI nei VINCOLI, \Rightarrow anche la DISTRIBUZIONE delle SOLLECITAZIONI nella STRUTTURA.

LEGGE TENSIONI-DEFORMAZIONI



Tale LEGGE è NOTEVOLMENTE diversa per i VARI MATERIALI, che si possono DIVIDERE in:

- DUTILI
- FRAGILI

distinti principalmente dal VERIFICARSI o NON del FENOMENO dello SNERVAMENTO.

MATERIALI DUTILI \rightarrow La ϵ CRESCE PROPORZIONALMENTE alla σ fino ad un certo VALORE σ_p , detto LIMITE di PROPORZIONALITÀ.

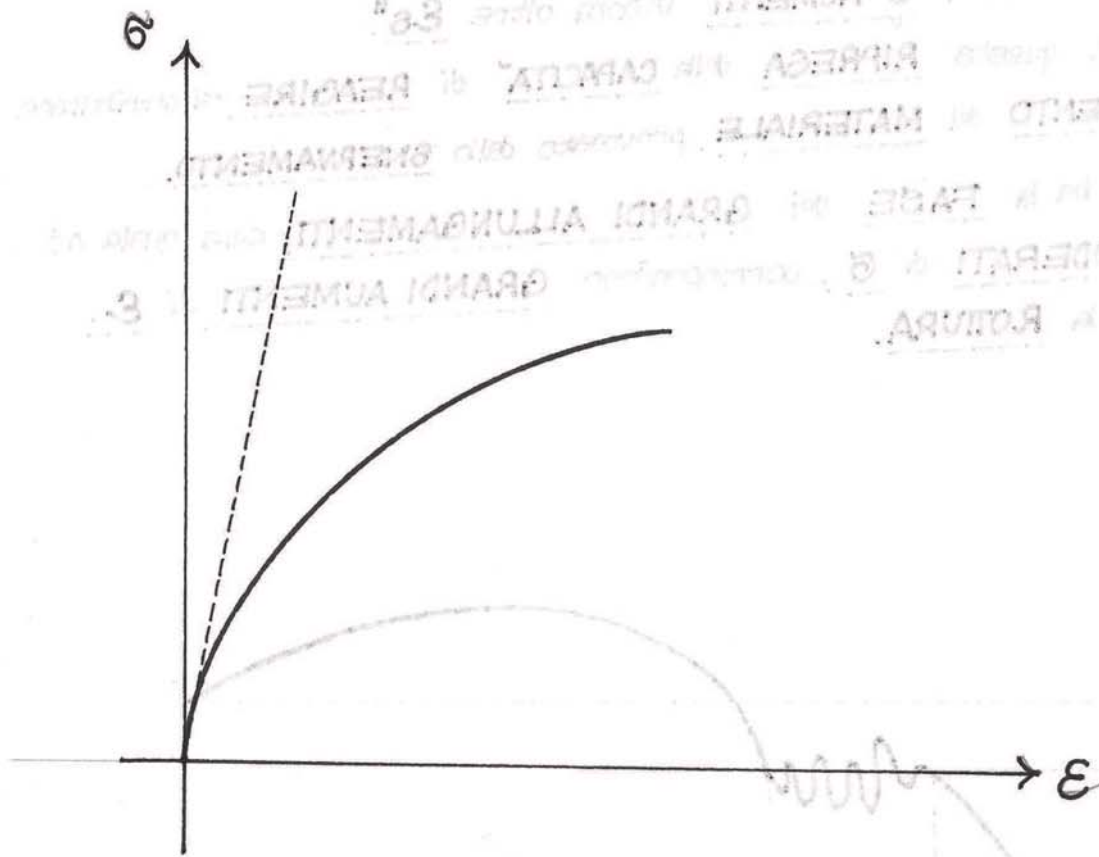
Successivamente CRESCE PIÙ RAPIDAMENTE della σ FINO allo SNERVAMENTO, cui corrispondono 2 VALORI: σ_s e ϵ_s' .

MATERIALI FRAGILI

NON si ha, di solito, una FASE di DECSA PROPORZIONALITÀ tra ϵ e σ , bensì la ϵ CRESCE fin dall' INIZIO un po' più RAPIDAMENTE della σ (ovvero il DIAGRAMMA σ - ϵ è CURVO); e

questo DIVARIO dalla LEGGE di HOOKE, si accentua al CRESCERE di σ e di ϵ .

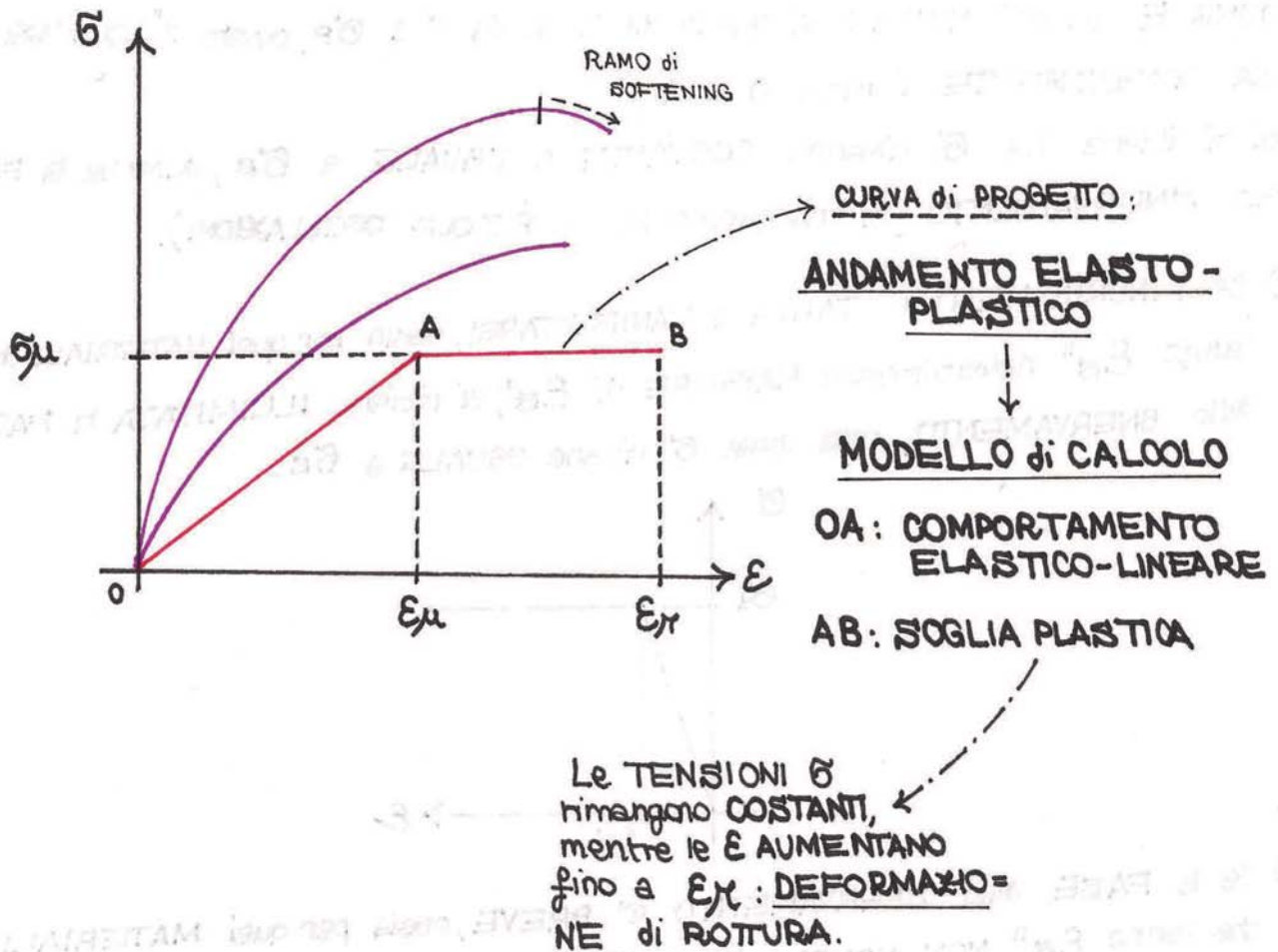
Mancò il FENOMENO dello SNERVAMENTO; quindi la LEGGE $\epsilon = f(\sigma)$ è pressoché CONTINUA (cioè priva della DISCONTINUITÀ rappresentata dallo SNERVAMENTO fino alla ROTTURA



OSSERVAZIONI:

- I DIAGRAMMI σ - ϵ NON sono rappresentabili con un'espressione ANALITICA SEMPLICE; inoltre sono assai diversi per i vari MATERIALI, e talvolta anche per i vari CAMPIONI di uno stesso MATERIALE. A tal punto, essi vengono SOSTITUITI con DIAGRAMMI opportunamente SCHEMATIZZATI, in modo da rendere SEMPLICE lo STUDIO.
- Per i MATERIALI DUTILI si ammette, senza SENSIBILE ERRORE, che la LEGGE

ANDAMENTO LEGAME σ - ϵ REALE dei MATERIALI da COSTRUZIONE



Noi NON vogliamo utilizzare dei MATERIALI da COSTRUZIONE a COMPORTEMENTO ELASTO-FRAGILE perché NON vogliamo raggiungere la ROTTURA senza grandi PREAVVISI con DEFORMAZIONI di TIPO ELASTICO, ma vogliamo che nelle condizioni ultime ci siano delle RISORSE PLASTICHE, ovvero ci siano delle DEFORMAZIONI di grande ENTITA' che avvengano anche a TENSIONE ELEVATA, quella che riteniamo come TENSIONE di ROTTURA del MATERIALE.



Se i MATERIALI da COSTRUZIONE hanno un COMPORTEMENTO ELASTO-PLASTICO, allora la TEORIA dell' ELASTICITA' LINEARE risulta INSUFFICIENTE per indagare sulla RESISTENZA ULTIMA a ROTTURA.

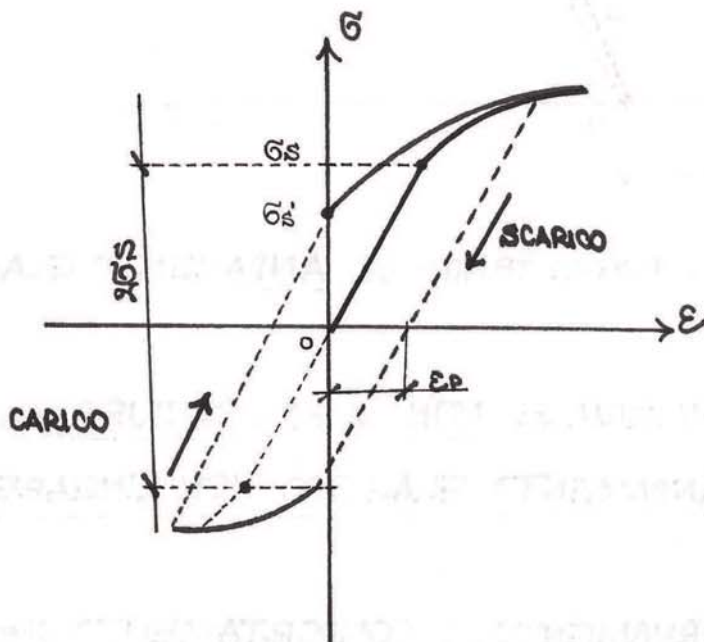


Generalmente nei DIAGRAMMI TENSIONI-DEFORMAZIONI la DIFFERENZA dei PERCORSI MO' e $OP'M'$ viene TRASCURATA.

Inoltre si assume che sia allo SCARICO che al successivo CARICO il PUNTO rappresentativo descriva una RETTA $MO' \parallel$ alla RETTA OP rappresentante il COMPORAMENTO ELASTICO INIZIALE.

EFFETTO BAUSCHINGER

Spiega la tipica forma delle CURVE TENSIONI-DEFORMAZIONI, che si ottengono deformando un materiale oltre il LIMITE di SNERVAMENTO in modo CICLICO, cioè tra valori di TENSIONE o di DEFORMAZIONE SIMMETRICI rispetto allo ZERO.



Ipotesizziamo che il nostro PROVINO NO sia sottoposto ad uno SFORZO di TRAZIONE, con superamento della TENSIONE di SNERVAMENTO σ_s .

Ora, scarichiamo il PROVINO. Esso, durante la FASE di SCARICO, percorrerà una RETTA PROPORZIONALE alla al MODULO

ELASTICO. Al cessare della TENSIONE, ovvero con intercettazione dell'ASSE ϵ , il nostro materiale presenterà una DEFORMAZIONE RESIDUA, pari alla COMPONENTE PLASTICA ϵ_p che ha subito in FASE di CARICO.

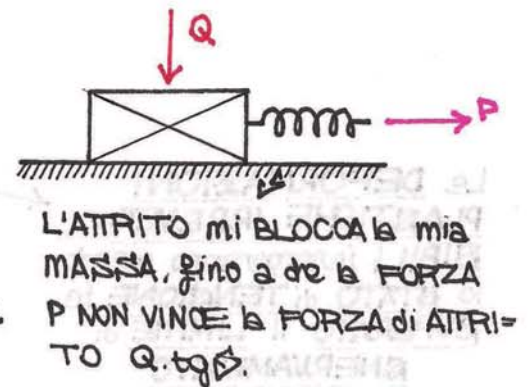
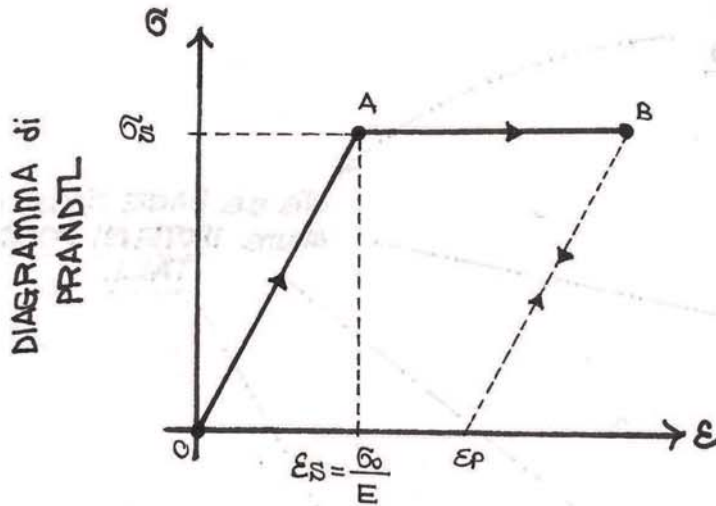
Se una volta scaricato, al materiale, applichiamo uno SFORZO di COMPRESIONE, allora esso avrà un COMPORAMENTO ELASTICO-LINEARE fino a quando non raggiungerà la TENSIONE di SNERVAMENTO σ_s' (con $|\sigma_s'| < |\sigma_s|$) dopodiché presenterà di nuovo un COMPORAMENTO di tipo PLASTICO.

Se noi imponiamo al MATERIALE dei CICLI di DEFORMAZIONE tra valori uguali e tali da superare lo SNERVAMENTO; l'ANDAMENTO σ - ϵ sarà

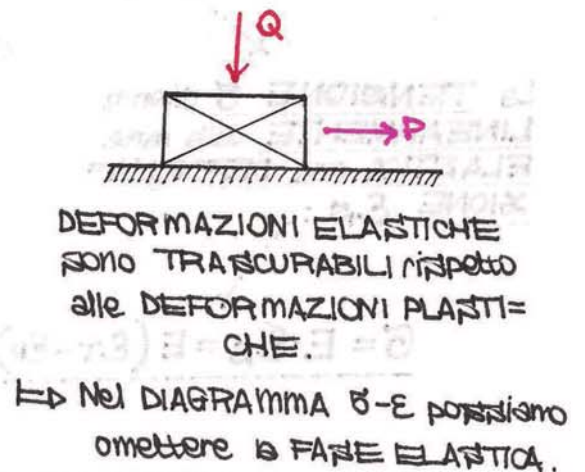
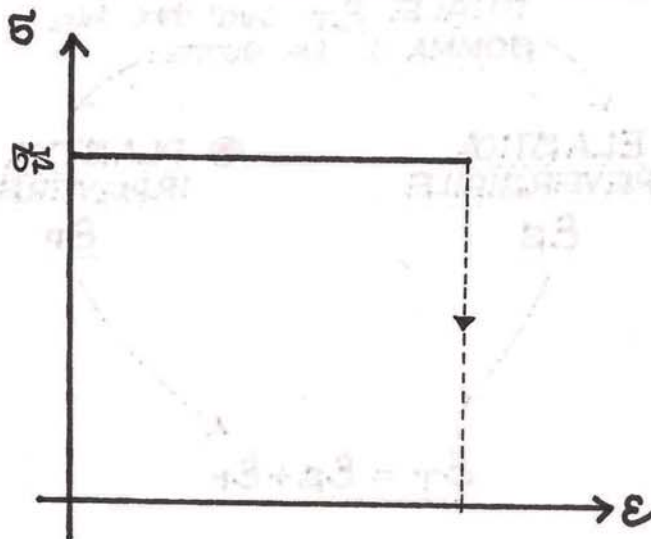
MATERIALE ELASTICO PERFETTAMENTE PLASTICO

Le PRINCIPALI IPOTESI che lo caratterizzano sono:

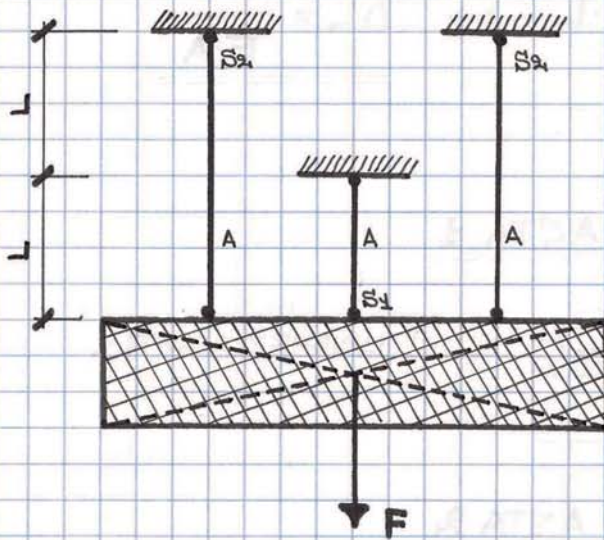
- La TENSIONE NON può SUPERARE il LIMITE di SNERVAMENTO
 $-\sigma_s < \sigma < +\sigma_s$ che risulta coincidente con il LIMITE di ROTTURA;
- Ogni STATO di TENSIONE, che verifica le DISUGLIANZE di cui sopra, viene definito AMMISSIBILE.



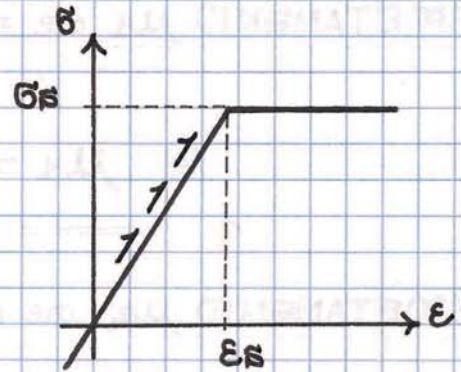
MATERIALE PERFETTAMENTE PLASTICO



STRUTTURA COMPOSTA da ASTE



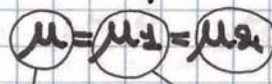
IPOTESI: COMPORTAMENTO ELASTICO PERFETTAMENTE PLASTICO



A FASE ELASTICA -----> Si osserva quando $F < F_e$

Le 3 ASTE subiranno i MEDESIMI SPOSTAMENTI

Le ASTE sono soggette a SFORZO NORMALE, a FORZE DIRETTE lungo il loro ASSE GEOMETRICO



SPOSTAMENTO che subisce l'ASTA 2

SPOSTAMENTO che subisce l'INTERO SISTEMA.

SPOSTAMENTO che subisce l'ASTA 1

CAMPO delle TENSIONI

$$\underline{\underline{\sigma = \frac{N}{A} = \frac{S}{A}}}$$

Siamo in FASE ELASTICA ⇒ il nostro SISTEMA è HOOKIANO, possiamo applicare la LEGGE di HOOKE.

DEFORMAZIONE UNITARIA

$$\underline{\underline{\epsilon = \frac{S}{E \cdot A}}}$$

⇒ Data DEFORMAZIONE UNITARIA, dobbiamo passare alla DEFORMAZIONE TOTALE.

$$\underline{\underline{S_1 + 2S_2 + F = 0}}$$

$$\underline{\underline{S_1 + 2 \cdot \left(-\frac{F}{4}\right) + F = 0}}$$

$$\underline{\underline{S_1 = \frac{F}{2} - F}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_1 = -\frac{F}{2}}} \quad \text{d}$$

Ora si sostituiscono le EQUAZIONI c e d nelle EQUAZIONI e ed f in modo da definire gli SPOSTAMENTI μ_1 ed μ_2 in funzione della FORZA F.

$$\underline{\underline{\mu_1 = \frac{F \cdot L}{2EA}}}$$

$$\underline{\underline{\mu_2 = \frac{F \cdot 2L}{4EA} = \frac{F \cdot L}{2EA}}}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{FL}{2EA}}}$$

B LIMITE ELASTICO -----> raggiunto quando $F = F_E$

Corrisponde il RAGGIUNGIMENTO della TENSIONE di SNERVAMENTO del nostro MATERIALE.

Si ha PERDITA LINEARITA' DIAGRAMMA σ - ϵ .

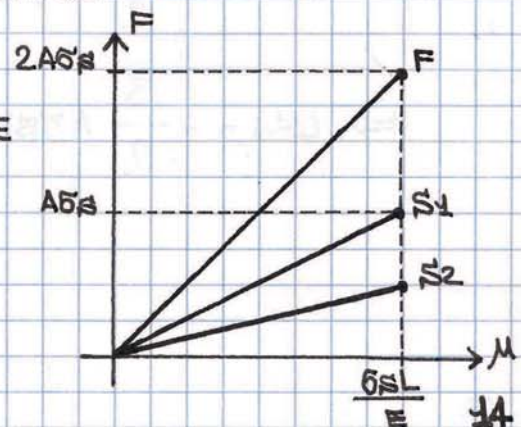
• $S_1 = A \cdot \sigma_S$; $S_1 = 2 \cdot S_2$

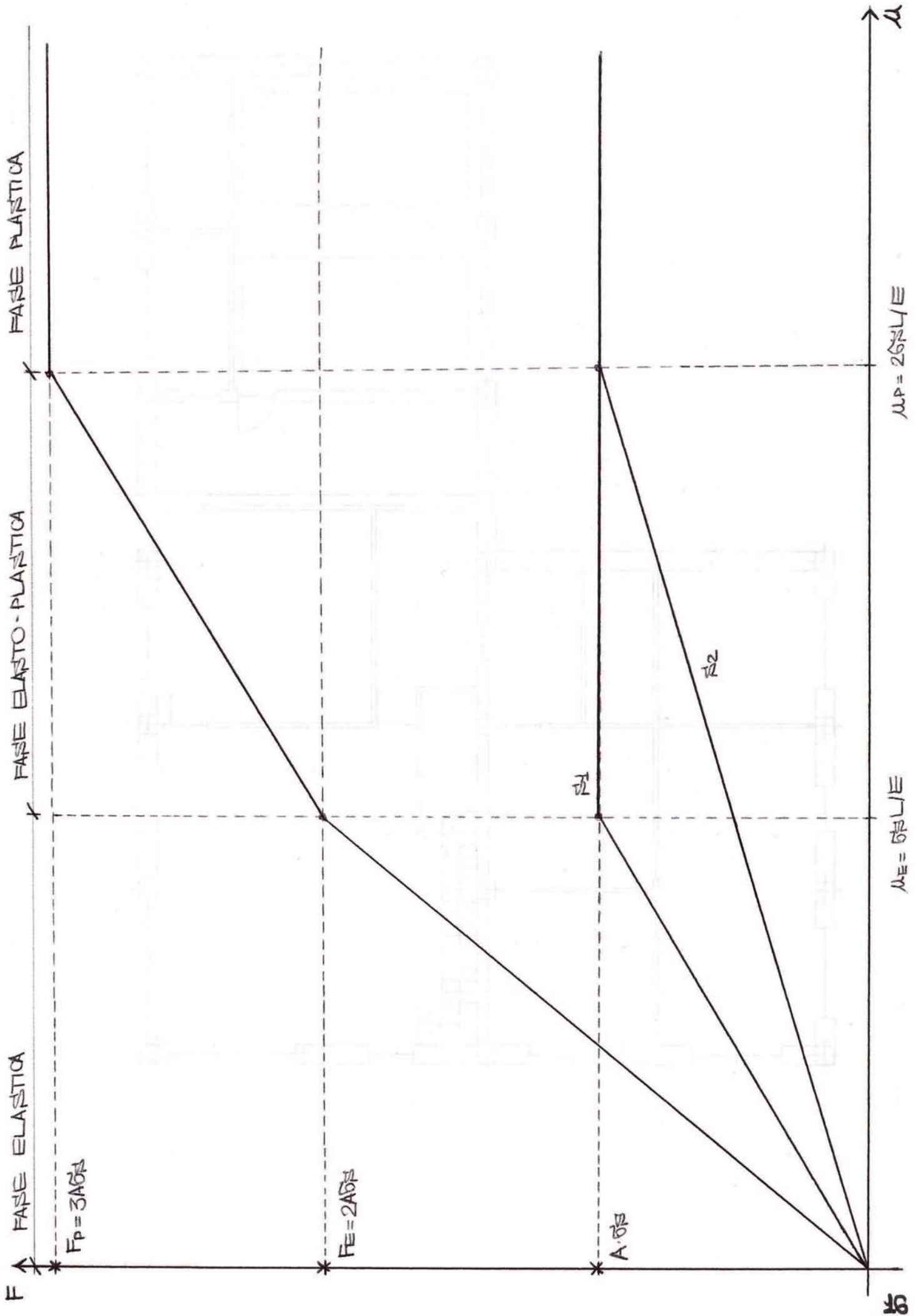
\Rightarrow • $S_2 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} \cdot A \sigma_S$

$\Rightarrow F_E = S_1 + 2S_2 = A \cdot \sigma_S \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 2\right) = 2A \cdot \sigma_S$

$\Rightarrow \Delta L = \epsilon \cdot L \quad \Rightarrow \sigma_S = E \cdot \epsilon \quad \Rightarrow \epsilon = \sigma_S / E$

$\Rightarrow \mu_E = \frac{\sigma_S L}{E}$





MOMENTO STATICO (1° ORDINE) di SUPERFICIE PIANE

CORPO → può essere pensato come costituito di un INSIEME di MASSE OMOGENEE.

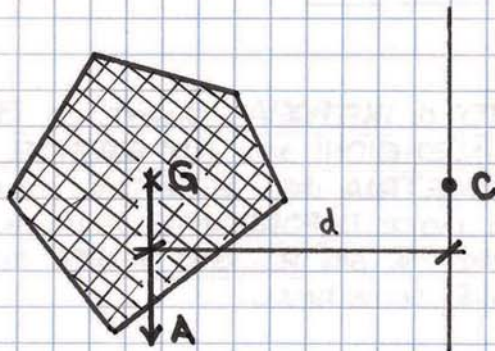
sono concentrate in punti nei quali sono applicati i VETTORI DI RETTI nel senso della GRAVITA' TERRESTRE

← MASSE

Consideriamo una SUPERFICIE PIANA QUALSIASI

la possiamo pensare come un SISTEMA di VETTORI PARALLELI, la cui INTENSITA' è espressa da un AREA, proporzionale alle MASSE UNITARIE concentrate nei punti dove vengono applicati i VETTORI FORZA.

MOMENTO STATICO di una FIGURA PIANA rispetto ad un punto C:



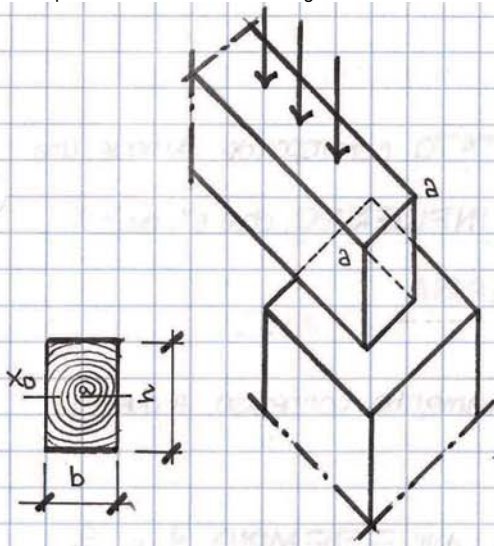
$$\underline{\underline{S^c = A \cdot d}}$$

⚠ L'AREA A viene considerata concentrata nel BARICENTRO G della FIGURA.

⚠ Se $C \equiv G$, il MOMENTO STATICO è UGUALE a ZERO.

DEFINIZIONE di BARICENTRO

Considerato un SOLIDO o una FIGURA PIANA, il BARICENTRO o CENTRO di GRAVITA' (G) è quel PUNTO rispetto al quale esso rimane in EQUILIBRIO per qualunque POSIZIONE esso assuma; tutti gli ASSI che passano per tale PUNTO sono detti ASSI BARICENTRICI.



ESEMPIO 2

Si possono fare le seguenti OSSERVAZIONI:

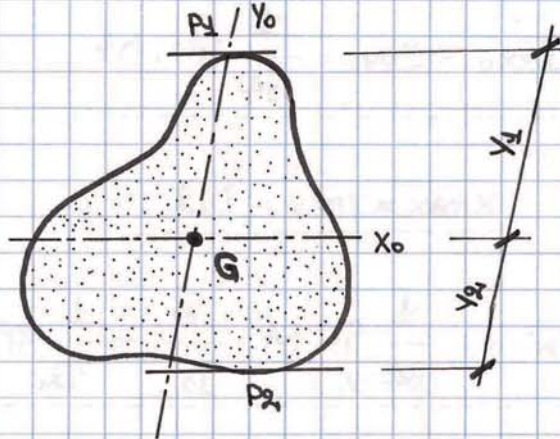
● in relazione all' ESEMPIO 1, la TRAVE presenta una MINORE RESISTENZA, dunque si INFLETTERA' di PIU' rispetto al caso dell' ESEMPIO 1, eppure si ha PARITA' di LUCE, di CARICO, di MATERIALE e di AREA della SEZIONE RETTA \rightarrow cambia unicamente la posizione di quest'ultima rispetto ai CARICHI.

● Tale cambiamento viene messo in evidenza unicamente dal MOMENTO d' INERZIA che assume un valore MINIMO nell' ESEMPIO 1 (essendo le FIBRE ESTREME a-a a piccola DISTANZA dall' ASSE BARICENTRICO x_0) e MASSIMO nel caso dell' ESEMPIO 2 (dove le FIBRE ESTREME a-a sono alla MASSIMA DISTANZA da x_0).

Dunque:

il MOMENTO di INERZIA ASSIALE e' quella GRANDEZZA STATICA esprimibile mediante un ELEMENTO NUMERICO che consente di considerare, in un CALCOLO STATICO, l'IMPORTANZA della POSIZIONE della SEZIONE di un ELEMENTO STRUTTURALE rispetto ai CARICHI APPLICATI

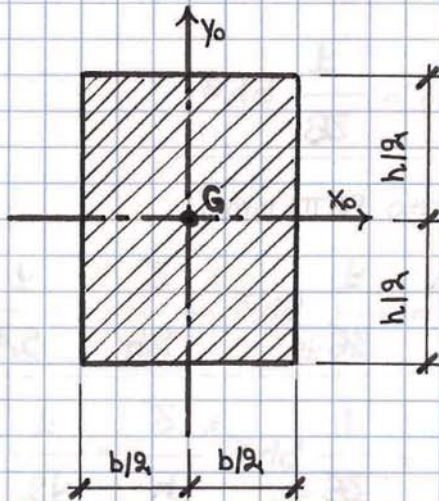
dell' ASSE. Considerando l' ASSE x_0 si ha:



$$W_1 = \frac{I_{x_0}}{y_1} \quad [L^3]$$

$$W_2 = \frac{I_{x_0}}{y_2} \quad [L^3]$$

RETTANGOLO



$$I_{xx_0} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{yy_0} = \frac{1}{12} b^3 h$$

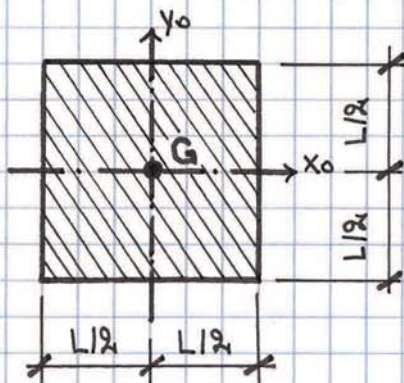
$$x_{max} = b/2$$

$$y_{max} = h/2$$

$$W_{x_0} = \frac{I_{xx_0}}{y_{max}} = \frac{1}{12} b h^3 \cdot \frac{2}{h} = \frac{1}{6} b h^2$$

$$W_{y_0} = \frac{I_{yy_0}}{x_{max}} = \frac{1}{12} b^3 h \cdot \frac{2}{b} = \frac{1}{6} b^2 h$$

QUADRATO



$$I_{xx_0} = I_{yy_0} = \frac{1}{12} L^4$$

$$x_{max} = y_{max} = L/2$$

$$W_{x_0} = W_{y_0} = \frac{1}{12} L^4 \cdot \frac{2}{L} = \frac{1}{6} L^3$$

SFORZO NORMALE SEMPLICE \Rightarrow SFORZO NORMALE CENTRATO

Un SOLIDO OMOGENEO e PRISMATICO (cioè a SEZIONE COSTANTE) è SOLLECITATO al SOLO SFORZO NORMALE N quando in tutte le sue SEZIONI RETTE la RISULTANTE delle FORZE ESTERNE applicate sul TRONCO compreso fra una ESTREMITÀ e la SEZIONE CONSIDERATA ha la sua LINEA d'AZIONE coincidente con l'ASSE della TRAVE (se questa è ad ASSE RETTILINEO).

SFORZO NORMALE



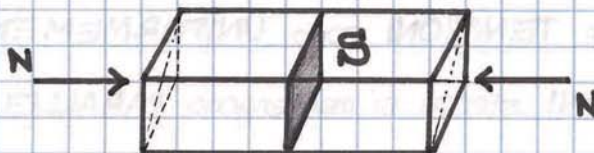
POSITIVO (+): TRAZIONE

quando il VERSO della RISULTANTE si allontana dalla SEZIONE.



NEGATIVO (-): COMPRESSIONE

quando il VERSO della RISULTANTE è diretto verso il PIANO della SEZIONE.



La TRAZIONE determina un ALLUNGAMENTO, mentre la COMPRESSIONE un ACCORCIAMENTO.

PRINCIPIO di DE SAINT-VENANT

Una FORZA F gravante sulla SEZIONE di un ELEMENTO STRUTTURALE produce in questo determinati EFFETTI, UGUALI a quelli prodotti da un QUALUNQUE SISTEMA di FORZE che abbia come RISULTANTE la FORZA F.

LE TENSIONI INTERNE e le DEFORMAZIONI che si producono in un ELEMENTO STRUTTURALE NON CAMBIANO, ad eccezione di un breve tratto iniziale di lunghezza circa uguale alla DIMENSIONE MAGGIORE della SEZIONE, se il SISTEMA di FORZE AGENTI viene SOSTITUITO con ALTRI, purché tutti ammettano la MEDESIMA RISULTANTE.

$$\int_A \sigma_z \cdot dA = N_z$$

$$\sigma_z = c$$

$$\Rightarrow \int_A c \cdot dA = N_z$$



c è una **COSTANTE**, posso portarla fuori dal segno di **INTEGRALE**, applicando la **PROPRIETA'** di **LINEARITA'** dell'**INTEGRALE**.

$$\Rightarrow c \int_A dA = c \cdot A = N_z \Rightarrow c \cdot A = N_z \Rightarrow c = \frac{N_z}{A}$$



$$\Rightarrow \sigma_z = \pm \frac{N_z}{A}$$

Rappresenta la **FORMULA** di **STABILITA'** dello **SFORZO NORMALE**, con **VALORE NEGATIVO** se lo **SFORZO** è di **COMPRESIONE**, **POSITIVO** se di **TRAZIONE**.

DEFORMAZIONE

ALLUNGAMENTO
se lo SFORZO
NORMALE è di
TRAZIONE

consiste in una VARIAZIONE
di LUNGHEZZA della TRAVE

ACCORCIAMENTO
se lo SFORZO
NORMALE è di
COMPRESIONE

LEGGE di HOOKE $\rightarrow \sigma = E \cdot \epsilon$

○ DEFORMAZIONE UNITARIA ϵ (per UNITA' di LUNGHEZZA)

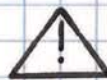
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad [-]$$

FLESSIONE RETTA

Una SEZIONE GENERICA S di un SOLIDO è SOLLECITATA a FLESSIONE SEMPLICE quando il COMPLESSO delle FORZE ESTERNE agenti sul SOLIDO, che precedono o seguono la SEZIONE, è EQUIVALENTE ad una COPPIA di MOMENTO M, detto FLETTENTE, che agisce su un PIANO, detto di SOLLECITAZIONE, PERPENDICOLARE a quello della SEZIONE S, contenente l'ASSE GEOMETRICO del SOLIDO e uno degli ASSI PRINCIPALI d'INERZIA delle sue INFINITE SEZIONI TRASVERSALI.

Per la FLESSIONE RETTA si ipotizza il CAMPO TENSIONALE UNIASSIALE σ_z , VARIABILE LINEARMENTE sulla SEZIONE TRASVERSALE:

- $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- $\sigma_z = ax + by + c$



Le COSTANTI a, b, c vengono determinate attraverso CONDIZIONI al CONTORNO.

$$\int_A \sigma_z dA = N = 0$$

$$\int_A \tau_{xz} dA = T_x = 0$$

$$\int_A \tau_{yz} dA = T_y = 0$$

$$\int_A \sigma_z y dA = M_x \neq 0$$

$$\int_A \sigma_z x dA = -M_y = 0$$

$$\int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = M_z = 0$$

A

D

E

Tali EQUAZIONI ci forniscono le espressioni delle COSTANTI a, b, c

Dall'EQUAZIONE A (sostituendo in essa l'espressione della σ_z)

$$\int_A (ax + by + c) dA = N = 0$$



Applico la PROPRIETA' di LINEARITA' dell'INTEGRALE.

OSSERVAZIONI :

Nel caso fosse presente la sola SOLLECITAZIONE M_x , la TENSIONE σ_x dipende dalla sola COORDINATA y , ed AUMENTA in VALORE ASSOLUTO man. meno che ci si allontana dell' ASSE x .

Essa è:

- DIRETTAMENTE PROPORZIONALE al MOMENTO APPLICATO.
- INVERSAMENTE PROPORZIONALE al MOMENTO d'INERZIA della SEZIONE.

σ_x è NULLA
per $y=0$

$y=0$; EQUAZIONE ASSE x

ASSE y

ASSE x è detto ASSE NEUTRO

è detto ASSE di SOLLECITAZIONE

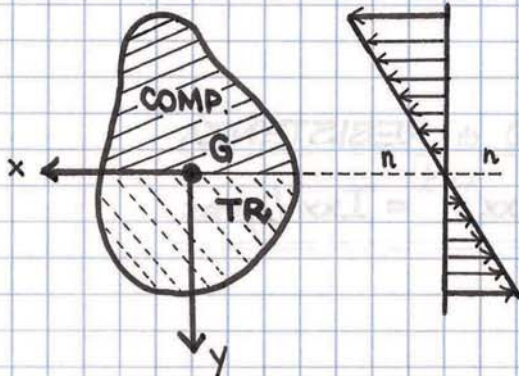
poiché la COPPIA M_x appartiene al PIANO yz

detto PIANO di SOLLECITAZIONE

FLESSIONE RETTA

ASSE di SOLLECITAZIONE

ASSE NEUTRO $n-n$



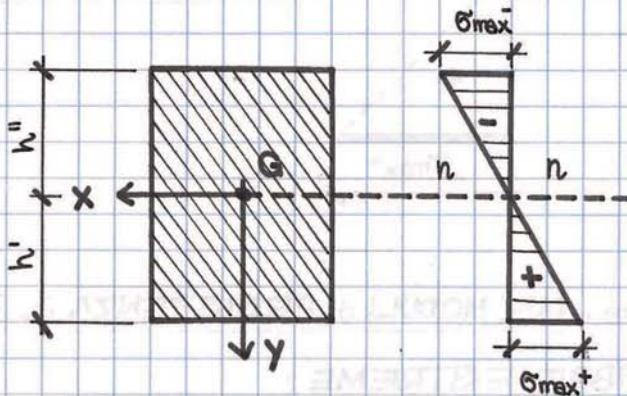
Il DIAGRAMMA delle TENSIONI si ottiene tracciando in DIREZIONE PERPENDICOLARE all'ASSE NEUTRO la FONDAMENTALE, NORMALMENTE alla quale si riportano i VALORI delle TENSIONI.

Riprendiamo DUE OSSERVAZIONI IMPORTANTI:

- l' ASSE NEUTRO e' BARICENTRICO;
- il DIAGRAMMA delle TENSIONI e' costituito da DUE TRIANGOLI.

⇒ Facciamo le seguenti DISTINZIONI e CONSIDERAZIONI:

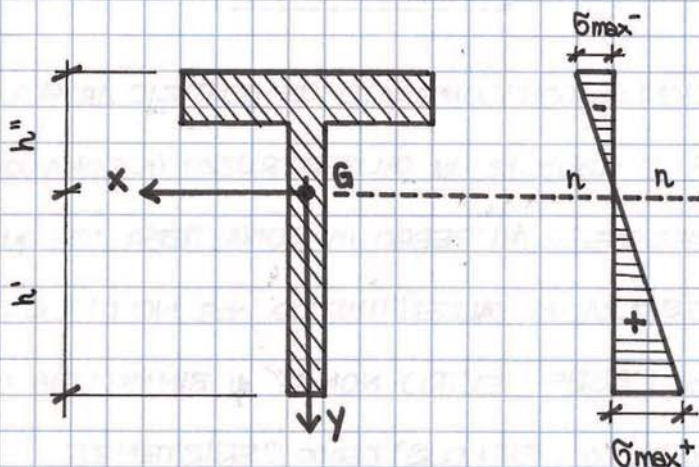
I) L'ASSE NEUTRO (BARICENTRICO) E' ANCHE ASSE DI SIMMETRIA DELLA SEZIONE E IL MATERIALE COSTITUENTE LA TRAVE PRESENTA RESISTENZE UGUALI A TRAZIONE E A COMPRESIONE.



- Le FIBRE ESTREME hanno UGUALE DISTANZA dell'ASSE NEUTRO, cioè $h' = h''$.
- Le TENSIONI MASSIME sono UGUALI in VALORE ASSOLUTO ma di SEGNO CONTRARIO.

$$\underline{|\sigma_{max^+}| = |\sigma_{max^-}|}$$

II) L'ASSE NEUTRO (BARICENTRICO) NON E' L'ASSE DI SIMMETRIA DELLA SEZIONE E IL MATERIALE COSTITUENTE LA TRAVE PRESENTA RESISTENZE UGUALI A TRAZIONE E A COMPRESIONE.

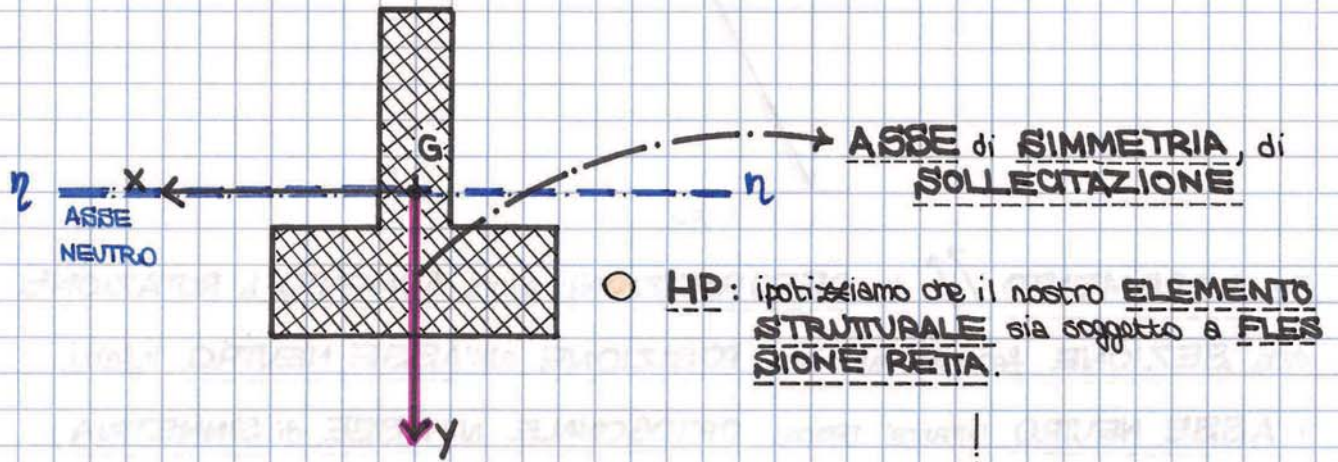


Avendo le FIBRE ESTREME a DISTANZE DIFFERENTI dell'ASSE NEUTRO, cioè $h' \neq h''$, le relative TENSIONI MASSIME risultano DIVERSE in VALORE ASSOLUTO e di SEGNO CONTRARIO.

$$\underline{|\sigma_{max^+}| \neq |\sigma_{max^-}|}$$

VALUTAZIONE del MOMENTO PLASTICO di una SEZIONE

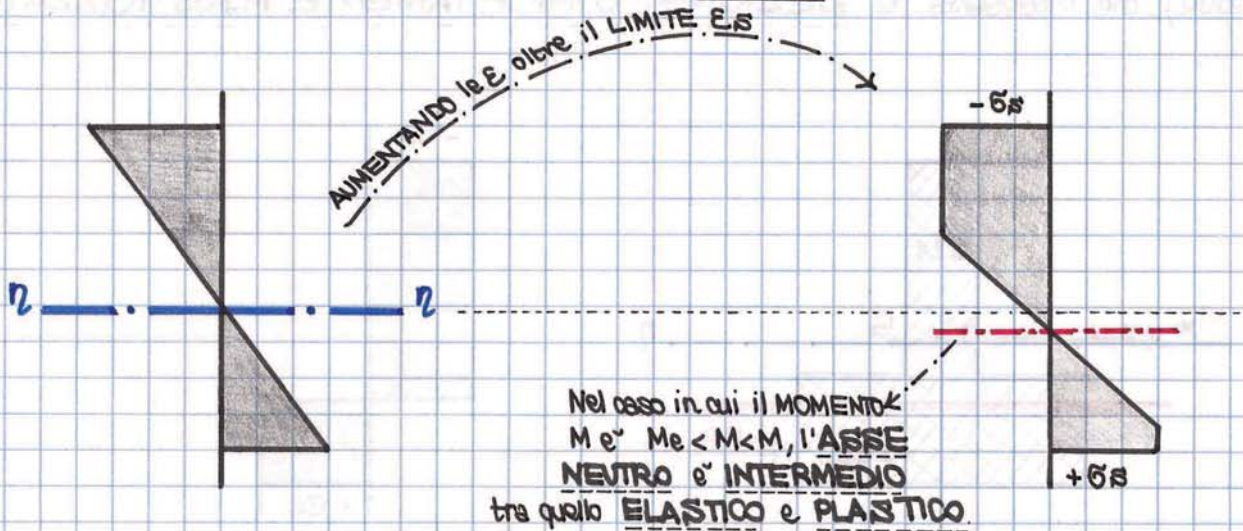
PUNTO di PARTENZA : SEZIONI con un SOLO ASSE di SIMMETRIA
coincidente con l'ASSE di FLESSIONE.



$$\sigma = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y$$

SOLLECITAZIONE regolata dalla FORMULA di NAVIER; l'ASSE NEUTRO ELASTICO passerà per il BARICENTRO G della SEZIONE, e coinciderà con l'ASSE BARICENTRICO x.

In CAMPO ELASTICO abbiamo un ANDAMENTO LINEARE delle TENSIONI, vale dunque la LEGGE di HOOKE $\sigma = E \cdot \epsilon$



Si osserva che se $\sigma < \sigma_s$ (TENSIONE di SNERVAMENTO) \Rightarrow il COMPOR-
TAMENTO rimane di TIPO ELASTICO.

Raggiunta la TENSIONE di SNERVAMENTO, a cui competerà la DEFORMAZIONE ϵ_s , se decidiamo di andare oltre, si evinca che le DEFORMAZIONI tenderanno ad AUMENTARE \nearrow , mentre lo STATO TENSIONIALE rimane INVARIATO.

Applichiamo la PROPRIETA' di LINEARITA' e di ADDITIVITA' rispetto il DOMI=
NIO di INTEGRAZIONE:

$$N = \int_{\Omega} \sigma_s \cdot d\Omega = \int_{\Omega_1} \sigma_s \cdot d\Omega + \int_{\Omega_2} \sigma_s \cdot d\Omega = 0$$

σ_s : TENSIONE di SNERVAMENTO e' una COSTANTE. \Rightarrow Posso portarla
fuori dal SEGNO di INTEGRALE.

$$-\sigma_s \int_{\Omega_1} d\Omega + \sigma_s \int_{\Omega_2} d\Omega = 0$$

Il SEGNO (-) sta ad indicare che nella "PORZIONE" Ω_1 , la nostra
SEZIONE e' SOGGETTA a COMPRESSIONE.

$$\Rightarrow -\int_{\Omega_1} d\Omega + \int_{\Omega_2} d\Omega = 0 \Rightarrow -\Omega_1 + \Omega_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_1 = \Omega_2}$$

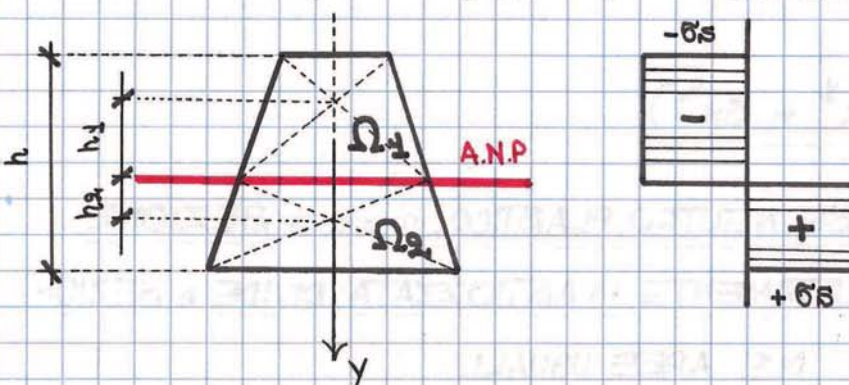


Nel CASO di SEZIONE COMPLETAMENTE PLASTICIZZATA, la
POSIZIONE dell' ASSE NEUTRO PLASTICO (ANP) DIVIDE la
SEZIONE in DUE AREE UGUALI.



L' ASSE NEUTRO ELASTICO (n-n) divide la SEZIONE in AREE
aventi MOMENTI STATICI UGUALI.

Supponiamo venga considerata la seguente SEZIONE:



Con riferimento allo STA=
TO TENSIONALE, pos=
siamo scrivere l'EQUAZIO=
NE del MOMENTO PLASTI=
CO.

$$\underline{\underline{\Omega = \Omega_1 + \Omega_2}} \quad \text{ma} \quad \underline{\underline{\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega^*}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \Omega^* + \Omega^*}}$$

$$\underline{\underline{\Omega = 2\Omega^*}}$$

$$\underline{\underline{\Omega^* = \frac{\Omega}{2}}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\Omega_1 = \frac{\Omega}{2}}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\Omega_2 = \frac{\Omega}{2}}}$$

In definitiva, il MOMENTO PLASTICO che induce la COMPLETA PLASTICIZZAZIONE della SEZIONE, può essere determinato come segue:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M_p = \sigma_s \cdot (|S_1^x| + |S_2^x|)}} &= \underline{\underline{\sigma_s \cdot (\Omega_1 \cdot h_1 + \Omega_2 \cdot h_2)}} \\ &= \underline{\underline{\sigma_s \cdot \frac{\Omega}{2} (h_1 + h_2)}} = \underline{\underline{\sigma_s \cdot Z}} \end{aligned}$$

dove con Z si intende il MODULO di RESISTENZA PLASTICO definito come:

$$\underline{\underline{Z = (|S_x^1| + |S_x^2|)}}$$

La TENSIONE di SNERVAMENTO σ_s può essere definita nei due seguenti modi:

$$\text{a} \quad \underline{\underline{\sigma_s = \frac{M_e}{W}}}$$

$$\text{b} \quad \underline{\underline{\sigma_s = \frac{M_p}{Z}}}$$

EGUAGLIAMO le DUE EQUAZIONI a e b:

$$\underline{\underline{\frac{M_e}{W} = \frac{M_p}{Z}}}$$

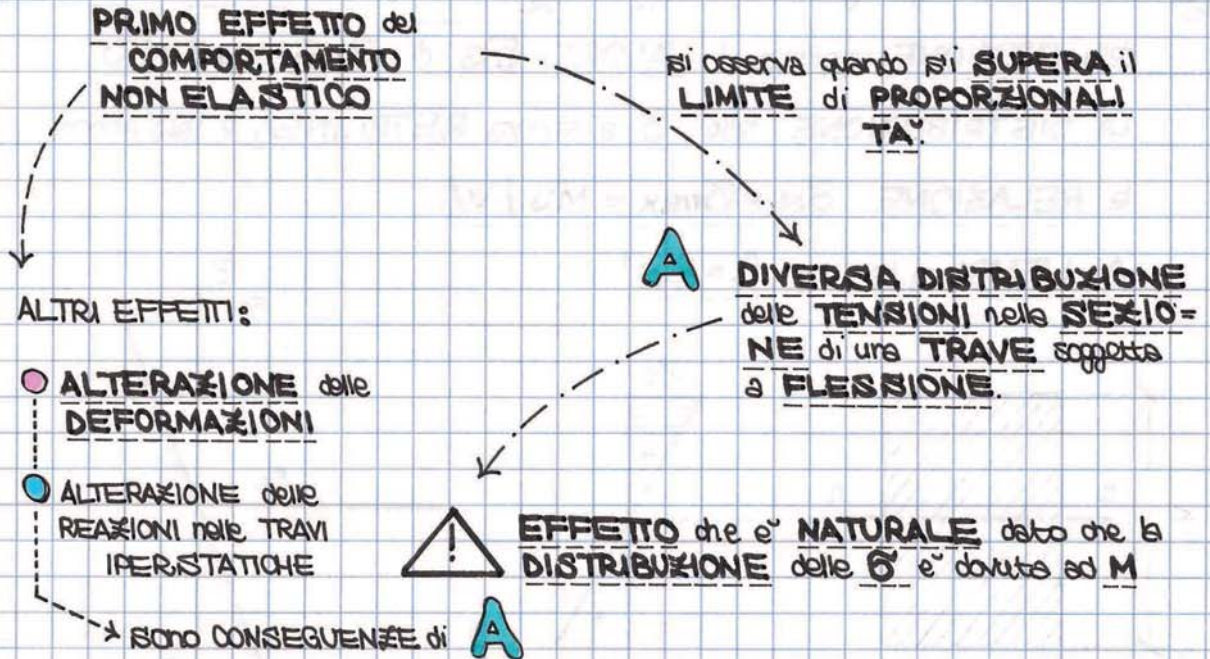
$$\Rightarrow \underline{\underline{M_p = M_e \cdot \frac{Z}{W} = M_e \cdot \varphi}}$$

$$\underline{\underline{\varphi = \text{COEFFICIENTE di FORMA}}}$$

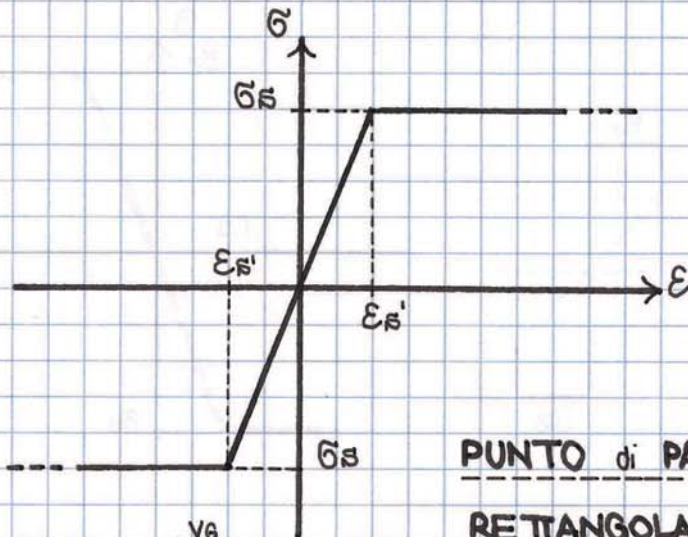
$$\underline{\underline{= Z/W}}$$

DISTRIBUZIONE delle TENSIONI nelle SEZIONI delle TRAVI

SEZIONE RETTANGOLARE soggetta a FLESSIONE



Consideriamo una **TRAVE** con **SEZIONE RETTANGOLARE**. Supponiamo che il **MATERIALE** che la costituisce, sia **ELASTICO PERFETTAMENTE PLASTICO**, dunque abbia il seguente **DIAGRAMMA σ - ϵ** :



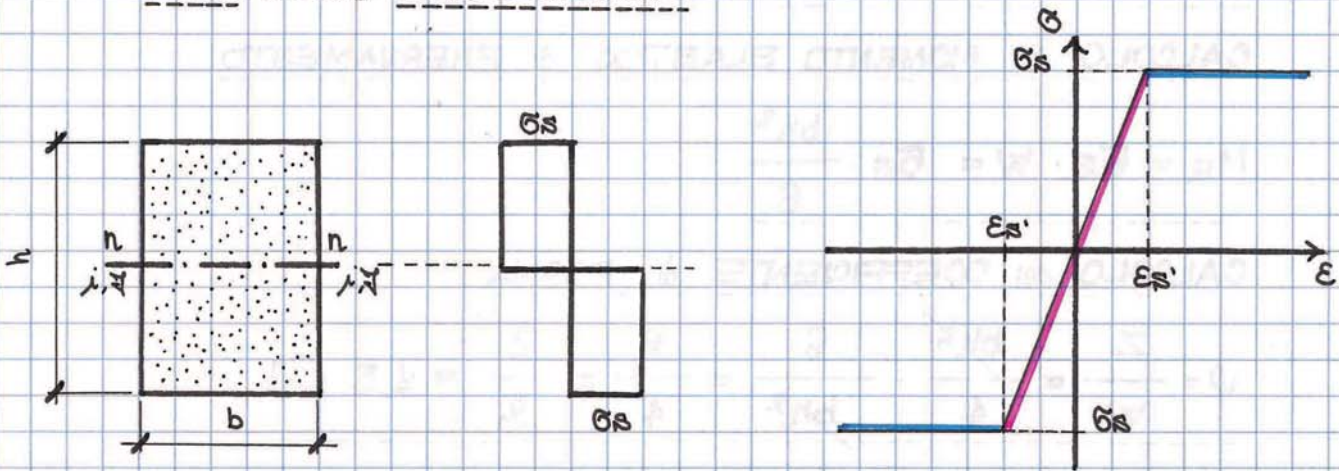
IPOTESI: supponiamo che il **COMPORTAMENTO** a **TRAZIONE** sia **UGUALE** a quello a **COMPRESSIONE**

PUNTO di **PARTENZA**: **TRAVE** di **SEZIONE** **RETTANGOLARE** **LARGA** b e **ALTA** h , soggetta a **MOMENTO FLETTENTE** M .

Fino a che il **COMPORTAMENTO** è **ELASTICO**, le **TENSIONI MASSIME** sono date da:

$$\sigma'_{TR} = -\sigma''_{COM} = M/W$$

III) Al CRESCERE di M le RETTE e sempre si AVVICINANO sempre più all' ASSE NEUTRO, al quale TENDONO quando la CURVATURA diventa MOLTO GRANDE.



DETERMINAZIONE del MOMENTO PLASTICO della SEZIONE RETTANGOLARE

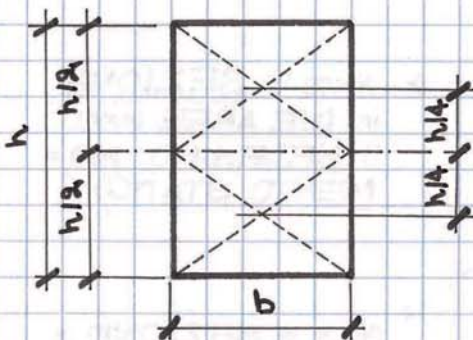
$M_p = \sigma_s \cdot Z$

Z: MODULO PLASTICO

$M_e = \sigma_s \cdot W$

W: MODULO ELASTICO

CALCOLO del MODULO PLASTICO Z



$Z = |S_1| + |S_2|$

$|S_1| = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$

$|S_2| = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$

$\Rightarrow Z = |S_1| + |S_2| = \frac{bh^2}{8} + \frac{bh^2}{8} = \frac{2bh^2}{8} = \frac{bh^2}{4}$

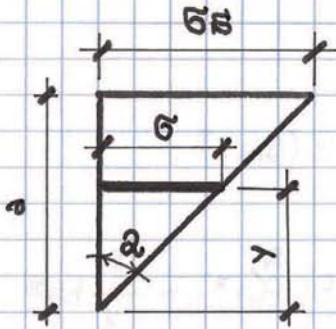
CALCOLO del MODULO ELASTICO W

$I_{xx0} = \frac{1}{12} bh^3$

$W = \frac{I_{xx0}}{y_{max}} = \frac{1}{12} bh^3 \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$

$y_{max} = h/2$

Considero il TRIANGOLO OAB:

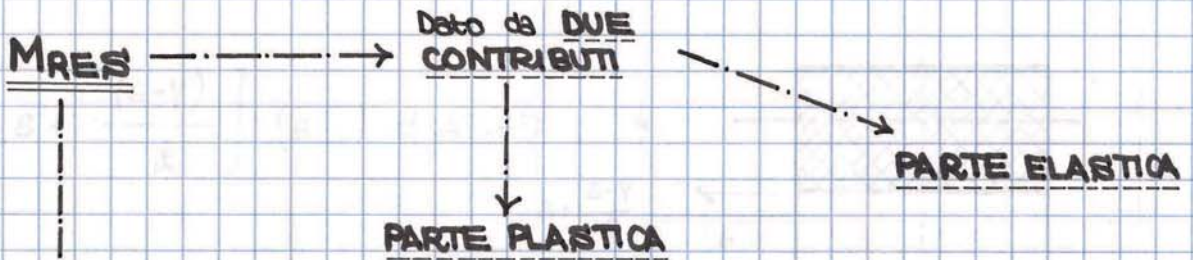


$$\sigma_s = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_s}{a}$$

$$\sigma = y \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{y}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_s}{a} \Rightarrow \sigma = \sigma_s \cdot \frac{y}{a}$$

MOMENTO RESISTENTE della SEZIONE



$$M_{RES} = \int_{\Omega} \sigma \cdot y \cdot d\Omega$$

$$\Rightarrow M_{RES} = \int_{-a}^{+a} \sigma_s \cdot \frac{y}{a} \cdot y \cdot d\Omega + 2 \int_a^{h/2} \sigma_s \cdot y \cdot d\Omega$$

σ_s, a : sono delle **COSTANTI** : posso portarle fuori dal SEGNO di INTEGRALE.

$$\Rightarrow M_{RES} = \frac{\sigma_s}{a} \cdot \int_{-a}^{+a} y^2 \cdot d\Omega + 2\sigma_s \int_a^{h/2} y \cdot d\Omega$$

MOMENTO di INERZIA
della PARTE di SEZIONE
in FASE ELASTICA

MOMENTO STATICO
della PARTE di
SEZIONE in FASE
PLASTICA

$$\Rightarrow \underline{M_{RES} = \sigma_S (W_E + S_P)}$$

$$\Rightarrow M_{RES} = \sigma_S \left(\underbrace{\frac{2}{3} ba^2}_{W_E} + \underbrace{\frac{bh^2}{4} - ba^2}_{S_P} \right)$$

$$\Rightarrow M_{RES} = \sigma_S \left(\frac{2}{3} ba^2 - ba^2 + \frac{bh^2}{4} \right) = \sigma_S \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{ba^2}{3} \right)$$

b e' FATTOR COMUNE

$$\Rightarrow M_{RES.} = \sigma_S \cdot b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right) \quad \text{A} \quad \triangle ! \quad M_P = \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{4} \quad \text{MOMENTO PLASTICO SEZIONE}$$

Vogliamo scrivere tale RELAZIONE in fz del MOMENTO PLASTICO M_P

$$\sigma_S \cdot \frac{ba^2}{3} = \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{4} \cdot K$$

$$\Rightarrow K = \frac{\cancel{\sigma_S} \cdot ba^2}{3} \cdot \frac{4}{\cancel{\sigma_S} \cdot bh^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4a^2}{h^2} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2a}{h} \right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{M_{RES.} = M_P \left[4 - \frac{4}{3} \left(\frac{2a}{h} \right)^2 \right]}$$

Riprendo l' EQUAZIONE A

$$M_{RES.} = \sigma_S \cdot b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right)$$

○ a = 0 ⇒ NON ho FASE ELASTICA → La mia SEZIONE e' COMPLETAMENTE PLASTICIZZATA

$$\Rightarrow M_{RES.} = \sigma_S \cdot b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{0}{3} \right) = \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{4}$$

● a = h/2 ⇒ La mia SEZIONE LAVORA in FASE ELASTICA, dunque NON vi e' alcun TRATTO PLASTICIZZATO.

FORMAZIONE della CERNIERA PLASTICA

Considero una TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA, soggetta all'applicazione di un CARICO CONCENTRATO P in MEZZERIA.

Supponiamo che essa abbia una SEZIONE RETTANGOLARE.

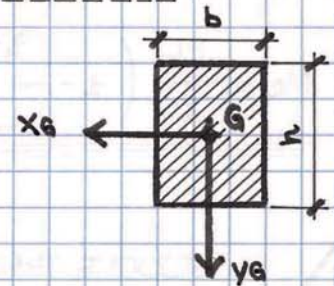
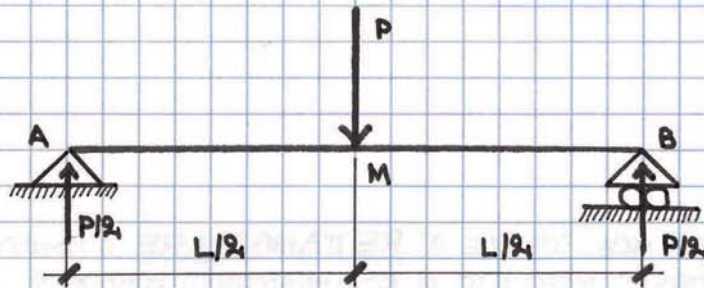
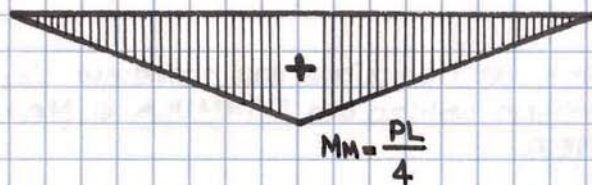
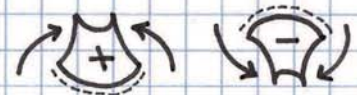
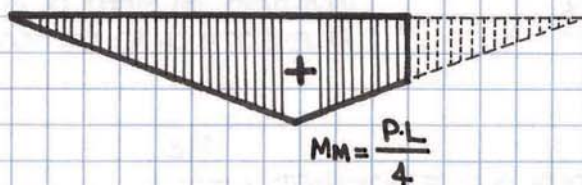
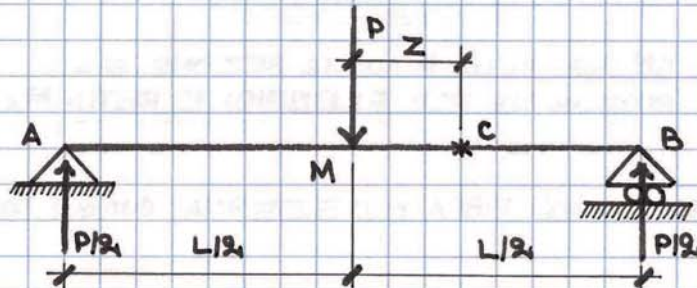


DIAGRAMMA dei MOMENTI ELASTICI



Mi pongo ad una DISTANZA Z dalla MEZZERIA.



Calcolo il MOMENTO FLETTENTE nel PUNTO C:

$$M_C = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} + z \right) - P \cdot z = \frac{PL}{4} + \frac{Pz}{2} - P \cdot z = P \left(\frac{L}{4} + \frac{z}{2} - z \right)$$

$$\Rightarrow M_C = P \left(\frac{L}{4} - \frac{z}{2} \right)$$

Il MOMENTO di SNERVAMENTO M_S Bars:

$$M_S = \sigma_S \cdot W_E \Rightarrow M_S = \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{6}$$

Il MOMENTO MASSIMO lo si osserva in MEZZERIA:

$$M_{MAX} = \frac{P_S \cdot L}{4}$$

P_S : e' il LIVELLO di CARICO che comportera' il RAGGIUNGIMENTO del LIMITE di SNERVAMENTO.

\Rightarrow MOMENTO di SNERVAMENTO = MOMENTO MASSIMO in CAMPATA $\Rightarrow M_S = M_{MAX}$

$$\Rightarrow \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{6} = \frac{P_S \cdot L}{4}$$

$$\Rightarrow P_S = \text{CARICO di SNERVAMENTO} = \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{4}{L} = \frac{2}{3} \sigma_S \cdot \frac{bh^2}{L}$$

Se $P > P_S$??

Vogliamo identificare la SEZIONE posta a DISTANZA z_c dalla MEZZERIA, tale da essere sollecitata dal MOMENTO M_S .

$$\Rightarrow P \cdot \frac{L}{4} \left(1 - \frac{2z_c}{L} \right) = \frac{P_S \cdot L}{4}$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{L}{4} - \frac{P \cdot L}{4} \cdot \frac{2z_c}{L} = \frac{P_S \cdot L}{4}$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{L}{4} - \frac{P \cdot z_c}{2} = \frac{P_S \cdot L}{4} \Rightarrow \frac{P \cdot z_c}{2} = \frac{P \cdot L}{4} - \frac{P_S \cdot L}{4}$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{P \cdot L}{4} \cdot \frac{2}{P} - \frac{P_S \cdot L}{4} \cdot \frac{2}{P}$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cdot \frac{P_S}{P} \Rightarrow z_c = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{P_S}{P} \right)$$

CASI LIMITE:

● $Z = Z_c$ $\Rightarrow a = h/2$ SEZIONE al LIMITE di INERVAMENTO \Rightarrow SEZIONE che possiede come MOMENTO RESISTENTE il M_s .

○ $Z = 0$ \Rightarrow il VALORE di a e' f_z del RAPPORTO P/P_s

\Rightarrow se $P = \frac{3}{2} P_s \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ LA SEZIONE e' COMPLETAMENTE PLASTICIZZATA.

PRATICA CORRENTE \rightarrow TEORIA dell'ANALISI LIMITE

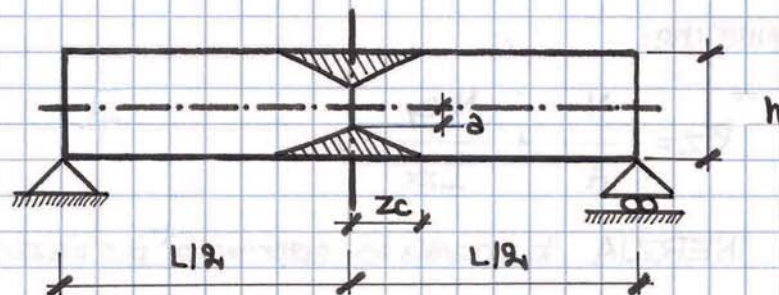
si considera la CERNIERA PLASTICA LOCALIZZATA in un PUNTO

CERNIERA \rightarrow dotata di ATRITO

Se $M < M_p \Rightarrow$ La CERNIERA rimane RIGIDA \Rightarrow NON nasce la CERNIERA PLASTICA

Se $M = M_p \Rightarrow$ mantiene il VALORE del MOMENTO PLASTICO e consente la ROTAZIONE RELATIVA tra i DUE TRONCHI di TRAVE.

⚠ Se si genera la CERNIERA PLASTICA in questa STRUTTURA (TRAVE SEMPLICEMENTE APOGGIATA) \Rightarrow il SISTEMA diventerà LABILE.



$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} \cdot y \right)$$

UGUAGLIANDO A ZERO tale TERMINE, otteniamo l'EQUAZIONE dell'ASSE NEUTRO.



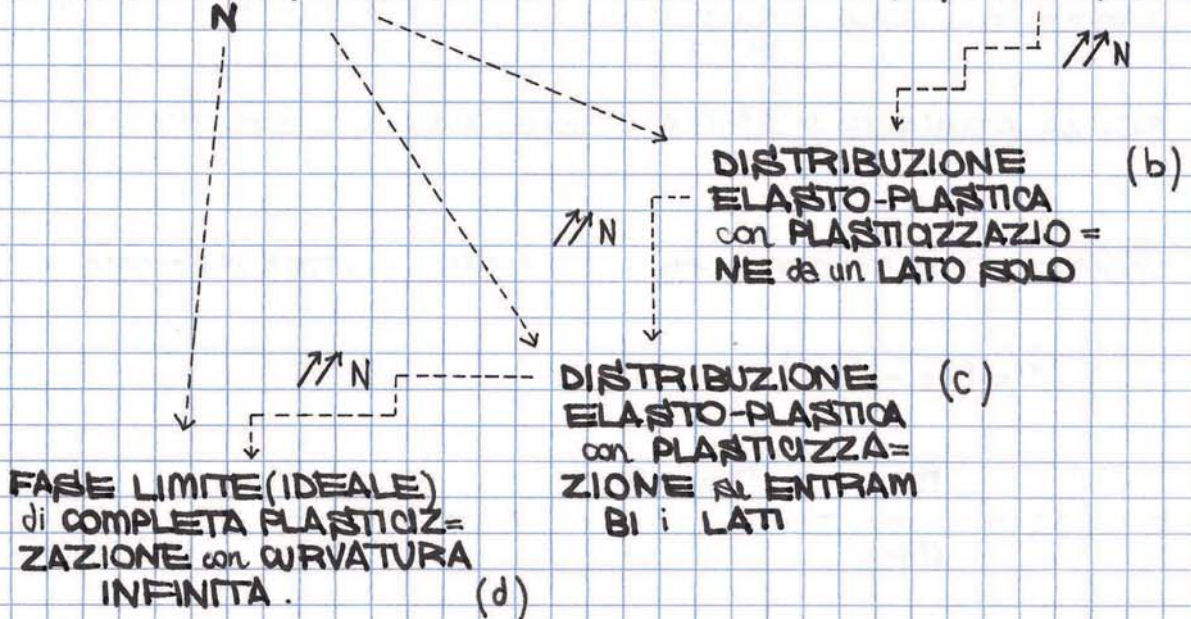
Per BASSE ECCENTRICITA' l'ASSE NEUTRO NON INTERSECA la SEZIONE.
 ⇒ Le TENSIONI σ_z sono TUTTE CONCORDI.

Per ALTE ECCENTRICITA' l'ASSE NEUTRO INTERSECA la SEZIONE.
 ⇒ Le TENSIONI σ_z INVERTONO il SEGNO.

NOCCIOLO CENTRALE d' INERZIA

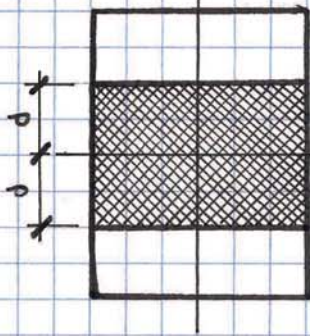
AREA ENTRO cui deve CADERE lo SFORZO NORMALE ECCENTRICO, affinché l'ASSE NEUTRO n-n NON INTERSECHI la SEZIONE della TRAVE.

Facciamo CRESCERE N → FASE ELASTICA (a)



$$m = 1 - \frac{S_{Pd}}{S_P} = f_z \left(\frac{N}{N_P} \right) = f_z(n)$$

$$n = \frac{N}{N_P} = \frac{2 \cdot b \cdot d \cdot \sigma_s}{\sigma_s \cdot b \cdot h} = 2 \frac{d}{h} \quad (\text{SEZIONE RETTANGOLARE})$$



$$S_P = \frac{bh^2}{4}$$

$$S_{Pd} = b \cdot d \cdot \frac{d}{2} \cdot 2 = bd^2$$

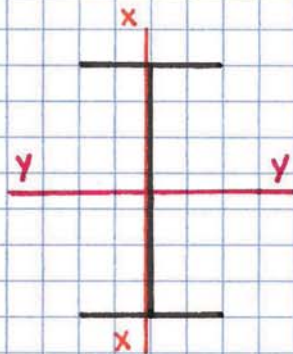
$$\Rightarrow m = 1 - bd^2 \cdot \frac{4}{bh^2} = 1 - \left(4 \frac{d^2}{h^2} \right)$$

$\Rightarrow m = 1 - n^2$ EQUAZIONE di GIRMANN

definisce una CURVA/LINEA di INTERAZIONE

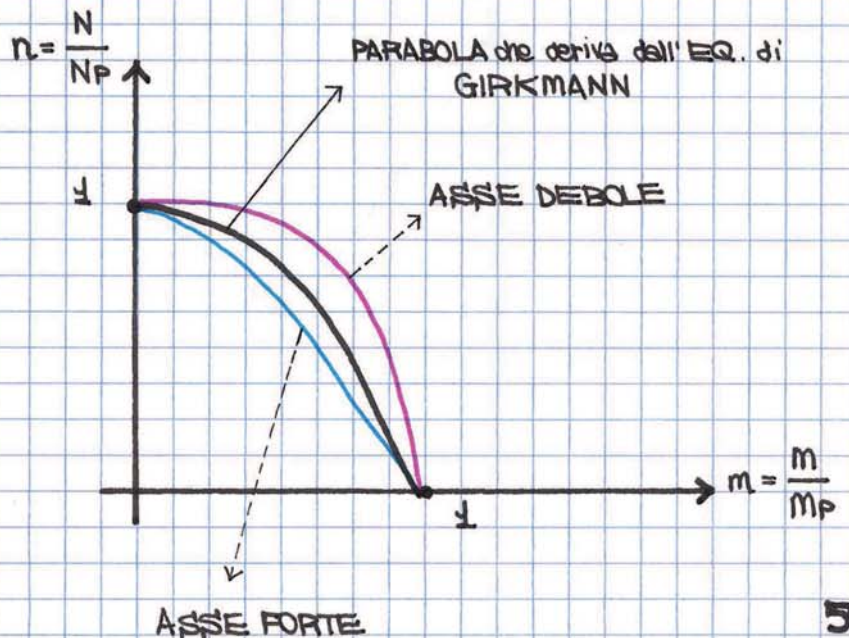
\Rightarrow PIANO $m-n$ \Rightarrow PRIMO QUADRANTE \Rightarrow otteniamo una PARABOLA (CURVA di INTERAZIONE)

SEZIONE a DOPPIO \rightarrow INFLESSA secondo il suo ASSE FORTE

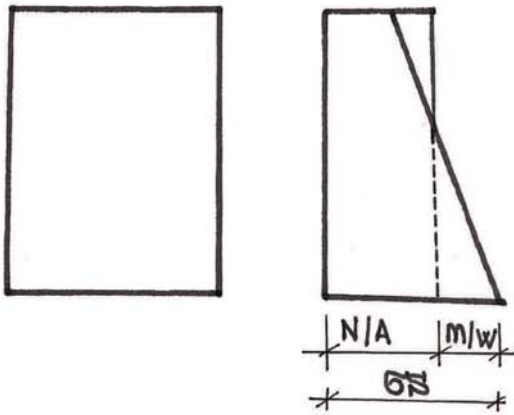


yy: ASSE FORTE

xx: ASSE DEBOLE



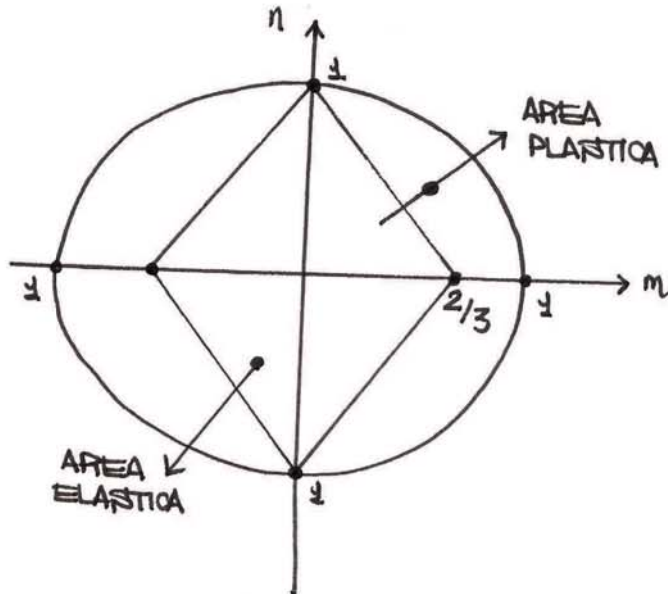
SEZIONE RETTANGOLARE



$$\frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \sigma_p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N}{A \sigma_p} + \frac{M}{W \sigma_p} = \frac{N}{N_p} + \frac{M}{M_p} = 1$$

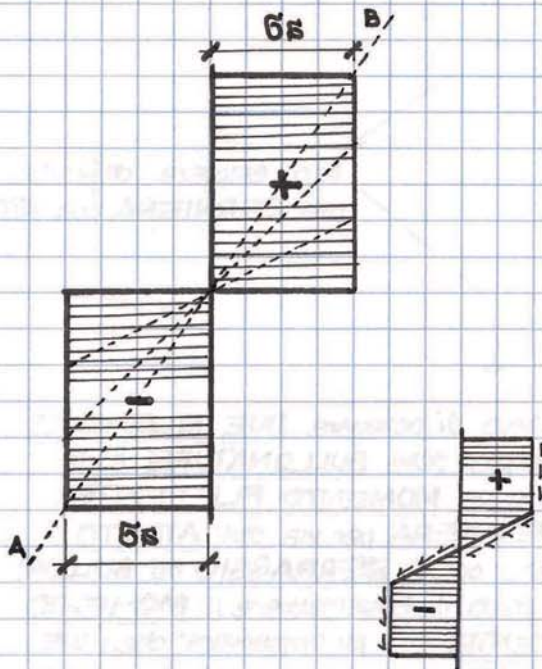
$$M_p = M_E$$

$$M_p = \frac{2}{3} M_P$$



Cerchiamo di capire cosa capita nelle SEZIONI CRITICHE (INCASTRO + MEZZERIA)

A INIZIAMO dalla SEZIONE di INCASTRO



Attraverso la RETTA AB, ho raggiunto il DIAGRAMMA TENSIONALE del MATERIALE ELASTO-FRAGILE.
 Man mano che si INCREMENTA il CARICO, la CURVATURA AUMENTA, ma la TENSIONE σ NON andrà ad AUMENTARE, bensì PLAFONATA.

Dunque, il DIAGRAMMA per un ulteriore STEP di CARICO è contraddistinto da un TRATTO di σ COSTANTE (TRATTO PLASTICIZZATO) seguito da un TRATTO di σ DECRESCENTE con RISPOSTA ELASTICO LINEARE (di TRAZIONE), seguito da un TRATTO ELASTICO di COMPRESSIONE, seguito ulteriormente da un TRATTO PLASTICIZZATO a σ_s COSTANTE.

Se si incrementa ulteriormente il CARICO, la CURVATURA AUMENTERÀ, sino a che il TRATTO ELASTICO LINEARE DIMINUIRÀ sempre di più, mentre CRESCERÀ il TRATTO PLASTICIZZATO. In conclusione otterremo un DIAGRAMMA BIRETTANGOLARE, che contraddistingue la COMPLETA PLASTICIZZAZIONE della SEZIONE.

OSSERVAZIONE:

Con il MATERIALE ELASTO-FRAGILE si osserva che la σ_{ul} è stata raggiunta da un'unica FIBRA, quella più ESTERNA.

Nel caso in cui il nostro MATERIALE avesse delle RISORSE PLASTICHE, se noi continuiamo ad applicare ed incrementare il CARICO, si arriverà nella condizione in cui tutte le FIBRE hanno raggiunto la TENSIONE ULTIMA.

Cio' significa che, se noi incrementiamo ulteriormente il CARICO, le TENSIONI NON possono più CRESCERE. Dunque, questa ZONA che era di MUTUO INCASTRO tra DE SEZIONI ADIACENTI, adesso è diventata una CERNIERA PLASTICA.

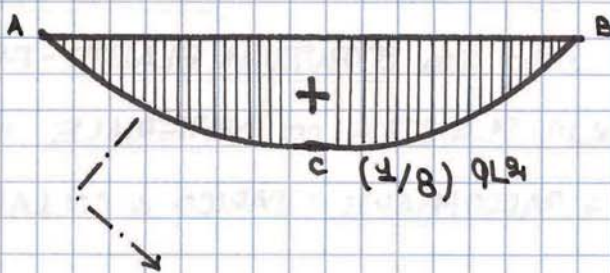
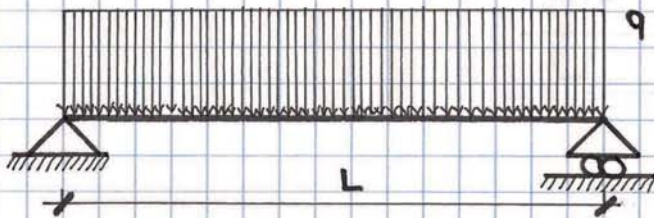
Arriverò a COLASSO quando si PLASTICIZZERA' anche la SEZIONE MEZZERIA.

Con la FORMAZIONE delle TRE CERNIERE PLASTICHE, la mia STRUTTURA diventa LABILE (SECONDO TEOREMA delle CATENE CINEMATICHE).

A questo punto ho raggiunto il PIC LOAD, ovvero il MASSIMO CARICO che la STRUTTURA può SOPPORTARE.

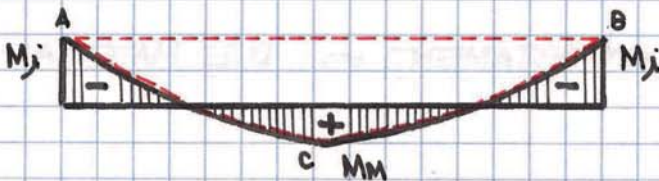
Il PIC LOAD viene raggiunto con un MOMENTO all' INCASTRO che è UGUALE, NUMERICAMENTE, al MOMENTO in MEZZERIA. Tale MOMENTO è il MOMENTO PLASTICO.

Nella SITUAZIONE di COLASSO, devo inviluppare i MOMENTI ISOSTATICI:



$$M_j = M_m = \frac{qL^2}{8} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{qL^2}{16}$$

perché a COLASSO
M_j ed M_m sono
UGUALI



$$M_j + M_m = \frac{1}{16} qL^2 + \frac{1}{16} qL^2 = \frac{3}{16} qL^2 = \frac{qL^2}{8}$$

perdiamo quel RAPPORTO
1 a 2 che avevamo in
FASE ELASTICA.

In questa SITUAZIONE interviene una RIDISTRIBUZIONE MOMENTI. \Rightarrow con la RISPOSTA ELASTICA noi avevamo un MOMENTO all' INCASTRO che era il DOPPIO del MOMENTO in MEZZERIA.

Quando si entra in FASE PLASTICA il MOMENTO d' INCASTRO smette di CRESCERE, mentre crendosi il MOMENTO in MEZZERIA, RAPIDAMENTE (perché con uno SCHEMA STATICO più SFAVOREVOLE) fino a quando i DUE MOMENTI non sono UGUALI, e a quel PUNTO si giungerà al COLASSO.

REGIME ELASTO-PLASTICO \Rightarrow cambia lo **SCHEMA STATICO** durante

le **FASI** di **CARICO**. Partiamo da un

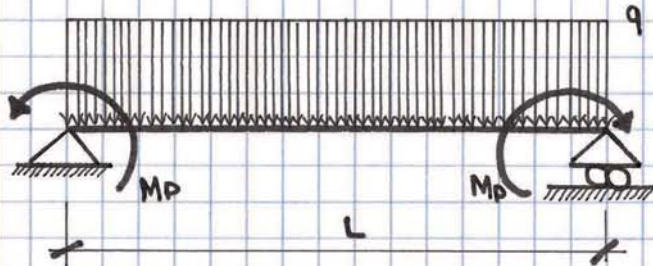
DOPIO INCASTRO, in seguito si for-
meranno le **DUE CERNIERE PLASTICHE**

agli **INCASTRATI** \Rightarrow negli **INCASTRATI** ci saran-
no **DUE MOMENTI COSTANTI** che **NON**
cresceranno più. Alla **FORMAZIONE** della

TERZA CERNIERA le mie **FRECCHE**
diventeranno **INDEFINITE** perché si è

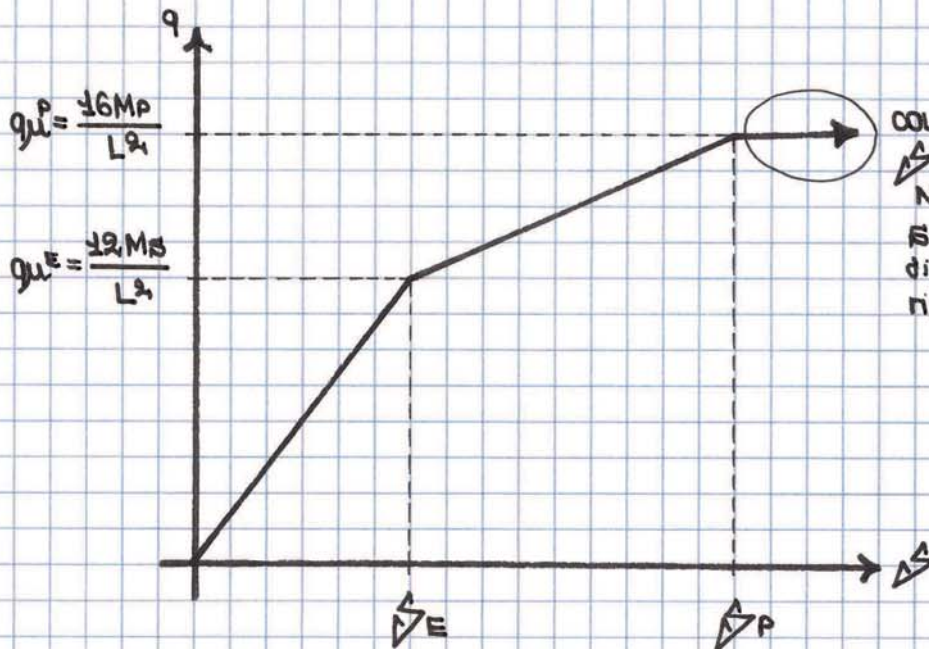
raggiunto un **CINEMATISMO**

COLLASSO.




FRECCIA per SOVRAPPOSIZIONE di
FRECCHE in DUE SCHEMI STATICI
DIFFERENTI.

$$\Delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI} - \frac{M_p \cdot L^2}{8EI}$$



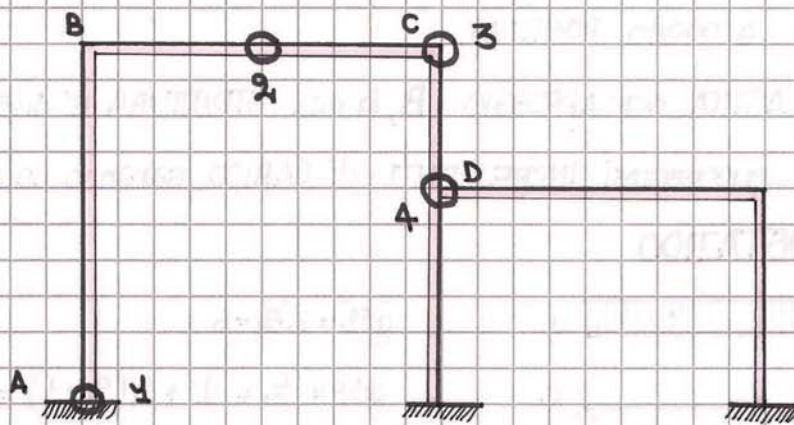
COLLASSO STRUTTURALE,
CRESCOE INDEFINITA-
MENTE
Se aggiungo un **GRANELLO**
di **SABBIA**, le **DEFORMAZIONI**
risulteranno **INDEFINITE**.

generica SEZIONE 6, i 2 TRONCHI di TRAVE erano perfettamente INCASTRATI. Se aggiungo la CERNIERA \Rightarrow i 2 TRONCHI acquistano un GRADO di LIBERTÀ, ovvero possono RUOTARE . Se io tolgo n GRADI di VINCOLO la mia STRUTTURA è diventata ISOSTATICA, dunque ci vuole una ulteriore CERNIERA PLASTICA, ovvero devo ELIMINARE un'ulteriore CONDIZIONE di VINCOLO perché la STRUTTURA diventi un MECCANISMO. (LABILE).

ATTENZIONE!!! Questa è una REGOLA GENERALE perché \exists delle ECCEZIONI.

4) COLLASSO PARZIALE

Immaginiamo di avere un TELAIO MULTIPLO a 3 GAMBE.



$$\begin{aligned} gdl &= 3n = 3 \\ gdl &= 3 \cdot 3 = 9 \\ gdl &= 3 - 9 = -6 \end{aligned}$$

$n=6$ GRADI di IPERSTATICITÀ

\Rightarrow Ci aspettiamo che si formino 7 CERNIERE PLASTICHE

Se si formassero le CERNIERE 1, 2, 3, 4, allora il TRATTO A, B, C, D è diventato LABILE \Rightarrow lo sono arrivato a COLLASSO di una parte della STRUTTURA con la FORMAZIONE di sole 4 CERNIERE PLASTICHE.

Mi sarei aspettato il COLLASSO con la FORMAZIONE di 7 CERNIERE PLASTICHE, ma in REALTÀ raggiungo un COLLASSO PARZIALE con sole 4 CERNIERE PLASTICHE, e dunque devo interrompere il PROCESSO di CARICO perché mi è CROLLATA una parte di STRUTTURA.

In REALTÀ abbiamo realizzato un CINEMATISMO PARZIALE che rappresenta un COLLASSO della STRUTTURA.

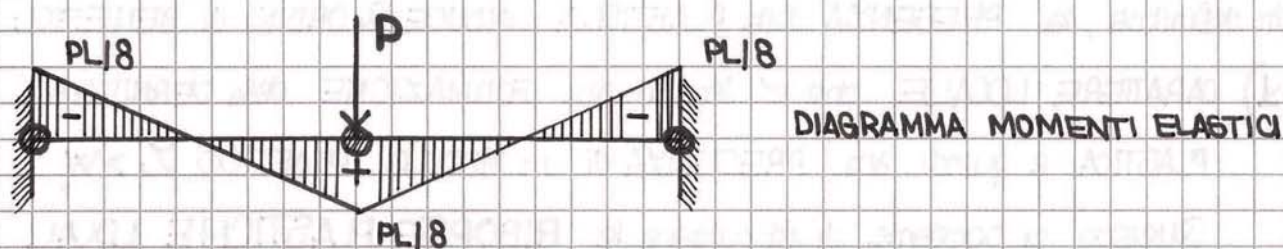
CERNIERE PLASTICHE, dunque, in generale ho ulteriori RISORSE nella STRUTTURA che derivano dalla FORMAZIONE SUCCESSIVA delle n. CERNIERE PLASTICHE.

Sulla determinata SEZIONE, dal punto di vista LOCALE, si può indagare su quali siano le RISORSE PLASTICHE, per mezzo del COEFFICIENTE di FORMA $\psi = M_p / M_{el} = \chi$. Una volta superato il LIMITE ELASTICO abbiamo a disposizione delle RISORSE prima di arrivare al LIMITE PLASTICO. \Rightarrow VANTAGGIO di CARATTERE LOCALE

Abbiamo poi dei VANTAGGI di CARATTERE GLOBALE. Molto spesso, una volta che è stato raggiunto il LIMITE PLASTICO, si forma una CERNIERA PLASTICA, la quale comporta un CAMBIAMENTO dello SCHEMA STATICO, con conseguente ridistribuzione dei MOMENTI FLETTENTI. Questo si può notare essenzialmente nelle STRUTTURE IPERSTATICHE, perché nelle STRUTTURE ISOSTATICHE, la formazione di una CERNIERA PLASTICA comporterà il COLLASSO delle stesse.

ATTENZIONE!!! NON è sempre VERO che nelle STRUTTURE IPERSTATICHE avvenga una RIDISTRIBUZIONE.

Consideriamo il seguente caso:



Se si supera il LIMITE ELASTICO si evince che le 3 CERNIERE PLASTICHE si formeranno contemporaneamente. Infatti passeremo da un SISTEMA IPERSTATICO al SISTEMA LABILE per uno stesso LIVELLO di CARICO (incrementando P). Arriviamo a COLLASSO con la stessa distribuzione di MOMENTO che avevamo all'inizio.

- 3) Il MATERIALE rimanga DUTILE fino al COLLASSO (soglia plastica molto estesa).
- 4) Il MOMENTO PLASTICO non venga influenzato dalla presenza di N e T e di forze concentrate agenti nella sezione in cui viene raggiunto (H_p pesante \Rightarrow si possono introdurre dei coefficienti correttivi da applicare al MOMENTO PLASTICO, quando c'è la presenza di altre caratteristiche della sollecitazione. Le forze concentrate potrebbero provocare dei disturbi riguardo il MP, ma in queste zone andiamo ad applicare dei rinforzi).
- 5) Il RAGGIUNGIMENTO del CARICO di COLLASSO avvenga in assenza di FENOMENI di INSTABILITÀ LOCALE (per es. sbandamento delle ALI di un profilo a doppio T) e di INSIEME
- 6) CARICHI CRESCENTI tutti PROPORZIONALMENTE (non vale più il principio di sovrapposizione degli effetti, dunque dobbiamo scegliere come determinare una STORIA di CARICO) del valore iniziale al VALORE FINALE che comporta il COLLASSO della STRUTTURA.
- 7) DEFORMAZIONI a "COLLASSO" (spostamenti che subisce la STRUTTURA) siano ININFLUENTI sulla GEOMETRIA delle AZIONI
- 8) CONNESSIONI STRUTTURALI in grado di trasmettere completamente il MOMENTO PLASTICO.

Se noi ci riferiamo ad un **TRONCO ELEMENTARE** della **TRAVATURA** di **LUNGHEZZA** ds , ed **INTEGRIAMO** rispetto tutto il **SISTEMA**, allora posso scrivere che il **LAVORO INTERNO** L_i sarà:

$$L_i = \int_{SISTEMA} (N \cdot \Delta d_s + T \cdot dy + M \cdot \Delta d\varphi)$$

dove:

- Δd_s rappresenta la variazione di spostamento lungo l'asse dovuta allo SFORZO NORMALE applicato;
- dy è lo spostamento relativo tra due facce contigue dovuto al taglio;
- è la rotazione delle facce estreme del concio che stiamo considerando

Noi possiamo però ammettere che in virtù delle grandi deformazioni che si concentrano nelle **CERNIERE PLASTICHE**, la struttura sia costituita da un insieme di elementi **RIGIDI**, ove si osservino delle **DEFORMAZIONI ELASTICHE** che siano molto minori rispetto quelle che si verificano nelle **CERNIERE PLASTICHE** anzidette, connessi da **CERNIERE PLASTICHE**.

Ora:

possiamo dire che i grandi spostamenti avvengono nelle **CERNIERE PLASTICHE**, e per di più in esse la funzione **MOMENTO** acquisisce il massimo assoluto pari al **MOMENTO PLASTICO**, allora si può affermare che il **LAVORO INTERNO** sia svolto essenzialmente sia svolto essenzialmente nelle **CERNIERE PLASTICHE**. Questo ci consente di dire che in relazione all'applicazione dei carichi, il **LAVORO** all'interno della struttura sia compiuto dai **MOMENTI PLASTICI**, in corrispondenza dei quali si osservano delle **ROTAZIONI PLASTICHE**. Dunque il **PLV** lo possiamo esprimere per mezzo della seguente equazione:

$$L_e = \sum_{i=1}^k p_i \cdot \delta_i = \sum_{j=1}^M M_j \cdot \theta_j = L_i$$

Dove con:

- m si intende il numero di CERNIERE PLASTICHE presenti nella struttura;
- ϑ ROTAZIONI PLASTICHE nella zona di FORMAZIONE di una CERNIERA PLASTICA.

Nel caso in cui, invece di carichi concentrati, ci fossero dei carichi **DISTRIBUITI**, il **LAVORO INTERNO NON** subisce modifiche, a differenza che varierà il **LAVORO ESTERNO**. Si può dunque scrivere che:

$$L_e = \int_{sistema} p \cdot \delta dx = \sum_{j=1}^M M_j \cdot \theta_j = L_i$$

nella quale:

- δ rappresenta lo spostamento che si ha nella medesima direzione del p elementare.

Il **PLV** ci permette dunque di andare a semplificare in parte il problema, perché ci dà l'opportunità di calcolare il **LAVORO INTERNO** in relazione ad una singola **CARATTERISTICA di SOLLECITAZIONE**, dunque il **MOMENTO PLASTICO**, e poi in punti singolari ove si formano le **CERNIERE PLASTICHE**.

ESEMPIO

$$\delta = \frac{L}{4} \cdot \operatorname{tg}\vartheta$$

ma essendo ϑ un angolo infinitesimo, allora possiamo approssimare la tangente di ϑ a ϑ stesso, dunque lo spostamento δ sarà:

$$\delta = \frac{L}{4} \cdot \vartheta$$

Allora adesso possiamo valutare quale sia il **LAVORO ESTERNO** ed il **LAVORO INTERNO**:

a) LAVORO ESTERNO

Sarà dato dai contributi dei due **CARICHI P · (L/2)**:

$$L_e = 2 \cdot \frac{P \cdot L^2}{8} = \frac{P \cdot L^2}{4} \cdot \vartheta$$

dove il 2 sta ad indicare che l'effetto dei due CARICHI è UGUALE.

b) LAVORO INTERNO

E' compiuto dai **MOMENTI PLASTICI**, che sono presenti nelle **CERNIERE** alle quali si andranno ad attribuire le **ROTAZIONI PLASTICHE**:

$$L_i = M_p \cdot \vartheta + M_p \cdot 2\vartheta + M_p \cdot \vartheta = 4 M_p \cdot \vartheta$$

Per definizione del **PLV**, $L_e = L_i$, dunque:

$$\frac{P \cdot L^2}{4} \cdot \vartheta = 4 M_p \cdot \vartheta$$

ovvero:

$$P = \frac{16 \cdot M_p}{L^2}$$

ATTENZIONE!!!!

NON è sempre così agevole la DETERMINAZIONE della POSIZIONE delle CERNIERE PLASTICHE!!!!

Continuiamo con questa procedura introducendo λ_3, λ_4 , fino ad arrivare ad introdurre $n + 1$ stati di auto tensione in corrispondenza dei quali abbiamo raggiunto il moltiplicatore λ_{n+1} .

Dunque avremo inserito $n + 1$ CERNIERE PLASTICHE, che comporterà la LABILITA' della nostra STRUTTURA.

Si può osservare che:

λ_{n+1} è il moltiplicatore critico dei carichi al di là del quale il sistema diventa un meccanismo, e non è più in grado di dar luogo ad ulteriori valori di λ , abbiamo raggiunto quello che si definisce pic loads.

OSSERVAZIONE:

Noi siamo partiti da uno stato di sollecitazione equilibrato ma non congruente, e di conseguenza abbiamo aggiunto n stati di auto tensione alla struttura per scaricare le zone in cui si sono formate le cerniere plastiche.

Ma se io fossi partito da un sistema di sollecitazione diverso, avrei trovato una successione diversa di formazione delle CERNIERE PLASTICHE, una sequenza diversa dei λ_i e dunque un valore diverso di λ_{n+1} .

Si dimostra che il COLLASSO REALE corrisponde al MAGGIORE, che indicheremo con λ^* dei valori di λ raggiungibili.

Una struttura caricata al di là del limite elastico sfrutta tutte le risorse di cui dispone.

Quindi si adatta alla formazione delle cerniere plastiche, riconosce automaticamente che nelle cerniere plastiche ci sono dei punti di debolezza, sceglie autonomamente i suoi stati di auto tensione (coppie da applicare), e perviene al **MASSIMO CARICO POSSIBILE** che può **SOPPORTARE la STRUTTURA**.

TEOREMA CINEMATICO

E' il **SECONDO TEOREMA** dell'**ANALISI LIMITE**. Partiamo con un approccio diverso:

noi sappiamo che se plasticizziamo un numero sufficiente di sezioni, $n+1$ se la struttura è n volte iperstatica, ovvero inseriamo $n+1$ CERNIERE PLASTICHE, tale STRUTTURA può essere TRASFORMATA in un MECCANISMO.

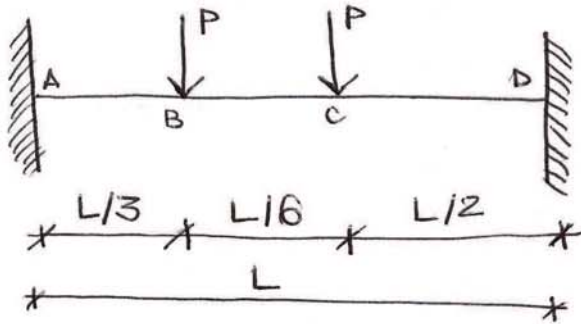
-> Allora possiamo ottenere un MECCANISMO CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE che presenta UN GRADO di LIBERTA'.

Noi possiamo applicare a tale MECCANISMO CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE il PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI e trovare quale sia il CARICO LIMITE che lo rende EQUILIBRATO.

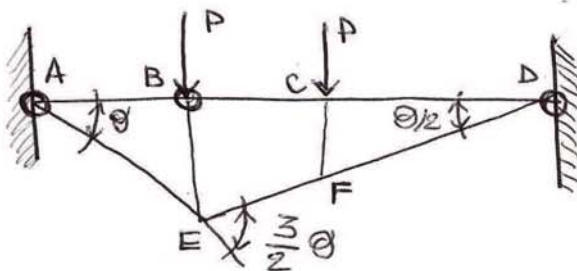
Andremo a trovare il VALORE del CARICO CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE, ovvero quel VALORE del CARICO che rende EQUILIBRATO quel CINEMATISMO con UN GRADO di LIBERTA'.

Il VERO CARICO LIMITE è il MINORE tra quelli CINEMATICAMENTE AMMISSIBILI.

Esercizio Teorema Cinematico



A) CINEMATISMO \downarrow



DETERMINAZIONE LAVORO ESTERNO L_{EST}

$$L_{EST} = P \cdot \overline{BE} + P \cdot \overline{CF}$$

$$\overline{BE} = \frac{L}{3} \cdot \theta \quad (\theta \equiv \text{ANGOLO INFINITESIMO} \Rightarrow \text{tg} \theta = \theta)$$

$$\overline{CF} = \frac{L}{2} \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{L\theta}{4}$$

$$\Rightarrow L_{EST} = P \cdot \frac{L}{3} \cdot \theta + P \cdot \frac{L\theta}{4}$$

DETERMINAZIONE LAVORO INTERNO L_{INT}

$L_{INT} \rightarrow$ svolto dal M_p delle CERNIERE PLASTICHE

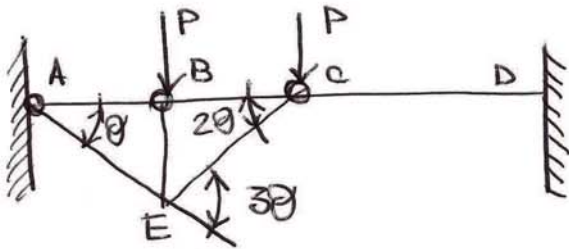
$$L_{INT} = M_p \cdot \theta + M_p \cdot \frac{3}{2} \theta + M_p \cdot \frac{\theta}{2}$$

$$= M_p \cdot 3\theta$$

$$\Rightarrow P_u = \frac{24}{5} \frac{MP}{L}$$

$$\frac{24}{5} \approx 4,8$$

③ CINEMATISMO 3



DETERMINAZIONE LAVORO ESTERNO L_{EST}

$$L_{EST} = P \cdot \overline{BE}$$

$$\overline{BE} = \frac{L}{3} \cdot \theta$$

$$\Rightarrow L_{EST} = P \cdot \frac{L}{3} \theta$$

DETERMINAZIONE LAVORO INTERNO L_{INT}

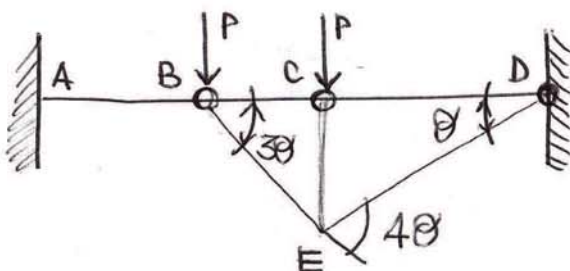
$$L_{INT} = MP \cdot \theta + MP \cdot 2\theta + MP \cdot 3\theta = 6MP\theta$$

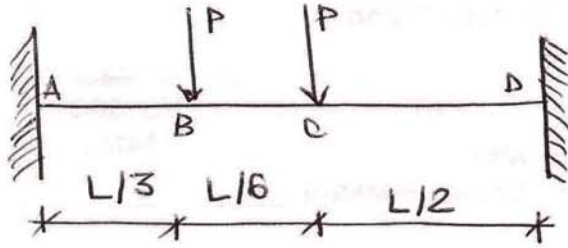
APPLICO EQUAZIONE dei LAVORI VIRTUALI

$$L_{EST} = L_{INT}$$

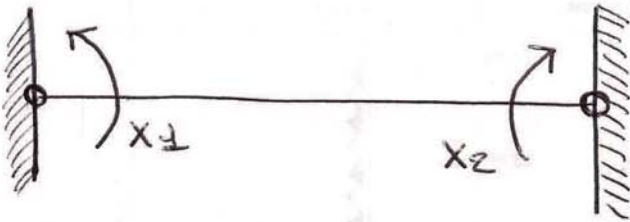
$$\Rightarrow P \cdot \frac{L}{3} \theta = 6MP \cdot \theta \Rightarrow P_u = \frac{18MP}{L}$$

④ CINEMATISMO 4

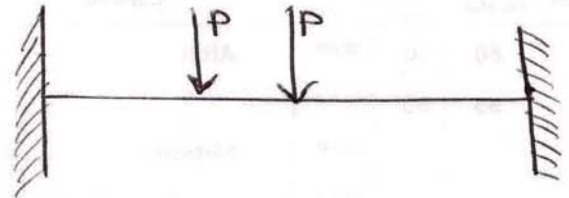




SISTEMA VIRTUALE



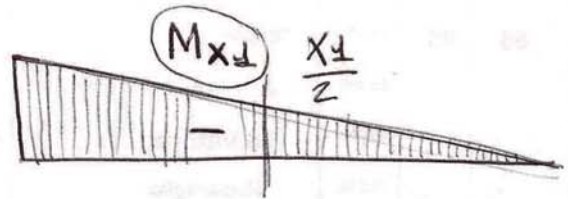
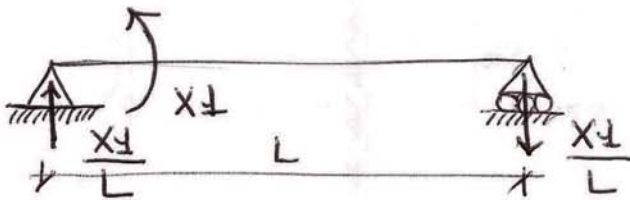
SISTEMA REALE



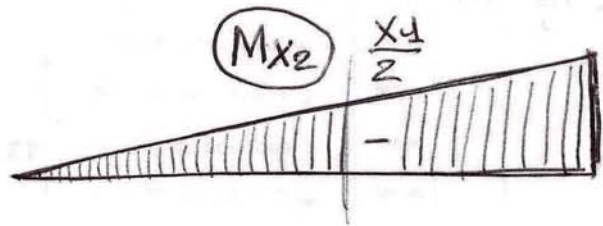
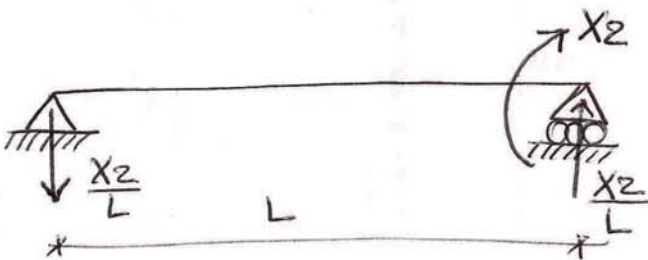
$$M = M_P + M_{X1} + M_{X2}$$

↓ dovuto al CARICO P

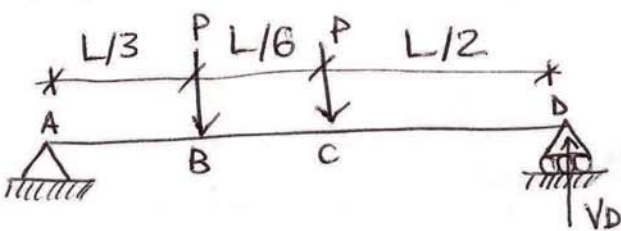
SISTEMA VIRTUALE 1



SISTEMA VIRTUALE 2



SISTEMA REALE



$$\sum \uparrow (+) \quad + P \cdot \frac{L}{3} + P \cdot \frac{L}{2} - V_D L = 0$$

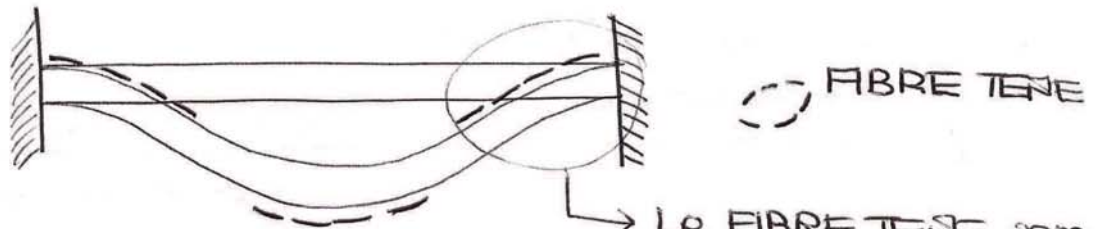
$$\Rightarrow V_D L = \frac{5}{6} PL$$

$$\Rightarrow \boxed{V_D = \frac{5}{6} P}$$

VERIFICA AMMISSIBILITA' CINEMATICA

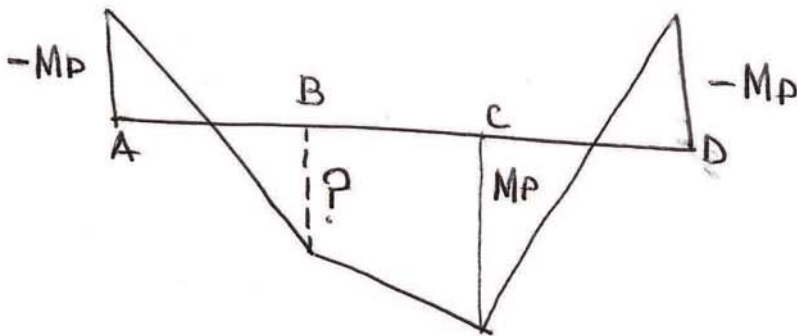
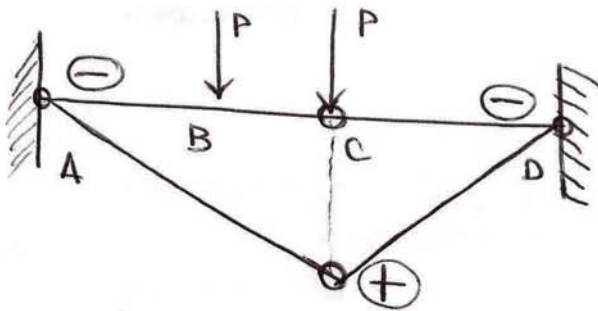
* LA ROTAZIONE IN UNA CERNIERA PLASTICA E' POSITIVA SE ASSOCIATA ad una CURVATURA MOLTO GRANDE POSITIVA che avviene su un TRATTO di STRUTTURA MOLTO PICCOLA.

* CURVATURA POSITIVA \Rightarrow RISULTANO TENSE le FIBRE INFERIORI



⚠ Bisogna avere CONCORDANZA di SEGNO tra ROTAZIONE nella CERNIERA e MOMENTO FLETTENTE

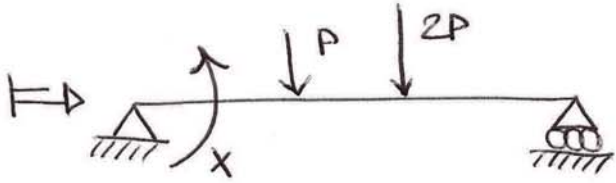
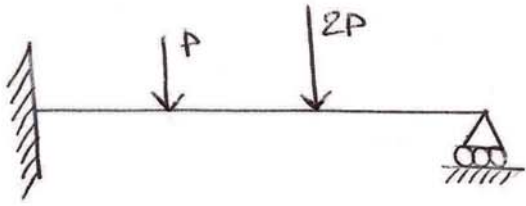
Le FIBRE TENSE sono quelle SUPERIORI alle quali ASSOCIAMO una CURVATURA NEGATIVA



$$M_B = -\frac{2}{3} \times 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{48} P \cdot L = -\frac{2}{3} MP - \frac{MP}{3} + \frac{4}{48} \cdot \frac{24^8}{5} MP$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{-20 - 40 + 56}{30} MP = \frac{26}{30} MP < MP \quad \text{OK} \quad \curvearrowright$$

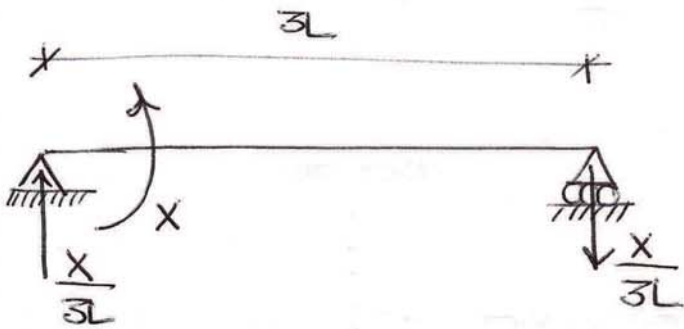
VERIFICA di AMMISSIBILITA' STATICA



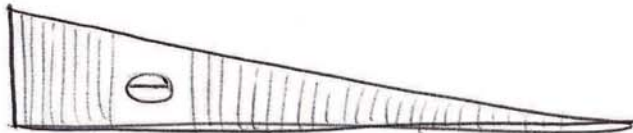
$$M = M_P + M_x$$

↓
dovuto al CARICO P

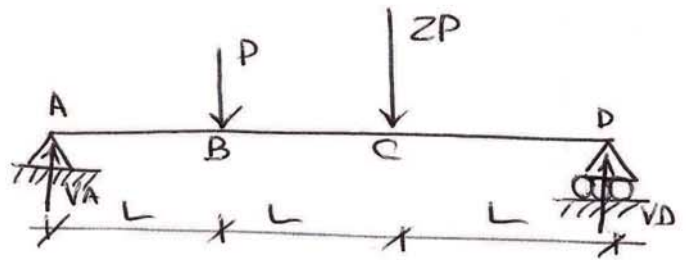
SISTEMA VIRTUALE



M_x



SISTEMA REALE



$$\sum \uparrow) + V_D \cdot 3L - 2P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow 3L V_D = 4PL + PL$$

$$\Rightarrow V_D = \frac{5}{3} P$$

$$\sum \uparrow) + V_A - P - 2P + V_D = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 3P - V_D$$

$$\Rightarrow V_A = 3P - \frac{5}{3} P$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{4}{3} P$$