www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1545A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Zago E.

MATERIA: Analisi Matematica II + Riassunti. Prof.Ceragioli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 138

APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Prof.ssa Ceragioli

AA 2014-2015

- LEZIONI TEORICHE (APPUNTI)
- RIASSUNTI DI TEORIA
- PROGRAMMA DETTAGLIATO D'ESAME

Alunno Zago Edoardo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 138

Se costruiamo 2 successioni di plurirettangoli S_n, R_n

$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \ldots \subseteq A$ approssimazione crescente che approssima da dentro

$A \subseteq \ldots \subseteq R_n \ldots \subseteq R_1 \subseteq R_0$ " " decrescente " " da fuori

$\{m(S_n)\}$
$\{m(R_n)\}$ successioni di numeri positivi

$$m(S_0) \leq m(S_1) \leq \ldots \leq m(S_n)$$

$$m(R_n) \leq \ldots \leq m(R_1) \leq m(R_0)$$

Pertanto $m(S_n)$ è una successione ① crescente e vale $\forall n \; m(S_n) \leq m(R_0)$
e ② limitata sup

$\Downarrow$

ammette limite finito

$\exists \lim\limits_n m(S_n) = l_S$

Analogamente $m(R_n)$ è decrescente $\forall n \; m(R_n) \geq m(S_0)$
e limitata sup.

$\Downarrow$

$$\exists \lim_n m(R_n) = l_R$$

Per costruzione $\forall n \; m(S_n) \leq m(R_n)$

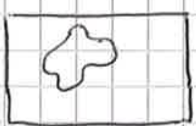
passando al limite $l_S \leq l_R$ x il teo confronto

A misurabile se esistono due successioni S_n, R_n (come quelle costruite) tali che $l_S = l_R$ in questo caso diciamo

$$m(A) = l_S = l_R$$

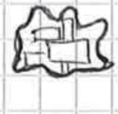
CONSIDERAZIONI

① $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO (perché si può partire con la costr. dei rettangoli)



$\hookrightarrow$ Hp deve valere

②



Non c'è un unico modo x costruire le successioni S_n, R_n

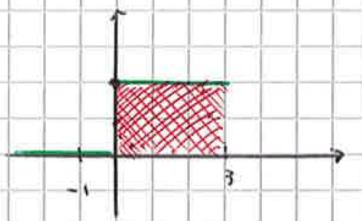
PROP: Se R'_n e S'_n sono altre successioni con = proprietà a R_n e S_n t.c. $\lim(m(R'_n)) = \lim m(S'_n) = l'$ allora $l' = l$ VEDI DIMOSTR

PROP m soddisfa le proprietà di positività, monotonia e additività

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 138

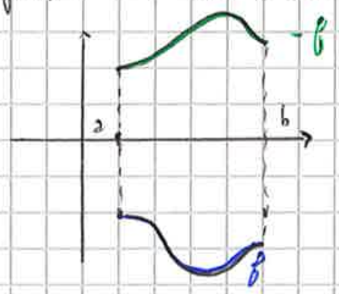
Es $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ su $[-1, 3]$



$$\int_{[a,b]} H(x)\,dx = 3$$

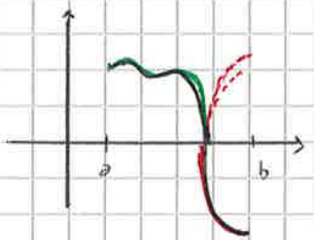
FUNZIONI NON POSITIVE

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in I = [a; b]$ quindi $-f \geq 0$



$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = -m(T_{-f}, I) \leq 0$$

FUNZIONI GENERICHE



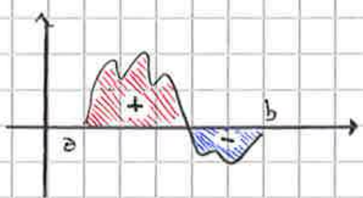
$$f^+(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

pertanto $\int_{[a;b]} f(x)\,dx = m(T_{f^+}, I) - m(T_{f^-}, I)$



misura $\to$ sempre +
int Riemann $\to$ può essere tutto (no segno costante)
Se $f \geq 0$ misura e integrale "sono stesse cose"

CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI

- CONTINUE
- CONTINUE A TRATTI
- MONOTONE
- MONOTONE A TRATTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 138

FORMULA DI TORRICELLI-BARROW

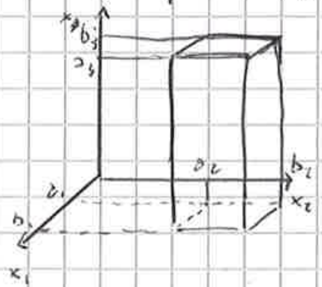
$G(x)$ primitiva di f su I con $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

---

in $\mathbb{R}^3$ misura di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ (VOLUME)

PROPRIETÀ: positività, monotonia, additività



$$Q = [a_1; b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

↓ prod. cartesiano

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2,\ a_3 \le x_3 \le b_3\}$$

$$\operatorname{vol} Q = m(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

PLURIPARALLELEPIPEDO: unione di un numero finito di par. che si sovrappongono al più lungo le faccie

$Q \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato S_n, P_n successioni di plurip. t.c. $S_0 \subseteq S_1 \ldots \subseteq S_n \ldots \subseteq Q \subseteq P_n \subseteq \ldots P_1 \subseteq P_0$

$\{m(S_n)\}$ $\{m(P_n)\}$

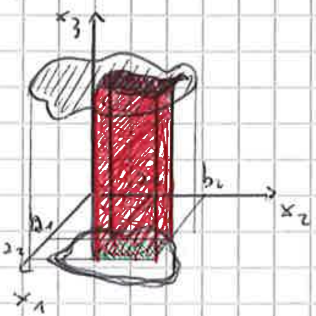
pertanto (come precedente)

$$\exists \lim_n m(S_n) \le \exists \lim_n m(P_n)$$

Se $\lim_n m(S_n) = \lim_n m(P_n)$ Q è misurabile $m(Q)$

INTEGRALE DOPPIO SU RETTANGOLO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$



CASO ① F NON NEGATIVA

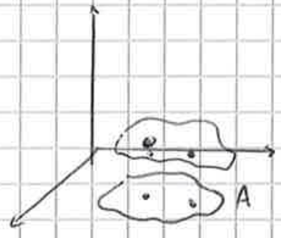
$$T_{f,R}\ \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in R,\ 0 \le x_3 \le f(x_1, x_2)\}$$

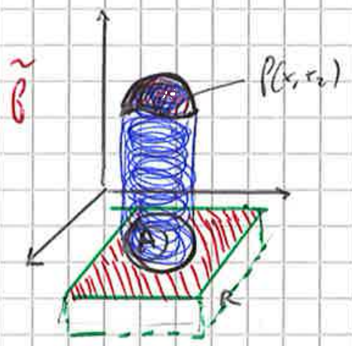
Se $T_{f,R}$ è misurabile definiamo integrale doppio nel senso di Riemann di f sul rettangolo R

$$m(T_{f,R}) = \iint_R f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 138





Includiamo l'insieme A in un rettangolo (gli unici su cui sappiamo integrare)

introduciamo la funzione $\tilde{f}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) \cdot \mathbb{1}_A(x_1,x_2)$

$$R = \begin{cases} f(x_1,x_2) & \text{se } (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) \in R \setminus A \end{cases}$$

Il volume sul rettangolo è = volume che sta sotto $\tilde{f}$

considerando $f \geq 0$ $\{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2) \in A,\ 0 \leq x_3 \leq f(x_1,x_2)\} = T_1$

$$\{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2) \in R,\ 0 \leq x_3 \leq \tilde{f}(x_1,x_2)\} = T_2$$

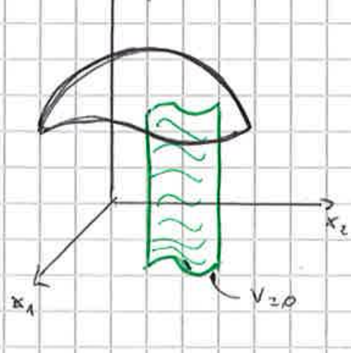
$\mathrm{vol}\, T_1 = \mathrm{vol}\, T_2$

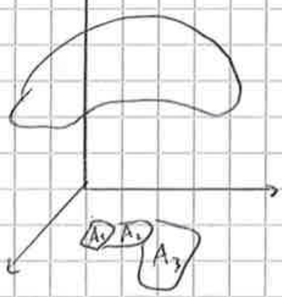
Definiamo l'integrale del rettangolo
↓
a qualsiasi insieme

$$\iint_A f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_R \tilde{f}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

vale la prop $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $m(A) = 0$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile su A $\iint_A f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0$





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 138

$a, b \in J_1 \quad a < b$

$$\int_a^b F(x_1)\,dx_1 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2\right) dx_1$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x_1,x_2)\,dx_1\right) dx_2$$

INTERVALLO RETTANGOLARE + FUNZIONE CONTINUA

Teorema se F è continua su $\boxed{J_1 \times J_2}$ allora $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2\right) dx_1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1,x_2)\,dx_1\right) dx_2$$

$[a,b]\times[c,d] \longrightarrow$ prodotto cartesiano

Conta che si riduce al calcolo di 2 int. semplici → tenendo fisso prima 1 e poi l'altra variabile

Esempio

$f(x_1,x_2) = \cos(x_1+x_2) \qquad R = \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$I = \iint \cos(x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x_1 + \underset{\text{fisso}}{x_2})\,dx_1\right)}_{F(x_2)} dx_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\operatorname{sen}(x_1+x_2)\right]_{x_1=0}^{x_1=\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x_2\right) - \operatorname{sen}(0+x_2)\right) dx_2$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x_2\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[+\cos(x_2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)$$

$= \sqrt{2} - 1$

Per esercizio verifico che è uguale a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_1+x_2)\,dx_2\right) dx_1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 138

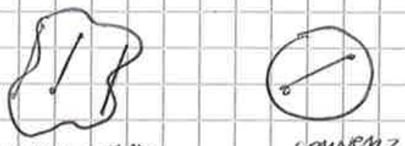
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 138

GENERALIZZAZIONE / REGOLA GENERALE

Se $\alpha(x)$ continua su $[a,b]$, $\beta(y)$ continua su $[c,d]$ allora

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \alpha(x)\,\beta(y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\alpha(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_c^d \beta(y)\,dy\right)$$

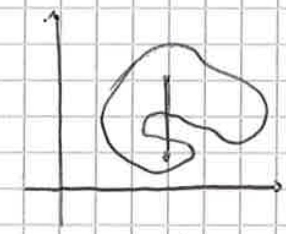
Def insiemi convessi



non convesso   convesso

INSIEME VERTICALMENTE CONVESSO

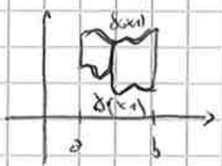
vert. convesso



non vert. convesso

$A = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [a;b]$
$\gamma(x_1) \le x_2 \le \delta(x_1)\}$

dove $\gamma(x_1)$ e $\delta(x_1)$ sono due funzioni



CONVESSO $\Rightarrow$ VERT. CONVESSO

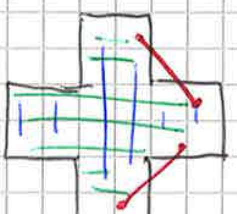
VERT. CONVESSO $\not\Rightarrow$ CONVESSO

è vert. conv. ma non convesso

INSIEME ORIZZONTALMENTE CONVESSO

$B = \{(x_1, x_2) : x_2 \in [c,d] \quad \alpha(x_2) \le x_1 \le \beta(x_2)$ con α, β funzioni

VERTICALM. + ORIZZ. CONVESSO $\not\Rightarrow$ CONVESSO



Teorema $J_1 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto

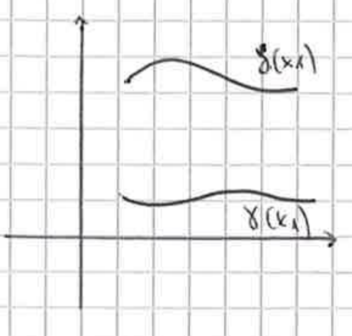
$\gamma, \delta \quad J_1 \to \mathbb{R}$ continue

$\forall x_1 \in J_1 \quad \gamma(x_1) \le \delta(x_1)$

$A = \{(x_1 x_2) : x_1 \in J_1, \gamma(x_1) \le x_2 \le \delta(x_2)\}$

$\downarrow$

vert. convesso



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 138

Es

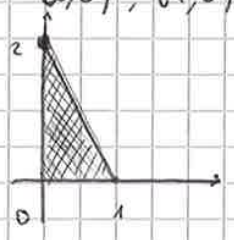
$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x+1} 2xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy^2 \right]_{y=x^2}^{y=x+1} dx = \int_0^1 \left[x(x+1)^2 - (x^2)^2 x \right] dx$$

$$\int_0^1 \left[x^3 + 2x^2 + x - x^5 \right] dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Es $f(x,y) = \sqrt{x} + 2xy$

A triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ $(0,2)$

$$I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$



$A = \{ (x,y) : 0 \le y \le 2 \ , \ 0 \le x \le \beta(y)$

$y = -2(x-1)$

$y = -2x+2 \qquad 2x = 2-y \qquad x = 1 - \frac{y}{2}$

$\beta(y) = -\frac{y}{2} + 1$

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-\frac{1}{2}y+1} (\sqrt{x} + 2xy)\,dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x^2 y \right]_{x=0}^{x=-\frac{1}{2}y+1} dy$$

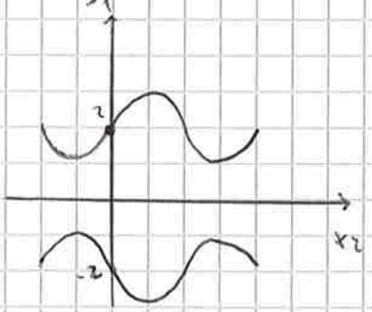
$$= \int_0^2 \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{2}y + 1 \right]^{\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{2}y + 1 \right)^2 y \Big\} dy = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}y + 1 \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5}(-2) \Big|_0^2 +$$

$$\frac{1}{4}\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}(0) - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5}(-2) + \frac{1}{16} \cdot 16 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{13}{15}$$

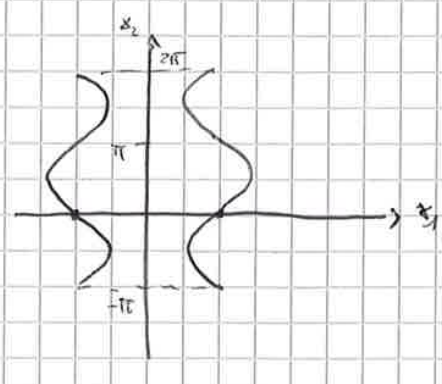
Altre integrazioni

Es $B = \{ (x_1, x_2) : -\pi \le x_2 \le 2\pi$

$-\operatorname{sen} x_2 - 2 \le x_1 \le \operatorname{sen} x_2 + 2 \}$



penso di "girare" il grafico



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 138

$$\iint_B f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\iint_{B^+} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos x_2}(1+x_2)\,dx_1\right)dx_2 =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[x_1 + x_1x_2\right]_{x_1=0}^{x_1=\cos x_2} dx_2 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x_2 + x_2\cos x_2\right]dx_2$$

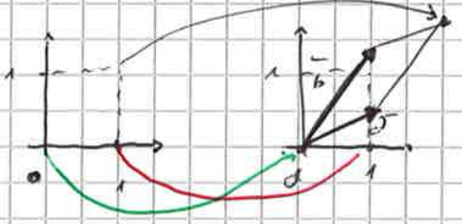
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{(x_2\cos x_2)}_{\text{dispari}}\,dx_2 = 0$$

$$= 2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x_2\,dx_2 = 4\,\operatorname{sen} x_2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 138

$$T(0,1) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 \\ a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



Scriviamo la matrice Jacobiana della trasformazione

↳ derivate di 1ª e 2ª trasf come righe della ~~trasformazione~~ matrice

$$JT(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad |\det JT(u_1,u_2)| = |a_1 b_2 - b_1 a_2|$$

$|\bar{a} \times \bar{b}|$ che corrisponde all' area del parallelogramma di lati $\bar{a}$ e $\bar{b}$

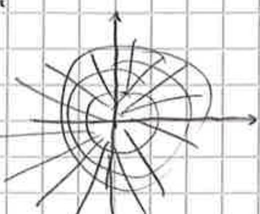
↳ pertanto la trasf. T trasforma un quadrato di area 1 in un parallelogramma di area $|\bar{a} \times \bar{b}|$

COORDINATE POLARI

Nel piano cartesiano → coordinate sono inters. di 2 reticolo del tipo

Nel piano polare → " " "

↳ intersezione tra 1 retta e una circonferenza



vale $\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta = \varphi_1(\rho,\theta) \\ x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = \varphi_2(\rho,\theta) \end{cases}$

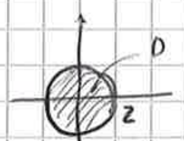
$$JT(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det JT(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\,\mathrm{sen}^2\theta = \rho$$

Esempio

$f(x_1,x_2) = x_1^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

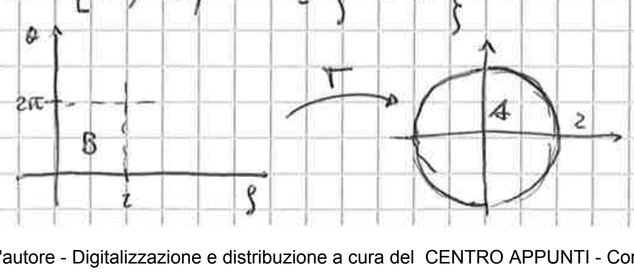
$A = \{(x_1,x_2) : \sqrt{x_1^2+x_2^2} \le 2\}$ → valuto il dominio di integrazione



$I = \iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = ?$

$B = \{(\rho,\theta) : \theta \in [0;2\pi) \quad 0 \le \rho \le 2\}$

$T \; B \to A$



$|\det JT(\rho;\theta)| = \rho$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 138

si può risolvere anche con le

COORDINATE ELLITTICHE

scrivo l'ellisse come $\underbrace{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2}_{\rho\cos\theta} + \underbrace{\left(\frac{x_2}{b}\right)^2}_{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta} \le 1$

$\tilde{T}$ in coord. polari

$$\hat{T}: \begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos\theta \\ \frac{x_2}{b} = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = a\rho\cos\theta \\ x_2 = \rho b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

con $0 \le 1 \le \rho$
$0 \le \theta \le 2\pi$

posso descrivere l'ellisse come $\tilde{E} = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

quindi $\displaystyle\iint_E dx_1\,dx_2 = \iint_{\tilde{E}} |\det J\tilde{T}(\rho\theta)|\,d\rho\,d\theta = |ab|\rho$

~~svolgere il conto~~

$x_1 = a\rho\cos\theta$
$x_2 = b\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} = J\tilde{T}(\rho,\theta)$$

$$\det J\tilde{T}(\rho;\theta) = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\,\mathrm{sen}^2\theta = ab\rho$$

INTEGRALI TRIPLI

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ $\qquad \displaystyle\iiint_V f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$

il GRAFICO DI F è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

per definire gli integrali tripli abbiamo bisogno di una misura in $\mathbb{R}^4$

↳ $\mathbb{R}^4$ non è visualizzabile

IPERRETTANGOLI (sta in $\mathbb{R}^4$, è il prodotto cartesiano di 4 intervalli)

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2 b_2] \times [a_3 b_3] \times [a_4 b_4]$$

$$m(P) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)(b_4 - a_4)$$

$S \subseteq \mathbb{R}^4$ costr. 2 succ. di iper-rettangoli che approssimano da dentro, l'altro da fuori

↳ se i limiti coincidono l'insieme è misurabile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 138

$f(x_1, x_2, x_3) = h(x_1) \cdot g(x_2, x_3)$

$$\iiint_Q f \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_1}^{b_1} h(x_1) \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} g(x_2, x_3) \, dx_2 dx_3$$

$f(x_1 x_2 x_3) = h(x_1) \cdot g(x_2) \cdot w(x_3)$

↳ in questo caso ho il prodotto di 3 integrali semplici

$$\iiint_Q f \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_1}^{b_1} h(x_1) \, dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} g(x_2) \, dx_2 \cdot \int_{a_3}^{b_3} w(x_3) \, dx_3$$

ESEMPIO

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 \cos(x_2 + x_3)$

$Q = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\iiint_Q f dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 3x_1 \cdot \iint_{[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x_2 + x_3)$$

↓ integro rispetto a x_2

$$\left[\frac{3}{2} x_1^2 \right]_0^1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \cos(x_2 + x_3) \, dx_2 \right) dx_3 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sen}(x_2 + x_3) \right]_{x_2=0}^{x_2=\pi} = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\pi + x_3) - \operatorname{sen}(x_3)$$

$$= \frac{3}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} - \operatorname{sen}(x_3) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x_3 \right] = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \operatorname{sen}(x_3) = -3 \left[\cos(x_3) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -3 \left[0 + 1 \right] = -3$$

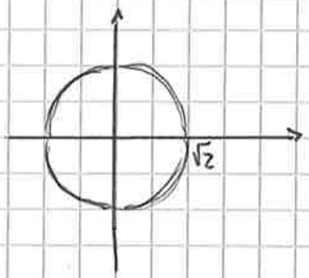
INTEGRAZIONE PER FILI

$S = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1 x_2) \in C \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile

$\alpha(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \beta(x_1 x_2)$ con $\alpha, \beta : C \to \mathbb{R}$ continue $\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 138



$\theta \in [0; 2\pi]$

$0 \le \rho \le \sqrt{2}$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (2-\rho^2)\, \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$\uparrow$ det JT

$x_1 = \rho\cos\theta$
$x_2 = \rho\,\text{sen}\,\theta$ $\qquad x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^3 - \rho^5)\, d\rho = 2\pi \left[2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left[2\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{6}\,3} \right] = \frac{4}{3}\pi$$

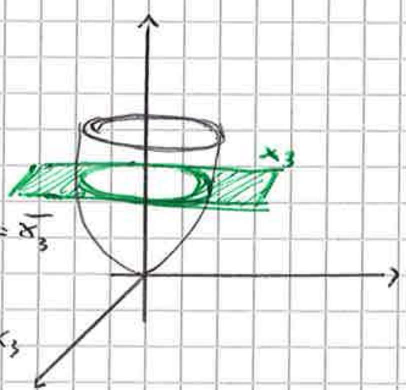
INTEGRAZIONE PER STRATI

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad$ S tale che $\quad a \le x_3 \le b$

$\forall\, \bar{x}_3 \in [a, b] \qquad S_{\bar{x}_3} = S \cap \{x_3 = \bar{x}_3\}$

$\downarrow$

misurabile nel piano $x_3 = \bar{x}_3$



$$\iiint_S \rho \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_a^b \left(\iint_{S_{x_3}} \rho(x_1 x_2 x_3)\, dx_1 \, dx_2 \right) dx_3$$

$$\int_0^2 \left(\iint_{S_{x_3}} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 \, dx_2 \right) dx_3$$

con $S = \{ x_3 \ge x_1^2 + x_2^2, \ 0 \le x_3 \le 2 \}$

$S_{x_3} = \{ (x_1^2 + x_2^2) \le x_3 \}$

Fissato x_3 $\qquad \tilde{S}_{x_3} = \{ (\rho, \theta) ; \ 0 \le \rho \le \sqrt{x_3}, \ 0 \le \theta \le 2\pi \}$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{x_3}} \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta \right) dx_3 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{x_3}} d\theta \right) dx_3 =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{x_3^2}{4}\, d\theta \, dx_3 = 2\pi \cdot \left[\frac{x_3^3}{12} \right]_0^2 = 2\pi \cdot \frac{8}{12} = \frac{4}{3}\pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 138

S sfera centrata nell'origine e raggio R $\quad \rho = R$ superficie sferica

$\hat{S} = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq R, \ 0 \leq \varphi \leq \pi, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\iiint_S dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_{\hat{S}} \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho\, d\theta\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\sigma \cdot \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = 2\pi \frac{R^3}{3}\left[1+1\right] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 138

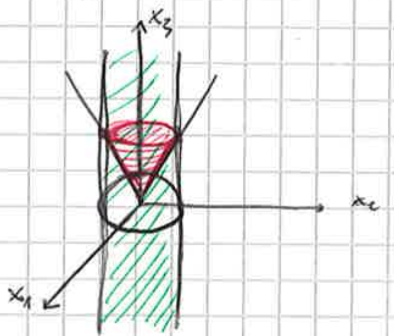
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 138

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3$$

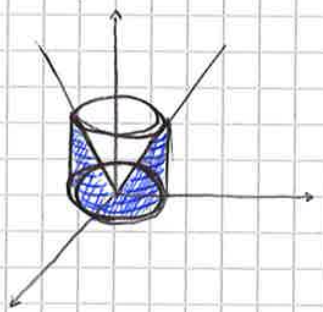
$$A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \le 1 , \quad 0 \le x_3 \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$I = \iiint_A f(x_1 x_2 x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 \qquad x_3 = \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{= \rho} \quad \text{(è un cono)}$$



se provo a sostituire
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$



la parte che ci interessa è il volume blu

$$A = \{(\rho, \theta, x_3) : 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

↓ passo a coordinate cilindriche

$$I = \iiint_A f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, x_3)\, \underbrace{\rho}_{\uparrow\ |\det.\ \text{della Jacobiana}|}\, d\rho\, d\theta\, dx_3$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho} \rho^2 \cos^2\theta \; x_3 \, \rho \, dx_3 \right) d\theta \right) d\rho$$

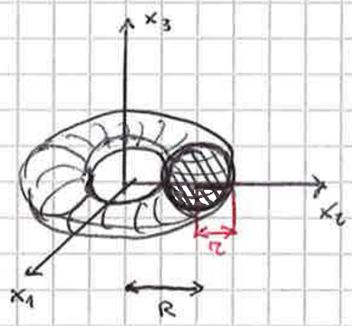
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2\theta \left[\frac{x_3^2}{2} \right]_{x_3=0}^{x_3=\rho} d\theta\, d\rho = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^3 \frac{\rho^2}{2} d\rho = \right.$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta}_{\text{form. di bisezione}} \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{12}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 138

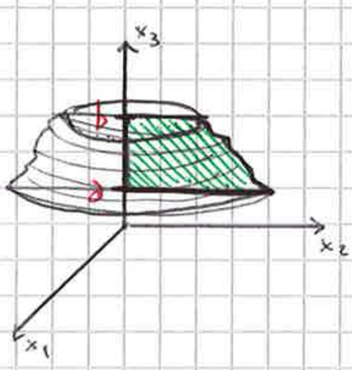
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 138

Esempio



Toro $\text{vol}T = \text{area } C \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$

poiché $x_0 \equiv$ centro circ.



$x_2 = f(x_3)$
$f(x_3) \geq 0$
$\forall x_3 \in [a,b]$

Sia Σ il solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse x_3

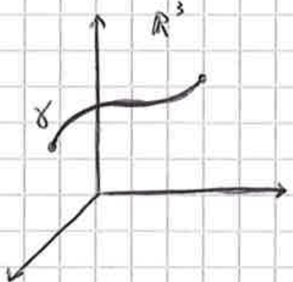
$$S = \{(x_2, x_3) : a \leq x_3 \leq b, \ 0 \leq x_2 \leq f(x_3)\}$$

$$\text{vol}\,\Sigma = 2\pi \iint_S x_2 \, dx_2 \, dx_3 = 2\pi \int_a^b \left(\int_0^{f(x_3)} x_2 \, dx_2 \right) dx_3 =$$

$$= 2\pi \int_a^b \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{f(x_3)} dx_3 = \cancel{2}\pi \int_a^b \frac{f(x_3)^2}{\cancel{2}} dx_3 =$$

$$= \pi \int_a^b f(x_3)^2 \, dx_3$$

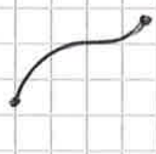
INTEGRALI CURVILINEI



$f(x_1, x_2, x_3)$

$\int_\gamma f \, ds \rightarrow$ integrale di una funzione su una curva

CURVE IN $\mathbb{R}^n$



[curva parametrica]

$\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n \ C^1 \rightarrow$ continua + derivata continua

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 138

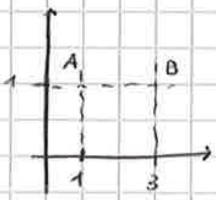
LUNGHEZZA DI UNA ~~[illegible]~~ CURVA

$\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ semplice

$t \mapsto (\gamma_1(t) \dots \gamma_n(t))$ regolare

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$\mathbb{R}^2$



! La lunghezza di una curva semplice e regolare dipende dal sostegno, non dalla parametrizzazione

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt$$

cambiamento di variabile (parametro)
$t = \alpha(\tau) \quad \alpha : [c, d] \to [a; b]$

α derivabile $\quad \alpha'(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [c, d]$

$\delta\, [c, d] \to \mathbb{R}^n \quad \boxed{\delta = \gamma \circ \alpha} \rightsquigarrow \delta = \gamma(\alpha(\tau))$

$\tau \to \gamma(\alpha(\tau))$

$\delta'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau)$

nuova curva regolare semplice con $Im(\delta) = Im(\gamma)$ cioè i sostegni di δ e γ coincidono

$$l\delta = \int_c^d \sqrt{(\delta_1'(\tau))^2 + \dots + (\delta_n'(\tau))^2}\, d\tau$$

$$l\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = \quad t = \alpha(\tau) \quad dt = \alpha'(\tau) d\tau$$

$$= \int_c^d \sqrt{\gamma_1'(\alpha(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'(\alpha(\tau))^2}\, \alpha'(\tau)\, d\tau = \int_c^d \sqrt{\underbrace{(\gamma_1'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau))^2}_{\delta_1'(\tau)} + \dots + \underbrace{\gamma_n'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)}_{\delta_n'(\tau)}}$$

$= l\delta$

ESEMPIO

$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\begin{cases} \gamma_1(t) = \cos t \\ \gamma_2(t) = \operatorname{sen} t \\ \gamma_3(t) = t \end{cases}$ arco di elica cilindrica $\begin{cases} \gamma_1'(t) = -\operatorname{sen} t \\ \gamma_2'(t) = \operatorname{sen} t \\ \gamma_3'(t) = 1 \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 138

Proposizione

$f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

γ, δ due curve regolari semplici con lo stesso sostegno allora $\int_\gamma f\,ds = \int_\delta f\,ds$
cioè l'integrale NON DIPENDE dalla parametrizzazione.

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x + 2y$

$\gamma(t) = (2t, 1 - t^2) \qquad t \in [1,2]$

$\begin{cases} \gamma_1(t) = 2t \\ \gamma_2(t) = 1 - t^2 \end{cases} \qquad \int_\gamma f\,ds$

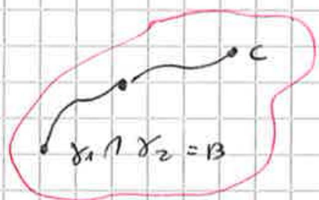
$\begin{cases} \gamma_1'(t) = 2 \\ \gamma_2'(t) = -2t \end{cases} \qquad \int_\gamma f\,ds = \int_1^2 [2t + 2(1-t^2)] \sqrt{4 + 4t^2}\,dt = \dots$

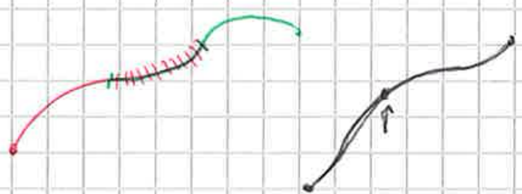
PROPRIETÀ

$$\int_\gamma (f+g)\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$$

$$\int_\gamma k f\,ds = k \int_\gamma f\,ds \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds$$





γ è una curva regolare a tratti se è continua, e con derivata prima continua tranne che in un numero finito di punti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 138

$$\int_\gamma F\cdot \bar{t} = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$\gamma(t) = \gamma(\alpha(\tau))$

$t \overset{\uparrow}{=} \alpha(\tau)$

Cambiando parametrizzazione della curva, cioè ponendo $t = \alpha(\tau)$ nell'integrale curvilineo

se $\alpha'(\tau) > 0$ il valore NON CAMBIA
se $\alpha'(\tau) < 0$ l'integrale CAMBIA SEGNO

ESEMPIO

$F(x,y) = (2x+y, -x-y)$

$\gamma(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) \qquad t \in [0;\pi]$

$$\int F\cdot \bar{t} = \int_0^\pi (\underbrace{2\cos 2t}_{x} + \underbrace{\operatorname{sen} 2t}_{y}, \underbrace{-\cos 2t}_{x} - \underbrace{\operatorname{sen} 2t}_{y})\cdot(-2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi (-4\cos 2t \operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} 2t - 2\cos^2 2t - 2\cos 2t \operatorname{sen} 2t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi [-6\cos 2t \operatorname{sen} 2t - 2]\,dt = -6\,\frac{\operatorname{sen} 2t}{4} - 2t\,\Big|_0^\pi = -2\pi$$

PROPRIETÀ

- additività rispetto al campo vettoriale
- omogeneità
- additività rispetto al dominio

Se $-\gamma$ è una curva con lo stesso sostegno di γ ma percorsa in verso opposto

$$\boxed{\int_{-\gamma} F\cdot \bar{t} = -\int_\gamma F\cdot \bar{t}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 138

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$$

g di classe C^2 + teorema Schwartz

$\Downarrow$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$$

cioè $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ su A

$\mathbb{R}^2$ se $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad F = (f_1, f_2)$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

$\mathbb{R}^3$ se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad F = (f_1, f_2, f_3)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$$

Def ROTORE in $\mathbb{R}^3$

$F = (f_1, f_2, f_3)$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Sviluppo FORMALE rispetto alla 1ª riga del det

IRROTAZIONALE
$\Downarrow$
CONSERVATIVO

TEOREMA $\to$ F conservativo su $A \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{rot} F(x) = 0 \quad \forall x \in A$

F irrotazionale su A se $\operatorname{rot} F(x) = 0 \quad \forall x \in A$

$\equiv$ $\boxed{\text{se } \mathbf{F} \text{ è conservativo su } A \text{ allora } F \text{ è irrotazionale su } A}$

ESEMPIO $F(x,y,z) = (xy, x, z)$ è conservativo?

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ se $x \neq 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 138

COROLLARIO

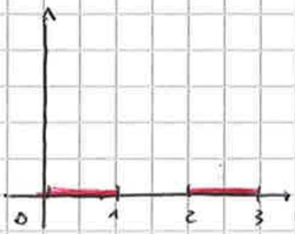
→ se un campo è CONSERVATIVO la sua CIRCUITAZIONE su γ è nulla

$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservativo aperto

$\gamma: [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ curva regolare chiusa $\gamma(a) = \gamma(b)$

allora
$$\boxed{\int_\gamma F \cdot \bar{T} = 0 \qquad \oint_\gamma F \cdot \bar{T}}$$
$\oint_\gamma F \cdot \bar{T}$ è la circuitazione di F lungo γ

~~[illegible]~~ $f: [0,1] \cup [2;3] \Rightarrow \mathbb{R}$ continua $F, \tilde{F}$ tali che



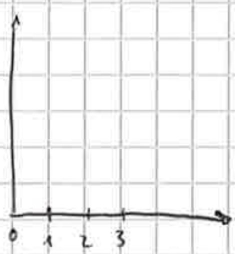
$F'(x) = f(x)$

$\tilde{F}'(x) = f(x)$ su $[0;1] \cup [2,3]$

è vero o no che F e $\tilde{F}$ differiscono per una costante $\tilde{F} = F + k$?

ESEMPIO

$f = 0$



$F(x)$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice **CONNESSO** se $P_0, P_1 \in A$
$\exists$ una curva $\gamma: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ continua tale che $\mathrm{Im}\,\gamma \subseteq A$ e
$\gamma(a) = P_0$, $\gamma(b) = P_1$

cioè per ogni coppia di punti c'è una curva che li unisce tutta contenuta in A

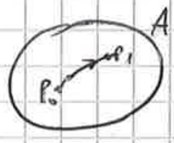
NON CONNESSO

CONVESSO → CONNESSO

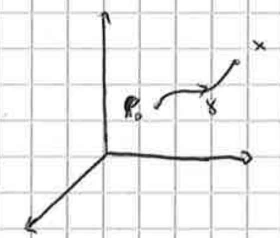
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 138

② $\Rightarrow$ ①



$g(x) = \int_\gamma F \bar{t}$ si dimostra $\nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in A$

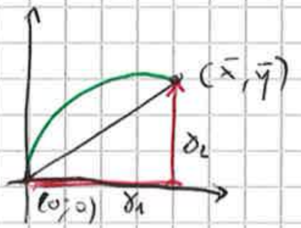


$g(x) = \int_\gamma F \bar{t}$ → dato

↳ lo scegliamo noi

ESEMPIO di ricostruzione del potenziale

$F(x,y) = (2xy^2 - y^3,\ 2x^2y - 3xy^2)$ osservare $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$g(x) = \int_\gamma F\cdot\bar{t} = \int_{\gamma_1} F\cdot\bar{t} + \int_{\gamma_2} F\cdot\bar{t}$$

$$\gamma_1: \begin{cases} x(t) = t\bar{x} & t\in[0,1] \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x(t) = \bar{x} & t\in[0,1] \\ y(t) = t\bar{y} \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} F\cdot\bar{t} = \int_0^1 (0,0)\ldots = 0 \qquad \int_{\gamma_2} F\cdot\bar{t} = \int_0^1 \overbrace{2\bar{x}(t\bar{y})^2 - (t\bar{y})^3,\ 2\bar{x}^2 t\bar{y} - 3\bar{x}(t\bar{y})^2}^{\text{sostituzione delle parametrizzazioni}} \cdot \underbrace{(0,\bar{y})}_{\text{derivate rispetto a } t}\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[2\bar{x}^2 t\bar{y}^2 - 3\bar{x}t^2\bar{y}^3\right] dt = \left[2\bar{x}^2\bar{y}^2\frac{t^2}{2} - 3\bar{x}\bar{y}^3\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \bar{x}^2\bar{y}^2 - \bar{x}\bar{y}^3$$

$$g(x,y) = x^2y^2 - xy^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \underbrace{2xy^2 - y^3}_{=f_1} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \underbrace{2x^2y - 3xy^2}_{=f_2}$$

controllo derivando che vengono valori = a quelli di partenza

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 138

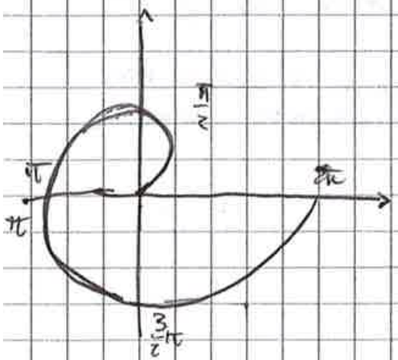
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 138

ESERCIZIO

$N \subseteq \mathbb{R}^2$

$N = \{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le \theta, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

calcolare l'area di N



$\rho = \theta$

$$\int_\gamma F \cdot \bar{t} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2$$

$$F = (f_1, f_2) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$F(x_1, x_2) = (0, x_1)$$

$$F(x_1, x_2) = (-x_2, 0)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

$$F(x_1 x_2) = \left(-\frac{1}{2} x_2, \frac{1}{2} x_1\right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\iint_N 1 \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial N} F \cdot \bar{t}$$

percorso

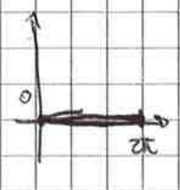
$$\mathcal{C} : \begin{cases} c_1(\theta) = \theta \cos\theta \\ c_2(\theta) = \theta \sin\theta \end{cases} \qquad \rho = \theta$$

curve

$\mathcal{C} : (c_1; c_2) : [0; 2\pi] \Rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $\mathrm{Im}\,\mathcal{C}$ è la spirale di Archimede

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot \bar{t} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\theta \sin\theta, \frac{1}{2}\theta\cos\theta\right) \cdot (\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta) \, d\theta = \frac{4}{3}\pi^3$$

poi calcolo $\gamma : \begin{cases} \gamma_1(t) = t \\ \gamma_2(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$



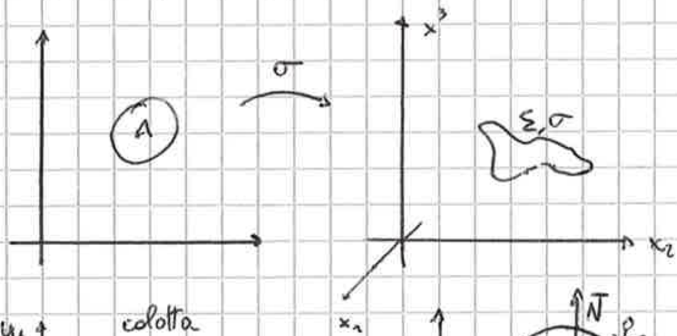
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 138

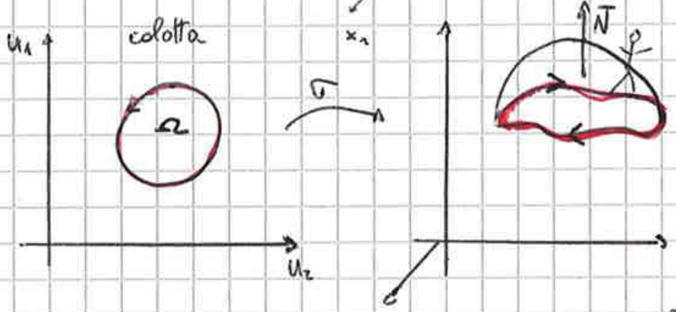
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 138

INTEGRALI DI FLUSSO

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{C}^1$

$\sigma: A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{C}^1$

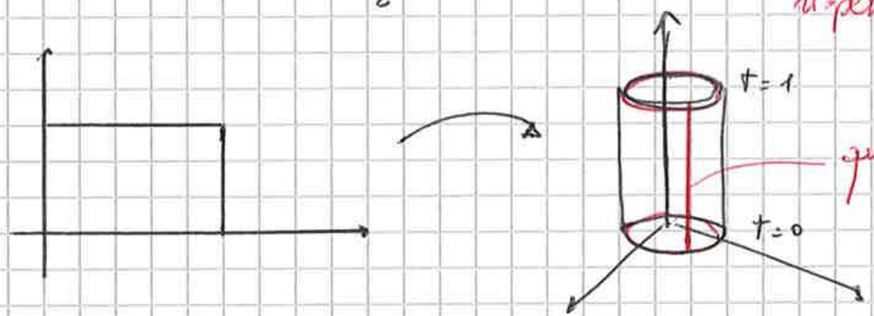




$\sigma: \Omega \cup \gamma \to \mathbb{R}^3$

bordo della calotta rosso

la calotta va percorsa in senso antiorario stando in piedi rispetto alla normale



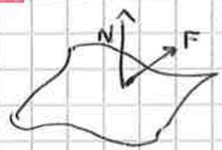
questa è parte del bordo

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\sigma: N \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Def $$\boxed{\iint_\sigma F\cdot \bar{n} = \iint_N F(\sigma(u_1,u_2))\, N(\sigma(u_1 u_2))\, du_1\, du_2}$$ è il flusso di F attraverso la calotta

$$\iint F(\sigma(u_1 u_2)) \cdot \underbrace{\frac{N(\sigma u_1 u_2)}{\|N(\sigma u_1 u_2)\|}}_{\text{direzione vettore}} (N(\sigma(u_1 u_2))\, du_1\, du_2$$



Cambiando la parametrizzazione può cambiare il segno dell'integrale

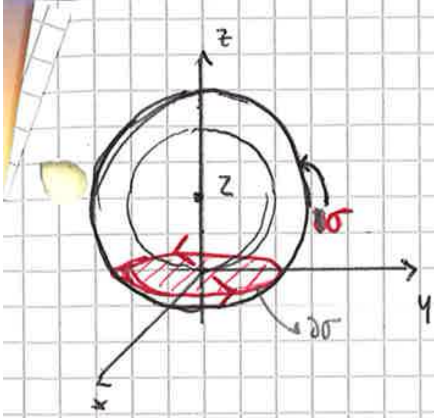
T cambio di parametro
- $\det(JT) > 0$ il segno non cambia
- $\det(JT) < 0$ il segno cambia

$$\iint_N F\cdot N = -\iint_N FN$$

PROPRIETÀ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 138



$$\Gamma = \iint_{\partial\sigma} F\cdot\vec{t}$$

il bordo $\partial\sigma$ posso pensarlo come bordo della sfera ma anche come ~~...~~ della circonferenza rossa

$$\tilde{\sigma} : \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4 \ , \ z=0\}$$

$$\Gamma = \int_{\partial\sigma} F\cdot\vec{t} = \int_{\tilde{\sigma}} \mathrm{rot}\,F\cdot\vec{n}$$

in questo caso è $(0,0,1)$ $\vec{z}$ perché la circonferenza giace sul piano xy

invece $x^2+y^2\le 4$ lo trovo intersecando la sfera col piano $z=0$

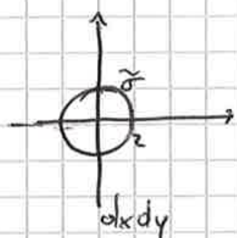
$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos xz & x^3 e^{yz} & e^{-xyz} \end{pmatrix} = \left(-xze^{-xyz} - x^3 y e^{yz},\ yze^{-xyz} - xy^2 \operatorname{sen} xz,\ 3x^2 e^{yz} + xy^2\operatorname{sen} xz\right)$$

$$\mathrm{rot}\,F\cdot n = 3x^2 e^{yz} + xy^2 \operatorname{sen} xz$$

$$\mathrm{rot}\,F\cdot n \Big|_{\tilde{\sigma}} = 3x^2 - 2y$$

ristretto a $\tilde{\sigma}$, sostituisco $z=0$

$$\tilde{\sigma} : z=0 \quad x^2+y^2\le 4$$



$$\iint_{\tilde{\sigma}} (3x^2-2y)\,dx\,dy = \iint_{\sigma} 3x^2\,dx\,dy + 2\iint(-y)\,dx\,dy$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cambio} \\ \text{variabili}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3\rho^2\cos^2\theta - 2\rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3\rho^3\cos^2\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^2 2\rho^2\operatorname{sen}\theta =$$

$$= 3\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta - \int_0^2 2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{=0 \text{ x area}}$$

$$= 3(4)\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} = 12\,[\pi] = 12\pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 138

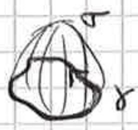
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 138

TEOREMA $F: V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

V semplicemente connesso

$$\boxed{\text{rot} F = 0 \Rightarrow F \text{ conservativo}}$$

Dim Calcoliamo per ogni curva γ semplice regolare chiusa



$$\oint_\gamma F \cdot \vec{t} = \int_\Gamma \text{rot} F \cdot n = 0 \Rightarrow F \text{ è conservativo su } V$$

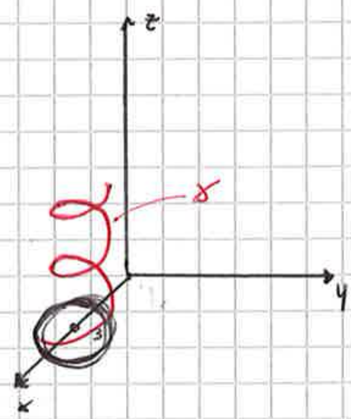
$\Rightarrow$ conservativo su V

Γ calotta con bordo γ

ESERCIZIO

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2}, e^z, ye^z\right)$$

$$\gamma(t) = (3+\cos t, \sin t, 3t) \quad t \in [0;\pi]$$



$$\int_\gamma F \cdot \vec{t}$$

$$\text{dom} F = \mathbb{R}^3 \setminus \{x=0\}$$

$$\gamma \subseteq \{x>0\}$$

$$F\Big|_{\{x>0\}} \quad \text{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{x^2} & e^z & ye^z \end{vmatrix} = (e^z - e^z, 0-0, 0-0) = (0,0,0)$$

$\text{rot} F = 0$ $\quad \{x>0\}$ è sempl. connesso

$\Downarrow$

allora F è conservativo su $\{x>0\}$

Calcoliamo il potenziale

- prendo P generico nel semispazio $(1,0,0)$
- generico (x,y,z) e calcolare l'integrale di linea

Oppure $\to$ uso la def di potenziale $F = \nabla g$ $\quad g: \cancel{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}}$ $\{x>0\} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = e^z \\ \frac{\partial g}{\partial z} = ye^z \end{cases}$$

impongo le = e integro $\quad g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \varphi(y,z)$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^z$$

$$\varphi(x,y,z) = ye^z + h(z)$$

quindi $g(x,y,z) = \frac{1}{x} + ye^z + h(z)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 138

$$\int_{\partial V} F \cdot \vec{N} = \iiint_V \mathrm{div}\, F \, dx\, dy\, dz$$

$\mathrm{div}\, F = y^2 + z^2 + x^2$ $\qquad I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$

$\leadsto$ coordinate cilindriche $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = t \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \rho^2 \le t \le 1 \end{array}$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^1 (\rho^2 + t^2)\rho\, dt \right) d\rho\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[\rho^3 t + \rho \frac{t^3}{3} \right]_{t=\rho^2} d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\rho^3 + \frac{\rho}{3} - \rho^5 - \frac{\rho^7}{3} \right] d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{6} - \frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^8}{24} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{24} \right] = 2\pi \frac{5}{24} = \frac{5}{12}\pi$$

OSSERVAZIONE $\quad \forall F \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} =$$

$G = \mathrm{rot}\, F \Rightarrow \mathrm{div}\, G = 0 \Rightarrow$ CAMPO SOLENOIDALE

INTERPRETAZIONE DELLA DIVERGENZA

$S_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < \varepsilon \}$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, S_\varepsilon} \iiint_{S_\varepsilon} \mathrm{div}\, F\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{1}{\mathrm{vol}\, S_\varepsilon} \iint_{\partial S_\varepsilon} F \cdot N$$

passo al limite
$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}\, S_\varepsilon} \iiint_{S_\varepsilon} \mathrm{div}\, F\, dx_1\, dx_2\, dx_3}_{\mathrm{div}\, F(P)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}\, S_\varepsilon} \int_{\partial S_\varepsilon} F \cdot n$$

INTERPRETAZIONE DEL ROTORE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 138

② Se $\lim_n S_n = +\infty$ si dice che la serie diverge positivamente

③ " " $= -\infty$ " " " diverge negativamente

④ Se $\lim \nexists$ " " " è indeterminato

Es. Serie di Mengoli

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$ usiamo la def per vedere come si comporta la serie

$$S_2 = \frac{1}{2(1)}, \quad S_3 = \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{2(1)}, \quad S_4 = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3}$$

$$1 - \frac{1}{2} \qquad \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) \qquad \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$ posso riscrivere così

$$S_5 = 1 - \frac{1}{5}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$$ allora si dice che la serie converge

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

Es. $\sum_{n=1}^{+\infty} n$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+2$

$S_3 = 1+2+3$

$S_n = 1+2+3+n \geq n \to \infty$ la successione diverge per il teorema del confronto

S_n diverge x teo confr. delle succ.

Es. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

$S_0 = (-1)^0 = 1$

$S_1 = (-1)^1 = 1 - 1 = 0$

$S_2 = \cancel{1} - \cancel{1} + 1 = 1$

$S_n \quad 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}}$$

$\Rightarrow \nexists \lim_n S_n$ cioè la serie è indeterminata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 138

La condizione $a_n \to 0$ NON È SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA di $\sum a_n$

Dim con 1 controesempio di una serie tale che $a_n \to 0$ ma $\sum a_n$ div $\oplus$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$$

$S_1 = \log 2 - \log 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = \cancel{\log 2} - \underset{0}{\log 1} + \log 3 - \cancel{\log 2}$

$S_3 = \cancel{\log 3} + \log 4 - \cancel{\log 3}$

$S_n = \log(n+1) \to +\infty$ la $\sum$ diverge positivamente $a_n \to 0$

$a_n = b_{n+1} - b_n$
$S_n = b_{n+1} - b_0$ } sono dette serie telescopiche

SOMMA DI SERIE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ la somma di queste serie è la serie che ha come termine generale $a_n + b_n$, cioè è la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

Proposizione Se $\sum_n a_n$ converge a $\sum_n a_n = S_a$ e se $\sum_n b_n$ converge e $\sum_n b_n = S_b$ allora $\sum_n (a_n + b_n)$ è convergente e $\sum_n (a_n+b_n) = S_a + S_b$

Dim $S_0 = a_0 + b_0$

$S_1 = a_0 + b_0 + a_1 + b_1 = [a_0 + a_1] + [b_0 + b_1]$

$S_2 = S_1 + (a_2 + b_2) = [a_0 + a_1] + [b_0 + b_1] + a_2 + b_2 = [a_0 + a_1 + a_2] + [b_0 + b_1 + b_2]$

se indico le somme parziali di $\sum a_n$ con S_n^a e le somme parziali $\sum_n b_n$ con S_n^b

$S_n = S_n^a + S_n^b$ e le somme parziali di $\sum a_n$ con S_n^a e le somme parziali $\sum b_n$ con S^b

$S_n = S_n^a + S_n^b \to S^a + S^b$

$\sum a_n$	$\sum b_n$	$\sum (a_n + b_n)$
converge a S^a	converge a S^b	converge a $S^a + S^b$
converge a S^a	diverge a $\pm\infty$	diverge a $\pm\infty$
diverge a $+\infty$	diverge a $+\infty$	diverge a $+\infty$
diverge a $+\infty$	diverge a $-\infty$	?
è INDET.	?	?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 138

SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n$

Proposizione se $a_n \geq 0 \ \forall n$ allora la serie converge o la serie diverge positivamente

Dim $S_0 = a_0$

$S_1 = a_1 + a_0 = S_0 + a_1$

$\vdots$

$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}$

$S_{n+1} \geq S_n$ la successione S_n è crescente $\Rightarrow$ teo lim di succ monotone

o $S_n \to S \in \mathbb{R}$ o $S_n \to +\infty$

la prop vale anche per le serie a termini ⊕ definitivamente

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots$

⊕ oppure ⊖ $\quad \geq 0 \quad \geq 0$ da un certo punto in poi è ⊕

$1 - 5 + 17 - 20 - 27 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ⊕

CRITERIO DEL CONFRONTO PER SERIE A TERMINI POSITIVI (definit.)

$\sum_n a_n \ , \ \sum_n b_n \qquad \begin{matrix} a_n \geq 0 \\ b_n \geq 0 \ \forall n \end{matrix} \qquad \boxed{a_n \leq b_n} \ \forall n$

① Se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

② Se $\sum_n a_n$ diverge positivamente $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge positivamente

Dim $0 \leq S_0^a = a_0 \leq b_0 = S_0^b$

$0 \leq S_n^a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n^b \leq S^b$

se $\sum_n b_n = S^b$

$\forall n \quad 0 \leq S_n^a \leq S^b \qquad S_n^a$ è monotona crescente, limitata

$\Downarrow$

CONVERGENTE A $S^a \leq S^b$

$0 \leq S_n^a \leq S_n^b$

$\downarrow$

$+\infty$

se $S_n^a \to +\infty$ (cioè $\sum a_n$ diverge) per il teorema sui limiti delle successioni anche $S_n^b \to +\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 138

③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n(n-1)} \qquad n^2 \geq (n(n-1))$

$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ è convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è conv

④ $\alpha > 2$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ conv

$n^\alpha \geq n^2$

$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente

---

$\sum \frac{1}{n^\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad \alpha \geq 2 \qquad 1 < \alpha < 2$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
(per serie a termini positivi)

$\sum_n a_n \qquad a_n \geq 0$

$b_n > 0$ definitivamente

$\sum_n b_n$

$\exists \lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$

① se $l > 0$ $\sum_n a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_n b_n$ converge

$\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$

② se $l = 0$

se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

RICORDA CHE

$k \in \mathbb{R} \quad k \neq 0$ allora

$k \sum_n b_n = \sum_n k b_n$

Dim $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l$

da def limite $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ t.c. $\forall n > n_0$

$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$ cioè $l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$

$b_n > 0 \qquad b_n (l - \varepsilon) < a_n < (l + \varepsilon) b_n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 138

CRITERIO DEL RAPPORTO PER SERIE A TERMINI > 0

$a_n > 0 \qquad \sum_n a_n$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{① Se } \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ \text{② Se } \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \end{array}}$$

NO DIM

* [se $\ell = 1$ non si sa]*

ESEMPIO

ⓐ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ $\qquad 0! = 1$ RICORDA

cos'è $\frac{a_{n+1}}{a_n}$? scrivo il t. generale della serie $\frac{1}{n!}$

⇓

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{(n+1)(\cancel{n})\cancel{(n-1)} \cdots \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} \cdot \cancel{n(n-1)} \cdots \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$= \frac{1}{n+1}$ che per $n \to +\infty$ $\frac{1}{n+1} \to 0 < 1$ quindi la serie converge

ⓑ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

⇓ CONFRONTO

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE $\qquad a_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

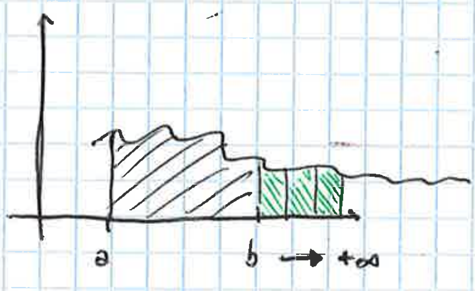
NON SI SA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 138

$\lim \sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2} < 1$ quindi la serie converge per il criterio della radice

~~CRITERIO~~ RIPASSO INTEGRALI IMPROPRI



$\int_a^b f(x)\,dx$ f limitata, $[a,b]$ limitato

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$ $\quad f(x) \geq 0 \quad = \lim_{n \to +\infty} \int_a^n f(x)\,dx \quad n \in \mathbb{N}$

CRITERIO DI MAC LAURIN PER LE SERIE A TERMINI (+)

$f: [1; +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0 \quad x \geq 1$

f decrescente su $[1; +\infty)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}}$$

Inoltre $\leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n+1) = 1 \cdot f(2) + 1 f(3) + 1 f(4)$

$n \leq x \leq n+1$

f decresce $\quad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 138

es. $\frac{1}{n^2 \log n}$ infinitesimo di ordine > $\frac{1}{n^2}$

$$\frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 \log n} \to 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2 \log n} \text{ è convergente}$$

$$\sum_n \frac{1}{n \log n} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx$$

$$\frac{1}{n \log n} \qquad \frac{1}{n^\alpha} \text{ con } \alpha > 1$$

SERIE A TERMINI ALTERNI

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n \qquad b_n \geq 0$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

Def si dice che $\sum_n a_n$ converge assolutamente se converge la $\sum_n |a_n|$

TEOREMA Se $\sum_n |a_n|$ converge allora anche $\sum_n a_n$ converge

$$\left| \sum_n a_n \right| \leq \sum_n |a|$$ deriva dalla disuguaglianza triangolare

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Dim Idea → ricondursi a serie a termini ⊕

Consideriamo le succ.

$$b_n = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$$

oss b_n è a t. ⊕ $\forall n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 138

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^3} \right| \qquad \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^3} \right| \le \frac{1}{n^3} \qquad \sum \frac{1}{n^3} \text{ CONVERGE}$$

$\Rightarrow$ x criterio del confronto $\sum_n \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^3} \right|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$

SERIE DI POTENZE

abbiamo visto che le serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{conv per } |q| < 1 & \frac{1}{1-q} \\ \text{diverge per } q \ge 1 \\ \text{è indet per } q \le -1 \end{cases}$$

se q non è costante ma una variabile

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

se $|x| < 1$ $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad x_0 \in \mathbb{R} \text{ con } x_0 \text{ fissato}$$

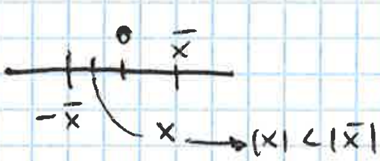
x_0 centro della serie

a_n successione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 138

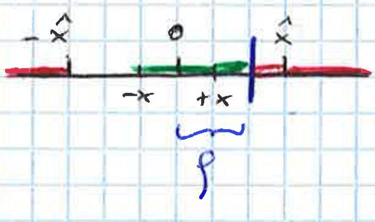
$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$ NON CONVERGE



Se in $\hat{x}$ la serie NON CONVERGE allora per ogni x t.c. $|x| > |\hat{x}|$ la serie non converge

$$\rho = \sup \left\{ |\bar{x}| : \sum_n a_n \bar{x}^n \text{ conv} \right\}$$

è il raggio di convergenza della serie di potenze



in ρ e $-\rho$ non si sa cosa capiti

MANCA TEOREMA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 138

CRITERIO DELLA RADICE PER LE SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{se} \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R} \qquad \ell = +\infty$$

① Se $\ell = +\infty$ $\quad \rho = 0$ cioè la serie converge solo per $x=0$
② Se $\ell = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \rho = \frac{1}{\ell}$
③ Se $\ell = 0$ $\quad \rho = +\infty$ cioè la serie converge per ogni x

DIM: Sia x fissato

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||x|^n$$

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\, x$$

~~$\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < 1$ ... la serie converge~~

se $\ell|x| < 1 \Rightarrow$ la serie converge

$\ell|x| < 1$ è vero in due casi

- $\ell = 0 \quad \forall x \quad \rho = +\infty$
- $\ell \neq 0 \quad |x| < \frac{1}{\ell} \quad \rho = \frac{1}{\ell}$

Se invece $\ell = +\infty$ $\quad \ell|x| < 1$ solo per $x=0$
$\rho = 0$

ESEMPI

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} x^n \qquad a_n = \frac{n}{3^n}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n+1}{3^{(n+1)}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3^{(n+1)}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} \qquad \ell = \frac{1}{3}$$

$$\rho = \frac{1}{\ell} = 3$$

la serie converge in $(-3, 3)$ e diverge in $(-\infty, -3)$ e in $(3, +\infty)$

Cosa fa in -3 e 3?

A priori non sappiamo se la serie conv. o meno negli estremi dell'int. di convergenza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 138

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ conv. ondutta

④ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad l = 0 \qquad \rho = +\infty$$

la serie converge per ogni x

⑤ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^n x^n$

$a_n = (-1)^n n^n$

criterio della radice $\sqrt[n]{|(-1)^n n^n|} = \sqrt[n]{n^n} = n \to +\infty$

solo per $x = 0$

OPERAZIONI TRA SERIE DI POTENZE

* SOMMA DI SERIE DI POTENZE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ insieme di conv. E_a e $S_a(x)$ somma serie in x

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ins. di conv E_b e $S_b(x)$ somma " "

TEOREMA $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ converge nell'insieme $E_a \cap E_b$

e in $E_a \cap E_b$ la sua somma è $S_a(x) + S_b(x)$

Sintetizzando
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + b_n x^n}$$

NB in generale la serie somma potrebbe convergere in un ins. + grande di $E_a \cap E_b$

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n!} \right) x^n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 138

ESEMPIO : prodotto di serie geometriche

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$|x| < 1 \qquad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \qquad |x| < 2$

$(-1;1) \qquad (-2,2) \Rightarrow$ prodotto sta in $(-1;1)$

$$(1+x+x^2+\dots)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3+\dots\right) = 1+x\left(1+\frac{1}{2}\right)+x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)+\dots$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad x \in \mathbb{R}$

$\shortparallel$

$S(x)$

$a_0 \quad a_1 x \quad a_2 x^2$

funzioni

ρ raggio di convergenza

$\rho > 0$ oppure $\rho = +\infty$

$\mathcal{C}$ insieme di convergenza

TEOREMA : derivando infinite volte una ~~successione~~ serie che ha intervallo di convergenza $\mathcal{C}$, si ottengono ancora serie di potenze con intervallo $\mathcal{C}$

① $S(x)$ è continua in ogni punto di $\mathcal{C}$

② $S(x)$ ammette una primitiva $\mathcal{S}(x)$ data da

$$\mathcal{S}(x) = K + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = K + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots$$

$\mathcal{S}(x)$ è definita e converge su $\mathcal{C}$

③ $S(x)$ è derivabile in ogni punto di $(-\rho,\rho)$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$S'(x)$ è una serie di potenze con raggio ρ

$S'(x)$ si può derivare : $S''(x)$

$S''(x) = \sum (\dots) x^n$ con lo stesso ρ

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si può derivare infinite volte in $(-\rho,\rho)$

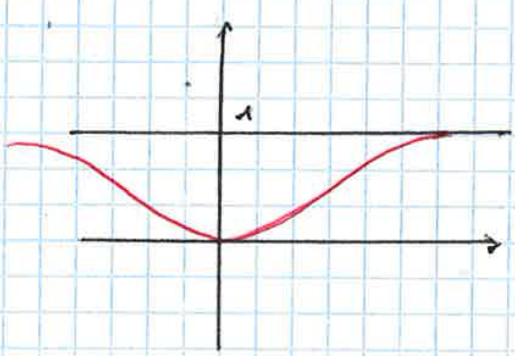
$S(x) \in \mathcal{C}^\infty(-\rho,\rho)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 138

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-(-2)\frac{1}{x^3}\right) \to 0 \text{ per } x \to 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

$$f''(0) = \dots \; f^{(n)}(0) = 0$$

↳ teorema tappofuchi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \equiv 0$$

Definiz. f di classe C^∞ in un intorno di un punto x_0 si dice **analitica** in x_0 se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ la somma della serie di Taylor calcolata in x coincide con $f(x)$

TEOREMA f di classe C^∞ su un intervallo I. x_0 punto interno a I se $\exists\, \delta > 0$, $\exists M > 0$ t.c.

$$\forall n = 0, 1, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad |f^{(n)}(x)| < M$$

allora f è analitica $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

DIM: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

SOMMA PARZIALE $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = S_N(x)$

$$|f(x) - S_N(x)| \overset{?}{\to} 0$$

!Ricordo! Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = S_N(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

con $t \in (x, x_0)$

$$|f(x) - S_N(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \le \frac{|f^{(n+1)}(t)|\, |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \le$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 138

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x^0 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$S'(0) = a_1$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \dots$$

$$S''(0) = 2a_2 \qquad a_2 = \frac{S''(0)}{2}$$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$\Downarrow$

$S(x)$ è analitica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = S(x)$$

PROPRIETÀ

① $S(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n$

se $S(x)=0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

② PRINCIPIO DI IDENTITÀ

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ con r_x raggio ρ

se $S_a(x) = S_b(x) \Rightarrow a_n = b_n \ \forall n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 138

Un polinomio trigonometrico è una f del tipo:

$$\boxed{P_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)}$$

m ordine del polinomio trigonometrico

OSS $P_m(x)$ è periodico dello stesso periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Proposizione: combinaz. lineari di polinomi trigonometrici di periodo minimo $\frac{2\pi}{\omega}$ sono ancora polinomi trigonometrici

Es

f	T
$\cos x$	2π
$\cos 2x$	π
$\cos 3x$	$\frac{2\pi}{3}$
- - - -	-

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{M} (a_n \cos \omega x n + b_n \operatorname{sen} \omega x n)$$

$$Q_M(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{n} (c_n \cos n\omega x + d_n \operatorname{sen} n\omega x)$$

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x$

$$P_m(x) + Q_M(x) = a_0 + c_0 + (a_1 + c_1)\cos\omega x + (a_2 + c_2)\cos 2\omega x + \dots + (b_1 + d_1)\operatorname{sen}\omega x + (b_2 + d_2)\operatorname{sen} 2\omega x$$

per $m < M$ $\quad a_{m+1} = 0, \quad a_{m+2} = 0$

Proposizione: prodotto di polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico

$$P_m(x) \cdot Q_M(x) = (a_0 + a_1 \cos\omega x + b_1 \operatorname{sen}\omega x + \dots + b_m \operatorname{sen} m\omega x) \cdot$$
$$\cdot (c_0 + c_1 \cos\omega x + d_1 \operatorname{sen}\omega x + c_2 \cos 2\omega x + \dots + d_M \operatorname{sen} M\omega x)$$

= sviluppo il prodotto

$$= a_0 c_0 + a_1 c_0 \cos\omega x + \dots + a_0 c_1 \cos\omega x + c_1 a_1 (\cos\omega x)^2 + c_1 \overset{\cos\omega x}{b_1} \operatorname{sen}\omega x + c_1 a_2 \cos 2\omega x \cdot \cos\omega x$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1(\cos\omega x) + \alpha_2 \operatorname{sen}\omega x + \alpha_N$$

α_0: prodotto per costanti

$\cos m\omega x \cos n\omega x$
$\operatorname{sen} m\omega x \cos n\omega x$
$\operatorname{sen} m\omega x \operatorname{sen} n\omega x$

$\left.\begin{matrix}\cos N\omega x \\ \operatorname{sen} N\omega x\end{matrix}\right\}$ con N da determinare

FORMULE DI WERNER RICAVATE A PARTIRE DALLE FORMULE DI ADDIZIONE

$$\cos[(n+m)\omega x] + \cos[(n-m)\omega x] = \cos[n\omega x + m\omega x] + \cos[n\omega x - m\omega x] =$$

$$= \cos n\omega x \cdot \cos m\omega x - \cancel{\operatorname{sen} n\omega x \operatorname{sin} m\omega x} + \cos n\omega x \cos m\omega x + \cancel{\operatorname{sen} n\omega x \operatorname{sen} m\omega x}$$

$$= 2\cos n\omega x \cos m\omega x = \text{formule di partenza}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 138

$$n = m \qquad \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left[\cos 2n\omega x + 1\right] dx = \frac{1}{2}\left[\underset{\overset{\parallel}{0}}{\frac{-\operatorname{sen} 2n\omega x}{2n\omega}} + x\right]_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\omega} - \left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\right] = \frac{\pi}{\omega}$$

Supponiamo che nel punto x valga $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)$

calcoliamo a_0, a_n, b_n come "funzioni di f"

integriamo i membri della sommatoria

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left\{a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{a_n \cos n\omega x}_{\text{integrale su periodo} = 0} + \underbrace{b_n \operatorname{sen} n\omega x}_{\text{integrale su periodo} = 0}\right)\right\} dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{a_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos n\omega x\,dx + b_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \operatorname{sen} \omega x n\,dx\right.$$

"scambio" le operazioni di integrazione e "somma infinita"

$$= a_0 \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx = a_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega}$$

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx$$

$f(x) = a_0 + \sum \dots$

moltiplico ambo i membri per $\cos m\omega x$ e integro tra $-\frac{\pi}{\omega}$ e $\frac{\pi}{\omega}$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos m\omega x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\right] \cos m\omega x\,dx$$

scambio $\int$ e $\sum$ (supponendo di poterlo fare)

$$= a_0 \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \underset{\overset{\parallel}{0}}{\cos m\omega x\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \underset{\overset{\parallel}{a_n \frac{\pi}{\omega}}}{\cos n\omega x \cos m\omega x\,dx} + b_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \underset{\overset{\parallel}{0}}{\operatorname{sen} n\omega x \cos m\omega x\,dx}\right.$$

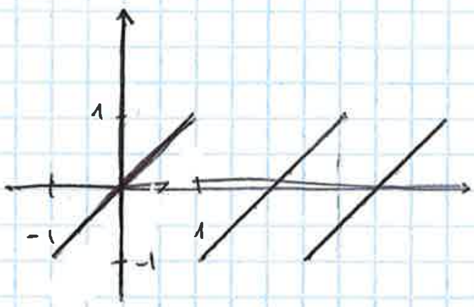
$$= a_m \frac{\pi}{\omega}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos m\omega x\,dx = a_m \frac{\pi}{\omega} \qquad a_m = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos m\omega x\,dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 138

DENTE DI SEGA



$$f(x)\Big|_{(-1;1)} = x$$

OSSERVAZIONE

se f è dispari

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \underbrace{f(x)\underbrace{\cos n\omega x}_{\text{pari}}}_{\text{dispari}}\,dx = 0$$

per f pari

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \underbrace{f(x)\cos n\omega x}_{\text{dispari}}\,dx = 0$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n(\omega x)$$

$$f(x)\Big|_{(-1;1)} = x \qquad a_0 = 0 \qquad a_n = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad 2 = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \pi$$

$$b_n = \frac{\pi}{\pi}\int_{-1}^{1} x \operatorname{sen} n\pi x\,dx =$$

$$= x\,\frac{(-\cos n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} + \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx =$$

$$= \frac{-\cos n\pi \,\overset{-}{\oplus}\, \cos(-n\pi)}{n\pi} + \left[\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-(-1)^n - (-1)^n}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

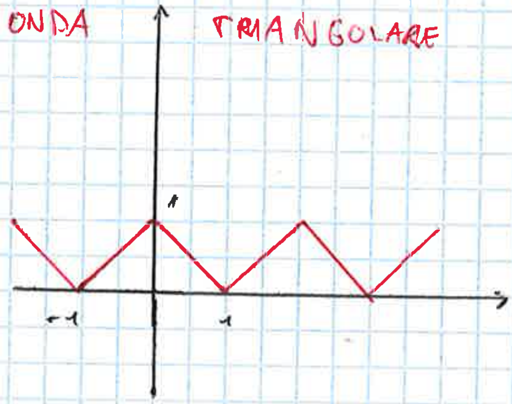
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 138

Allora per $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier converge a $f(x)$

ONDA TRIANGOLARE



$$f(x)\Big|_{(-1,1)} = 1 - |x|$$

f è pari quindi $b_n = 0$

$\omega = \pi$

$$a_0 = \frac{\pi}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{\pi}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[-|x|+1\right]\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 (-x+1)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= 2\left\{(-x+1)\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}\,dx\right\} = 2\left[-\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}\left[-(-1)^n + 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{N=0}^{+\infty}\frac{4}{(2N+1)^2\pi^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 138

$$\lim_{n} a_n = \lim_{n} b_n = 0$$

Dim: Se f é come nel teorema

$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f^2(x)\,dx$ è un numero reale per id. Parseval

$\Rightarrow 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ è convergente

$\Rightarrow a_n^2 + b_n^2 \to 0$ per CN CONVERGENZA di serie num.

$\Rightarrow a_n \to 0 \quad b_n \to 0$

Dim ① $\forall Q_m(x)$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - Q_m(x)|^2 dx \geq \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - P_m(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} [f(x) - P_m(x) + P_m(x) - Q_m(x)]^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left[\left(f(x) - P_m(x)\right) + \left(P_m(x) - Q_m(x)\right)\right]^2 dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (f(x) - P_m(x))^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (P_m(x) - Q_m(x))^2 dx + \underbrace{2\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} [f(x) - P_m(x)][P_m(x) - Q_m(x)]\,dx}_{\text{facciamo vedere che } = 0}$$

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cdot P_m(x)\,dx} - \boxed{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m^2(x)} - \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,Q_m(x) + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m(x)\,Q_m(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cdot \left(a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)\right) dx = a_0 \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx +$$

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos n\omega x\,dx + b_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin n\omega x\,dx = a_0 \frac{2\pi}{\omega} a_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \frac{\pi}{\omega} a_n + b_n \frac{\pi}{\omega} b_n\right)$$

$$\boxed{= \frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2) \frac{\pi}{\omega}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m} (a_2^2 + b_2^2) \frac{\pi}{\omega}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m(x)\,P_m(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right)^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 138

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,\text{sen}x \qquad \text{sen}x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$$

$$\text{sen}\, n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \cdot \frac{i}{i} \underset{i^2=-1}{=} \frac{ie^{in\omega x} - ie^{-in\omega x}}{2(-1)} = \frac{-ie^{in\omega x} + ie^{-in\omega x}}{2}$$

$$a_n \cos n\omega x + b_n \,\text{sen}\, \omega x = a_n\left(\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right)$$

$$= e^{in\omega x}\underbrace{\left[\frac{a_n - ib_n}{2}\right]}_{c_n} + e^{-in\omega x}\underbrace{\left[\frac{a_n + ib_n}{2}\right]}_{c_{-n} = \overline{c_n}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \qquad c_0 = a_0$$

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$xy'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$y''(x) = \Sigma$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 138

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 138

(2B) a λ corrisponde un unico autovettore u

Cerco una soluzione lin. indep. della forma

$\varphi(t) = e^{\lambda t}(vt + w)$ dove v, w sono vettori costanti $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\varphi(t) = C_2 e^{\lambda t}(vt + w) + C_1 e^{\lambda t} v}$$ SOL. GENERALE

$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t)$

$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} vt + \lambda \cancel{e^{\lambda t}} w + \cancel{e^{\lambda t}} v = A(\cancel{e^{\lambda t}}(vt + w))$

$\lambda vt + \lambda w + v = tAv + Aw$

$$\begin{cases} Av = \lambda v \\ Aw = \lambda w + v \end{cases} \qquad \begin{cases} Av = \lambda v \\ (A - \lambda I)w = v \end{cases}$$ ← v autovettore di A relativo a λ

$$\boxed{\begin{cases} (A - \lambda I)v = 0 \\ (A - \lambda I)w = v \end{cases}}$$

DOPO AVER TROVATO AUTOSPAZIO V_1
TROVO L'AUTOSPAZIO W CON IL SISTEMA

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

$\lambda = -1$ con molteplicità 2

$(A + I)u = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_1 + u_2 = 0$ $u_2 = -u_1$

$\varphi(t) = e^{\lambda t}(vt + w)$

$$\begin{cases} (A - \lambda I)v = 0 \\ (A - \lambda I)w = v \end{cases} \qquad \begin{cases} (A + I)v = 0 \\ (A + I)w = v \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 138