



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1543A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Zago C.

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Eserc.
Prof. Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

MECCANICA STRUTTURALE ①

venedì esercitazione solo 7N h 8:30 - 10:00

- > strutture (costruzioni destinate a sopportare sforzi)
- > requisiti fondamentali strutture (resistenza, rigidità)
- > statico (forze e momenti, vincoli e reazioni, eq.ni equilibrio)
- > stato di sollecitazione (tensione e deformazione)
- > cedimento materiali (prove, tipi comportamento, stato tensione e resistenza)
- > solido di Saint Venant (calcolo stato sollecitazione, proprietà sezioni, trazione e flessione)
- > strutture elementari (sollecitazioni in travi e telai semplici, configurazione deformata)
- > instabilità (colosso elementi snelli in compressione)

ESAME → scritto (max 27) : quesiti teorici (1/4) + esercizi (3/4)
+ orale facoltativo

$$\vec{R}_{M_{O_1}} = \vec{R}_{M_{O_0}} + (O - O') \wedge \vec{R}_F$$

CAMBAMENTO di POLO
 $O \rightarrow O'$

Nota: se $\vec{R}_F = \vec{0}$ il momento risultante non dipende dal polo

EQUILIBRIO

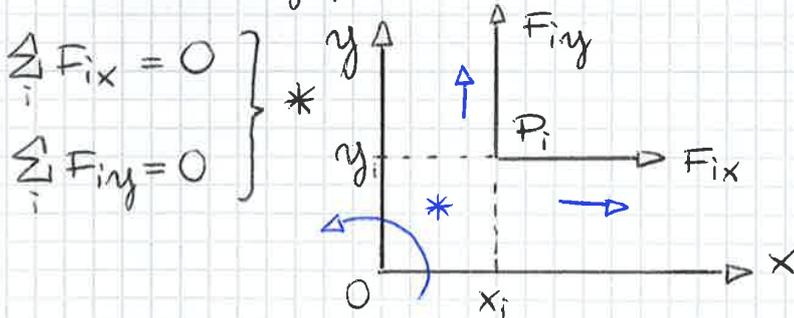
TRASLAZIONE

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \begin{cases} \rightarrow \sum_i F_{ix} = 0 \\ \rightarrow \sum_i F_{iy} = 0 \\ \rightarrow \sum_i F_{iz} = 0 \end{cases}$$

ROTAZIONE

$$\sum_i (\vec{M}_{O_i} + \vec{C}_i) = \vec{0} \begin{cases} \rightarrow \sum_i \vec{M}_{O_ix} + \vec{C}_{ix} = 0 \\ \rightarrow \sum_i \vec{M}_{O_iy} + \vec{C}_{iy} = 0 \\ \rightarrow \sum_i \vec{M}_{O_iz} + \vec{C}_{iz} = 0 \end{cases}$$

→ nel piano (xy), assumendo polo nell'origine



$$\left. \begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0 \\ \sum_i F_{iy} &= 0 \end{aligned} \right\} *$$

* segno positivo è concorde al verso dell'asse (negativo al contrario)

nella rotazione assumo positivo ad es verso antiorario (orbitario)

$$\sum_i (-F_{ix} y_i + F_{iy} x_i + C_i) = 0$$

EQ. NE
EQUILIBRIO
ROTAZIONE

* EQ. NE EQUILIBRIO TRASLAZIONE

EQUIVALENZA STATICA

2 sistemi sono equivalenti se hanno:

- > stesso forza risultante
- > stesso momento risultante

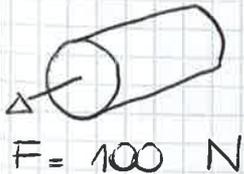
* stesso contributo del punto di vista statico

STATO di TENSIONE

7/10/2014

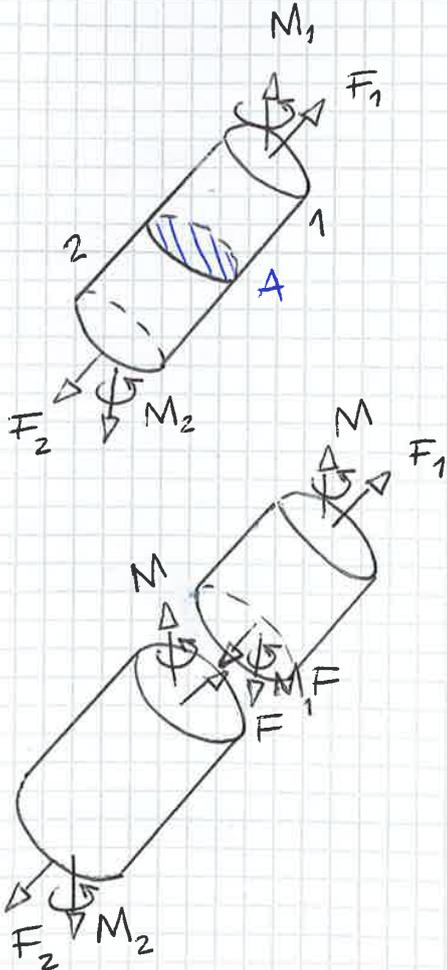
CAMBAMENTO di SCALA

- FORZE, MOMENTI →
- > Macroscopici
 - > indispensabili
 - > non sufficienti per lo studio della resistenza strutturale es. trazione



resisterò? • sezione
• materiale

- TENSIONI →
- > Microscopiche e puntuali
 - > grandezze specifiche: forza, area
 - > adatte a prevedere la resistenza

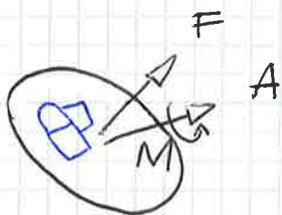


elemento in equilibrio tra $\vec{F}_1, \vec{M}_1, \vec{F}_2, \vec{M}_2$

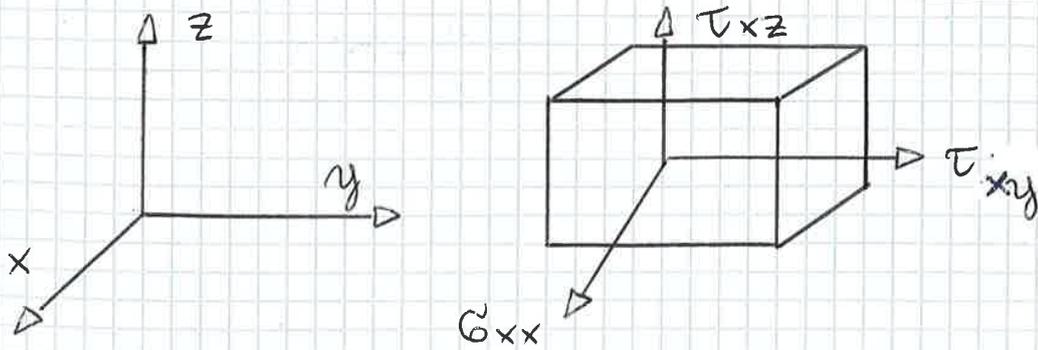
TRASMISSIONE dei CARICHI

↳ immagino di sezionare l'oggetto con sezione di area A , i 2 oggetti non sono più in equilibrio

EQUILIBRIO STATICO: \forall porzione di equilibrio deve essere in equilibrio

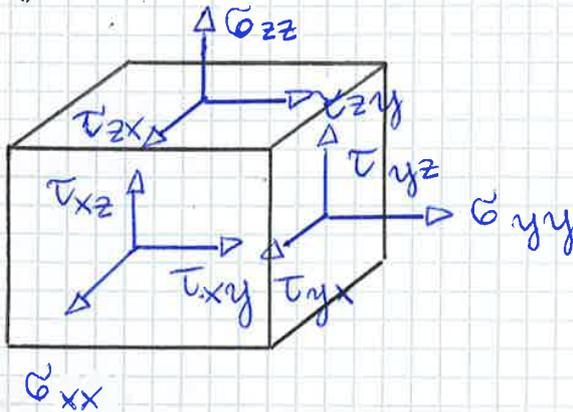


area porzione ΔA ha un contributo porzione ΔF e ΔM che dipendono da ΔA stesso



→ designazione di 2 indici (pedici) : $i, j = x, y, z$

↳ orientaz. superf
↳ // componente

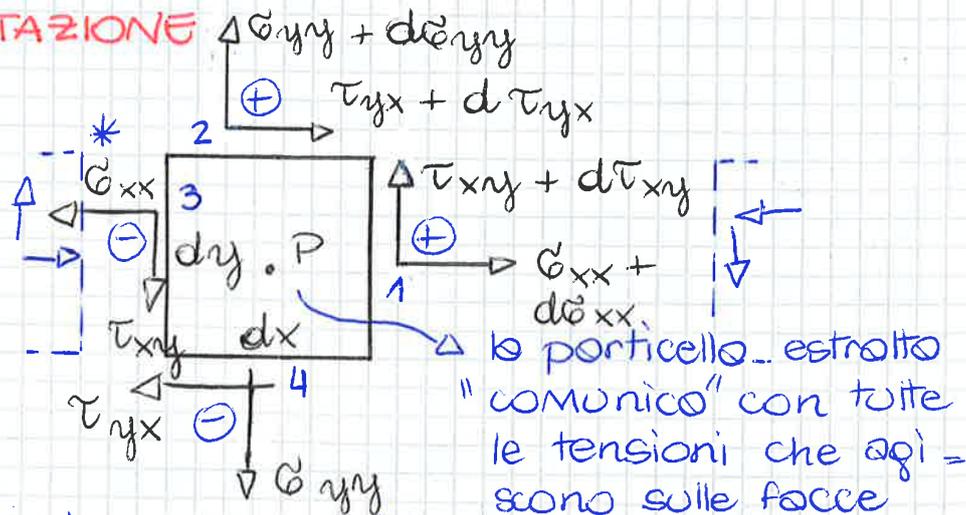
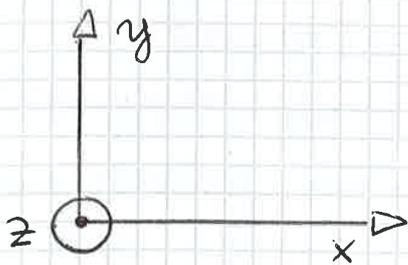


> 3 componenti NORMALI : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

> 6 // TANGENZIALI : $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

EQUILIBRIO OLO ROTAZIONE

→ intorno a z



* immagino la continuazione del materiale "staccato": deve avere delle reazioni contrarie alle facce da cui si è separato

→ distinguo facce positive e facce negative :

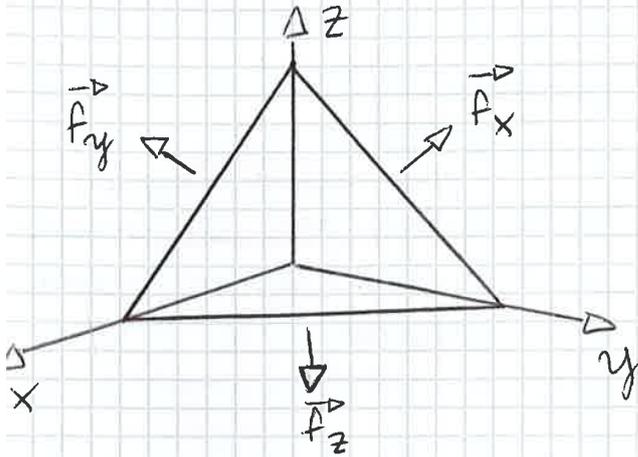
> faccia POSITIVA \vec{n} e ASSE CONCORDI

> // NEGATIVA \vec{n} e ASSE DISCORDI (componenti hanno versi discordi agli assi presi in considerazione)

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{coseni direttori}$$

$$dA_x = dA n_x \quad ; \quad dA_y = dA n_y \quad ; \quad dA_z = dA n_z$$

→ \forall faccia del tetraedro è sollecitata da un vettore



$$\vec{F}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_y = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{Bmatrix}$$

Φ_v = forza all'unità di volume

VETTORIALE

$$\vec{F} dA + \vec{F}_x dA_x + \vec{F}_y dA_y + \vec{F}_z dA_z + \underbrace{\Phi_v dV}_{=0} = \vec{0}$$

$\Phi_v \neq 0$ più velocemente degli altri contributi di area
 $\rightarrow \Delta = 0$

$$\vec{F} + \vec{F}_x n_x + \vec{F}_y n_y + \vec{F}_z n_z = \vec{0}$$

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \lambda) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_{yy} - \lambda) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_{zz} - \lambda) \end{bmatrix}$$

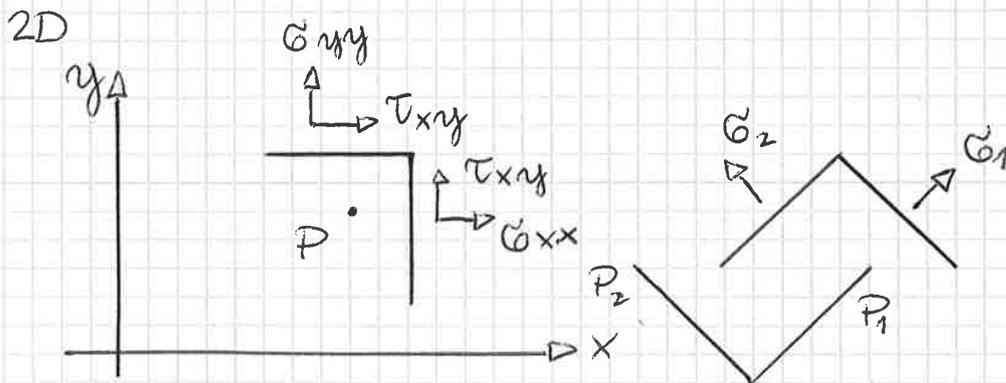
tensioni principali $\rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

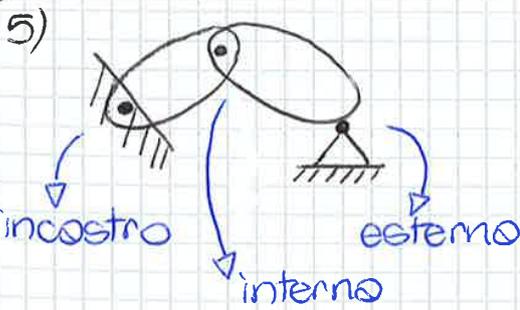
direzioni principali $\rightarrow \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$

\rightarrow nel riferimento principale

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

sulla faccia considerata agisce solo la componente σ e non quello τ





$$m = 2$$

$$i = 1$$

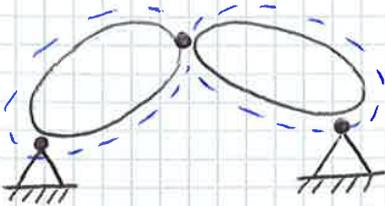
$$C = 2$$

$$V = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

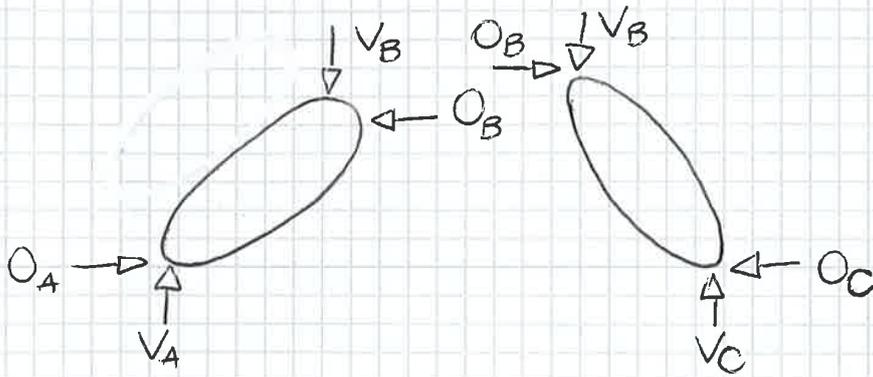
$$h = 7 - 3 \cdot 2 = 1$$

SCRITTURA delle EQUAZIONI di EQUILIBRIO

1) separare \forall elemento, interrompendo i vincoli \rightarrow linee di distacco



2) sostituire ai vincoli le reazioni corrispondenti verso l'elemento



dopo aver fissato le frecce 'in un corpo, nell'altro devo metterle uguali ed opposte

(DIAGRAMMA di CORPO LIBERO)

3) Per ciascun elemento scrivo le 3 eq.ni di equilibrio

\hookrightarrow ho 3 possibili casi:

a) 2 eq.ni di equilibrio alla traslazione } tante incognite, non sospicibile
 +
 1 eq.ne " " " rotazione

b) 2 eq.ni di equilibrio alla rotazione

+
 1 eq.ne " " " traslazione

\hookrightarrow non lungo la perpendicolare alla retta che passa per i 2 poli perché non dà un'eq.ne nuovo, ma dà una combinazione lineare delle precedenti

c) 3 eq.ni di equilibrio alla rotazione

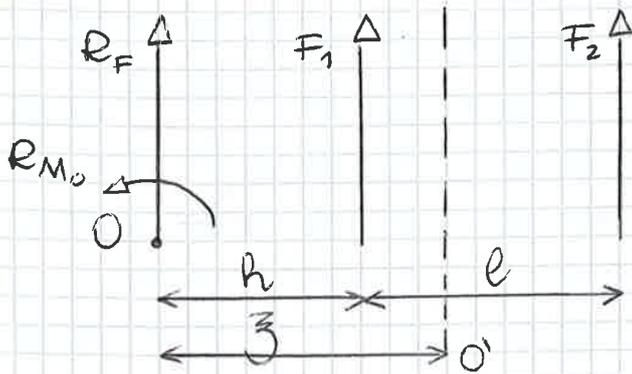
\hookrightarrow poli non allineati

ESERCITAZIONE 1

3/10/2014

① Dato il sistema:

ASSE CENTRALE



disegnare la forza risultante, trasportata all'asse centrale

passo 1) riduzione a O \rightarrow tentativo

$$R_F = F_1 + F_2$$

$$R_{M_0} = F_1 \cdot h + F_2 \cdot (h+l)$$

passo 2) trasporto da O a O'

$$\bar{z} = \frac{R_{M_0}}{R_F} = \frac{F_1 \cdot h + F_2 \cdot (h+l)}{F_1 + F_2} = \frac{h(F_1 + F_2) + F_2 \cdot l}{F_1 + F_2} =$$

 \rightarrow divido per $(F_1 + F_2)$

$$= \frac{h + l \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}}{1} = h + l \frac{F_2}{F_1 + F_2}$$

posizione dello
primo forzaO' si trova tra F_1 e F_2 , più o meno vicino a F_1 o F_2 > se $F_1 = 0$ $\bar{z} = h + l \Rightarrow$ la risultante è F_2
(asse centrale)> se $F_2 = 0$ $\bar{z} = h \Rightarrow$ " " " F_1
(" ")> se $F_1 = F_2$ $\bar{z} = h + \frac{l}{2} \Rightarrow$ " " è sullo mezzennio
(l'asse centrale è più vicino alla risultante)

② CARICO DISTRIBUITO UNIFORME

SISTEMA CONTINUO \rightarrow calcolo integrale

passo 1) alla generico quota z

$$R_F = \int_0^h p(z) dz = \int_0^h k z dz = k \cdot \frac{h^2}{2}$$

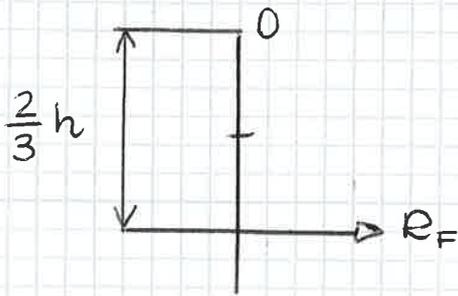
$$R_{M_0} = \int_0^h z p(z) dz = \int_0^h z \cdot k \cdot z dz = k \int_0^h z^2 dz =$$

$$= \left[\frac{k}{3} z^3 \right]_0^h = k \frac{h^3}{3}$$

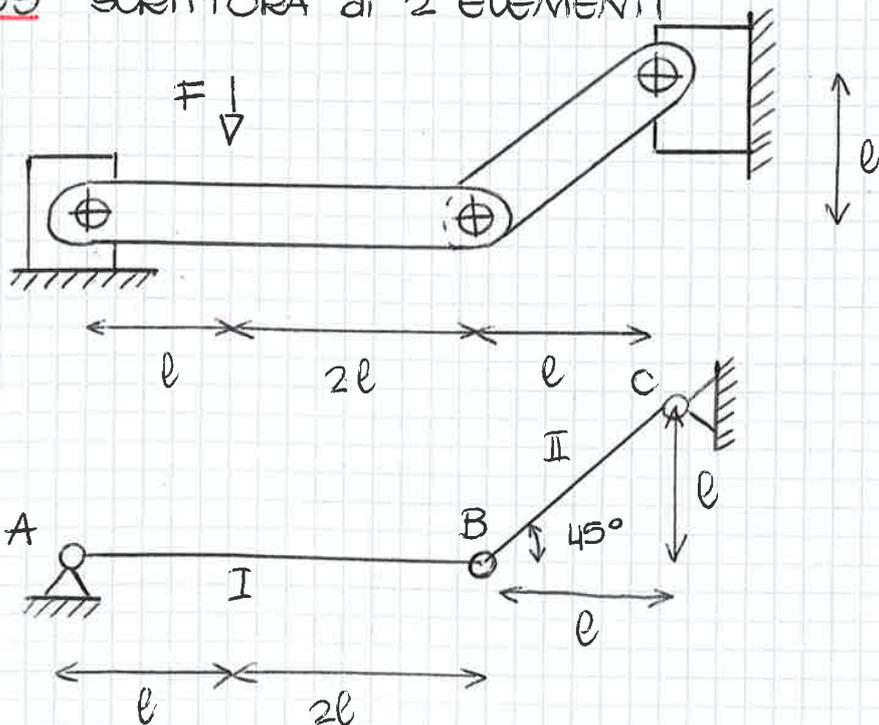
passo 2)

$$\bar{z} = \frac{R_{M_0}}{R_F} = \frac{k \cdot \frac{h^3}{3}}{k \frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3} h$$

-> la distribuzione si trova più vicina all'estremità dove si trova la distribuzione più grande

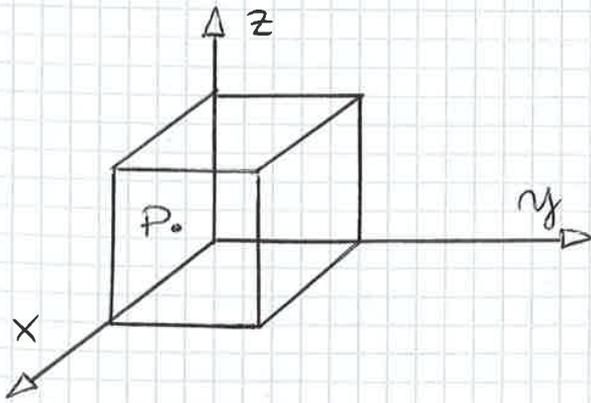


ES SCRITTURA di 2 ELEMENTI



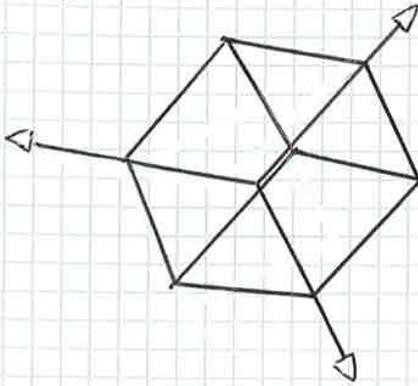
riferimento xyz NON principale

9/10/2014



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

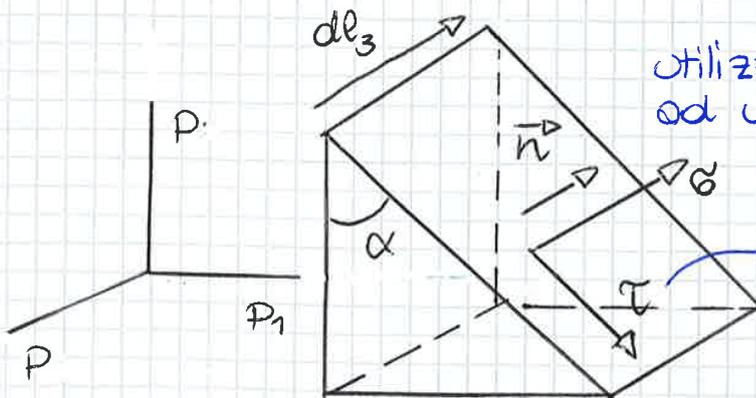
riferimento principale, ruoto cubo sopra



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

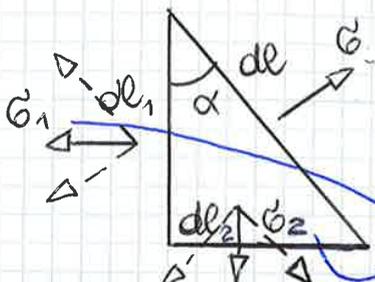
-> descrizione grafica della relazione tra σ, τ su un piano e l'inclinazione di quest'ultimo -> $\{F\} = [\sigma] \{n\}$:

- > sistema riferimento principale P_1, P_2, P_3
- > piano del fascio avente uno degli assi principali come $so_{=}$ stegno P_3



utilizzo equilibrio applicato ad un volume infinitesimo

ho un caso ~ bidimensionale, τ non può andare nella direzione di σ



$$\begin{aligned} dl_1 &= dl \sin \alpha \\ dl_2 &= dl \cos \alpha \end{aligned}$$

discordi rispetto a P_1 e P_2

se $\alpha = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma_1$ e $\tau = 0$

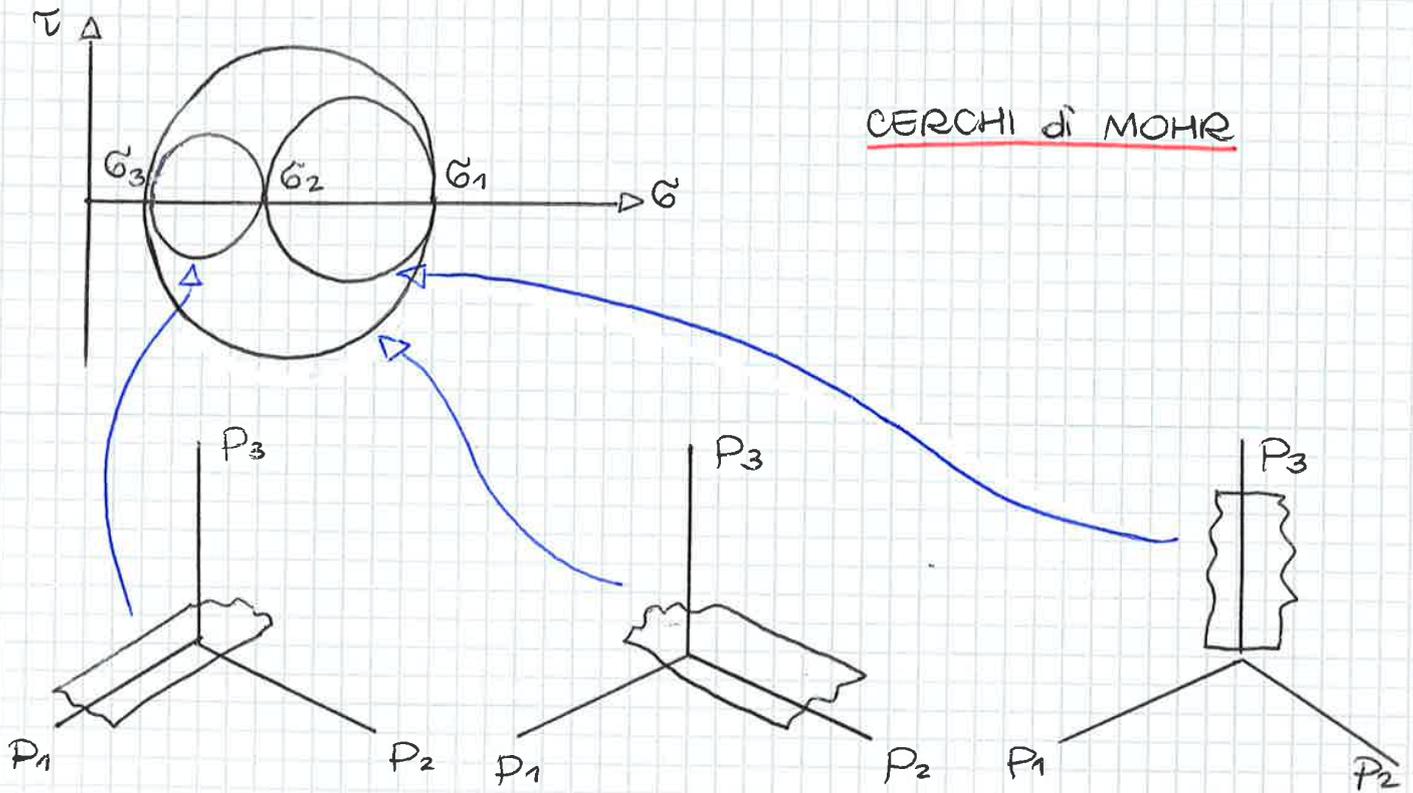
$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

così limite
corrispondono all'
estremo dx e sx
della circonferenza

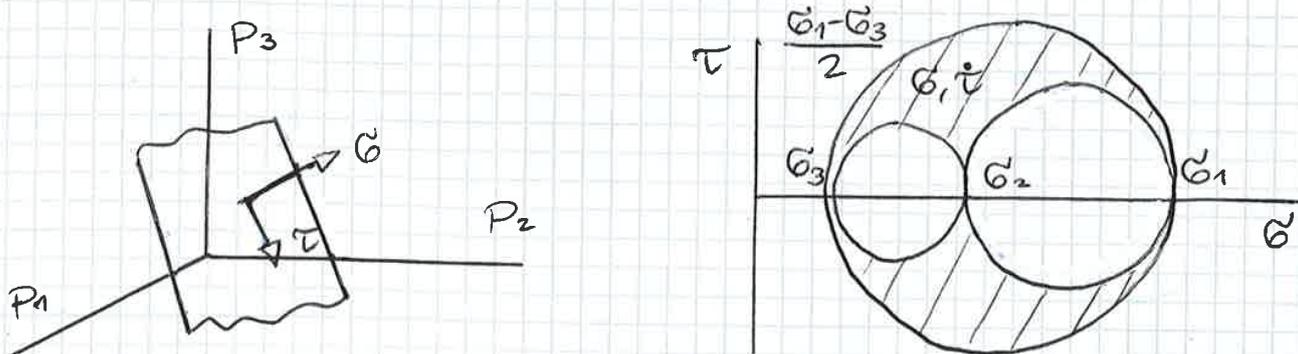
se $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sigma = \sigma_2$ e $\tau = 0$

→ le tensioni cambiano al variare dell'inclinazione di un piano
come cambiano i punti su una circonferenza
↳ le coordinate

CERCHI di MOHR



→ caso generale: piano non contenente P_1, P_2, P_3



σ, τ dentro cerchio $\sigma_1 - \sigma_3$ fuori $\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3$

ESERCITAZIONE 2

10/10/2014

① STATO di TENSIONE

Dato

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 90 \\ 0 & 170 & 0 \\ 90 & 0 & -120 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

e angolo

Determinare a) tensioni principali tra i riferimenti x, y, z e P_1, P_2, P_3 (piani principali)

b) σ e τ su piano del fascio con asse P_1 e normale $\{n\}$ a 45° rispetto a P_2

a)

1° passo) determinare direz. / tensione principale nota

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 170 \text{ MPa} \quad \text{principale} \leftarrow y \text{ direz. principale}$$

2° passo) determinare le tensioni principali non note

$$\begin{aligned} \sigma_{a,b} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \\ &= \frac{250 + (-120)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{250 + 120}{2}\right)^2 + 90^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a,b} &= 65 \pm 206 \\ &\begin{cases} \nearrow 271 \text{ MPa} = \sigma_a \\ \searrow 141 \text{ MPa} = \sigma_b \end{cases} \end{aligned}$$

3° passo) ordinamento decrescente delle tensioni principali

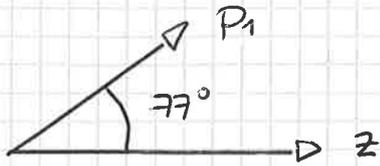
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 271 \text{ MPa} = \sigma_a \\ \sigma_2 = 170 \text{ MPa} = \sigma_{yy} \\ \sigma_3 = -141 \text{ MPa} = \sigma_b \end{cases}$$

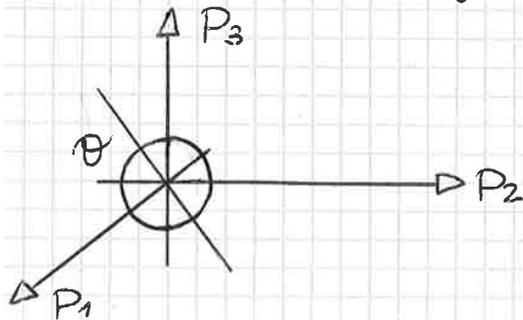
$$\alpha = \alpha^* - 90^\circ = 13^\circ - 90^\circ = -77^\circ$$

α angolo da P_0 ($G_0 = G_1$) a z

$\alpha < 0 \Rightarrow$ ROTAZIONE ORARIA



b) determinare $\{n\}$: riferimento principale



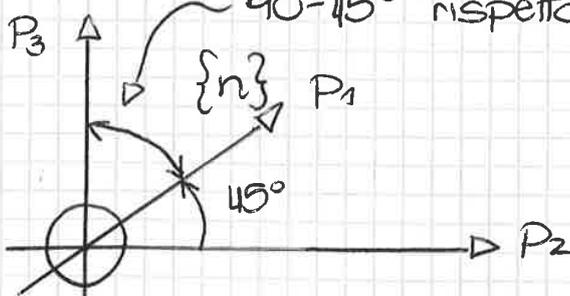
\rightarrow asse P_1

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow n_1 = 0$$

con $n \perp \{P_1\}$

$\rightarrow \{n\}$ a 45° rispetto a P_2
 $90 - 45^\circ$ rispetto a P_3



$$\{n\} \wedge \{P_2\} = 45^\circ$$

$$\{n\} \cdot \{P_2\} = \cos 45^\circ$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\rightarrow \{n\}$ a $(90 - 45^\circ)$ rispetto a P_3

2) Dato

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 350 & 220 & 0 \\ 220 & -270 & 0 \\ 0 & 0 & 140 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Determinare : a) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e α

b) σ, τ ; asse P_2 ; $\{n\}$ a 60° P_1

a) direz. noto $\rightarrow z \Rightarrow \sigma_{zz} = 140 \text{ MPa}$ principale

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta, b} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{350 - 270}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{350 + 270}{2}\right)^2 + 220^2} = \end{aligned}$$

$\sigma_a = 420 \text{ MPa}$

$\sigma_b = -340 \text{ MPa}$

$$\sigma_1 = 420 \text{ MPa} = \sigma_a$$

$$\sigma_2 = -140 \text{ MPa} = \sigma_{zz}$$

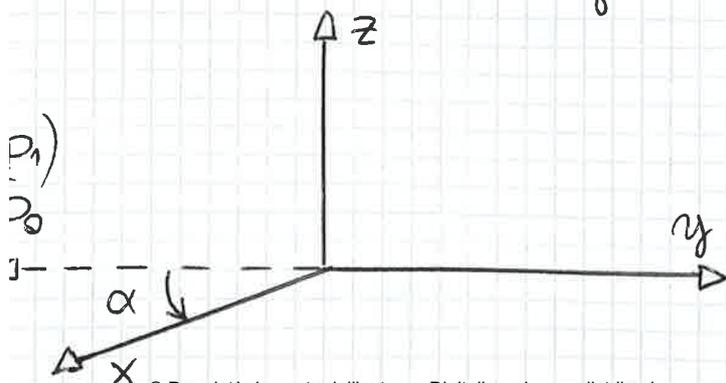
$$\sigma_3 = -340 \text{ MPa} = \sigma_b$$

$\rightarrow \alpha = ?$; $-\alpha^* = ?$

$$|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 220}{350 + 270} \right| = 0,71$$

$$2\alpha^* = \tan^{-1}(0,71) = 35,4^\circ \Rightarrow \alpha^* = 17,7^\circ$$

$\rightarrow z$ principale \rightarrow I rigo do tobello



$$\{n\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow n_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

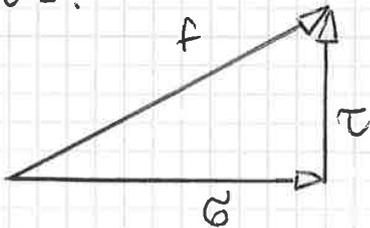
→ componenti di $\{f\}$: $\{f\} = [G] \{n\}$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 420 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & -340 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 210 \\ 0 \\ -170 \cdot \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

→ $G = ?$

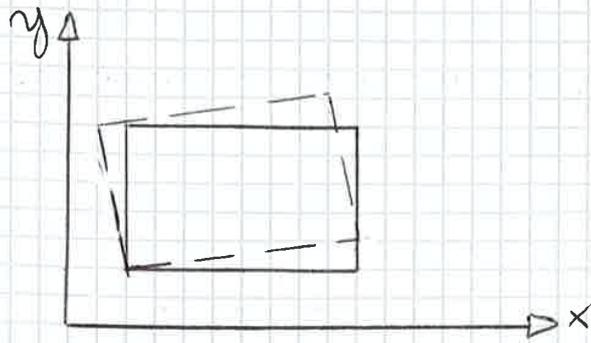
$$G = \{n\} \{f\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 210 \\ 0 \\ -170 \cdot \sqrt{3} \end{Bmatrix} = \frac{210 - 170 \cdot 3}{2} = -150 \text{ MPa}$$

→ $\tau = ?$



$$\tau = \sqrt{|f|^2 - G^2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - G^2} = \sqrt{210^2 + 170^2 \cdot 3 - 150^2} = 329 \text{ MPa}$$

ROTAZIONE



spostamento variabile con la distanza dal centro di rotazione; le direzioni cambiano

MOTO DEFORMATIVO

→ 2 tipi

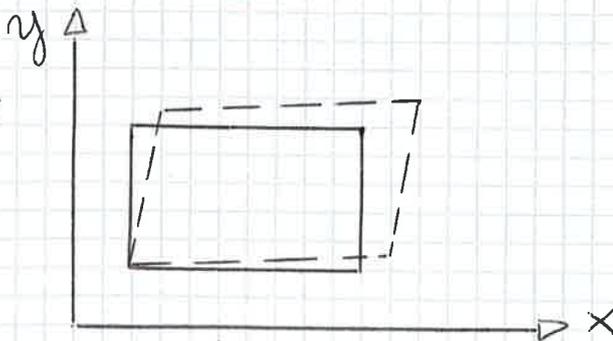
DILATAZIONE



variano le lunghezze, si mantengono le direzioni

→ vero per i lotti, falso per altri segmenti (es diagonale)

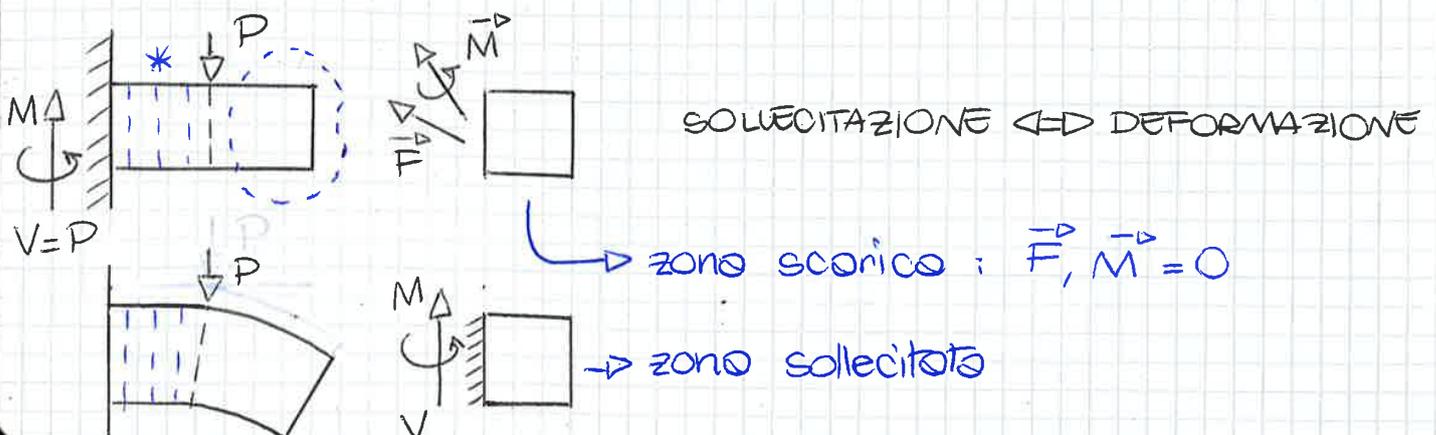
SCORRIMENTO



variano le direzioni, si mantengono le lunghezze

INTERAZIONE MOTO RIGIDO e DEFORMATIVO

es elemento incastro



→ se ho una quota parte di spostamento uguale di p.ti ≠ ho una traslazione rigida

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u}$$

la differenza tra dx e dx' sta nel $d\vec{u}$

dipende da

- > rotazione rigida
- > dilatazione
- > scorrimento

(avendo eliminato la traslazione rigida)

$d\vec{u}$: incremento (variazione) tra gli spostamenti eseguiti dagli estremi di $d\vec{x}$

$$d\vec{u} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

→ matrice Jacobiana

$$\{d\vec{u}\} = [J] \{d\vec{x}\}$$

→ $\left\{ \begin{array}{l} \text{rotazione rigida} \\ \text{dilatazione} \\ \text{scorrimento} \end{array} \right.$

→ identità

$$[J] = \frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J] = \underbrace{\frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J]^T}_{[\varepsilon]} + \underbrace{\frac{1}{2}[J] - \frac{1}{2}[J]^T}_{[\Omega]}$$

T: trasposto

$$\frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [\varepsilon]$$

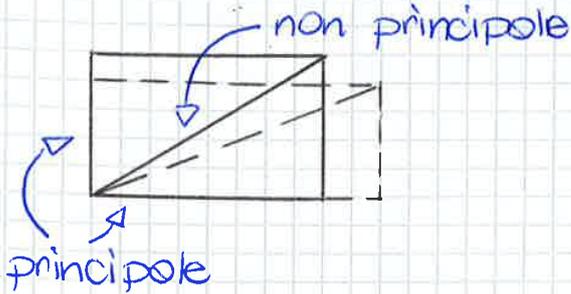
→ 3x3 simmetrica

→ parallelismo sulle diagonali

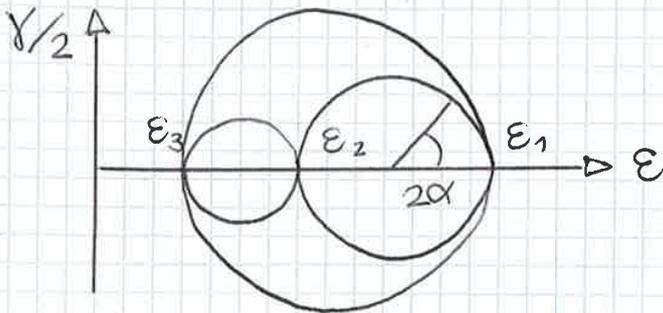
autovettori \rightarrow deformazioni principali

autovettori \rightarrow direzioni principali di deformazione

\rightarrow in cinematico per la deformazione non ho variazione di direzione ma solo "allungamento" o "accorciamento"



CERCHI di MOHR



LEGAME TENSIONI-DEFORMAZIONE

\rightarrow comportamento del materiale:

- > ELASTICO: reversibile
 - \rightarrow lineare es metalli
 - \rightarrow non lineare es gomma

> ANELASTICO: plasticità, scorrimento viscoso

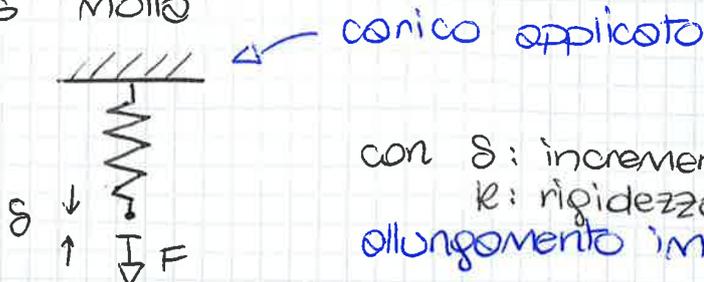
\rightarrow carico costante, sollecitazione costante per lungo tempo

> OMOGENEITÀ: proprietà uguali in tutti i punti

> ISOTROPIA: per un dato punto ho proprietà = in tutte le direzioni

ELASTICITÀ LINEARE

es molla



MATERIALE ISOTROPO

↳ stesso comportamento in tutte le direzioni

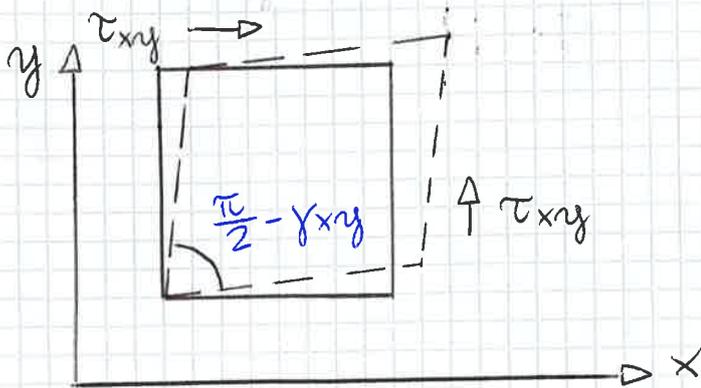
$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

τ_{xy} τ_{xz} τ_{yz} non causano nessun effetto sulle dilatazioni

DEFORMAZIONE di SCORRIMENTO

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

con G : MODULO ELASTICO TANGENZ.



$[G] = \text{MPa}$ è legato ad altri parametri

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

τ_{xz} , τ_{yz} , σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} non causano γ_{xy}

→ ancora per isotropia

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

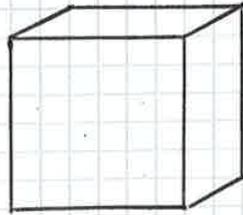
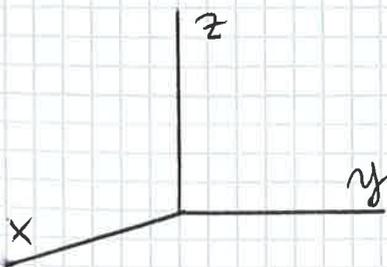
EFFETTO dello T

$$\Delta T = T - T_0$$

→ causa solo dilatazione identica lungo tutte le direzioni

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \alpha (T - T_0)$$

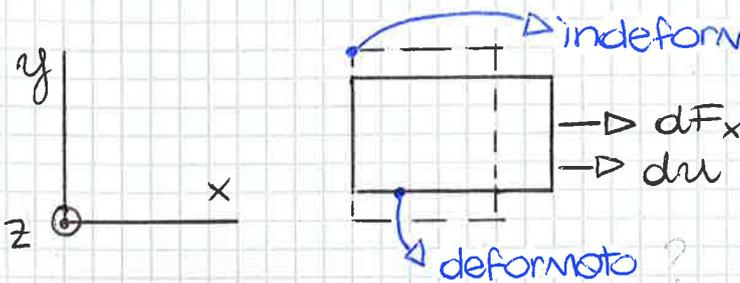
con α : COEFFICIENTE di DILATAZIONE TERMICA LINEARE



$$dV = dx dy dz$$

1) TENSIONI σ , DEFORMAZIONI ϵ

lungo x : $\sigma_{xx} \Rightarrow [\epsilon_{xx}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$



$$\{du\} = [\epsilon] \{dx\}$$

$$dF_x = \sigma_{xx} dy dz$$

$$du = \epsilon_{xx} dx$$

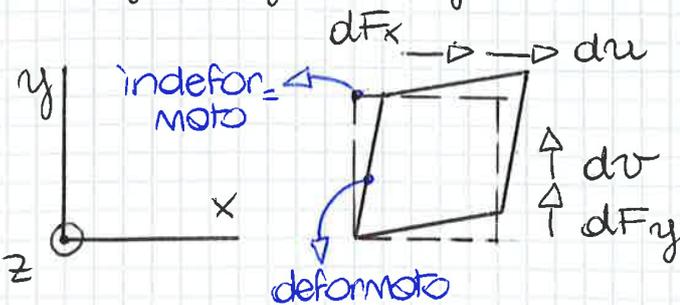
$$dE = \frac{1}{2} dF_x du = \frac{1}{2} \sigma_{xx} dy dz \epsilon_{xx} dx$$

$$dE = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \Rightarrow \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx}$$

→ stesso ragionamento lungo x e lungo y

2) TENSIONI τ , DEFORMAZIONI γ

lungo xy : $\tau_{xy} \Rightarrow [\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$$du = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy$$

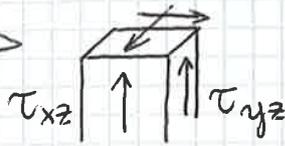
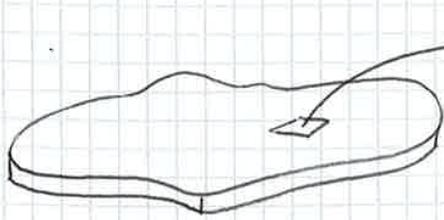
$$dv = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx$$

$$dF_x = \tau_{xy} dx dz$$

$$dF_y = \tau_{xy} dy dz$$

17/10/2014

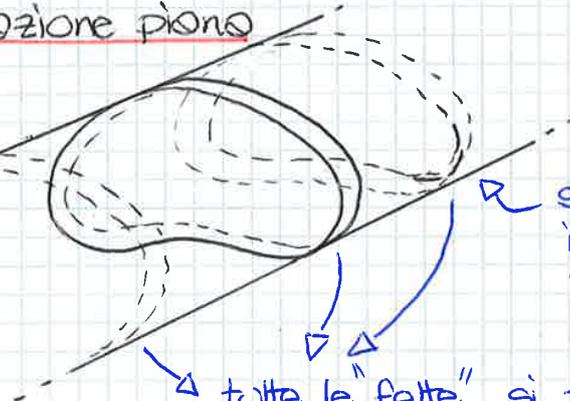
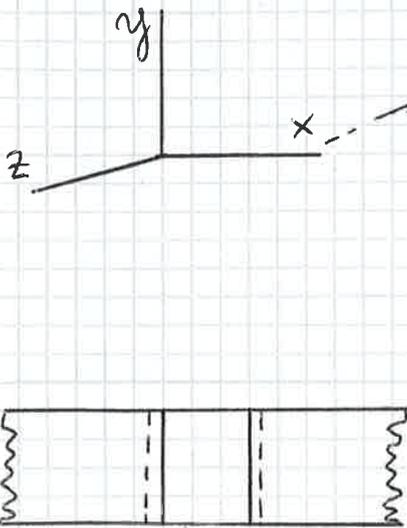
$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



→ tensione superficiale scorica (Pomb trascurabile) non ho quindi sollecitazioni lungo z

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

CASO DUQUE: deformazione piano



suppongo elemento infinitamente spesso

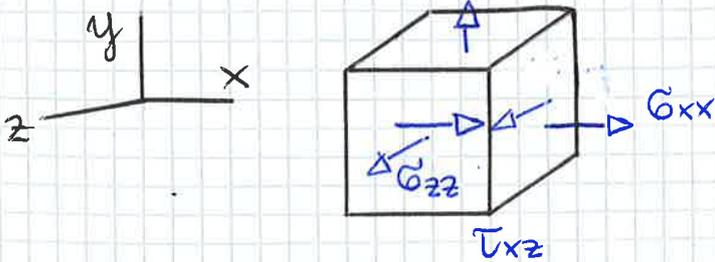
- tutte le "fette" si trovano nella stessa situazione:
 - > coordinato z influente
 - > facce (sezioni) restano piane e parallele tra loro

→ conseguenza di quanto appena detto è che la dilatazione lungo z è costante

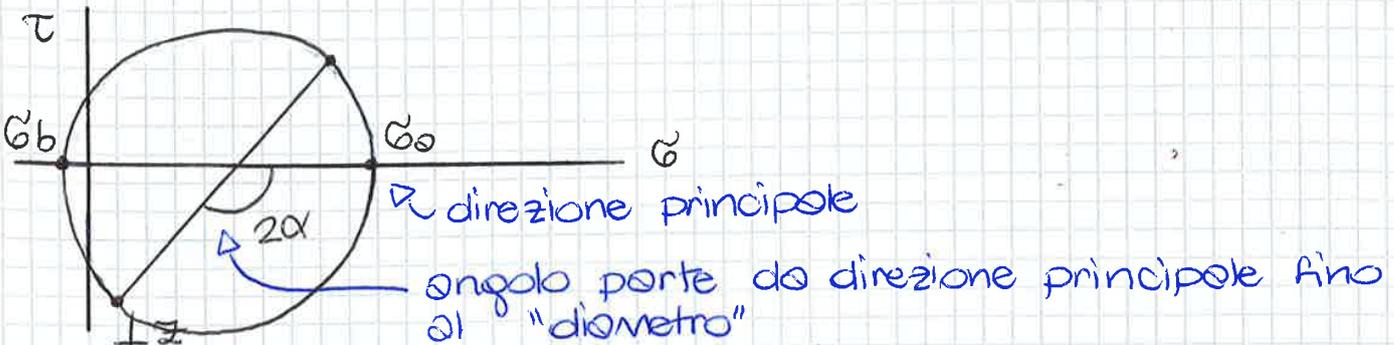
$$\epsilon_{zz} = \text{cost} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz} \neq 0$$

$$\tau_{xy} \neq 0$$



piano generico impennato
lungo direzione nota
faccio laterale forze ton-
genziate concorde; in
quello frontale discorde



$$\sigma_{0,b} = \frac{\sigma_{zz} + \sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{20 + 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20 - 120}{2}\right)^2 + 100^2}$$

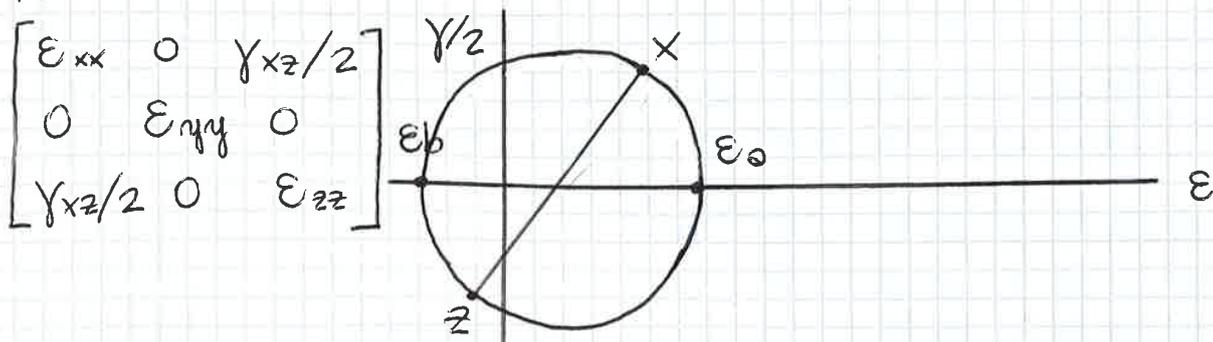
$$= \begin{cases} 182 \text{ MPa} \\ -42 \text{ MPa} \end{cases}$$

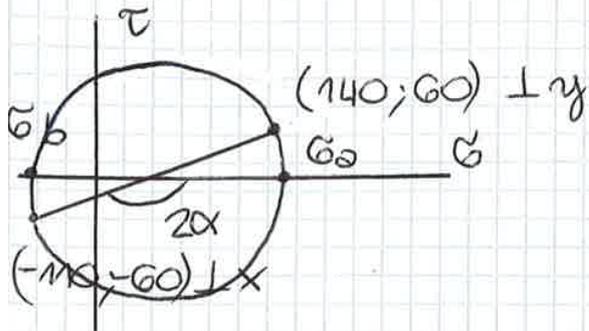
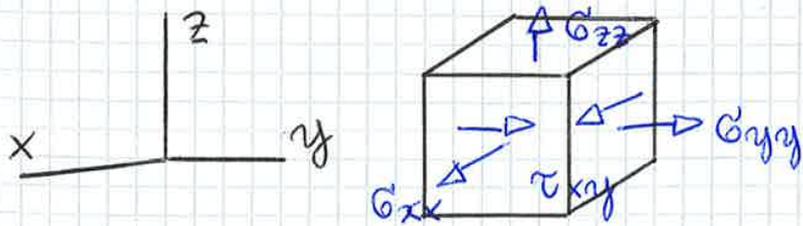
$$\begin{cases} \sigma_1 = 182 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -42 \text{ MPa} \end{cases}$$

primo calcolo le tensioni per
arrivare alle deformazioni

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = \frac{182 - 0,29(30 - 42)}{2,06 \cdot 10^5} = 9,00 \cdot 10^{-4} \\ \epsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = \frac{30 - 0,29(182 - 42)}{2,06 \cdot 10^5} = -5,15 \cdot 10^{-5} \\ \epsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} = \frac{-42 - 0,29(182 + 30)}{2,06 \cdot 10^5} = -5,02 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

→ posso lavorare direttamente sulle deformazioni



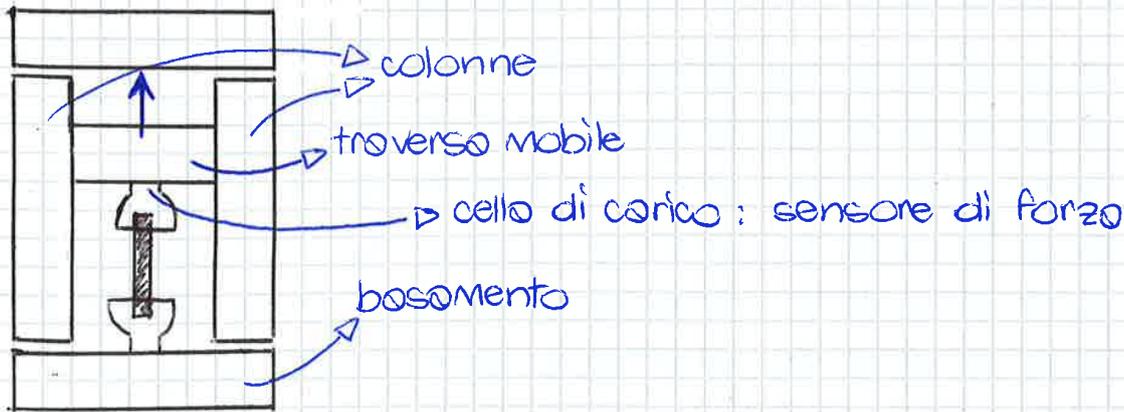


$$\sigma_{\theta,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{-110 + 140}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-110 - 140}{2}\right)^2 + 60^2} = \begin{cases} \rightarrow 154 \text{ MPa} \\ \rightarrow -124 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 154 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \text{ //} \\ \sigma_3 = -124 \text{ //} \end{cases}$$

→ dalla direzione θ allo x , intervallo < 0



AFFERRAGGI

- > GANASCE AUTOSERRANTI: > piane per provini piatti
- > concave per provette a sezione \circ



- > GANASCE a FILIERA: provette a sezione circolare hanno una sezione più lunga aggiuntiva

TIPi di MACCHINE di PROVA

> ELETTROMECCANICHE: - azione della trazione mobile mediante trasmissione (vite senza fine che ruota e produce la trazione della madre vite)

- < velocità e versatilità nell'applicazione del carico
- economiche
- carico max 10^2 kN

> IDRAULICHE: - avanzamento dello traverso mobile mediante cilindri

- regolando la portata del fluido si muove lo traverso consentendo movimenti più complessi
- costose
- carico max 10^3 kN
- > velocità e versatilità nell'applicazione

MISURA dello DEFORMAZIONE

> INDIRETTA: - misura dello spostamento traverso, mediante un

VALORI NOTEVOLI

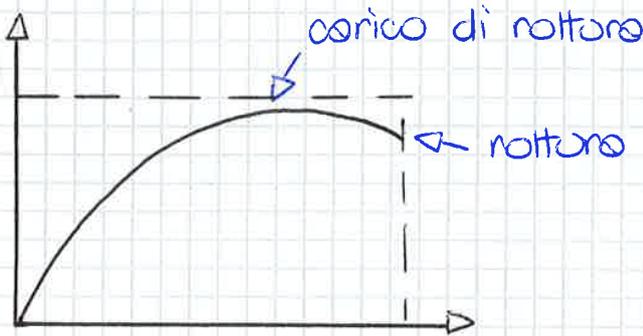
→ corico di spostamento delle proporzionalità



LEGGI LINEARE (proporzionale esatto)



→ corico di rottura



non posso calcolare l'allungamento perché a rottura si recupera lo stesso sfornamento elastico

$$A = 100 \cdot \frac{L_0 - L_0}{L_0}$$

ALLUNGAMENTO %

$$Z = 100 \cdot \frac{S_0 - S_1}{S_0}$$

STRIZIONE

MATERIALI DUTTILI - con snervamento



(PROVA di TRAZIONE)

forze oscillanti (lo vedo durante le prove) una volta superato la fase della deformazione elastico

* ora si restringe progressivamente; il materiale oppone una tensione sempre più alta che va a compensare la sezione che si assottiglia (durante l'incrudimento), aumento della tensione in tempo (incrudimento = strain bordering)

ACCIAI per CARPENTERIA

S 235
↓
Materiale STRUTTURALE
↘ limite elastico 235 MPa

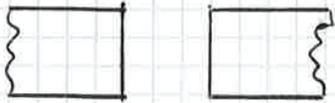
lim elastico ≥ 235 MPa
lim rottura ≥ 360 MPa
allungamento ≥ 26

→ se aumentano Res. Mecc e Res. elastica, e diminuisce
RESISTENZA ↑ ALLUNGAMENTO ↓ (meno duttile)

GHISE GRIGIE → molto fragili, le nelle diminuiscono forza e duttilità (grafite e lamelle)

GHISE SFEROIDALI → grafite in agglomerati sferoidali

MATERIALE FRAGILE



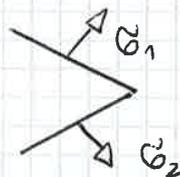
TRAZIONE → tensione min sulla sezione retta



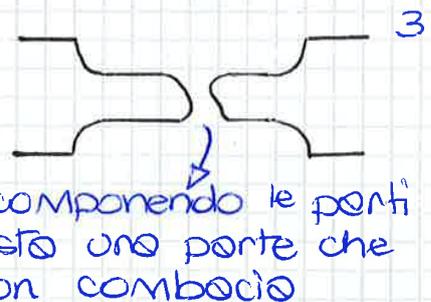
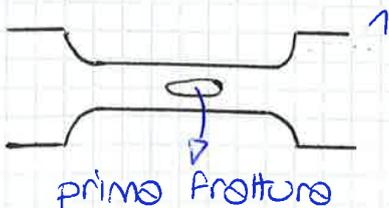
FLESSIONE → tensione max sulla sezione retta



TORSIONE → tensione max sulla sezione obliqua



MATERIALE DUTTIVE



23/10/2014

CEDIMENTO STATICO

↳ materiali metallici, T_{amb}

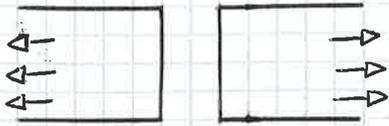
M. FRAGILE

elasticità



rottura

↳ DISTACCO dovuto a σ



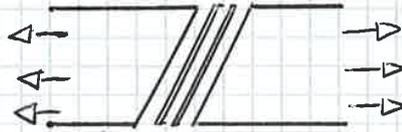
M. DUTTILE

elasticità



plasticizzazione

↳ scorrimento dovuto a τ



→ a seconda del materiale agisce σ o τ

TENSIONE IDEALE o EQUIVALENTE

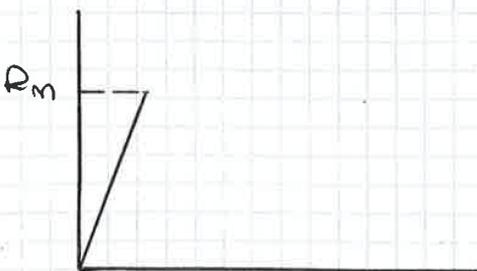
$$\sigma_{id} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

> MATERIALI FRAGILI → materiale cede dove la tensione è più forte, quando la massima tensione normale raggiunge il valore limite

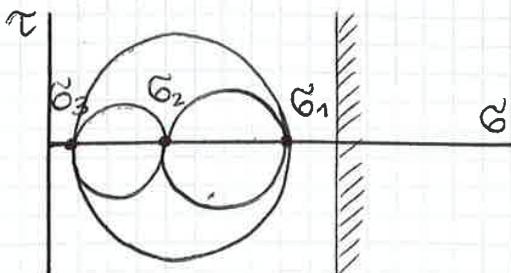
$$\sigma_{id} = \sigma_1$$

(σ_2, σ_3 non sono influenti sul comportamento del materiale)

condizione limite: $\sigma_1 = R_m$



in termini di Cerchi di Mohr



OSSERVAZIONI:

- σ_2, σ_3 non influenti
- ipotesi non valida se $\sigma_1 < 0$

b) premessi: energia di deformazione = energia di deformazione del volume + energia deformaz. formo*

combinando forma mantenendo volume ho un bisogno energetico non indifferente per un solido, stesso discorso se voglio aumentare (o diminuire) il volume mantenendo la forma



* **ENERGIA di DISTORSIONE**

materiale cede quando l'energia di distorsione raggiunge il valore limite

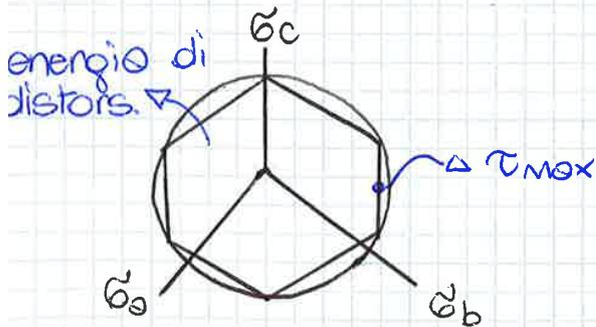
$$G_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(G_1 - G_2)^2 + (G_1 - G_3)^2 + (G_2 - G_3)^2} \quad \sim \text{medio quadratico}$$

OSSERVAZIONI:

- tutte le G principali influenzano
- l'aggiunta di una quantità uguale su G non influisce

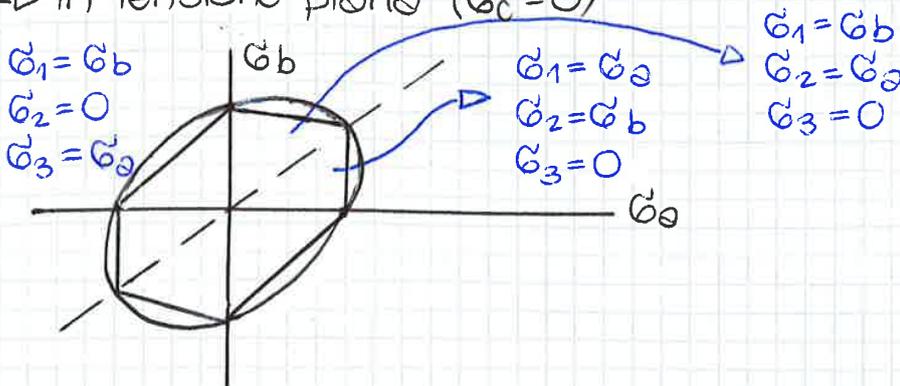
CONFRONTO tra le IPOTESI

MATERIALI DUTTILI $\begin{cases} \rightarrow \tau_{max} \\ \rightarrow \text{energia di distorsione} \end{cases}$



\rightarrow prisma inscritto nel cilindro: ipotesi τ_{max} più restrittiva

\rightarrow in tensione piano ($G_c = 0$)

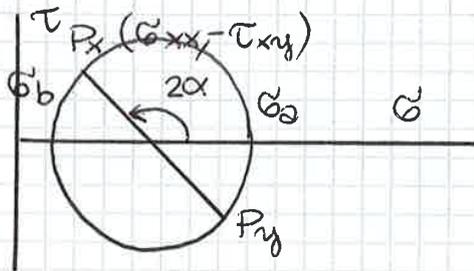
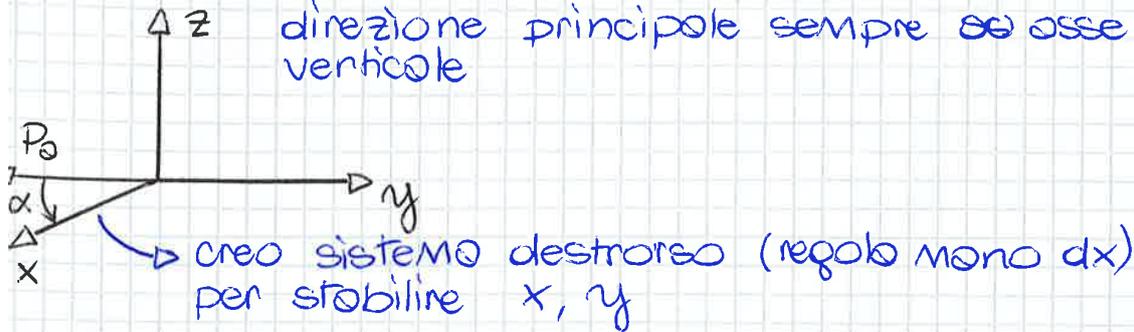


→ calcolo α (anche se non necessario per l'esercizio)

$$|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \frac{2 \cdot 75}{120 - 60} = 2,5$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \arctan [2,5] = 34^\circ$$

→ uso tabella cerchi di Mohr per stabilire α (2 princ, + direzione principale sempre σ asse $\tau_{xy} < 0$)
 verticale



$$45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$$

$$\alpha = 90 - \alpha^* = 56^\circ$$

→ calcolo tensione ideale σ_{id}^*

$\sigma_{id} =$
 → DUTILE ($A > 10\%$)
 → FRAGILE ($A < 5\%$)

$$\Rightarrow \sigma_{id}^{TR*} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\Rightarrow \sigma_{id}^{VM*} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{id} = \sigma_1$$

* criterio di Tresca, τ_{max}

↳ distorsione (energia di)

→ ghisa grigio è fragile GJL-300

→ posso distinguere duttile e fragile anche in base all'allungamento %

$$\begin{cases} GJL = 300 \rightarrow \text{FRAGILE} & R_m = 300 \text{ MPa} \\ \sigma_{id} = \sigma_1 = 171 \text{ MPa} \end{cases}$$

→ calcolo C.S.

$$C.S. = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}} = \frac{R_m}{\sigma_1} = \frac{300}{171} = 1,75$$

→ C.S. > 3 per i fragili!

non è sufficiente, il materiale non è sufficientemente fragile

→ calcolo σ_{id}

→ da tabella conosco $A\%$

$A = 14\% \Rightarrow$ DUTTILE

$$\sigma_{id}^{TR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 417 - (-37) = 454 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(417 - 0)^2 + (417 + 37)^2 + (0 + 37)^2} = 437 \text{ MPa}$$

2 modi \neq

→ calcolo C.S. \Rightarrow avrò 2 \neq valori

$$C.S.^{TR} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}^{TR}} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{id}^{TR}} = \frac{800}{454} = 1,76$$

> 1,5 non accettabile!

$$C.S.^{VM} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}^{VM}} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{id}^{VM}} = \frac{800}{437} = 1,83$$

> 1,5 non accettabile!

→ TRESCA è più conservativo, restrittivo rispetto a V.M quindi è più in sicurezza, a parità di tensione

3) dati es 3a esercitazione 2

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 408 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 408 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 342 \text{ //} \\ \sigma_3 = 18 \text{ //} \end{cases}$$

← conosco già le tens.

Determinare $R_{p0,2}$ t.c. C.S. = 1,5 (materiale duttile)

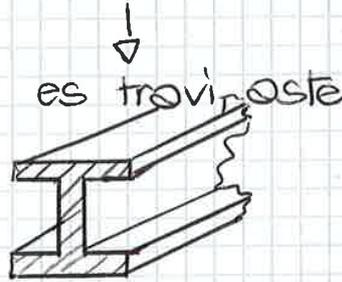
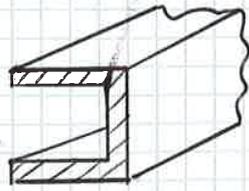
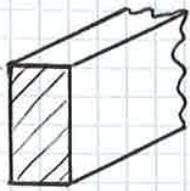
→ calcolo tensione ideale

$$\sigma_{id}^{TR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 408 - 18 = 390 \text{ MPa}$$

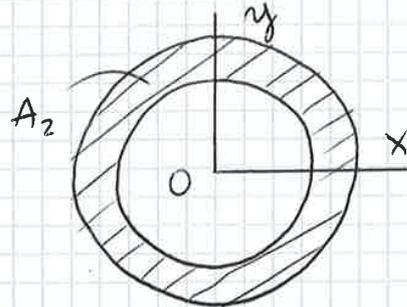
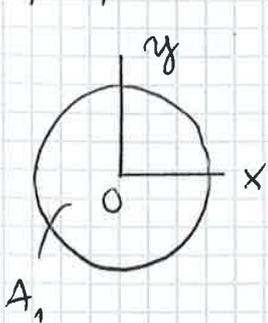
$$\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(408 - 342)^2 + (408 - 18)^2 + (342 - 18)^2} = 362 \text{ MPa}$$

PROPRIETÀ GEOMETRICHE delle AREE 28/10/2014

→ **PREMESSA:** elementi strutturali monodimensionali → 1 dimen-
sione >> dimensioni restanti



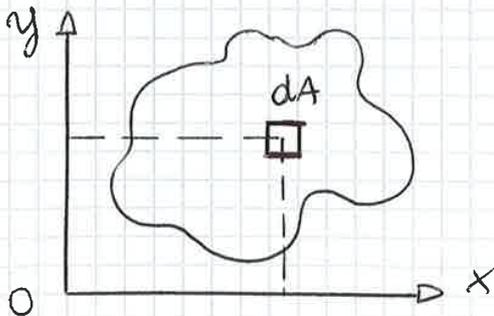
→ o pari area della sezione (quantità di materiale usato) le
proprietà cambiano con la forma



Anche se $A_1 = A_2$
materiale vicino ad O
materiale lontano da O

→ **PARAMETRI NOTEVOLI:**

- > area
- > momenti di I ordine (distanzo al I grado)
- > // // II ordine (// // II grado)



Area $A = \int_A dA$

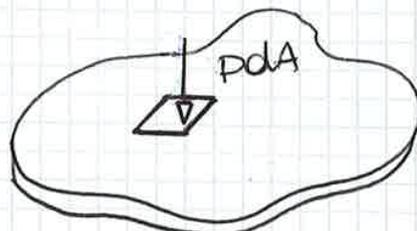
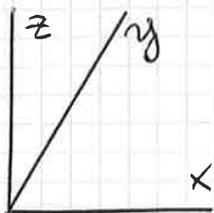
Momenti I ordine (statici)

utili per determinare il baricentro

$$\begin{cases} S_x = \int_A y dA \\ S_y = \int_A x dA \end{cases}$$

BARICENTRO di una LASTRA OMOGENEA

→ lastra omogenea di peso all'unità di superficie $P \left[\frac{N}{m^2} \right]$



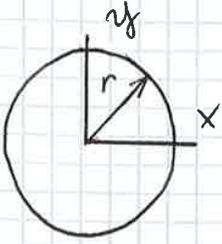
$$J_{xx} = \int_A y^2 dA$$

$$J_{yy} = \int_A x^2 dA$$

MOMENTO di INERZIA

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$

MOMENTO CENTRIFUGO (prodotto d'inerzia)

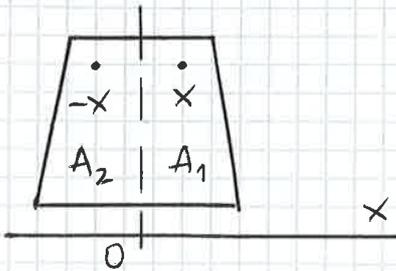


$$J_P = \int_A r^2 dA$$

MOMENTO d'INERZIA POLARE

SISTEMI di RIFERIMENTO

- > generico O_{xy} con origine O
- > baricentrico G_{xy} origine G
- > le simmetrie possono dare un aiuto

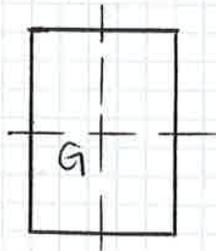


$$S_{xy} = \int_A x dA = \underbrace{\int_{A_1} x dA}_{\text{positivo}} + \underbrace{\int_{A_2} x dA}_{\text{negativo}} = 0$$

effetti di "spinta" si controbilanciano

$$x_G = \frac{S_{xy}}{A} = 0 \Rightarrow G \text{ sta sull'asse } y$$

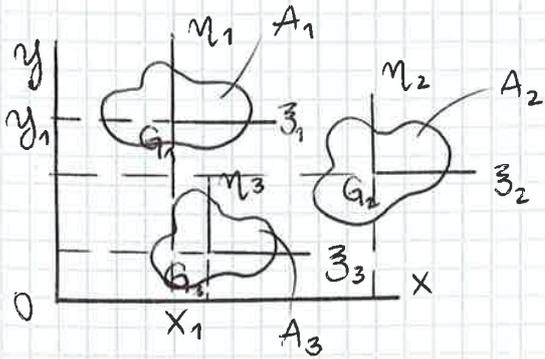
- > se \exists un asse di simmetria G sta su di esso
 - > se \exists due assi di simmetria G sta sull'intersezione
- es rettangolo



-> riferimento principale se $J_{xy} = \int_A xy dA = 0$
 ↳ diagonalizzo il tensore

-> riferimento centrale principale
 $O = G \leftarrow \text{↳ } J_{xy} = 0$

- O_{xy} riferimento globale (vale per tutta la sezione)
- G_i, \bar{z}_i, m_i riferimento locale, area i -esima, BARICENTRICO



→ passaggio da locale a globale lo faccio tramite le formule precedenti

→ I ordine

$$S_x = \sum_i y_i A_i$$

$$S_y = \sum_i x_i A_i$$

↓
trasporto

→ II ordine

$$J_{xx} = \sum_i (y_i^2 A_i + J_{\bar{z}_i \bar{z}_i})$$

$$J_{yy} = \sum_i (x_i^2 A_i + J_{m_i m_i})$$

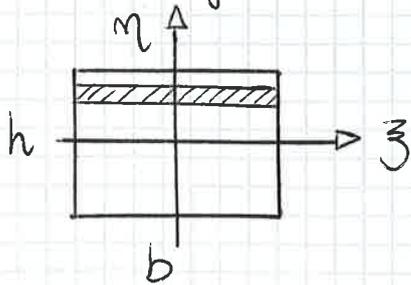
$$J_{xy} = \sum_i (x_i y_i A_i + J_{\bar{z}_i m_i})$$

↓ ↓
trasporto locale

aggiunta del trasporto implici-
ca cambiare il sist. di riferim.

→ come si esprime l'inerzia locale?

es rettangolo



$$J_{\bar{z}\bar{z}} = \int_A m^2 dA = \text{con } dA = b \cdot dm$$

$$= b \int_{-h/2}^{h/2} m^2 dm$$

$$J_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{b}{3} m^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

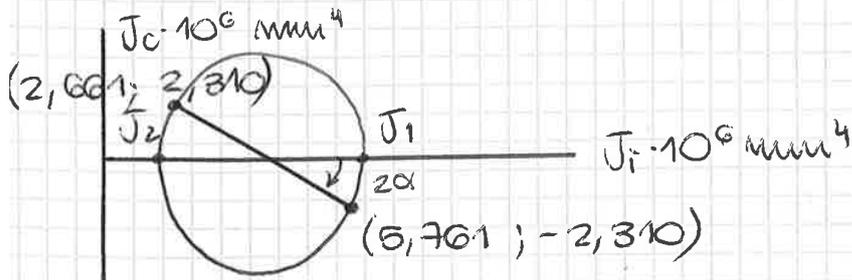
$$J_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{\bar{z}\bar{y}} = 0 \quad \text{SIMMETRIA}$$

→ MOMENTI d'INERZIA sempre > 0 !

→ // CENTRIFUGHI $\begin{cases} \rightarrow > 0 \\ \rightarrow = 0 \\ \rightarrow < 0 \end{cases}$

→ momento d'inerzia J_{xx} più grande perché elemento 1 più esteso quindi baricentro più in alto e quindi più lontano dall'asse x



$$J_{12} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \left[\frac{5,761 + 2,661}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,761 - 2,661}{2}\right)^2 + (2,310)^2} \right] \cdot 10^6$$

$J_1 = 6,993 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ più grande momento d'inerzia

$J_2 = 1,429 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ più piccolo // //

$$|\tan 2\alpha| = \left| \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 2,310}{5,761 - 2,661} \right| \left(\frac{10^6}{10^6} \right) = 1,49$$

$J_{xy} < 0$ e $J_{xx} > J_{yy}$

$-45 < \alpha < 0$

$\alpha = -28^\circ$

$$= 2800 \cdot 35 + (-1000) \cdot 35 + 300 \cdot 65 = 98000 - 35000 + 19500 =$$

$$= 82500 \text{ mm}^3$$

$$S = \sum_{i=1}^3 S_{y_i} = A_1 x_{G_1} + A_2 x_{G_2} + A_3 x_{G_3} =$$

$$= 2800 \cdot 20 + (-1000) \cdot 20 + 300 \cdot 55 = 52500 \text{ mm}^3$$

→ determinare $x_G, y_G : G$

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = 800 + (-1000) + 300 = 2100 \text{ mm}^2$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{52500}{2100} = 25 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{82500}{2100} = 39,29 \text{ mm}$$

$$G : (25, 39,29)$$

→ determinare $G_i : (x_{G_i}, y_{G_i})$

$$\begin{cases} x_{G_i} = X_{G_i} - x_G \\ y_{G_i} = Y_{G_i} - y_G \end{cases}$$

$$G_1 : \begin{cases} x_{G_1} = 20 - 25 = -5 \text{ mm} \\ y_{G_1} = 35 - 39,29 = -4,29 \text{ mm} \end{cases}$$

$$G_2 : \begin{cases} x_{G_2} = x_{G_1} = -5 \text{ mm} \\ y_{G_2} = y_{G_1} = -4,29 \text{ mm} \end{cases}$$

$$G_3 : \begin{cases} x_{G_3} = 55 - 25 = 30 \text{ mm} \\ y_{G_3} = 65 - 39,29 = 25,71 \text{ mm} \end{cases}$$

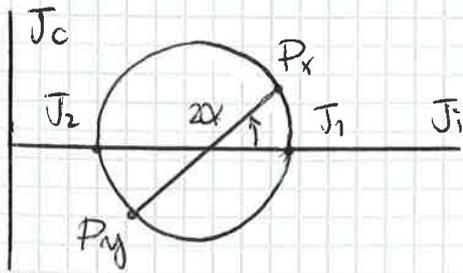
→ determinare (G_i, \bar{z}_i, m_i) i momenti $J_{\bar{z}_i, \bar{z}_i} ; J_{m_i, m_i} ; J_{\bar{z}_i, m_i}$

$$\int J_{\bar{z}_1, \bar{z}_1} = \frac{40 \cdot 70^3}{12} = 1,143 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Delta J_{\bar{z}_3, \bar{z}_3} = \frac{bh^3}{12} \text{ per un rettangolo}$$

$$\int J_{m_1, m_1} = \frac{40^3 \cdot 70}{12} = 3,733 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

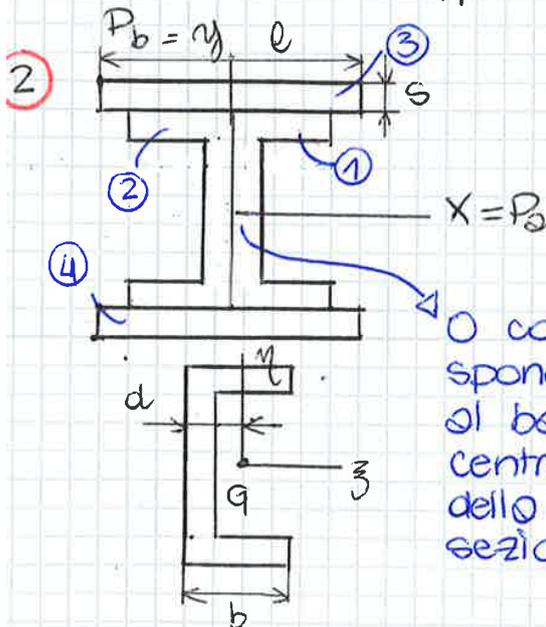
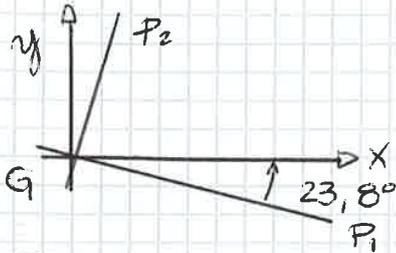
$$\int J_{\bar{z}_2, \bar{z}_2} = - \left(\frac{20 \cdot 50^3}{12} \right) = -2,083 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

→ $J_{xy} > 0$; $J_{xx} > J_{yy}$ (I caso, I RIGA)



α : da P_1 a X

$\alpha = \alpha^* = 23,8^\circ$



$l = 200 \text{ mm}$
 $s = 20 \text{ mm}$

$d = 23,7 \text{ mm}$
 $b = 90 \text{ mm}$
 $h = 260 \text{ mm}$

O centri-
 sponde
 al bari-
 centro
 dello
 sezione

$A' = 4,83 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$
 $J_{33} = 4,824 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$
 $J_{yy} = 3,170 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

a) J_1, J_2

→ scomposizione in rettangoli (4 sezioni)

→ A_i, G_i

$A_1 = A' = 4,83 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

$A_2 = A' = 4,83 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

$A_3 = A_4 = l \cdot s = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2$

$G_{1i} : (x_{G_1} = d = 23,7 ; y_{G_1} = 0)$

$G_{2i} : (x_{G_2} = -d = -23,7 ; y_{G_2} = 0)$

$G_{3i} : (x_{G_3} = 0 ; y_{G_3} = y_{G_4} = -140)$

$G_{4i} : (x_{G_4} = 0 ; y_{G_4} = -140)$

SOLIDO di SAINT VENANT

4/11/2014

- > teoria sviluppata per elementi monodimensionali: travi
- > studio strutture: casi notevoli per cui ho determinate formule
- > elementi MONODIMENSIONALI*: 2 dimensioni << delle rimanenti
es travi dei telai, alberi
- > // BIDIMENSIONALI: 1 dimensione << delle rimanenti 2
es piastre (piane), gusci (curvi)

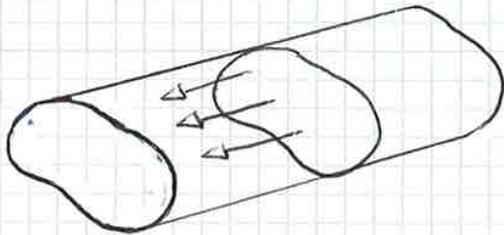
* teoria del SOLIDO di SAINT VENANT = prisma sotto \neq stati di sollecitazione (trazione, flessione, torsione, taglio)

IPOTESI

1. GEOMETRIA

a) CILINDRO = dato da traslazione di una figura piana in direz. della normale (nei programmi di CAD = ESTRUSIONE)

b) ESTENSIONE >> dimensioni nel piano della figura generatrice



2. CARICHI e VINCOLI

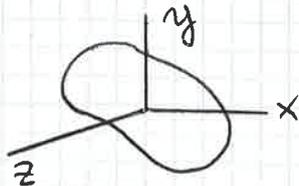
solo in corrispondenza delle basi

3. MATERIALE

elastico lineare, omogeneo, isotropo

CONSEGUENZE

-> riferimento $x y z$ con $x y$ nel piano della figura generatrice e origine nel suo baricentro



> asse z = traiettoria del baricentro durante il moto di generazione: linea d'asse del solido

> tutte le sezioni normali a z sono sez. rette del solido

> FORZA di TAGLIO

componenti x e y e azioni di cesoimento trasversale

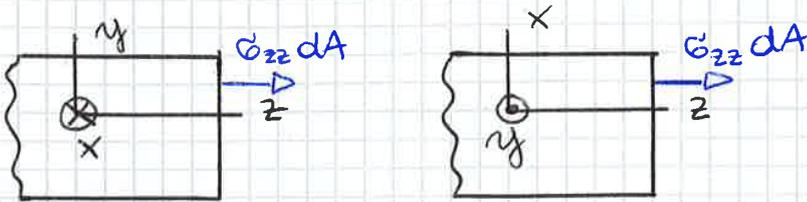
$$T_x = \int_A \tau_x dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA$$

→ componenti del momento risultante

> MOMENTI FLETTENTI

componenti intorno a x e y ; tendono a curvare (flettere) l'asse del solido

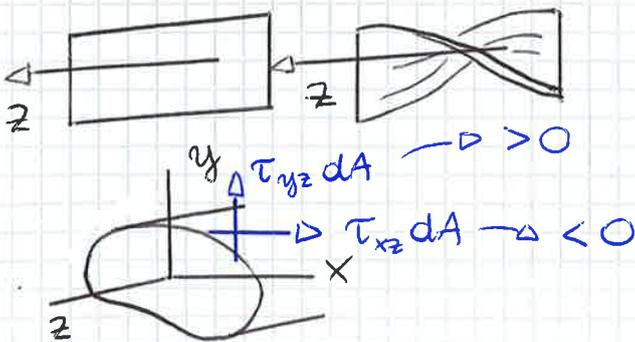


considero sempre sistema destrorso positivo

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA \quad M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA$$

> MOMENTO TORCENTE

componente intorno a z ; tende ad attorcigliare (torcere) l'asse del solido

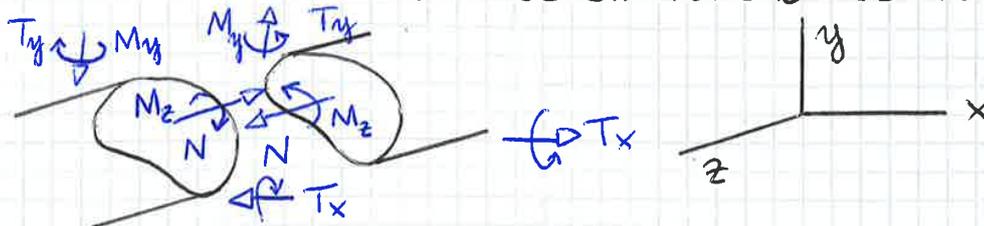


$$M_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA$$

VERSI CONVENZIONALI

→ sulle facce in evidenza le caratteristiche agenti

> FACCE > 0 : versi caratteristiche concordi con gli assi



> FACCE < 0 : // // discordi con gli assi (tutto opposto)

SOLUZIONI ESATTE in FORMA CHIUSA nei CASI

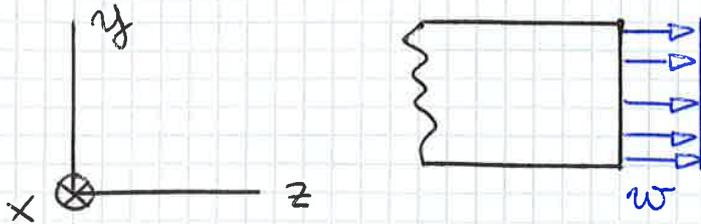
- > COMPORTAMENTO ESTENSIONALE
 - > // FLESSIONALE
 - > // TORSIONALE
- ↳ solo sezione circolare

} unici casi in cui ho soluz. esatte in forma chiusa altrimenti ho soluz. approssimate

COMPORT. ESTENSIONALE

→ riguardo il come si deforma un elemento

1. SPOSTAMENTO w



> § sezione si sposta dello stesso quantità ma in maniera \neq

> proporzionale a z (dipendenza lineare)

$$w = h_0 z$$

→ la sezione fissa è quella che corrisponde a $z=0$

2. DEFORMAZIONI

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = h_0 \text{ (costante)}$$

3. TENSIONI (elasticità)

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} + \alpha(T - T_0)$$

↳ $\nu = 0$
 mi riconduco al solido di Saint Venant

non considero l'effetto termico

$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E h_0$$

→ a partire da un campo di spostamento (\sim pistone) ho dilatazione e tensione costante

4. EQUIVALENTI STATICI

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = E h_0 \int_A dA \Rightarrow N = E h_0 A$$

↳ forza normale

3. TENSIONI

$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E y k_x$$

↳ non è cost.!

↳ non più costante

4. EQUIVALENTI STATICI

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = E k_x \int_A y dA \stackrel{\text{↳ } = 0}{=} \Rightarrow N = 0$$

↳ rotaz. intorno a baric.

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = E k_x \int_A y^2 dA = E k_x J_{xx}$$

$$M_y = - \int_A x \sigma_{zz} dA = - E k_x \int_A x y dA \stackrel{\text{↳ } J_{xy} = 0}{=} \Rightarrow M_y = 0$$

→ assi x, y CENTRALE = BARICENTRICO + PRINCIPALE

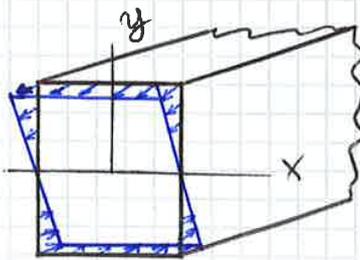
→ asse attorno al cui rotò la sezione è lo stesso attorno al cui ho un momento flettente

COINCIDENZA

aspetto cinematico = 0, statico

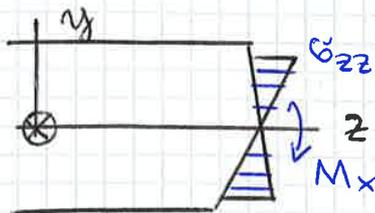
⇒ FLESSIONE RETTA

$$\sigma_{zz} = E y k_x = E y \frac{M_x}{E J_{xx}} \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y$$



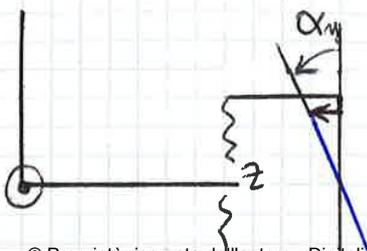
$$y = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = 0$$

ASSE NEUTRO



COMPORT. FLESSIONALE

1. SPOSTAMENTO piano xz



> rotazione attorno ad y (del proprio baricentro)

> la sezione resta piana

→ M_x, M_y agenti simultaneamente ⇒ sovrapposizione effetti *

→ tensione nulla al livello baricentrico $y=0, x=0$

→ max e min si trovano ai bordi opposti dell'asse neutro

→ i momenti crescono al crescere della distanza dal baricentro

→ distribuzione di tensioni con un segno da una parte e opposto dall'altra

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$



come capisco qual'è il p.to con tensione più elevata? (NO DERIVATA!)

max, min di $\sigma_{zz} = ?$

→ punti @ $\sigma_{zz} = 0$ (ASSE NEUTRO)

$$\frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x = 0$$

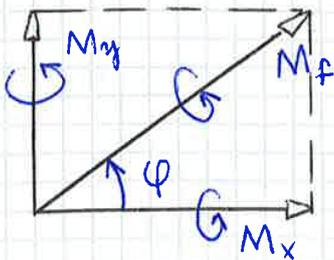
EQ. NE RETTA per l'ORIGINE

contributi opposti ed uguali si annullano

$$y = \frac{M_y}{J_{yy}} x \cdot \frac{J_{xx}}{M_x} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}} x$$

$$y = \text{tg } \varphi x \Rightarrow \text{tg } \varphi = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}}$$

→ momento flettente risultante



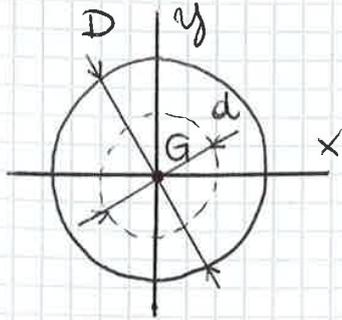
$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{M_y}{M_x}$$

$$\text{tg } \varphi \neq \text{tg } \varphi^* \Rightarrow \varphi \neq \varphi^*$$

→ momento attorno ad asse inclinato di angolo φ , la sezione ruota attorno ad asse neutro di angolo φ a seconda delle componenti di inerzia

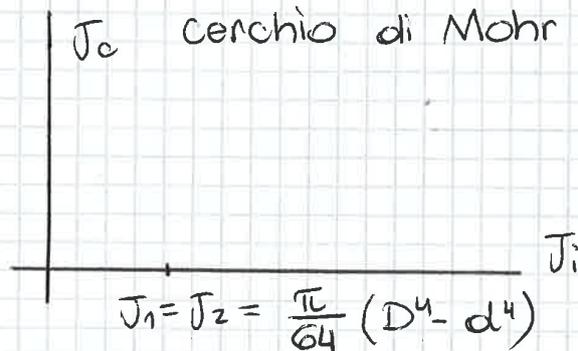
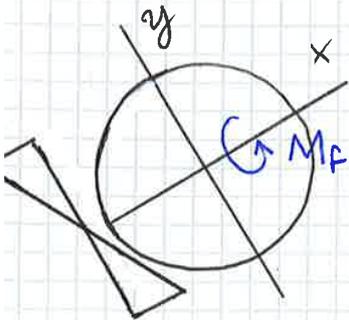
$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$



corona circolare

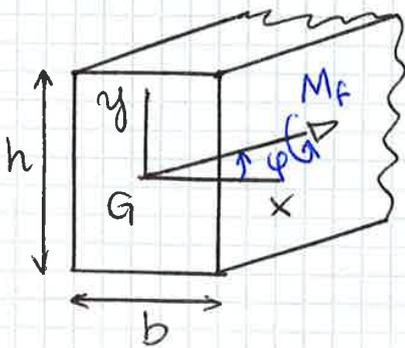
→ la flessione non è mai deviata

$$\frac{J_{xx}}{J_{yy}} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$$



$J_1 = J_2 \Rightarrow$ cerchio di Mohr implode in un pto

es



$$b = 20 \text{ mm} \quad h = 40 \text{ mm}$$

$$M_F = 8,00 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

Trovare andamento di ϵ_{zz} e valori max e min

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 1,07 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \frac{hb^3}{12} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 2,67 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$M_x = M_F \cos \varphi = 8,00 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,93 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$M_y = M_F \sin \varphi = 8,00 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{2} = 4,00 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_{xx}}{J_{yy}} = \frac{4,00 \cdot 10^5}{6,93 \cdot 10^5} \cdot \frac{1,07 \cdot 10^5}{2,67 \cdot 10^4} = 2,31 \Rightarrow \psi = 66,6^\circ$$

2



sezione circolare cavo

$$D = 60 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

sollecitato da:

$$N = 6,5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$M_f = 1,1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

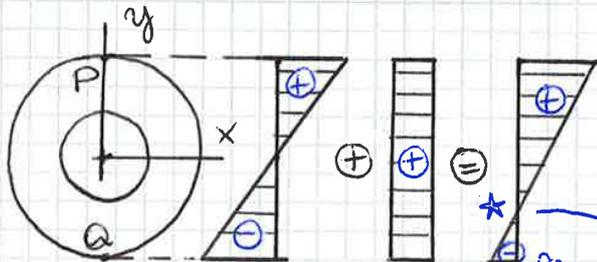
materiale $\left\{ \begin{array}{l} R_m = 300 \text{ MPa} \\ \text{ghiso GJL-300} \end{array} \right.$

→ non si presenta fenomeno flessione deviato ma asse momento = asse rotazione

$$M_f \equiv M_x \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y + \frac{N}{A}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (60^2 - 20^2) = 2513 \text{ mm}^2$$

$$J_{xx} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (60^4 - 20^4) = 6,283 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$



$$\begin{array}{l} y = 30 \\ x = -30 \end{array}$$

asse neutro finisce in basso

↳ flessione ↳ trazione

→ asse neutro orizzontale traslato per effetto della trazione

$$\sigma_{zz}^p = \frac{1,1 \cdot 10^6}{6,283 \cdot 10^5} \cdot 30 + \frac{6,5 \cdot 10^4}{2,513 \cdot 10^3} = 78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz}^a = // (-30) + // = -26$$

posiz. asse neutro: $\frac{M_x}{J_{xx}} y + \frac{N}{A} = 0$

$$y = - \frac{J_{xx}}{M_x} \frac{N}{A} = \dots = -14,8 \text{ mm}$$

→ materiale fragile $R_m = 300 \text{ MPa}$

è discorde rispetto alla convenzione dell'asse y

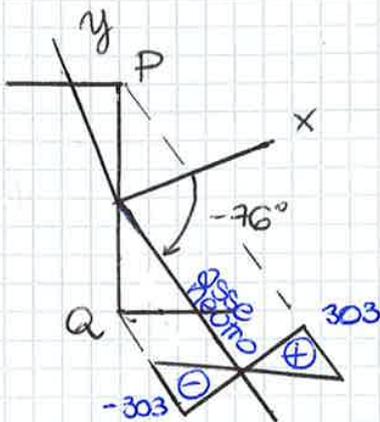
$$\sigma_{22} = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_{xy}}{J_{xy}} x$$

→ zero tensione : $\sigma_{22} = 0$

$$\frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_{xy}}{J_{xy}} x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{M_{xy}}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{xy}} x = \operatorname{tg} \varphi x$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-0,81}{1,83} \cdot \frac{2,722}{0,295} = -4,08 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -76^\circ$$

occhio di segni ↙



$$\begin{cases} I^P = 2 \text{ mm} \\ I^Q = 15 \text{ mm} \end{cases}$$

$$x^P = I^P \cos 23,8^\circ + I^Q \sin 23,8^\circ = 7,88 \text{ mm}$$

$$y^P = -I^P \sin 23,8^\circ + I^Q \cos 23,8^\circ = 12,91 \text{ mm}$$

$$\sigma_{22}^P = \frac{1,83 \cdot 10^3}{2,722 \cdot 10^4} 12,91 - \frac{-0,81 \cdot 10^3}{2,95 \cdot 10^3} 7,88 = 303 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22}^Q = -303 \text{ MPa}$$

2) DEFORMAZIONI

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta + \theta = 0 \rightarrow \text{prevedibile} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\eta \frac{d\theta}{dz} = -\eta\theta' \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \chi \frac{d\theta}{dz} = \chi\theta' \end{cases}$$

→ se le sezioni piane scorrono l'una sull'altra non ho deformazione assiale

3) TENSIONI

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0$$

↳ = 0

→ coerentemente al solido di Saint Venant per cui ho:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

→ mentre τ_{xz} e $\tau_{yz} \neq 0$

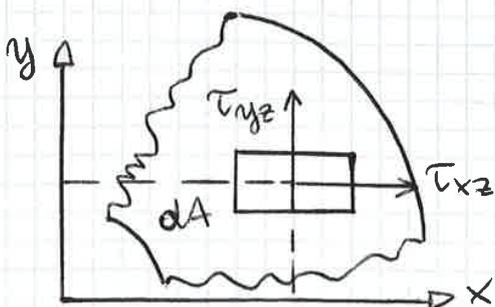
$$\begin{cases} \tau_{xz} = G \gamma_{xz} = -G\theta' \eta \\ \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G\theta' \chi \end{cases}$$

→ solo tensioni tangenziali variabili nella sezione

4) CARATTERISTICHE di SOLLECITAZIONE

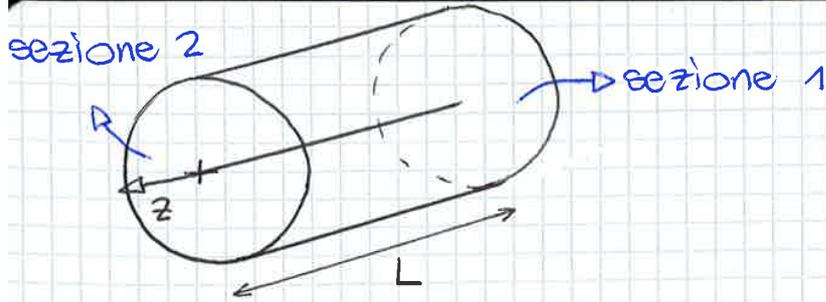
$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA = -G\theta' \int_A \eta dA = 0$$

↳ = 0



$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA = G\theta' \int_A \chi dA = 0$$

↳ = 0



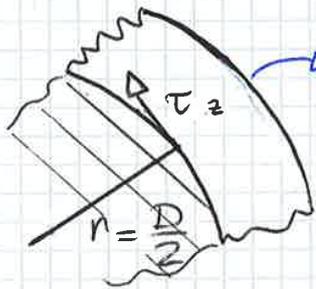
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_0^L \frac{M_z}{GJ_P} dz$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{M_z}{GJ_P} L$$

quanto ruota una sezione rispetto all'altra

→ SEZIONE NON CIRCOLARE

→ OSSERVAZIONE: condizione al contorno su τ_{xz} , τ_{yz}



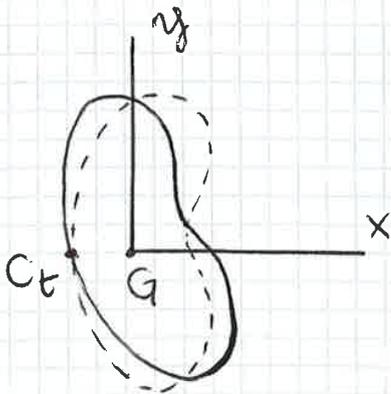
→ superficie laterale esorcico

τ_{cz} circonferenziale, assenza di componenti radiali ⇒ rispetto ipotesi sul carico

→ differenze fondamentali (rispetto al caso circolare):

> la rotazione avviene intorno a $C_t (\neq G)$

> \exists una componente di spostamento $w \Rightarrow$ ingobbamento della sezione



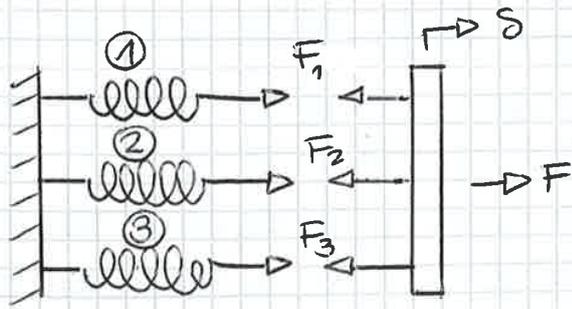
$$\begin{cases} u = -\theta(y - y_G) \\ v = \theta(x - x_G) \\ w = \theta w(x, y) \end{cases}$$

↳ funzione di "ingobbamento"

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

IN PARALLELO

stesso δ

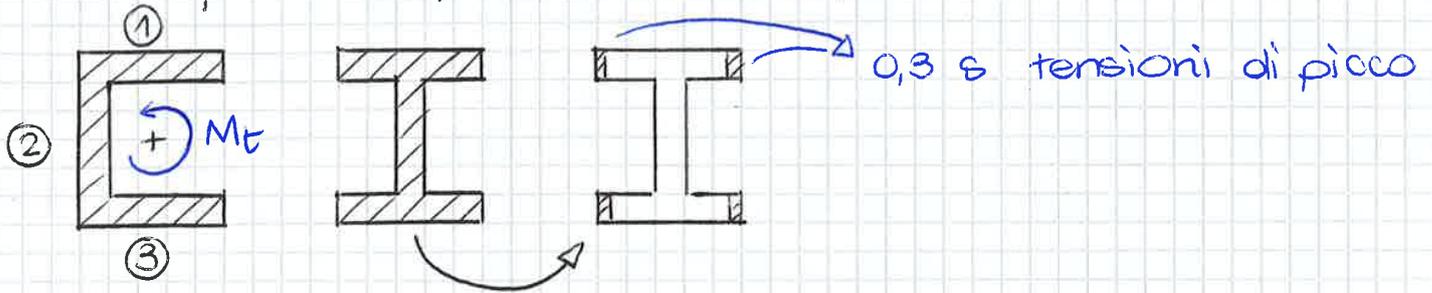


$$F = F_1 + F_2 + F_3 = k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta = k_{eq} \delta$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$$

J_t equivalente per la sezione

*
$$M_t = \sum_i M_{ti} = \sum_i G J_{ti} \theta' = G \theta' \sum_i J_{ti} = G \theta' J_t$$



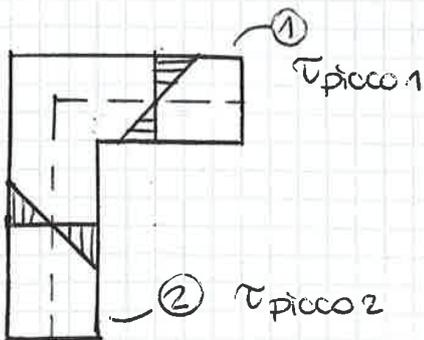
$$\tau_{picco_i} = \pm \frac{M_{ti}}{J_{ti}} s_i$$

troppo lungo, più conveniente calcolarlo così

$$\tau_{picco_i} = \left(\frac{M_t}{J_t} s_i \right)$$

totale totale

sezione i-esimo



→ rettangolo a spessore > subisce una sollecitazione > poiché più rigido quindi affinché subisca una deformazione ho un momento torcente >