



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1538A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Meli

MATERIA: Fisica I. Prof. Scalerandi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INFORMATICA

Libri: Deitel & Deitel
Algoritmi

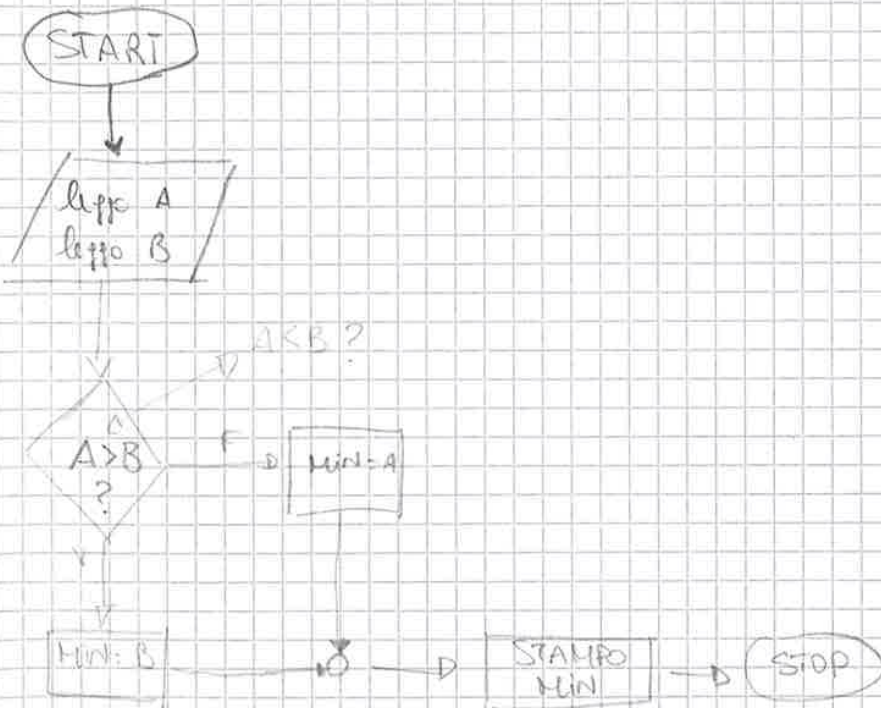
Algoritmi (Strada)
Weichl sempre

PROBLEMA

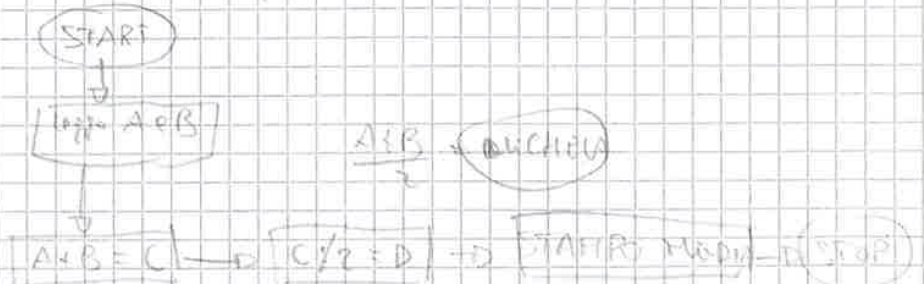
Dati 2 numeri A e B, si determini il min



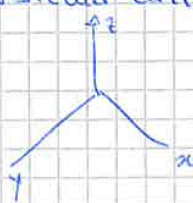
Utilizziamo il flowchart (diagramma di flusso)



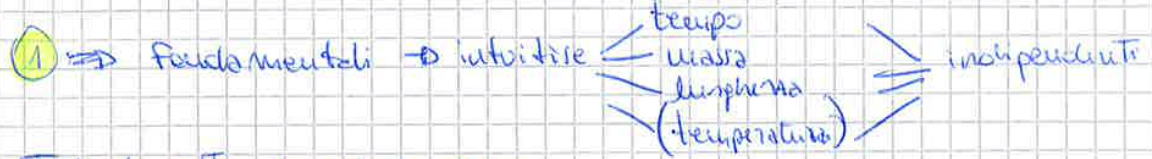
Si realizzi il flowchart di un algoritmo, dati 2 num A e B, se ne calcoli la media



GRANDEZZE FISICHE E MISURA

- grandezza fisica = quantità misurabile \Rightarrow si può assegnare 1 valore
- misure:
 - Occorrono unità di misura (grandezze base con cui confrontare)
 - sistema di riferimento (SR) \rightarrow origine e assi di riferimento
 - sistema internazionale
 - ↳ massa = kg
 - ↳ lunghezza = m
 - ↳ tempo = s
 - sistema cartesiano
 

CLASSIFICAZIONI



Tutte le altre grandezze sono derivate \Rightarrow ricavabili con definizioni. $V_{media} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \neq \frac{1}{t}$ no!

② SIGNIFICATO

- scalari (caratterizzata dal suo valore numerico)
- vettori (caratterizzata da modulo, direzione e verso) \vec{a}
- tensori (caratterizzata da modulo direzione e risposta)

MISURA: \Rightarrow confronto \Rightarrow strumento

- \Rightarrow ripetibilità \rightarrow ripetere l'esperimento nelle stesse condizioni, ottenendo lo stesso valore.
 - \Rightarrow valore medio (misura singola non ha senso) ripeto n volte la misura con $n \gg 1$.
- Se x è la variabile indicata, $\langle x \rangle$ valore medio di $x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum \frac{x_i}{n} \Rightarrow \langle x \rangle_n \text{ VALORE DELLA MISURA}$$

DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma = \sqrt{\sum \frac{(x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}$$

$\sqrt{\sigma} =$ ERRORE CRITICO

n misure \rightarrow trova $\langle t \rangle_n$
 $t_{min} \rightarrow n$ misure $\langle t \rangle_n = \langle t \rangle_{n+1}$
 68% probabilità che $\langle t \rangle - \sqrt{\sigma} < t_{min} < \langle t \rangle + \sqrt{\sigma}$

Su una misura bisogna sempre fornire n e $\sqrt{\sigma}$

MISURA = VALORE MEDIO \pm ERRORE

- Tipi di errori
- casuali
 - ↳ sistematico (sbaglia) \rightarrow temperatura, posizione, strumento non tarato
 - \Rightarrow il + grande t_2 : 3
 - strumentali (precisione dello strumento) \rightarrow valore minimo misurabile

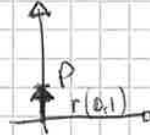
Esempio:

Se come si muove 1 particella \Rightarrow so $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 3t u_x + (1-t^2) u_y \Rightarrow \begin{cases} x = 3t & t = \frac{x}{3} \\ y = 1-t^2 & y = 1 - \frac{x^2}{9} \end{cases} \text{ posso disegnare la traiettoria}$$

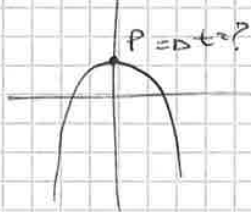
noto $\vec{r}(t)$, posso sapere la posizione di P, a pss temp t

t=0s $\vec{r}(t=0) \Rightarrow 0u_x + 1u_y$ $x=0$
 $y=1$



la traiettoria non dirà mai la posizione a un certo t

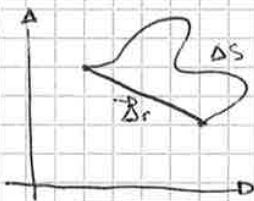
Es: so $\Delta s = y = 1 - \frac{x^2}{9}$



VELOCITÀ: è un concetto vettoriale

A \Rightarrow T0 \rightarrow T4h 4h | Dipende dallo spazio percorso
B \Rightarrow T0 \rightarrow T6h 6h

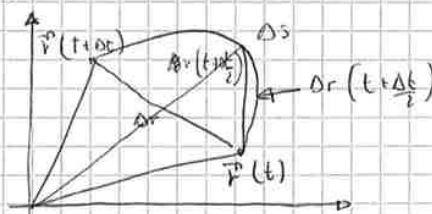
VE e VI SCALARE
 $V_{VI} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$: spazio percorso
 $V_{VI} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ = vettore spostamento
V \vec{V} : VETTORIALE
non importa!



$V_{VI} \neq V_{VI}$

VELOCITÀ ISTANTANEA

t \rightarrow t + Δt
t \rightarrow t + $\frac{\Delta t}{2}$
t = t + $\frac{\Delta t}{n}$
t = t + dt



$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \text{modulo} \Rightarrow \Delta s \\ \text{direzione} \Rightarrow t_p \end{cases}$

Velocità istantanea: \vec{v} . $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ velocità è la derivata del vettore posizione nel tempo

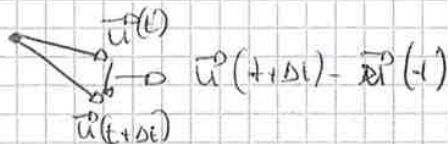
v = più grandezza fisica fisica che descrive la variazione di posizione nel tempo

$\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{r} = \text{cost.}$

\vec{v} : sempre t_p alla traiettoria $\Rightarrow \vec{v} = v \cdot \vec{u}_T$ verso t_p alla traiettoria

$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(xu_x + yu_y)}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} u_x + \frac{dy}{dt} u_y$

~~Il~~ $\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$



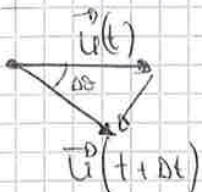
Direzioni di prst vettore $\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) \Rightarrow$

\Rightarrow parallelo a R

Verso \Rightarrow Sempre diretto verso il centro di curvatura

$u_r \perp$ al $R \Rightarrow$ direzione di $\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) \perp \vec{u}(t)$

MODULO: lunghezza del segmento



Δs coincide con pl che esiste tra i due R di curvatura.

Se $\Delta t \rightarrow 0$ corda \sim arco $\rightarrow 1.2$

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} \quad \text{e } \Delta s = ds$$

\downarrow Verso \downarrow Verso \perp a R

N.B.

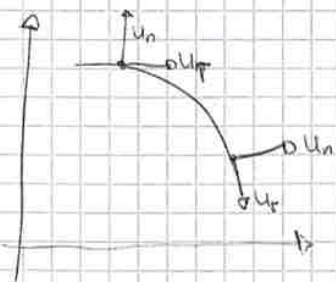
ACC. NORMALE

$$= v \left(-\frac{1}{R} v \vec{u}_n \right) = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{ds}{R} \frac{\vec{u}_n}{dt} \right)$$

$$= -\frac{1}{R} \vec{u}_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ds}{dt} \Rightarrow -\frac{v}{R} \vec{u}_n v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_r - \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$



R delle coordinate \Rightarrow non Fisso
Intuitivamente

$a_n \vec{u}_n$ è verso il centro per via del verso negativo

CONCLUSIONE: \vec{v} è sempre tg della traiettoria

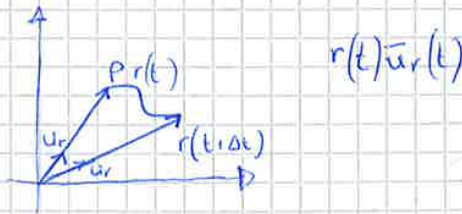
\vec{a} è sempre la somma di 2 vettori

- $a_t \vec{u}_r$ tg alla traiettoria assiale sul du_r
- $a_n \vec{u}_n \perp$ alla traiettoria e diretta verso il centro.

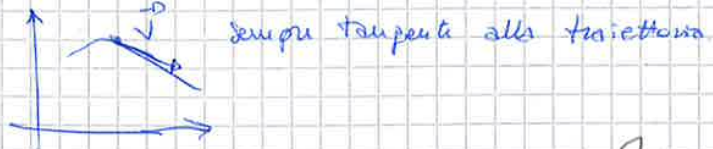
Variazioni di v in direzione

3^a LEZIONE CINEMATICA

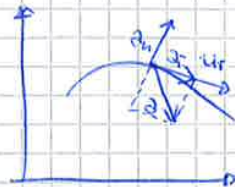
a) $r(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$



b) $\vec{v} = \frac{dr}{dt} = v \cdot u_r = v_x u_x + v_y u_y$



c) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y = a_r \vec{u}_r + a_n \vec{u}_n$

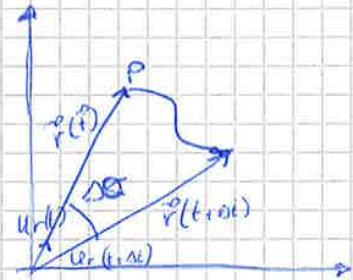


$a_n = -\frac{v^2}{R} \rightarrow a_n = \frac{-v^2}{R}$
 $a_r = \frac{dv}{dt}$

VELOCITÀ: COORDINATE POLARI

$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dr}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$

$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_r(t+\Delta t) - \vec{u}_r(t)}{\Delta t}$



Modulo: lunghezza segmento = corda ~ ARCO

$r \cdot \Delta\theta \approx \Delta s \Rightarrow \text{Modulo} \approx \Delta\theta$

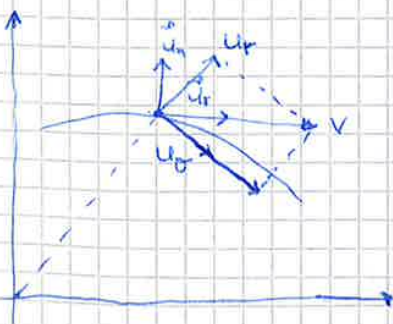
direzione -> tende a diventare 1 al diminuire del tempo -> lo chiamo \vec{u}_θ

$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \vec{u}_\theta = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

CONCLUSIONE: $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

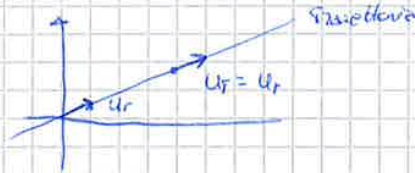
Variazione di r in modulo

variazione della direzione di \vec{r}



CAS PARTICOLARI

a) Moto rettilineo



$u_r = \text{cost}$ $\theta = \text{cost}$
 $R = \infty$

$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + 0$ POLARI

$v = \frac{dr}{dt}$ INTRINS.

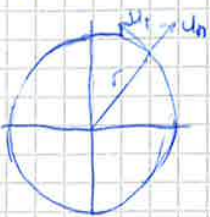
$\left(\frac{dr}{dt} = |v|\right)$ solo nel moto rettilineo

$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{u}_r$ POLARI

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_r$ INTRINS.

$\left(\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\right)$

b) Moto circolare



$|\vec{r}| = r = R$ costante

$\theta = \theta(t)$ varia nel tempo

$u_\theta \equiv u_r$

$u_r \equiv u_\theta$

$\vec{v} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ POLARI

$v = v \cdot \vec{u}_r$ INTRINS.

$|v| = r \frac{d\theta}{dt}$

$\vec{a} = -r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta$ POLARI

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_r - \frac{v^2}{R} \vec{u}_\theta$ INTRINS.

$|v| = \omega R$

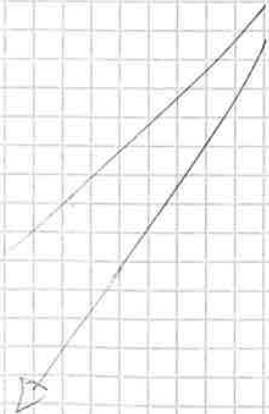
$a_t = \dot{\omega} R$

$a_n = -r \omega^2$

in 2 usanze $\frac{d^2r}{dt^2}$ e $\frac{2dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$ perché $r = \text{cost}$

e la sua derivata è zero

per lo stesso motivo anche in v usanza $\frac{dv}{dt} \vec{u}_r$



cost

$r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{u}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \vec{u}_\theta$ polari → derivata

$-\frac{v^2}{R} \vec{u}_\theta$ intrinseca

CASI PARTICOLARI

a) moto uniforme

$a_x = 0$ + 2 C.I.

$\begin{cases} a_x = 0 \\ v_i = v \end{cases}$ N.B.

$t = 0$

$v = v_0 \Rightarrow \text{cost}$
 $x = x_0$

$x = x_0 + v_0 (\Delta t)$

b) moto unif. accel.

$a = a_0 = \text{costante}$ non dipende da t in implic. ne esplic.

$t = t_0$ } $v = v_0$
2 C.I. } $x = x_0$

$v = v_0 + a \Delta t$

$x_0 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$

c) caso generale

$a = f(t)$

es: $a = 3t$

$t = 0$ } $v = 0$
 } $x = 0$

$v = \int a dt = \frac{3}{2} t^2 + C_1$

ESPLICITA

~~$x = \int v dt = \int \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{1}{2} 3t(t^2)$~~
sbagl.

$x = \int v dt = \frac{t^3}{2} + C_2$

d) caso gen. IMPLICITA DIPENDENZA

Lo EQ. DIFFER.

1° esempio:

$a = -w^2 x(t)$ C.I. $t=0$ } $x=0$ moto ARMONICO

$a = 0$ prop. allo spostam. $v = Aw$

Costanti di proporz. negativa $\Rightarrow a = kx$ $k = -w^2$

$\frac{d^2 x}{dt^2} = -wx$ es. DIFF. \Rightarrow SOLUZIONE $x = C_1 + \sin(wt + C_2)$

$v = \frac{dx}{dt} = Aw \cos(wt + C_2)$ $t=0$ } $x=0 \Rightarrow C_1 \sin(C_2) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$v = Aw$ $C_1 w \cos(wt + C_2) = Aw \cos$
 \downarrow
 $Aw = C_1 w \Rightarrow C_1 = A$

$x = A \sin(wt)$

$v = Aw \cos(wt)$

2° esempio: $a = 6x$

$t=0$ } $x=0$ } $v=0$

non è moto armonico $k > 0$

$\frac{d^2 x}{dt^2} = 6x$ soluz. mat = esponenz.

TRUCCO FISICO!!

$a = 6x$

$a = \frac{dv}{dt}$ $\frac{dv}{dt} = 6x$
 $\rightarrow t$ dove sparire

$\frac{dx}{dt} \frac{dv}{dt} = 6x dx$

$v dv = 6x dx \Rightarrow \int v dv = \int 6x dx$

a variabili separabili

~~$x \cdot v dt$~~ $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 6x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 6 dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow 6t + c = \ln x$
 $x = e^{6t}$

C.I. } $x=0$ } $v=0$
 $\int_0^x v dv = \int_0^x 6x dx$
 $\frac{1}{2} v^2 = 3x^2$
 $v = \sqrt{6x}$

Es] Moto ARMONICO Lungo x e y con stessa ω (velocità angolare)

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 x & t=0 & x=A & v_x &= 0 \\ a_y &= -\omega^2 y & t=0 & y=0 & v_y &= A\omega \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v_x = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0$$

Sceglie la condizione iniziale quando $\varphi(t) = 0$

$$\begin{cases} y = B \cos(\omega t + \varphi') \\ v_y = -B\omega \sin(\omega t + \varphi') \end{cases} \text{ C.I. } \begin{cases} t=0 & y = B \cos \varphi' = 0 & B \neq 0 \Rightarrow \varphi' = \frac{\pi}{2} \\ & v_y = -B\omega \sin(\varphi') = A\omega & B = A \end{cases}$$

$$x = A \cos(\omega t)$$

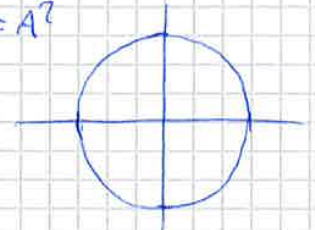
$$\begin{aligned} y &= -A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$r(t) = A \cos(\omega t) \vec{u}_x + A \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t) \\ y = A \sin(\omega t) \end{cases} \text{ per ogni } t \Rightarrow A^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

tale sovrapposizione da un moto circolare



Eg) $a_x = (3t+1) \text{ m/s}^2$ $v_x=0$ $x_0=0$ $t=10$ } C.I.

$a_y = -g$ $v_{y_0} = 3 \text{ m/s}$ $y_0=0$ $t=0$ $t_1 = 15 = t_2$ }

xi: moto vario

$$\begin{aligned} v_x &= \int a_x dt = \frac{3}{2}t^2 + t + C_1 & \text{se } t=0 & C_1=0 \\ x &= \int v_x dt = \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + C_2 & \text{se } t=0 & C_2=0 \end{aligned} \text{ C.I.}$$

yi: unif. acc.

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y_0} \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2 \\ y &= v_{y_0} (t-t_1) - \frac{1}{2} g (t-t_1)^2 \end{aligned}$$

$$r(t) = t^2 \left(\frac{t+1}{2}\right) \vec{u}_x + v_{y_0} (t-t_1) - \frac{1}{2} g (t-t_1)^2 \vec{u}_y$$

~~MOTO CIRCOLARE~~ \Rightarrow traiettoria elica

FORMULA GITTATA (equazione della parabola descritta).

$$y = \tan \theta \cdot x + \frac{g}{2v \cos^2 \theta} x^2$$

Moto ARMONICO: 1-D

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad A \text{ e } \varphi \text{ dipendono da C.I.}$$

~~$$x = A \cos \omega t$$~~

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

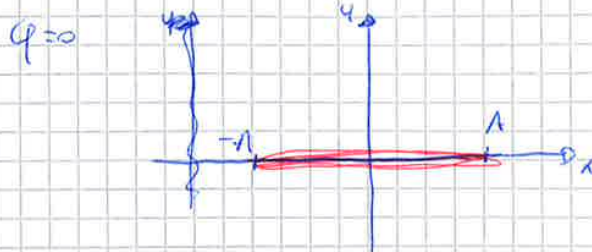
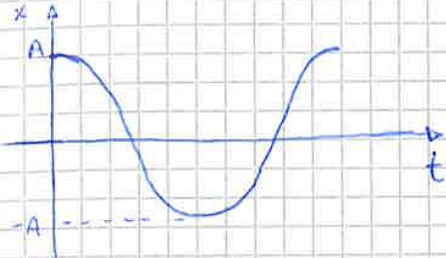
Moto armonico è un moto periodico $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \text{frequenza}$$

A = ampiezza

ω = pulsazione

φ = fase



DINAMICA

- DEL PUNTO

Lo oggetti punti fissi

- dimensioni relativamente piccole
- rotazioni trascurabili relativamente

- FORZA

- ENERGIA

- QUANTITA' DI MOTO

1) Principi della dinamica (leggi di Newton)

principio \rightarrow postulato \rightarrow affermazione non dimostrata e verificata da esperimenti

1) **I PRINCIPIO: legge di Inerzia:** un corpo* mantiene il suo stato di moto*, con velocità costante*, a meno che* non intervengano delle cause a modificarlo.

* corpo in moto o a riposo

* non necessariamente fermo

• $\vec{v} = \text{costante} \rightarrow$ modulo + direzione (verso)

↓
forze

Se la somma delle forze è nulla, (in modulo) e direzione \Leftrightarrow velocità = costante

- Se $\vec{v} = 0 \Rightarrow v_x = 0 \quad v_y = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$ - Se $\sum \vec{F} = 0$ e $v_0 = 0 \Rightarrow v_x = 0$

- Se $\sum \vec{F} = 0 \nrightarrow \vec{v} = 0$

$\hookrightarrow \vec{v} = \text{costante}$

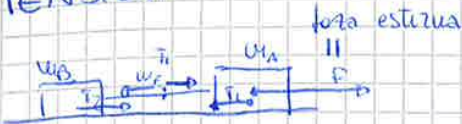
FORZA = grandezza: produce variazione di \vec{v}

$$\sum \vec{F} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

Traiettoria non rettilinea $\rightarrow a_n \neq 0 \quad a_n \neq 0 \Rightarrow \sum \vec{F} \neq 0$

Se $\sum \vec{F} = 0 \quad a = 0 \quad a_t = a_n = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cost}$
(Traiettoria rettilinea)

TENSIONI



$T_1 =$ azione di A su B

$T_2 =$ azione di B su A

II PRINCIPI: $F - T_1 = m_A \vec{a}_A$

$-T_1 =$ reazione di B su A

$-T_2 =$ reazione di A su B

$T_1 - T_2 = m_B \vec{a}_B$

$T_2 = m_B \vec{a}_B$

~~5° LEZIONE~~ 5° LEZIONE

SCHEMA

1) 3 principi

2) risultati della forza: $\rightarrow \vec{a}$

\rightarrow variazione di quantità di moto } TEOREMI
 \rightarrow variazione di en. cinetica

3) STATICA

4) ELENCO FORZE

* $F_{est}^D =$ forze esterne al sistema

$F_{int} =$ forze interne al sistema \Rightarrow controbilanciano azione e reazione.

2) AZIONE DELLA FORZA

\Rightarrow ~~MAI~~ ~~MAI~~ \Rightarrow M solo in movimento

$\Delta t \rightarrow$ variazione di tempo

$r(t) \rightarrow$ variazione di posizione

d) \vec{F} produce \vec{a}
 $\sum \vec{F} = \vec{F} = m\vec{a}$
 $\vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_c$
 F_T tang. $|dv|$
 F_c (centrifuga) Δv velocità

$F_T = m\vec{a}_T$

$L_D = 0$ se $\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \sqrt{v} = \text{cost} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v}}{m} + 2C.I.$

es) $F = 3t u_x + 2t u_y$

$t=0$ forza $r=0$ $v=0$ $m = 4kg$

$\vec{a} = \frac{3}{4}t u_x + \frac{1}{2}t u_y$ $v = \int a dt = \frac{3}{8}t^2 u_x + \left(\frac{1}{4}t^2 + C_2\right) u_y$

$r = \int v dt = \frac{1}{8}t^3 u_x + \left(\frac{1}{12}t^3 + C_2 t + C_3\right) u_y$



$\forall t \Rightarrow \vec{F}$ genera \vec{a}

L_D dissenso la traiettoria

nei motori a reazione \Rightarrow in diminuzione $\times k$ espelli del gas
 Lo si produce con una F

b) Se $F = \text{cost} \Rightarrow$ caso particolare $\int \vec{F} dt = F \int dt = \vec{F} \Delta t$

$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{Q}$

c) Forza media = $F_{\text{media}} = \frac{\int \vec{F} dt}{\Delta t} \Rightarrow F_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$

N.B. $\vec{F} \neq \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$
 \Rightarrow meno che $F = \text{cost}$

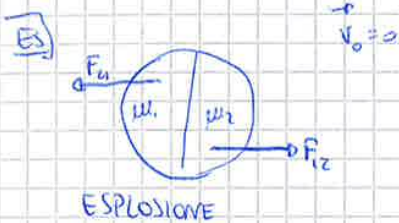
d) **TEOREMA DI CONSERVAZIONE DI \vec{Q}**

Se $m = \text{cost} \Rightarrow$ Ep. I principio

Hp: $\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ e $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost} \Rightarrow \vec{Q}_{in} = \vec{Q}_f$

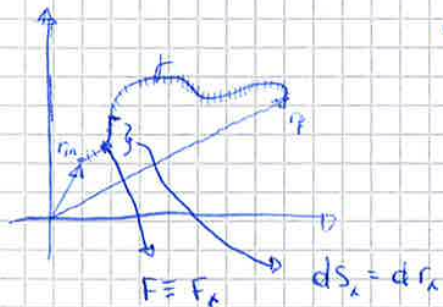
$F = 0 \Rightarrow v = \text{cost}$

$Q = \text{cost} \Rightarrow Q_{in} = Q_f$ $Q_{in} = Q_f \neq Q = \text{cost}$



$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{21} = -F_{12} \Rightarrow Q = \text{cost} \Rightarrow Q_{in} = Q_f = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

3) EFF. di 1 FORZA quando varia la posizione



$W = \int_{r_{in}}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = \text{Energia}$
 \neq prodotto scalare

TEOREMA ENERGIA-LAVORO

$F = F_x u_x + F_y u_y$ $dr = dx u_x + dy u_y$

$F \cdot dr = F_x dx + F_y dy$

$W = \int (m a_x dx + m a_y dy) = m \int \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy \right) = m \int v_x dx + v_y dy = m \left[\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} \right]_{r_{in}}^{r_f}$

$= \frac{1}{2} m [v_x^2 + v_y^2] \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2$ $K = \frac{1}{2} m v^2$
 En. cinetica

$W = K_f - K_{in} \Rightarrow W = \Delta K$

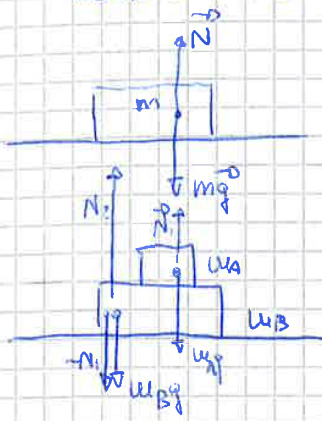
tali ep. vale anche se la massa non è costante

STATICA \Rightarrow condizioni di equilibrio $v=0 \Rightarrow \Sigma F=0$

Caso particolare

\Rightarrow v. esterne \rightarrow velocità costanti

\Rightarrow reazione vincolare



$v=0$

$N =$ reazione vincolare

$N + m g = 0$

sistema in equilibrio

$N_1 =$ interme e sorrente $= m_B g$

$A \Rightarrow m_A \Rightarrow N_1 + m_A g = 0$

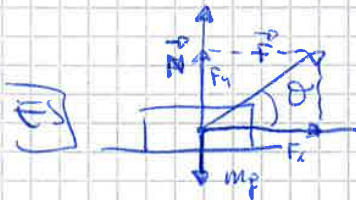
$B \Rightarrow m_B \Rightarrow N_2 + m_B g - N_1 = 0 \quad N_2 = -(m_B + m_A)g$

6 LEAZIONE

- ELENCO DI FORZE

FOR DOBBIAMO AVERE

- \Rightarrow MODULO
- DIREZIONE
- VERSO
- PUNTO DI APPLICAZIONE
- SORGENTE



$|F| = F$

$F = F_x u_x + F_y u_y$

o.e. $F_x = F \cdot \cos \theta$

$F_y = F \cdot \sin \theta$

lungo x $= F_x = m a_x$

lungo y $F_y + N - m g$

$H_p = a_y = 0$

$\Rightarrow N = m g - F \sin \theta$

Se $N > 0 \Rightarrow m g > F \sin \theta$ ho punto

Se $N < 0 \Rightarrow m g < F \sin \theta$ non acc.

$\Rightarrow H_p: a_y \neq 0 \Rightarrow N = 0$

$F \sin \theta - m g = m a_y$

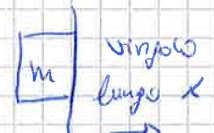
Provo che $a_y > 0$

① REAZIONE VINCOLARE

- sorgente: da un vincolo, che rappresenta il punto in 1 particolare direzione



TAVOLO: vincolo lungo y



vincolo lungo x

- è un vettore \vec{N} , ortogonale alla superficie vincolante

- modulo: soluzione delle \uparrow ^{altre} forze sempre ortog. alla superficie

- verso: è sempre uscente dalla superf. verso il corpo. Se dai \rightarrow calcoli non ci riesce, allora il modulo è nullo

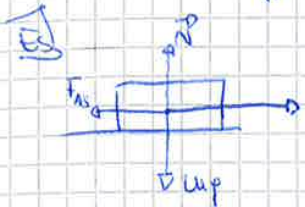
- punto di appl. \uparrow punto della superf. di contatto

④ **FORZA ATRITO**: sorgente \rightarrow diretto \rightarrow statico

a) vincolo + m: ha velocità relativa \Rightarrow ferma rispetto al vincolo: **ATRITO STATICO**
 FORZA DI ATRITO STATICO: modulo pari alla somma di tutte le $F \parallel$ al piano del vincolo

Al massimo vale $F_{As}^{max} = \mu_s N$ \rightarrow parametro già fornito / oppure da trovare

Direz. \parallel piano del vincolo, \perp
 verso opposto alle $F \parallel$



μ_s : noto

lungo y: $N - mg = 0$

lungo x: $F - F_{As} = ?$ Hp: $a_x = 0 \Rightarrow F_{As} = F$

Se $F_{As} < \mu_s N \Rightarrow$ Se $F < \mu_s mg$ ACCETTI.

Se $F > \mu_s mg \Rightarrow a_x \neq 0 \Rightarrow$ **ATRITO DINAMICO**

Se $F = 10N$
 $m = 2kg$
 $\mu = 0.1$

ERRATO se $\Rightarrow F - F_{As} = mg$
 $\Rightarrow F - \mu mg = mg$
 $10 - 2 = 2 = 2$
 $a < 0$

GIUSTO: $F + F_{As} = 0$
 $F_{As} = -10N$

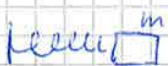
b) vincolo con v relativa $\neq 0$ tra massa e vincolo: **ATRITO DINAMICO**

modulo: $\mu_d N$ $\mu_d < \mu_s$

direzioni: \parallel alla superficie del vincolo

verso: opposto alla velocità

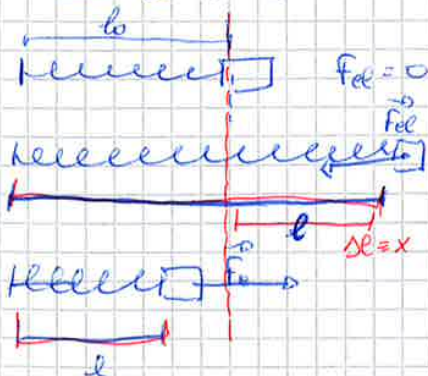
⑤ **FORZA ELASTICA**: sorgente molla \Rightarrow generalmente ideali \Rightarrow massa $\neq 0$



produce F_{el} su m.

$$F_{el} = k \cdot \Delta l$$

modulo: dirett. propr. all' Δl allungamento $\Delta l = (l - l_0)$
 direzione: \parallel all' asse della molla
 verso: di richiamo verso la posizione d'equilibrio



F_{el} : modulo dipende dalla posizione, \Rightarrow dipende implicitamente dal tempo.

S.R. polo l'origine nella posizione di riposo della molla

$F_{el} = -kx$ se $x > 0 \Rightarrow \Delta l > 0$ F verso sx $\Rightarrow F < 0$
 forza di richiamo

$$F_{el} = ma \Rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x \rightarrow \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

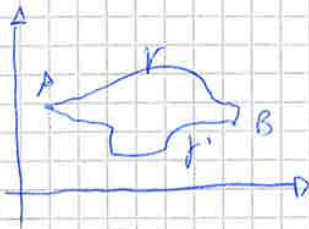
$T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

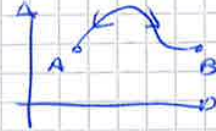
Modello Mmatico

FORZE CONSERVATIVE: il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma dagli stati iniziali e finali $\Rightarrow W_{AB}^{AB} = W_{ji}^{AB} \quad \forall j$

- conseguenza \rightarrow traiettoria chiusa



$W_{ji}^{AA} = 0$ forza in cui non mi muovo $\Rightarrow dr=0 \Rightarrow W_{ji}^{AA} = 0$



$W_{ji}^{AA} = 0$
 $\Rightarrow W_{ji}^{AB} = -W_{ij}^{BA}$
 $\forall j$

Un tipo di traiettoria chiusa e più resistiva e ritorno

Lo scambio tra loro posizione in. e fin. $\Rightarrow W$ cambia segno

CONCLUSIONE

Se F non conservativo $W = \int_j^{AB} F \cdot dr$

Se F conservativo $= W = \int_j^{AB} F \cdot dr$ perché conservativa $\Rightarrow \int_j^{AB} F \cdot dr$, viene scelto dalla traiettoria

ENERGIA POTENZIALE $\rightarrow W$ dipende da A o B, \forall percorsi tra traiettoria scelto
 funzione Energia potenziale $E = E(r) = E(x, y, z) \quad \Delta E_p \stackrel{\text{def}}{=} -W_{cons}$

\Rightarrow def: $E_B - E_A = -W_{cons}$

a) definiamo ΔE e non $E \Rightarrow E$ definita a meno di 1 costante arbit. arbitraria

$E = f(x, y, z) \quad E' = f(k, y, z) + k$ entrambe soddisfanno la definizione data

$\Delta E = -W \rightarrow E_B - E_A = -W \rightarrow (E'_B - k) - (E'_A - k) = -W \rightarrow E'_B - E'_A = -W$

pu eliminiamo k , solo S.R. pu energia potenziale.

Fissato $r=r_0 \quad E(r=r_0) + k = 0 \quad k = -E(r=r_0)$

b) $\Delta E = -W$ vale anche in forma diff. $dE = -dW$

$dE = ?$ se $E(x, y, z)$

$dE \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz$

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x + F_y u_y + F_z u_z) \cdot (dx u_x + dy u_y + dz u_z)$

es $E(x, y, z) = x + 3y^2 z^2$

$\frac{\partial E}{\partial x} dx = 1 + 3y^2 z^2$

$\frac{\partial E}{\partial y} dy = 6y z^2$

$\frac{\partial E}{\partial z} dz = 6y^2 z$

$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$\frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$

$\frac{\partial E}{\partial x} = -F_x(x, y, z)$

$F = -\left(\frac{\partial E}{\partial x} u_x + \frac{\partial E}{\partial y} u_y + \frac{\partial E}{\partial z} u_z \right)$

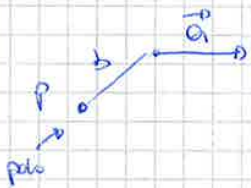
$F = -\vec{\nabla} E$

$\nabla =$ gradiente

MOMENTO ANGOLARE:

⇒ momento di 1 vettore

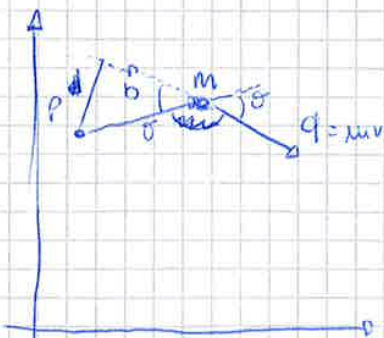
→ \vec{q} defluisce un polo: punto V a cui calcoliamo il momento



Momento = prodotto vettoriale tra il braccio e il vettore.

Braccio è il vettore posizione di \vec{q} rispetto al polo

\vec{L} : momento angolare: momento della quantità di moto



$$\vec{L} = \vec{b} \wedge m\vec{v} = \vec{b} \wedge \vec{q}$$

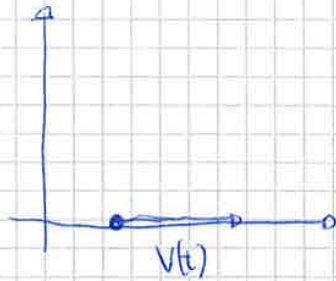
① $L = 0$ se $b \parallel q$
 ② derivazione è ortop. a \vec{b} e \vec{v} →
 al piano

$$L = |b| m |v| \sin \theta$$

$$b \sin \theta = d$$

$$|L| = d m v$$

Es1



$$v(t) = 3t u_x \quad x=0 \quad t=0 \quad y=0$$

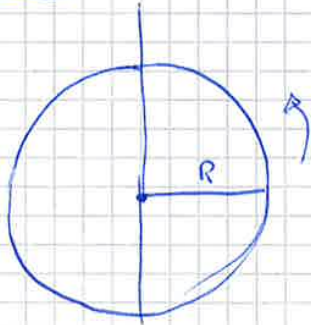
$$\vec{a} = 3 u_x \quad r = \frac{3}{2} t^2 u_x + 0 u_y$$

$$F = \frac{3}{m} u_x \quad q = 3 m t u_x$$

$$\vec{v} \parallel r \quad L=0$$

$$F \parallel r \quad M=0$$

Es2



$$|r| = R$$

$$\theta = \omega t$$

$$\omega = 3t^2$$

$$v = 3Rt^2 u_T$$

$$\vec{q} = m \vec{v}_T$$

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{in piano}$$

$$L = m r^2 \dot{\omega}$$

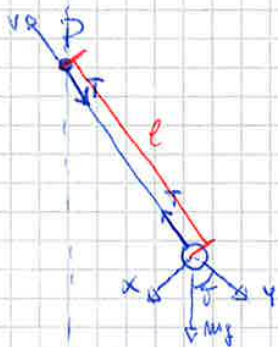
I = momento d'inerzia

LEZIONE 8

DINAMICA DEL PUNTO: - PENDOLO MATEMATICO

- FORTE CENTRALE

PENDOLO: $m =$ puntiforme sospeso mediante punto ideale



$$y = l \cos \theta$$

$$x = l \sin \theta$$

in piccolo un arco di circonferenza

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \quad y: a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a_{cent} = \frac{v^2}{l}$$

$$x: a_T = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot l$$

$$y: m g \cos \theta - T = m a_c$$

$$x: -m g \sin \theta = m a_T \Rightarrow -g \sin \theta = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Caso particolare: limite di piccole oscillazioni $\Rightarrow \theta$ piccolo (θ_0, θ_1) $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow -\frac{g}{l} \theta = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

MOTO ARMONICO $\rightarrow -\omega^2 x = \frac{d^2 x}{dt^2}$

Il pendolo oscilla di moto armonico con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\theta = A \cos(\omega t + \ell) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

NON RELATIVI

- a) definizioni
- b) formula matematica
- c) trasformazioni della velocità
- d) trasformazione dell'accelerazione
- e) esempio
- f) forte appuntn.

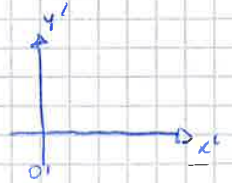
(a) definizioni:

⇒ Come cambiano le placche cinematiche se cambio S.R.

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ in S.R.

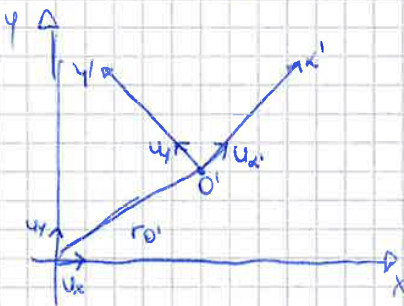
$\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}'$ in S'.R'.

Classificazione di S'.R'. S.R. ⇒ sistema fisso



i) O' può non coincidere con O
 Assi x'/y' // x/y

ii) O' non coincide con O
 x' e y' ~~non~~ a x/y



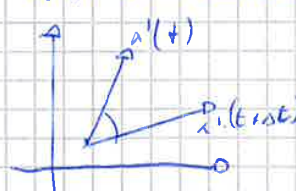
nuovo S.R.; ho bisogno di 2 informazioni:

- ① r_0' debente la posizione di O' rispetto a S.R.
- ② θ = angolo \vec{u}_y e \vec{u}_x'

S'.R' ⇒ $r_0'(t)$
 non è fisso $\theta_0^*(t)$

$r_0'(t) \Rightarrow O'$ si muove lungo la traiett.

$\theta_0^*(t) \Rightarrow$ assi ruotati



Trasformazione di \vec{r}

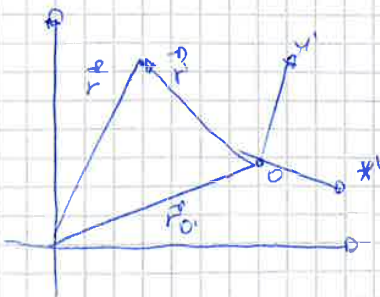
\vec{r}^D = vettore posizione in S.R.

\vec{r}^D ⇒ vettore posizione in S'.R'

$$\vec{r}^D = \vec{r}_0^D + \vec{r}^D$$

$$\vec{r}^D = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{r}^D = x' \vec{u}_x' + y' \vec{u}_y' + z' \vec{u}_z'$$



$\omega \wedge \omega r'$ = accelerazione centrifuga

$a_T = a_0 + \frac{d\omega}{dt} r' + \omega \wedge \omega r' \rightarrow$ accelerazione di ~~tra~~ trascinamento.

$2\omega \wedge v'$ = accelerazione di Coriolis.

↓
dipende da v'

ESEMPI

Caso generale: * $\alpha \neq 0$ $\odot O'$ \Rightarrow Si muovono lungo la traiett.

$r_0(t)$ $v_0(t)$ $a_0 = \frac{dv_0}{dt}$

* Assi ruotano con velocità angolare $\vec{\omega}$

$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$ in funzione del tempo $\omega = \omega(t)$

Casi particolari:

A $\omega = 0 \Rightarrow$ assi costanti

i) $v_0(t) = \text{costante} \rightarrow$ rettilineo uniforme per O'

$v = v' + v_0 \Rightarrow v = v' + v_0 + \omega r'$ $a = a'$

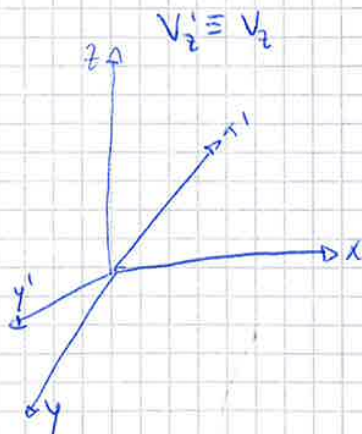
ii) $v_0(t) \neq \text{cost}$

$v = v' + v_0$; $a = a' + a_0$

B $r_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ Assi ruotano $\omega = \text{cost}$.

i) Rotazione in 3D $v = v' + \omega r'$ $a = a' + \omega \wedge \omega r' + 2\omega \wedge v'$

ii) Moto nel piano XY



$\omega //$ asse z

$v \in$ piano XY

$v' \in$ piano X'Y'

$\omega \perp v$

$\omega' \perp v'$

Direzione // r' verso opposto

acc. centrifuga

$a_{\text{centrifuga}} = \omega \wedge \omega r'$

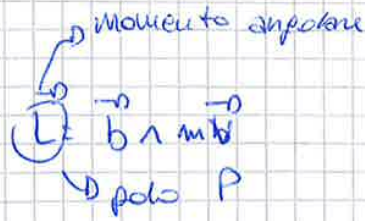
$|a| = \omega^2 r' \equiv \text{acc. centrifuga}$

acc. centripeta.

PUNTO MATERIALE

CINETATICO:

$\vec{r}(t)$ $\vec{v}(t)$ $\vec{a}(t)$ $\vec{q} = m\vec{v}$



DINAMICA

$F = \dot{D}$ $\vec{F} = m\vec{a}$ $\Delta q = \int \vec{F} dt$ $F = \frac{dq}{dt}$

$\vec{M} = \vec{b} \wedge \vec{F} \rightarrow \Delta L = \int \vec{M} dt$ $M = \frac{dL}{dt}$

P FISSO

però \vec{q} e q e L non sono indipendenti

$q \rightarrow L$
 $L \not\rightarrow q$

DINAMICA DI SISTEMI

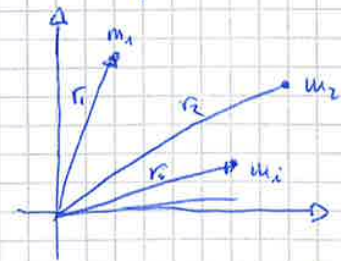
- a) definizione di baricentro
- b) F, q nel caso di sistemi
- c) \vec{M}, \vec{L}

OBIETTIVI

$Q \rightarrow$ quantità di moto $= Q_{cm} \rightarrow$ centro di massa
 $L \neq L_{cm}$

2 problemi indipendenti
 $\vec{Q} = 0 \not\rightarrow \vec{L} = 0 \quad \forall \Delta L = 0 \not\rightarrow Q = 0$

Definizione: un sistema di punti è un insieme di N particelle con massa m_i ($i=1 \rightarrow n$) e distanza tra loro variabili



$\Delta r_{12} = r_2 - r_1 = f(t)$

GRADI DI LIBERTÀ:

\rightarrow numero di coordinate indipendenti

per ogni particella \rightarrow 3 coordinate

TOT: $3n$ coordinate \rightarrow $3n$ equazioni

$\Rightarrow m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1$
 $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2$
 $m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n$

$3n$ può essere molto grande

(B) QUANTITÀ DI MOTO.

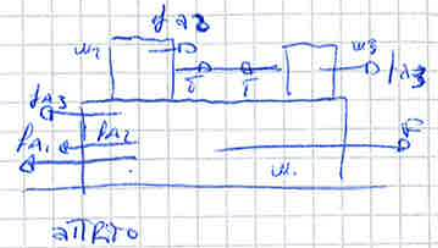
punto di partenza

$$F_i = m_i a_i$$

$F_i =$ risultante di tutte le forze

$$F_i = \frac{dq_i}{dt}$$

La serpente /



2 classi di forze: a) forze esterne: $F \notin$ sistema
 b) forze interne: $F \in$ sistema

① $\Rightarrow F_i = F - f_{A1} - f_{A2} - f_{A3}$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 E E I I
 est. int.

② $F_i = F_{A2} + I$

\downarrow \downarrow
 I I

FORZA TOTALE (??) $F \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^N F_i$

$$F_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{int}$$

\Rightarrow Si può dividere in 2 us

Es: $F_A \Rightarrow F^{ext} = F - f_{A1}$

$$F^{int} = f_{12}^{int} + f_{13}^{int}$$

\downarrow \downarrow
 $-f_{12}$ $-f_{13}$

$$F = \sum F_i^{ext} + \sum F_i^{int}$$

$$= \sum_{i=1}^N F_i^{ext} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} F_{ij}^{int}$$

$$= R^{ext} + (F_{12} + F_{13} \dots F_{1N} + F_{21} + F_{23} \dots F_{2N})$$

\downarrow
risultato F esterne

NB: Anzi per esempio $F_{13} + F_{31} = 0 \Rightarrow F_{K1} + F_{1K} = 0 \Rightarrow \sum_i \sum_j F_{ij}^{int} = 0$

AZ REAZ

$$F = \sum_{i=1}^N F_i^{ext} = R^{ext}$$

forze interne non danno contributo!

$$\Rightarrow R = \cancel{R}$$

$$\Rightarrow R^{ext} = F - f_{A1}$$

⑭ $F = \sum F_i = \sum m_i a_i = \sum m_i \ddot{x}_i = \sum m_i \ddot{q}_i = M \ddot{q}_{cm}$ $\hat{=}$ EA. Cardinale

$$F = R^{ext} = M a_{cm}$$

Moto C.M. dipende solo da forze esterne

$$F = \sum F_i = \sum \frac{dq_i}{dt} = \frac{d(\sum q_i)}{dt} = \frac{dq_{cm}}{dt} \Rightarrow F = R^{ext} = \frac{dq_{cm}}{dt}$$

⑮ Conservazione di

$$H_p = F = R^{ext} = \frac{dq_{cm}}{dt}$$

se $R^{ext} = 0 \Rightarrow q_{cm} = \text{costante} \Rightarrow q_i = \text{costante}$

C) ENERGIA E MOMENTO DELLE FORZE

i) En. cinetica punto: $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$
 sist.: $K = \sum K_i$ $K \neq$ $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{\sum m_i v_i}{M} \right)^2 = \frac{1}{2M} (\sum m_i v_i)^2 \neq K$

ii) Lavori:
 \Rightarrow $W_i \propto$ Forza Totale F_i $dW_i = F_i \cdot dr_i$ $dW_{TOT} = \sum dW_i = \sum F_i dr_i$

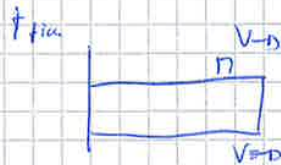
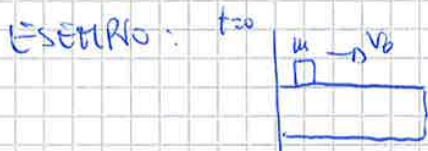
$$= \sum_{i=1}^N F_i^{ext} dr_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij}^{int} dr_i$$

$$= dW^{ext} + \sum_i \sum_j F_{ij}^{int} dr_i = \dots F_{12} dr_1 + \dots F_{21} dr_2 = \sum_{i,j} F_{ij} (dr_i - dr_j)$$

$\sum_{i,j} = 0$

Forza interna F_{ij} produce lavoro $dW_{ij} = F_{ij} dr_{ij}$ dove dr_{ij} è lo spost. rel. di i risp. j .

$$dW = dW^{ext} + dW^{int}$$

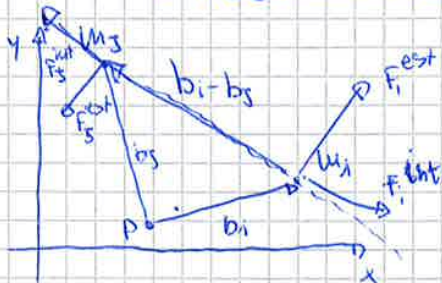


$$\Delta E = K_f - K_i = W_{tot}$$

$$R_{ext} = 0 \quad W^{ext} = 0$$

$$F_{ext} = f_A \quad W^{int} = f_A \cdot dr$$

D) MOMENTI DELLE FORZE



$$M_i = b_i \wedge F_i = b_i \wedge (F_i^{ext} + F_{ij}^{int} + F_{i,ALTRI}^{int})$$

$$M_j = b_j \wedge F_j = b_j \wedge (F_j^{ext} + F_{ji}^{int} + F_{j,ALTRI}^{int})$$

$$M_j + M_i = b_i \wedge F_i^{ext} + b_j \wedge F_j^{ext} + b_i \wedge F_{ij}^{int} + b_j \wedge F_{ji}^{int} + ALTRI$$

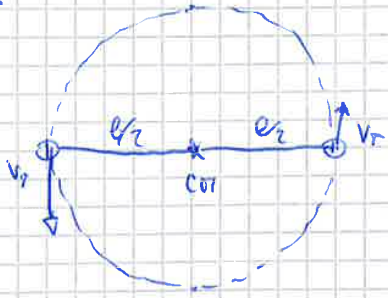
$(-F_{ij})$

$$F_{ij}^{int} \wedge (b_i - b_j) \text{ prodotto vettoriale } \Rightarrow = \vec{0} + b_i - b_j (F_{ij}^{int}) + ALTRI$$

Forze interne non contribuiscono al momento

$$M = \sum M_i = \sum F_i^{ext} \sum b_i \wedge F_i^{ext} = M^{ext}$$

ES



$$v_T = \omega \cdot l e_2$$

$$t=0 \quad v_{cm}=0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{Q} = \frac{m v_r - m v_r}{2m} = 0$$

$$L_{cm} = 0$$

$$L_{tot} = l e_2 \wedge m v_T + (-l e_2) \wedge m (-v_T)$$

4

$$L_{tot} = \vec{L} \wedge m v$$

$$K_{cm}=0$$

$$K_{tot} = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

FORZE INT ALLUNGIANO L'ASIA
ZE

$$\vec{v}_T \rightarrow \vec{v}_T$$

$$L = 2l m v \hat{e}_2$$

$$M_{ext}=0 \quad 2l m v = l m v \Rightarrow v = \frac{1}{2} v$$

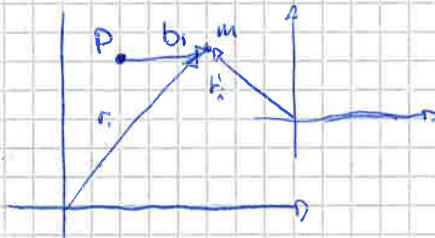
10 LEZIONE

MOMENTO ANGOLARE / MOMENTO DELLE FORZE

- i) Dipendenza da SR
- ii) Dipendenza dal polo
- iii) SR / polo orticinali
- iv) legame tra L e L_{cm}
- v) Esempi
- vi) Utilità e applicazioni

i) SR, SR'

$$L = \sum \vec{L}_i$$



In assenza di rotazione, il braccio non cambia. $r \rightarrow r'$

$$v \rightarrow v'$$

$$L' = \sum b_i \wedge m_i v_i \neq L$$

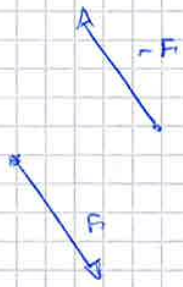
$$M = \sum b_i \wedge F_i$$

- Se SR' è inerziale $\Rightarrow F_i = F'_i \Rightarrow \vec{M}' = \sum b_i \wedge F_i = \vec{M}$

- Se SR' non è inerziale $\Rightarrow F'_i = F_i + F_{app} \Rightarrow \vec{M}' \neq \vec{M}$

B) caso particolare

Coppia \Rightarrow 2 forze // e opposte con diverso punto di applicazione

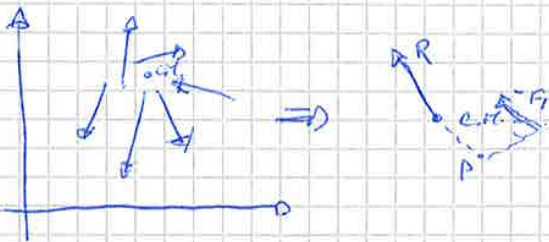


$$R = \sum F_i = 0$$

polo

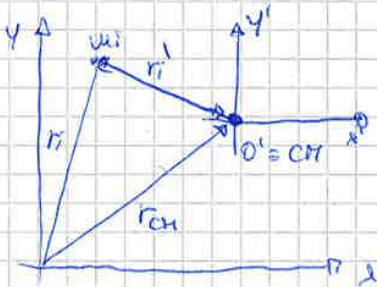
$$M_p = M_p \Rightarrow \text{momento non dipende dal polo}$$

C) sistema di N forze \rightarrow è equivalente alla somma di una risultante $R = \sum F_i$ applicata nel polo C.M. e ~~il momento~~ con retta d'azione che passa per il polo + una coppia con M_p



iii) S.R. PRIVILEGIATO ? S.R. del C.M.
 Polo " "

$O' \equiv CM$ $x', y' = 0$ $P \parallel$ a x e y e non ruotano



$$r_i = r_i' + r_{CM}$$

$$v_i = v_i' + v_{CM} \quad (w=0)$$

$$a_i = a_i' + a_{CM}$$

PROPRIETA'

$$r_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

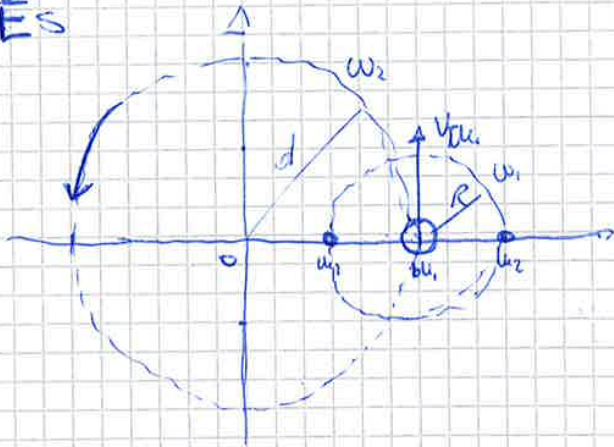
$$r'_{CM} = \frac{\sum m_i r_i'}{\sum m_i} = 0$$

$$CM = 0$$

$$\sum m_i r_i = 0$$

$$\sum m_i v_i = 0$$

Es



$\omega_1 \equiv \omega_2$
 $v_{u_1} = \omega_1 d$
 $v_{u_2} = \omega_2 R$

$L = \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{u} \, dm$? poiché non riesce a determinare sta v_c che L , applico il teorema di KÖNIG

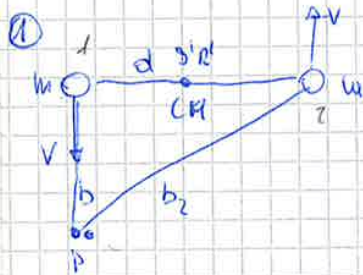
$L = L_{cm} + L'$

$L_{cm} = d \wedge (M d \omega_2)$ $\rightarrow M \cdot d \omega_2$

L' : scelta in $S'R' \Rightarrow V_2 \rightarrow$ trasl. orizz.
 $= R \wedge \omega_2$
 $V_2' = -R \omega_2$

$L' = \int \mathbf{r}' \wedge \mathbf{u}' \, dm = \int R \wedge \omega_2 (R \wedge \omega_1)$

ESERCIZI



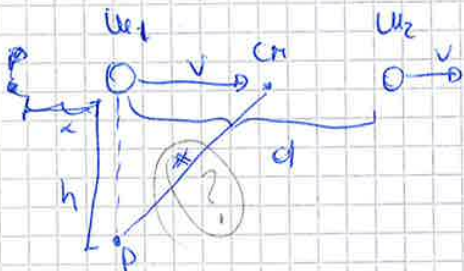
$\omega_1 = \omega_2 = \omega$
 $q_1 = \omega_1 V$ $q_2 = -\omega_2 V$
 $q_{cm} \Rightarrow q_{hor} = q_1 + q_2 = 0$

$L_1 = 0$ $L_2 = b \wedge (-\omega V) = -\omega V b$
 $L_{cm} = 0 \Rightarrow V_{cm} = 0$

$L_1' = -\frac{d}{2} \wedge \omega_1 V$ $L_2' = +\frac{d}{2} \wedge \omega_2 (-V)$

$K_1 = \frac{1}{2} \omega_1 V^2$ $K_2 = \frac{1}{2} \omega_2 V^2$
 $k_{cm} = 0$
 $k_1' = k_1$ $k_2' = k_2$

2



$q_1 = q_2 = \omega V$

$q_{hor} = 2\omega V$

$q_{cm} = 2\omega V$

$V_{cm} = \frac{\omega V + \omega V}{2\omega} = V$

$L_1 = h \wedge \omega V$ $L_{cm} = h \wedge 2\omega V$ $L_{cm} = h \wedge 2\omega V$

$L_2 = b \wedge \omega V$
 $h \wedge \omega V$

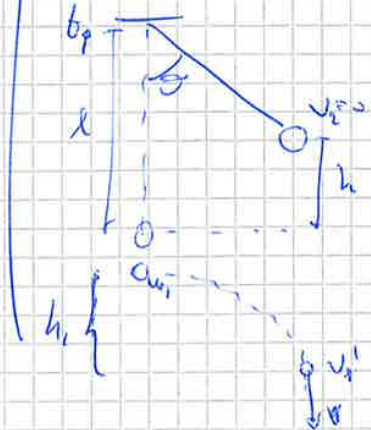
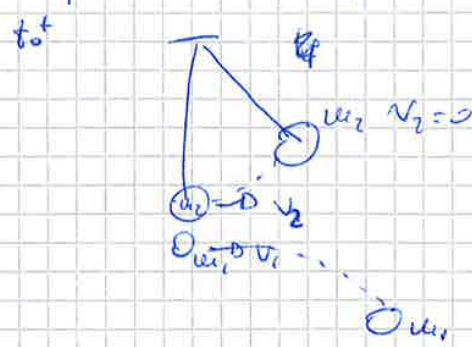
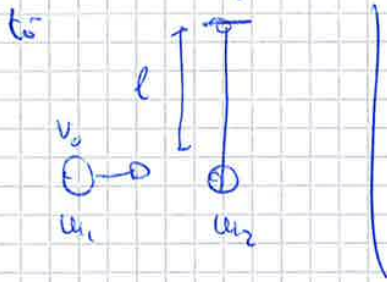
$S'R' \Rightarrow V' = V - V_{cm} = 0$

$L_1' = 0$ $L_2' = 0$

$K_1 = K_2 = \frac{1}{2} \omega V^2$ $k_{cm} = \frac{1}{2} (2\omega) V^2$

$k_1' = k_2' = 0$

(c) $u_1 = 1 \text{ kg}$ $v_0 = 10 \text{ m/s}$ in direzione dritta. $l = 1 \text{ m}$
 una molla pendolo $u_2 = 5 \text{ kg}$ (molla elastica) $\sigma_{max} = ?$



t_0^- : $Q_1 = u_1 v_0$ $Q_2 = 0$
 $K_1 = \frac{1}{2} u_1 v_0^2$ $K_2 = 0$

t_0^+ : $Q_1 = u_1 v_1$ $K_1 = \frac{1}{2} u_1 v_1^2$ $E_1 = 0$
 $Q_2 = u_2 v_2$ $K_2 = \frac{1}{2} u_2 v_2^2$ $E_2 = 0$

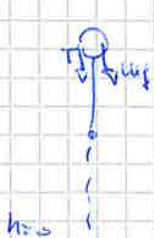
t_f : $K_2 = 0$ $E_2 = u_2 g h = u_2 g [l(1 - \cos\theta)]$

$[t_0^-; t_0^+]$ urto elastico $v_x = 0 \Rightarrow \Delta Q = 0 \Rightarrow u_1 v_0 = u_1 v_1 + u_2 v_2$
 $\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} u_1 v_0^2 = \frac{1}{2} u_2 v_2^2 + \frac{1}{2} u_1 v_1^2$

$[t_0^+; t_f]$ conserv. ENERGIA

$F_2 = T \Rightarrow W = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} u_1 v_1^2 + 0 + 0 = 0 + \underbrace{u_2 g l(1 - \cos\theta)}_E + 0$
K E * W

Se $K > 2u_2 g l \Rightarrow$ ness. soluz.



$K = \frac{1}{2} u_2 v_1^2$
 $E_2 = 2u_2 g l$

$\theta = \pi$
 e acc. \times $T \neq 0$ e $u_2 \neq 0$

$T = u_2 g - m a_c \geq 0$

$u_1 = ?$ $t = t_f$ $\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2} u_1 v_1^2 \\ E = -u_2 g h \end{array} \right.$

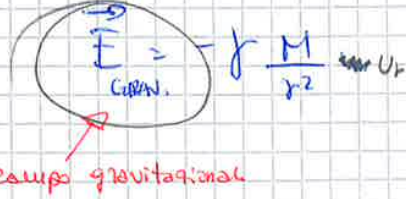
$V_1^i = v_1 u_x + g \Delta t u_y$

CONSERV. ENER.: $\frac{1}{2} u_1 v_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2} u_1 v_1^2 - u_2 g h = \frac{1}{2} u_1 (v_1^2 - 2g h)$

D) Osservazione

CAMPO \Rightarrow descrivere il sistema solo con la \vec{r} sorgente

$\vec{C} = \vec{F}$
b (sorgente)



$E_{\text{camp. elett.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
campo elettrico

$E =$ vettore parallelo a F , direzione di E sono fascio di tutte con centro in $M(0, g)$

Se $m \Rightarrow F_g = m E_g$

Se $q \Rightarrow F_e = q E_e$

$F = -\frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$

\Rightarrow Energia potenziale

$F = -\nabla \phi$
 $dU = -dW$

$U_g = -\gamma \frac{Mm}{r}$

l'integrale in funz dello spostamento dà l'energ. pot. $U = \int F dr$

$dU = -dW$
 $= -F_g dr$

$\int_0^U dU = - \int_r^{\infty} -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr$

$U_i = \left[\gamma \frac{Mm}{r} \right]_r^{\infty} = -\gamma \frac{Mm}{r}$

$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$

NB U_i uno scalare di tipo meccanico

POTENZIALE

energia dipendente solo dalla sorgente $\Rightarrow V = \frac{U}{\text{massa}}$

$V_g = -\gamma \frac{M}{r}$

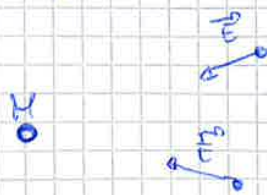
$V_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

$E = -\nabla V$

∇ gradiente delle derivate delle (specie nei sistemi di componenti)

FLUSSO:

Lo campo \vec{E} un vettore definito in ogni punto (data la sorgente)

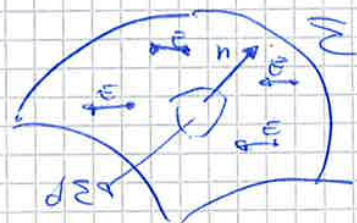


Flusso ϕ :

Lo si introduce la superficie Σ

$h E$

$\phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$



12. LEVONE

RIEPILOGO FORZE ELETTROSTATICHE

$$F = \frac{k \cdot q \cdot q'}{r^2} \quad \text{Solo forze centrali e conservative}$$

centrali

$k = \text{costante}$ in modulo e direzione \Rightarrow ci muoviamo sul piano elettrostatico siamo in 3-D

CONSERVATIVE: $E_{mecc.} = \text{costante} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \text{en. potenz.} \Rightarrow F = -\nabla U$$

$$E_{mecc.} = K + U = \text{cost.}$$

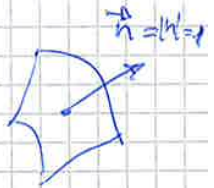
CAMPO \Rightarrow

Lo stesso caso dell'esistenza di 1 sorgente indipendentemente dalla forma della

$$\vec{E} = \frac{F}{q_{sonda}}$$

FLUSSO attraverso Σ (superf.) $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi$
 $\vec{E} = (x, y, z)$ è funzione della posizione

$$d\vec{\Sigma} = n \cdot d\Sigma$$



TEOREMA DI GAUSS

Hip: $\vec{E} = \text{diviso}$

Th: $\Rightarrow \Phi = q_{tot} / \epsilon_0$ se $M \in$ Volume racchiuso da Σ

\Rightarrow se $M \notin \Sigma \Rightarrow \Phi = 0$

In ambito ELETTROSTATICO

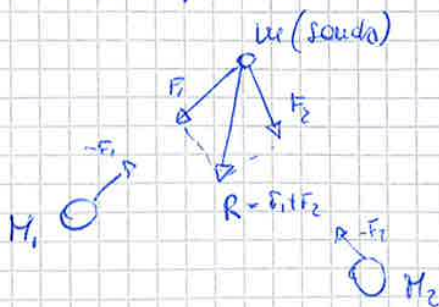
$$M \rightarrow q \quad f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \phi = \frac{q}{\epsilon} \text{ se } q \in V$$

$$\phi = 0 \text{ se } q \notin V$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

\Rightarrow più cariche q_1, q_2, \dots, q_n

il campo generato dalle cariche è la somma dei campi delle singole cariche



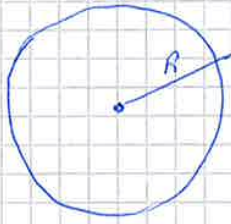
$$E = \frac{R}{u} = \frac{F_1}{u} + \frac{F_2}{u} = E_1 + E_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Esempio:

(A) Campo gravitazionale di una M sferica di raggio R



$\rho = \text{densità} = \frac{dM}{dV}$ se $\rho = \text{cost.}$ $dM = \rho dV$
 $M = \int \rho dV \Rightarrow \rho V$

$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$

Σ è simmetrica



Σ raggio r , $E_g \parallel \vec{n}^o$ è uguale su \forall punto di Σ

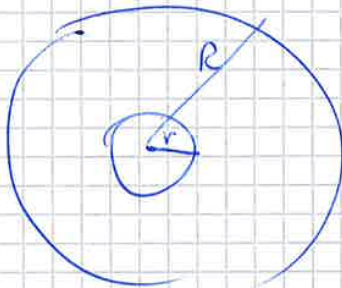
$\Phi = \int_{\Sigma} E_g d\Sigma \vec{n}^o = E_g \cdot \int d\Sigma = 0$
 $E_g \cdot 4\pi r^2$

$\Phi_{\text{covis}} = 4\pi r^2 M^{\text{int}} =$

$E_g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 \rho$

$E_g = \frac{\rho r}{r^2} \equiv \text{campo di una carica puntif.}$

Σ con $r < R$

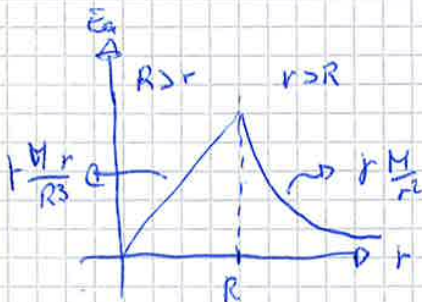


$\Phi = \int E_g \cdot d\Sigma = E_g \int d\Sigma = 4\pi r^2 E_g$

$\Phi = 4\pi r^2 M = 4\pi r^2 \rho V = 4\pi \cdot \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$

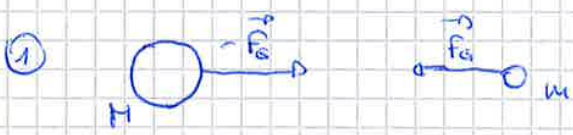
$E_g = \frac{4\pi r^3 \rho}{4\pi r^2} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{R^3} \rho = \frac{M}{R^3} r$

$E_g = \frac{M}{R^3} r$



CAMPO GRAVITAZIONALE

1. M sosp. in vuoto
2. M rotante, moto relativo di M risp. a u
3. ENERGIA e moti possibili
4. Traiettoria di u



M: $F_g = u a_m \Rightarrow \int \frac{Mu}{r^2} u_r = u a_m$

Massa corpus del riferimento inerziale

$\frac{Mu}{r^2} u_r$ \rightarrow massa gravitazionale
 $\frac{Mu}{r^2} u_r$ \rightarrow massa inerziale

$u_{gravitazionale} = u_{inerziale}$

Sono fisicamente diverse; sperimentalmente sono uguali in modulo

② massa rotante \Rightarrow moto di u $\Rightarrow F_g = u a_m$

$-\int \frac{MuM}{r^2} u_r = u a_m$ S' R inerziale \Rightarrow anche M si muove

$-F_g = M a_m \Rightarrow F$ legato al moto relativo di u risp M

S' R' con M FISSA \Rightarrow S' R' non inerziale \rightarrow F_{app}

Studiamo il moto relativo di u rispetto M $a_{rel} = a_u - a_M$

$a_{rel} = F_g \left(\frac{1}{Mu} + \frac{1}{M} \right) =$

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{u} + \frac{1}{M} \Rightarrow \mu a_{rel} = F_g$ tiene conto delle forze apparenti
 \hookrightarrow newton

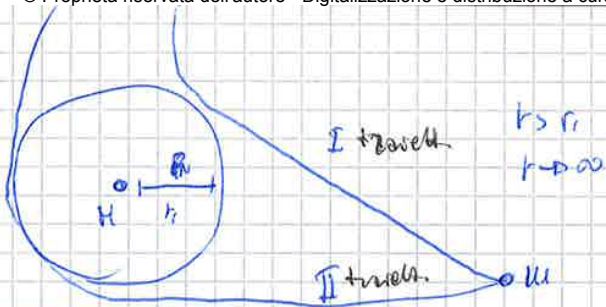
S R : $F_g = u a_m$

S' R' : $F_g + F_{app} = u a_m$

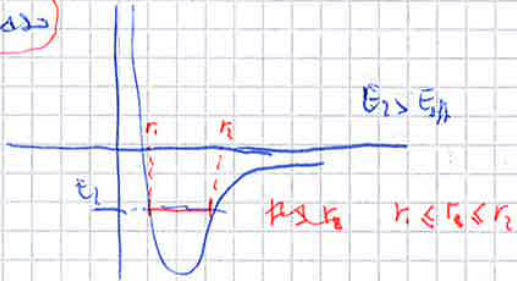
$\hookrightarrow \equiv F_g = \mu a_{rel} \Rightarrow \mu a_{rel}$

$\mu = \frac{uM}{u+M}$

- $u \ll M \Rightarrow \mu \approx u$
- $u = M \Rightarrow \mu = \frac{uM}{2}$
- $u \gg M \Rightarrow \mu \approx M$



II caso



Mov di M

⇒ 2 condizioni

- position
 - velocity
- } a t=0

⇒ dati E_{tot} e L posso ricavare la traiettoria

E_{tot}, L a t=0

4) TRAIETTORIA DI M RIASSUNTO DELLE FORMULE

$$\vec{d} = \vec{e}_r + \vec{e}_\theta \quad \vec{a}_r = \frac{dr}{dt} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \quad \frac{d}{dt} = ?$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} + \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} =$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad \frac{dr}{dt} = - \frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(- \frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{L}{\mu} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{L}{\mu r^2} = \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$e = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow \vec{a}_r = - \frac{L}{\mu r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$$

13 LEZIONE

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{mM}{r}$$

$K_r \Rightarrow$ Parte radiale

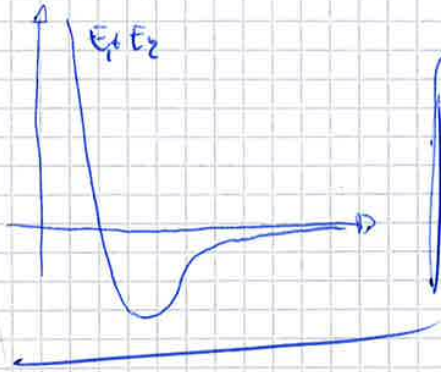
$$V_r = \frac{dr}{dt}$$

K_θ

$E_c = \frac{L^2}{2\mu r^2} \Rightarrow$ parte angolare

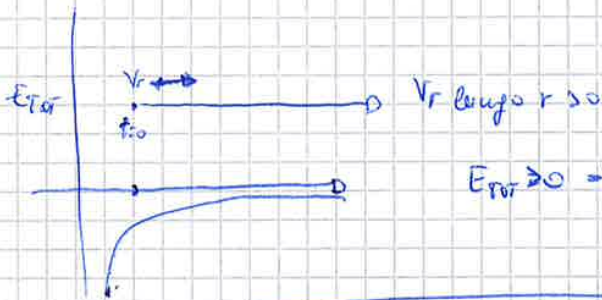
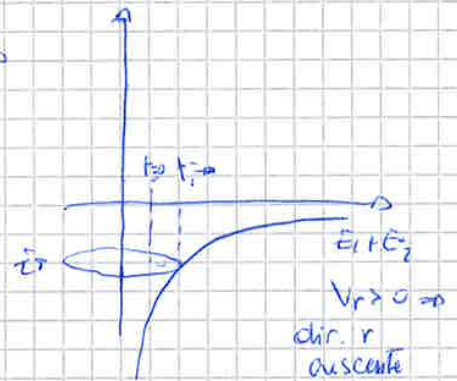
$E_p = -\gamma \frac{mM}{r} \Rightarrow$ potenziale

$$V_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$



CASO PARTICOLARE

$$V_\theta = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow E_c = 0$$



$$E_{tot} > 0 \Rightarrow r \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \geq \gamma \frac{mM}{r}$$

velocità di fuga

Significato $\frac{dr}{dt}$ transitorio e di \vec{a}

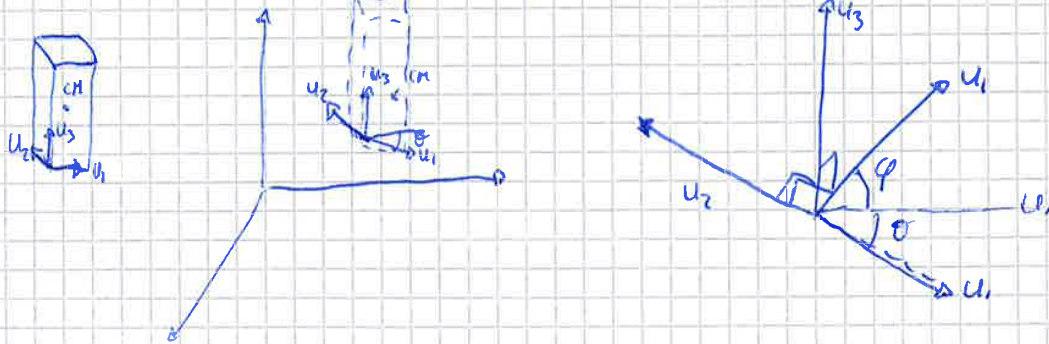
$$\frac{dr}{dt} \geq \sqrt{\frac{r mM}{\frac{1}{2} \mu}}$$

Velocità di fuga

○

2 METODI per determinare la posizione di corpo rigido

- Centro di massa (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})
- orientazioni degli assi \rightarrow 3 angoli rispetto a x, y, z



DF: 6 3 coord + 3 angoli

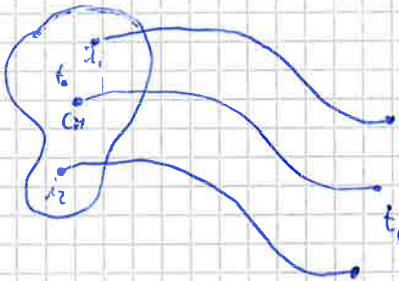
conoscendo essi, so tutto ciò che c'è da sapere su un corpo rigido

$\Theta = 3$ variabili $L = 3$ variabili

N.B. \rightarrow indipendenti \Rightarrow 6 variabili

b) Moti di un corpo rigido

* traslazione pura $v_{ir}, z_{ir} \Rightarrow$ tutte le dm percorrono traiettorie // poiché stessa vel. e stessa acc.



\Rightarrow orientamento assi fisso.

$$v = v_{ir} = v_{cm}$$

Ep per trasl. pura

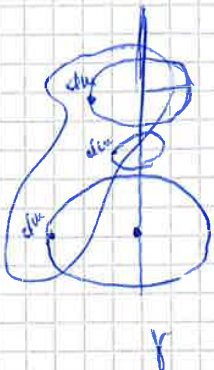
$$R^{est} = \frac{dQ}{dt} \quad Q = M v_{cm}$$

$$v_p = v_{cm} = v_{ir} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_p = a_{cm} = a_{ir} \end{array} \right.$$

* rotazione pura

\Rightarrow asse f di rotazione

\Rightarrow polo $P \in asse f$



• traiettoria v_{dm} ha traiettoria circolare

con centro su f e piano \perp a f

• velocità angolare ω uguale per ogni dm

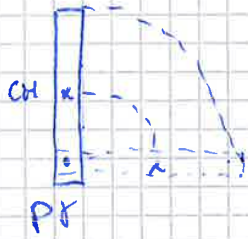
$$v_{dm} = \omega \wedge R = v_{tp} \text{ velocità tang.}$$

$v_{dm} \neq v_{cm}$ poiché R cambia, nonostante ω è uguale

se $dm \in f \Rightarrow v_{dm} = 0$

$$v_{cm} = \omega \wedge R_{cm}$$

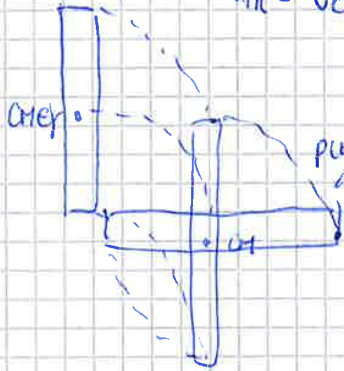
Esempio



farà P ↓ LAVAGNA, pura rotazione

$P \in \gamma \rightarrow v_{TR} = v_P = 0$ in un certo $\Delta t \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$v_{CM} = \omega \cdot \frac{h}{2}$



$v_{TR} = v_{CM} = \omega \cdot \frac{h}{2}$

abbiamo una traslazione \Rightarrow

CM: traiettoria circolare, $v_{CM} = \omega \cdot \frac{h}{2}$

pezzo

pura traslazione + rotazione

In Δt , $\theta = \omega \Delta t \Rightarrow \omega = \omega'$

- Scelta di γ

- * $\gamma' \Rightarrow \omega = 0$ IMPOSSIBILE
- $\Rightarrow \omega_{TR} = 0$ POSSIBILE

$\rightarrow P \in$ CORPO FISSO $v_P = 0$ se $P \in \gamma \rightarrow v_{TR} = 0$

γ per un P FISSO

* P FISSO non esiste

γ passa per CM.

* $v_{TR} = v_{CM} \Rightarrow \omega_{TR} = \omega_{CM} = \frac{R}{h}$

* POLO \equiv CM

$\rightarrow L$ indipendente da γ

* $M_{est} = \frac{dL}{dt}$

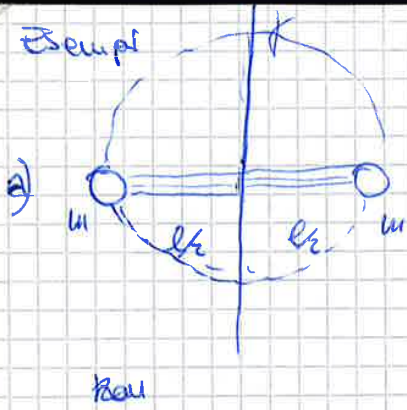
POLO non FISSO \neq CM

$M_{est} = \frac{dL}{dt} - v_{polo} \omega$

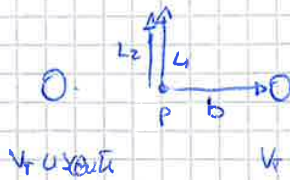
[TEOR. DI] KÖNIG $\rightarrow L = L_{CM} + U'$

se polo \equiv CM $L_{polo} = L$ non dipende dal modo di CM

Esempi



$\omega = \text{cost}$



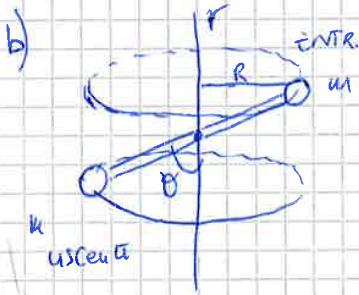
$V_T = L \text{ Cavaglia}$

$V = \omega l_2$

$L = l_1 + l_2$

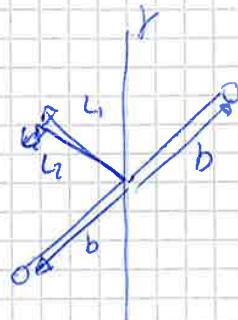
$[m\omega(l_2)^2 + m\omega(l_2)]^T \omega$

→ non c'è precessione



$V_T \perp \text{CAVAGNA}$

$V_T = \omega R = \omega l_2 \sin \theta$



$L = l_1 + l_2$

$L \nparallel \omega$

ho moto di precessione

d) $M = \frac{dL}{dt}$

• Se L ha precessione → L cambia direzione ⇒ $M \neq 0$ sempre

• Se L non ha precessione → $L = I\omega$
(negli esercizi sono sempre cost.)

$M = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$

$L = \parallel$ direzione ω costante

$M = I\alpha$

i) \rightarrow Direzione fissa

Modulo di L varia

ii) Modulo di L fisso

L direzione (moto attorno a f)

⇒ $M \neq 0$

• Conservazione di L se $M^{est} = 0 \Rightarrow L_{in} = L_f$

• ENERGIA? $K \int_V dK = \int_V \frac{1}{2} dm v_{dm}^2 \Rightarrow v_{dm} = v_{tr} + \omega R \Rightarrow v_{dm}^2 = v_{tr}^2 + \omega^2 R^2$

$K = \frac{1}{2} \int dm v_{tr}^2 + \frac{1}{2} \int dm \omega^2 R^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} v_{tr}^2 \int dm + \frac{1}{2} \omega^2 \int dm R^2$

⇒ $K = \frac{1}{2} v_{tr}^2 M + \frac{1}{2} \omega^2 I$

ROTAZIONE

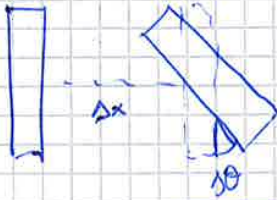
$R \rightarrow M \quad Q \rightarrow DL \quad V \rightarrow DW \quad K_{in} \rightarrow K_{Rot}$

$M = \frac{dL}{dt} \Rightarrow b_f - Li = -M_f \Delta t_{Rot}$

$0 - Lw = -M_f \Delta t_{Rot}$

$\Delta K = W$
 $K_f - K_i = \int M d\theta$

$0 - \frac{1}{2} I \omega^2 = -M \Delta \theta$



CORPO RIGIDO $\Rightarrow f$

i) FORZE \rightarrow calcolo R^{est}

$\rightarrow M \text{ momenti} = \sum b_i \cdot F_i$

momento non dovuto a forze esplicite $\neq R$

ii) TRASLA?
 Ruota?

iii) Significato fisico.

- I gioca lo stesso ruolo delle masse

$M = I \alpha \Rightarrow$ resistenza che il corpo pone a masse in rotazione

\downarrow
resistenza del corpo a cambiare il suo stato di rotazione

A parità di $M \Rightarrow$ se I maggiore $\Rightarrow \alpha$ minore.

Per poter cambiare lo stato di moto a parità di $\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow I$ maggiore, $\Rightarrow M$ maggiore, dove parimenti sven delle forze + grandi

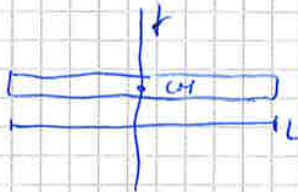
iv) calcolo di I

- calcoli sperimentali: misurando M e α e trovo I ; se cambi la posizione di J , devi ritare le misure.

- se sono geometrie semplici \Rightarrow leggi e tabelle che forniscono i MOM. di inerzia

\downarrow
asse J pass per C.M.

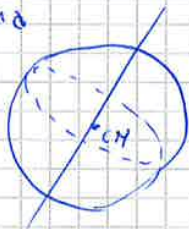
Es: asta sottile



- J passa per CM.

- $I = \frac{1}{12} ML^2$

• Sfera



$I = \frac{2}{5} mR^2$
 J passa per CM.

(negli esempi è specificato il passaggio di J rispetto a CM.)

calcoli ρdV e di soluzioni

\Rightarrow calcolo

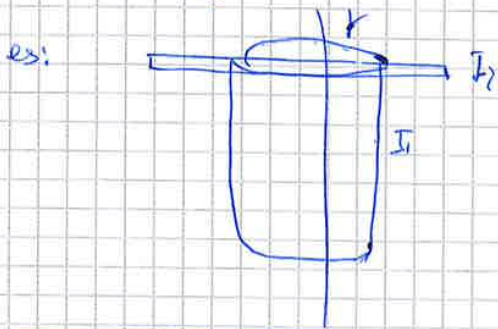
$I = \int_V \rho r^2 dV$

prendo un oggetto complessivo lo divido in dV ; scelgo un volume infinitesimo dV ~~rectangolare~~ ρdV
 $\forall \rho \in dV$ in moto che \vec{v} stessa r
 \Rightarrow integrali normali (std.)

V) I sono add. Ivi.

⇒ scompongo l'oggetto in forme semplici:

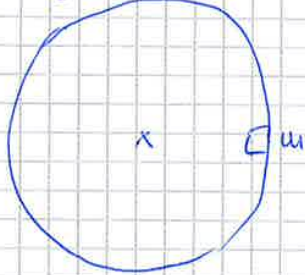
⇒ $I_{TOT} = I_1 + I_2 + \dots + I_n$



• prendo un oggetto (cilindro + asta) →
→ I_1 e I_2

$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 + \left(\frac{1}{12} m_2 L^2 \right) \rightarrow 0$ f pm cm

di Sco



f ⊥ lava pua per il cm del disco

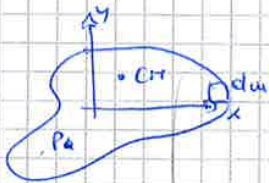
- hai un disco + 1 massa puntuiforme sopra

$I = I_{disco} + I_m = \frac{1}{2} m_{disco} R^2 + m R^2$

leggi la tavola

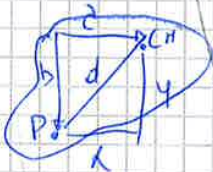
VI) TEOREMA DI HUGGHENS STEINER

permette di trovare I rispetto ad asse f // a f' per il centro di massa, noto $I_{f'}$



f' ⊥ alla lavagna per CM
f ⊥ alla lavagna per P

due ⇒ coordinate x', y' rispetto a CM : $r^2 = x'^2 + y'^2$



due : coordinate rispetto a P $\{x, y\}$
P : coordinate rispetto a CM $\{a, b\}$

∃ relazione fra diverse coordinate:

$x = x' + a$ $y = y' + b$

quando calcoli $r^2 = \text{dist. di due da f}$ → $r^2 = x'^2 + y'^2 =$

$= \underbrace{(x'^2 + y'^2)}_{r'^2} + (a^2 + b^2) + 2x'a + 2y'b$

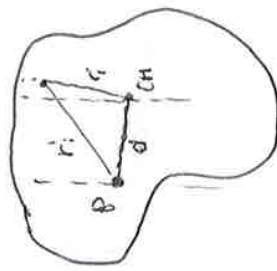
$x'^2 + y'^2 = r'^2$

$a^2 + b^2 = d^2$

d = distanza fra f' e f

~~Problema di inerzia per CM~~

Dimostrazione (STEINER)



$$I_P = \sum_{i=1}^N m_i (r_i)^2 \quad \text{ma} \quad \vec{r}_i = d + r_i \Rightarrow (r_i)^2 = d^2 + r_i^2 + 2dr$$

$$\Rightarrow I_P = \sum_{i=1}^N m_i (d^2 + r_i^2 + 2dr) = \sum_{i=1}^N m_i d^2 + \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 + 2d \sum_{i=1}^N m_i r_i = I_{CH} + I_{CM} + 2d \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

per def del ucc. di inerzia

$$2d \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

$$2d \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

I_{CH} : vettore posizione di CH che nel S.A. del CM è l'origine. cioè $\vec{e} = 0$

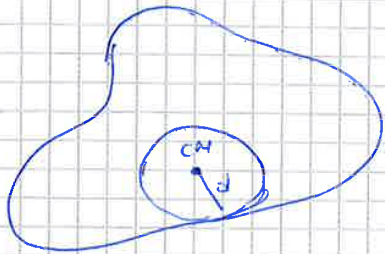
parimenti $I_P = I_{CM} + I_{CH} + 2d \sum_{i=1}^N m_i r_i$

ii) I minimo

a) Steiner $I_f = I_{cm} + md^2 \Rightarrow I_f > I_{cm}$

fissata la direzione dell'asse, I è minimo se l'asse passa per CM

b) $I_f = I_{cm} + md^2$ simmetria che dice che $\forall f$ perpendic. // cioè con stessa distanza \Rightarrow stesso I



due asse \perp lavapua

$\forall f$ per $P \in$ circonferenza di raggio d \Rightarrow stesso I

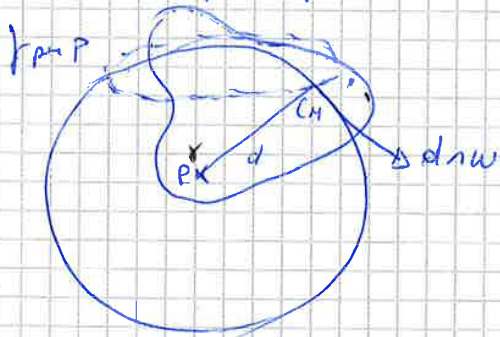
c) Teor. di Koenig : $L = L' + L_{cm}$

L rispetto a polo $O = L$ rispetto al CM + L_{cm} momento angolare di CM rispetto a O

$\Rightarrow L$ per corpo rigido.

L rispetto a $f = L'$ rispetto a $f_{cm} + L_{cm}$ mov. angol. di CM rispetto a f

$L_f = L'_{f_{cm}} + dn \cdot \omega \rightarrow \omega$ del CM $\Leftrightarrow \omega$ del corpo



$L_f = L'_{f_{cm}} + dn \cdot \omega_{cm}$ $f \equiv CM$

CM = D moto circ. attorno a f (pura rotazione)

$v_{cm} = dn \cdot \omega$
raggio

$(I'_{f_{cm}} = cm^2 \cdot W)$

$I_f W = I'_{f_{cm}} W + md^2 W$

$\Rightarrow W I_f = (I'_{f_{cm}} + md^2) W$

\Leftrightarrow STEINER \equiv KOENIG (solo se pura rotazione)

2) c) TEOREMA DI KONIG

ROTAZIONE + TRASLAZIONE $\Rightarrow L \neq I\omega$ perché se ho

f non passante per $CH \Rightarrow L_f = L_{f=CH} + L_{CM}$

f con direzione fissa $\Rightarrow L_f = L_{f=CH} + m v_{CM} d$ $d = \text{dist. tra } f \rightarrow f'$

$$L_f = L_{f'} + m(v_{TR} + \omega d)$$

Se $I_f \omega = I_{CH} \omega + m \omega d^2 + m v_{TR} d \Rightarrow I_f \omega = (I_{CH} + m d^2) \omega + m v_{TR} d$
termine correttivo

Trovare L_f se $f \parallel v_{CM}$

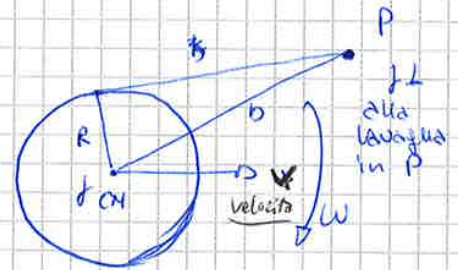
$v_{TR} \neq 0$

a) $\Rightarrow I_f$ (STEINER) + $(m d v_{TR})$ moltip. ang. di trasl. STEINER

$$L_f = (I\omega + m d^2) \omega + m d v_{TR}$$

b) $I_{f'}$ + moltip. ang. $CH \Rightarrow L_f = I_{f'} \omega + m v_{CH} d$ KONIG

Esempio: • disco che ruota su se stesso con ω data
 • CH si muove con velocità v_i



a) $v_{CH} = v_P = v_{TR} + \omega R$ asse $f \in CH$

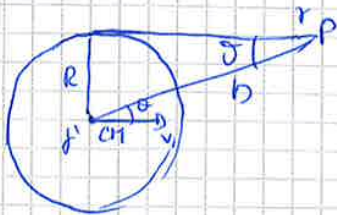
$v_P = v_{CH} = v_{TR} + \omega R$ asse $f \in P$

b) $M=0 \Rightarrow L = \text{cost}$ $L = \text{cost} \Rightarrow \omega = \text{cost}$

$F=0 \Rightarrow Q = \text{cost}$ quantità di moto $Q = \text{cost} \Rightarrow v_{CH} = \text{cost}$

c) $L_f - \text{KONIG} \Rightarrow L_{CH} + b \cdot q = \frac{1}{2} m R^2 \omega + b q \sin \theta \Rightarrow \theta = 0$
 $b \sin \theta = R$

$\Rightarrow L_f = \frac{1}{2} m R^2 \omega + m v_i R$ costante



N.B: se asse applicato solo STEINER

$$L_f = I_{f'} \omega = (I_{f'} + m b^2) \omega \neq \text{costante}$$

CORPO RIGIDO

15 LEZIONE

- * STATICA (1)
- * URTI (2)
- * ROTOLAMENTO (3)

1) STATICA: tratta equilibrio corp rigido. Non c'è trasl. e rotazione

NO TRASL $\Rightarrow a_{cm} = 0 \Rightarrow \sum F = 0$

NO ROTAZ. $\Rightarrow a(\text{acc. ang}) = 0 \Rightarrow \sum M = 0$

Se ho moto nel piano, e ho rotazione con $\dot{\varphi}$ cost

~~$\sum F_x = 0$~~
 ~~$\sum F_y = 0$~~
 ~~$\sum M = 0$~~

devo verificare questi $\sum F_x = 0$
 3 condizioni $\sum F_y = 0$
 $\sum M = 0$

ii) vincoli e normali \Rightarrow forze che impediscono il moto in direzione data
 \Rightarrow sono oggetti che impediscono rotazione

normali

$N = D$ punto di applicazione

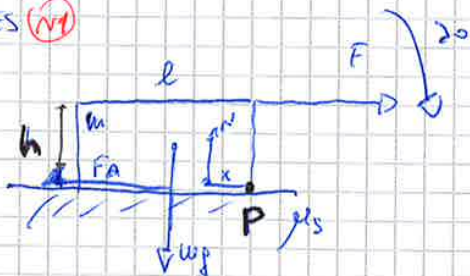
$M_N \Rightarrow$ dipende dal punto di applicazione



PEAD, da P è incognita

vincoli $\Rightarrow V(V_x, V_y)$ oppure $V(|V|, \theta)$

ES (VI)



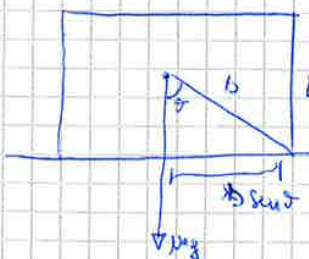
trovare μ_s e F_{max} per stare in equilibrio statico

a) $\sum F_x = 0 \Rightarrow F - F_{ad} = 0$ condiz. $F < \mu_s N$

b) $\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0$

c) $\sum M = 0$ $\dot{\varphi}$ + energia pass. pu P

$M = Fh + N \cdot x - mg \cdot \frac{l}{2} + 0 = 0$



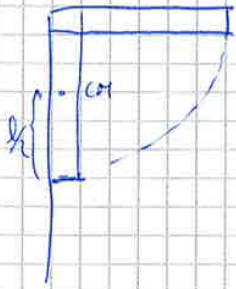
$M = b \cdot N \cdot \mu_p$

$\Rightarrow b \cdot \sin \theta \cdot \mu_p$

$b \cdot \sin \theta = l/2$

$\Rightarrow x \quad 0 < x < l$

$F_{ad} = b = 0$ perché
 b in questione è
 + da pt della tipa



$t = 0$
 $w = 0$
 $h = l$

$t_f: w = ? \quad h = l/2$

$M = 0 + mg \cdot l + 0 = \frac{1}{2} I w^2 + mg \cdot \frac{l}{2}$

$I = \frac{1}{2} m l^2 + \frac{m l^2}{4}$ **STEINER**

è vado a trovare w

2) URTI

A) **urto urti** ha punto materiale e corpi rigidi
 urto tra 2 corpi rigidi

un urto è un processo fisico che dura un $\Delta t \rightarrow 0$ in cui agiscono forze interne tra i 2 oggetti

- a) \vec{q} di moto b) L momento angolare c) casi particolari

a) \vec{q} se ha traslazione e il corpo rigido si comporta come un punto materiale
 \Rightarrow i) se $V = 0 \rightarrow \sum F_{ext} \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \lim \sum F_{ext} \cdot \Delta t = 0 \Rightarrow q_{TOT} = \text{cost}$

ii) se $V \neq 0 \rightarrow \sum F_{ext} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \lim \sum F_{ext} \cdot \Delta t \neq 0 \Rightarrow p_{TOT} \text{ non è costante e}$
 $F_{mech} = \frac{q_{TOT}}{\Delta t}$

b)

b) L i) se $M_{mech} = 0 \Rightarrow \lim \sum \tau_{ext} \cdot \Delta t = 0 \Rightarrow L_{TOT} = \text{cost}$

ii) se scegliamo polo $P \equiv V \Rightarrow M_V = 0 \Rightarrow L_{TOT} = \text{cost}$

c) casi particolari

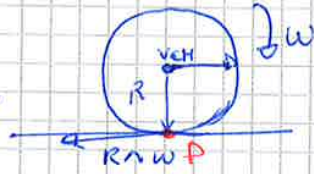
i) esempl. elastico (urto) $K_{TOT} = \text{costante}$

ii) esempl. anelastico \Rightarrow dopo l'urto le velocità w e v_{cm} sono uguali per i 2 oggetti \sim i 2 oggetti formano un corpo unico

B) ROTO LA MENTO

A) definizione: è un moto di rototraslazione particolare in cui esiste un punto piano con $v=0$.

qualora $t: v_p=0$
 $t+dt: v_p \neq 0 \rightarrow v_{p+dt}$



J per CM
 rot. ω
 $v_{CH} \equiv v_{CR}$

P = punto di contatto

$$v_p=0 \Rightarrow v_p = v_{TR} + R\omega = 0$$

$$\Rightarrow v_{TR} = -R\omega$$

$$v_{TR} = R\omega \Rightarrow \text{in } P \quad v_{TR} = v_{CH} = \omega R \Rightarrow v_{TR} \text{ e } \omega \text{ non indipendenti}$$

B) PROPRIETÀ: i) $K = K_{rot} + K_{tr} \rightarrow K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CH}^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2$

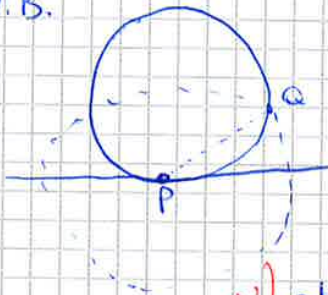
$$= \frac{1}{2} (I_{CM} + mR^2) \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I_P \omega^2 \rightarrow K_{rot}^{(P)}$$

STEINER
 I_P : momento di inerzia rispetto a P.

rotolamento: a) rotazione attorno J + traslazione

b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{però rotazione attorno al polo } P(t) \rightarrow P \text{ si sposta in funzione} \\ \text{del tempo} \\ \Rightarrow \text{asse istantaneo di rotazione} \end{array} \right.$

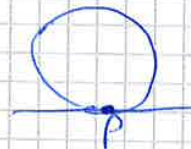
N.B.



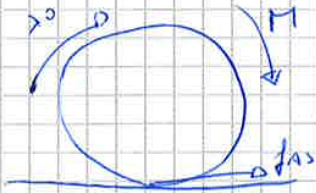
A descrive una circonferenza

ii) attito con il piano.
 contatto solo in P

ma $v_p=0 \Rightarrow$ attito statico
 \rightarrow non compie lavoro



Momento su pule forze esterne



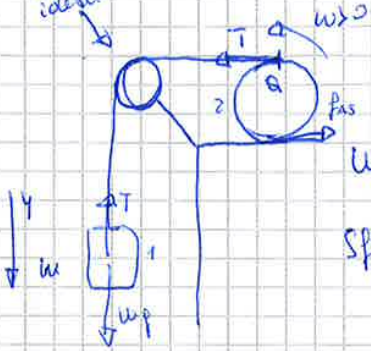
$$f_{AS} = \mu_s \Delta \text{car}$$

Pr: Somma dei momenti $M - f_{AS}R = I \alpha R$

$$\alpha = \frac{\Delta \text{cm}}{R}$$

Esempio:

Carroccia identici



$$\Delta \omega = \text{cost}$$

$\mu_s \text{min} = ?$ per avere rotolamento

Carroccia: $w_2 - T = \mu_s \Delta \text{cm}$

Sfera: $T - f_{AS} = \mu_s \Delta \text{cm}$

M: $TR + f_{AS}R = I \alpha$

$\alpha R = \Delta \text{cm}$ $\Delta \omega = \Delta \alpha R$

$\Delta \omega = \Delta \alpha$ $\Delta \alpha = \frac{\Delta \omega}{R} + \alpha$

$\Delta \alpha = \alpha$ $\Delta \omega = \Delta \alpha R + \alpha R = 2 \alpha R$

$$f_{AS} \leq \mu_s w_2$$


$$\mu_s \geq \frac{f_{AS}}{w_2}$$

(A) 2) proprietà delle particelle: → a livello microscopico
 ⇒ meccanica dei sistemi: $i=1 \rightarrow N \Rightarrow V_i$
 ⇒ approccio statistico: costruire il valor medio di una variabile
 Es: Teoria cinetica dei gas $\langle V \rangle$

- a livello macroscopico:
 avrò q variabili termodinamiche (anche di meccaniche) che obediscono un comportamento complessivo.
 Esse sono T (temper.) e V (volume), P (pressione)

l'origine fisica delle variabili macroscopiche, detta con le variabili microscopiche

Esempio: pressione?



nell'urto, lungo x: $q_0 = m_i v_i$ $F_{med} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ $f_i = \frac{2 m_i v_i}{\Delta t}$
 $q = -m_i v_x$
 $\Rightarrow p = \frac{\sum f_i}{S} \rightarrow$ superficie

- Classificazione: - variabili estensive \Rightarrow si sommano (V , incl.)
 - variabili intensive \rightarrow valori diversi $\forall p \in V$; tali variabili non si sommano (T, P)

(A) 3) STATO TERMODINAMICO \rightarrow l'insieme dei valori delle grandezze termod. ad un certo istante t

Es: gas perfetto in un sistema chiuso | gas perfetto in un sistema chiuso con pareti rigide
 $S(\text{stato}): \{ p, V, T, n \} \quad t = t_0$ | $S: \{ p, V, T, n \} \quad p(t), T(t), V, n$
 $p(t), V(t), T(t)$ (with n circled in red)

corpo elastico:

$S: \{ E, \sigma, T, m \}$
 \downarrow \downarrow
 deform. spost.

B) TRASFORMAZIONI + ENERGIA

1) Trasformazione: $\text{Seq. sequenza di stati che portano un sistema da uno stato } A \text{ a uno finale } B.$

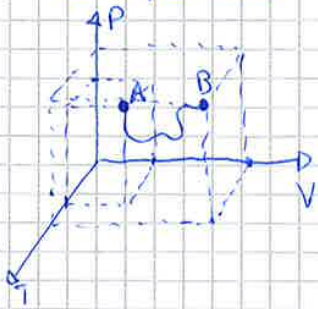
$$S_A: \{P, V, T\} \rightarrow S_B \{P, V, T\}$$

(variano nel tempo)

• Interpretazione della sequenza: 1 stato $\{P, V, T\}$ rappresenta 1 punto nello spazio 3D

Seq. di stati \equiv Seq. di punti \equiv linea (o curva)

$$\begin{cases} P = P(t) \\ V = V(t) \\ T = T(t) \end{cases}$$



• ENERGIA \rightarrow cambio di stato \rightarrow interazione con l'esterno

$$t \rightarrow \text{volt} \rightarrow S(t) \rightarrow S(t, dt)$$

$$\begin{cases} dQ \\ dW \end{cases} \begin{cases} \text{scambiati} \\ \text{tra sistema e ambiente} \end{cases}$$

• Complessivamente da $A \rightarrow B \Rightarrow W_{AB} = \int dW$ e $Q_{AB} = \int dQ$

Trasformazioni reversibili:

\Rightarrow caso particolare: \curvearrowright

\Rightarrow def.: ogni stato intermedio \hat{e} uno stato di equilibrio

\hookrightarrow a) $\forall t \in [t_A, t_B]: P_{int} = P_{ext} \quad \text{Il pareti zippe}$

$T_{int} = T_{ext} \quad \text{Il pareti: sciate termic.}$

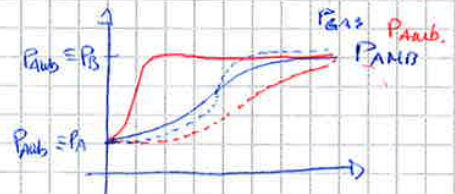
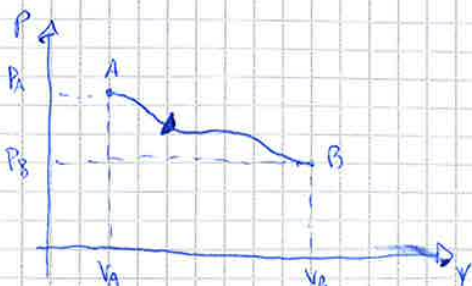
b) $\forall t \in [t_A, t_B]: (PV = nRT)$ del gas

Per essere reversibile le variazioni devono essere lente

• Stato (P, V, T) se reversibile: $T = T(P, V)$
vale eq. di stato

\Rightarrow lo stato diventa $S: (P, V) \Rightarrow f$ in 2D

GRAFICO DI CLAPPEYRON



caso irreversibile $P_A \neq P_{int} \neq P_{ext} \neq P_B$
caso reversibile $P_A = P_{int} = P_{ext} = P_B$

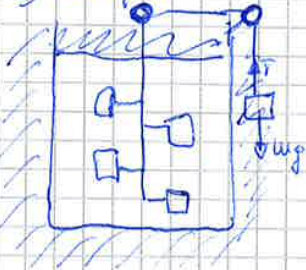
TRASFORMAZIONI

17 LEFRONT

ENERGIA: per passare da uno stato all'altro o lwo scambiare energia con l'ambiente:

Il primo a studiare pst cose fu Joule con un sistema a pareti adiabatiche stato scaldando l'acqua usando en. meccanica:

a) esempio:

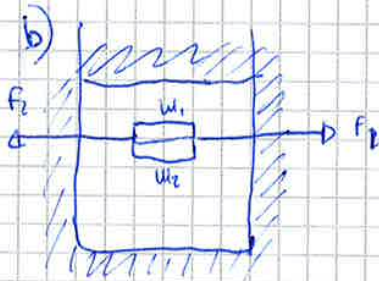


mentre la massa scende, il mulinello gira

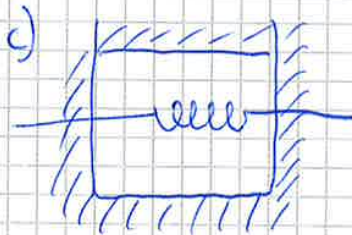
Momento del mulinello: $M = T \cdot R - r \cdot f \rightarrow f$: forza di attrito

$$m: \frac{1}{2} m V_1^2 + mgh + W = \frac{1}{2} m V_2^2$$

Se m scende con $V = \text{cost} \Rightarrow \boxed{W = -mgh}$



avendo attrito tra W_1 e W_2 , sapro' calcolare il $W_{\text{risultato}}$



una resistenza produce $-W : i^2 R \Delta t$

\Rightarrow risultato: o per ogni ΔW , c'è sempre un $\Delta T > 0$
 e il lavoro ΔW è proporz. a ΔT

$$W = \Theta \Delta T \text{ è proprietà di sistema termodinamico}$$

\Rightarrow conseguenza: legame tra T e W non dipende dalla trasformazione (sempre adiabatica)

\Rightarrow Definisco ΔU : energia interna $\Rightarrow \Delta U = -W$

ΔU : proprietà del sistema termodinamico;

- Osservazioni:
- 1) definita $\Delta U \Rightarrow U$ definita a meno di una cost. additiva
 - 2) Segno del lavoro: $W > 0$ se compiuto dal sistema
 $W < 0$ se subito

Joule \Rightarrow ambiente perde en. mecc. $\Rightarrow W < 0 \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta T > 0$