



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1534A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Mancino

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Eserc.
Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

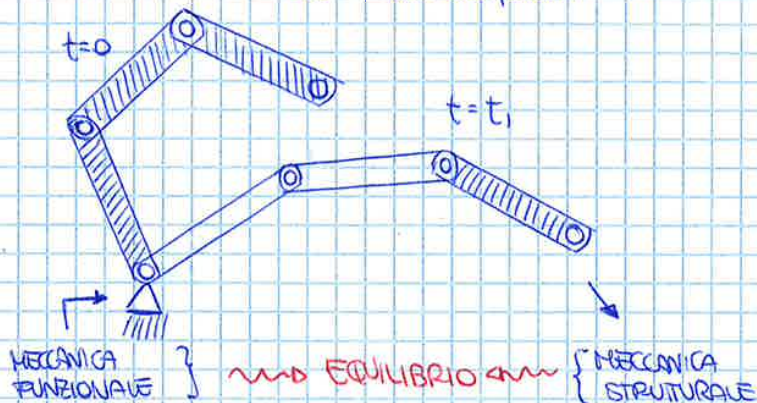
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

05-03-2014

EQUILIBRIO E CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

SISTEMA MECCANICO (STRUTTURALE) = posizione di macchina o macchina completa da studiare, formato da una serie di elementi (corpi rigidi): possono essere studiati singolarmente o nel complesso.

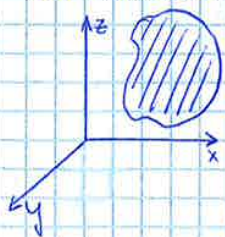


EQUILIBRIO DINAMICO = il sistema modifica istante per istante il suo stato

EQUILIBRIO STATICO = il sistema è in stato di quiete

• Un sistema meccanico può essere approssimato ad un PUNTO MATERIALE: si trascura l'estensione del sistema considerando un solo punto sottoposto alle leggi cinematiche e caratterizzato da GdL: è necessario definire un sistema di riferimento per posizionare l'oggetto.

• Altrimenti un sistema meccanico viene descritto come un CORPO RIGIDO, con una forma ben determinata



↳ CORPO RIGIDO = le distanze relative tra i punti del corpo restano invarianti (campo della meccanica funzionale)

↳ CORPO DEFORMABILE = sotto l'azione di carichi o comportamenti dinamici cambia la sua forma (campo della meccanica strutturale).

Per stabilire la tipologia di corpo devo valutare la configurazione iniziale del corpo indeformato e confrontare con la configurazione finale.

IPOTESI

Nella realtà fisica esistono solo corpi deformabili, alcuni si deformano di più, altri meno: possiamo considerare un corpo più o meno deformabile a seconda degli spostamenti relativi dei punti interni.

Il grado di accuratezza è fortemente legato alla validità delle ipotesi: i sistemi meccanici più diffusi sono deformabili, ma gli spostamenti e le rotazioni dovute alla deformazione sono piccoli rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema.

GRADI DI LIBERTÀ e VINCOLI IDEALI

► SISTEMA MECCANICO (3D): fissato un sistema di riferimento opportuno si possono individuare **6 GdL**, cioè possibili spostamenti e rotazioni rispetto ad esso (es. aereo → 6 GdL; treno → 1 GdL → di più per le sospensioni)

► SISTEMA MECCANICO (2D): si possono individuare massimo **3 GdL**

Per togliere GdL, ovvero impedite spostamenti, posso applicare dei **VINCOLI**, facendo nascere una **REAZIONE VINCOLARE** che equilibra la forza esterna applicata:

- Se vincolo completamente il corpo sono in condizioni **ISOSTATICHE**;
- Se vincolo di più il corpo sono in condizioni **IPERSTATICHE**;
- Se vincolo di meno il corpo sono in condizioni di **LABILITÀ**;

Si dice che un corpo è **STATICAMENTE DETERMINATO** se i vincoli sono **SUFFICIENTI** (cioè tanti quanti i GdL che voglio impedire) ed **EFFICACI**.

Esistono vincoli $\begin{cases} \text{SEMPLICI} = \text{tolgono 1 GdL} \\ \text{COMPOSTI} = \text{tolgono 2 o più GdL} \end{cases}$

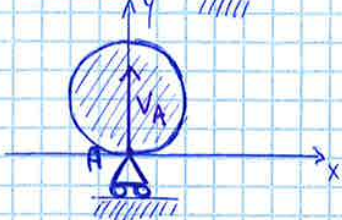
I vincoli ideali hanno le seguenti caratteristiche:

- **NONNO** = impone restrizione alla posizione e non all'atto di moto: è un vincolo geometrico, non per l'equilibrio dinamico;
- **PERFETTO** = impone perfettamente una posizione;
- **BIATERALE** = vincolo in un verso e anche nel suo opposto;
- **PRIVO DI ATRITO** = non nascono forze dissipative;
- **FISSO** = indipendente dal tempo;
- **UNIFORME** = anche la reazione vincolare è uniforme


Definendo un vincolo faccio nascere una reazione vincolare caratterizzato da:

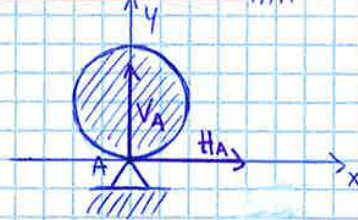
- punto di applicazione e direzione → vedi a priori
- verso e intensità → da determinare

es **CARRELLI**  (1 GdL)



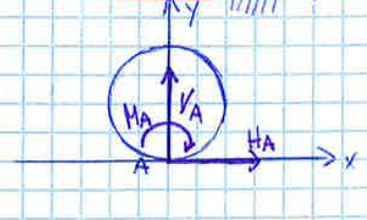
impedisce movimento lungo asse y

GERNIERA FISSA  (2 GdL)



impedisce movimento lungo x e y

INCANTRO  (3 GdL)

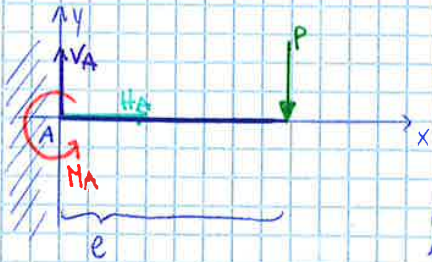


toglie tutti i GdL

BIPENDOLO  (2 GdL)

CASO I : TRAVE INCASTRATA

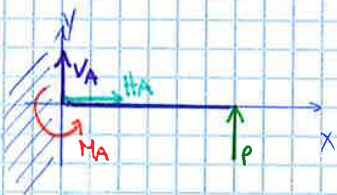
1 CARICO CONCENTRATO VERTICALE



Inizio a disegnarle arbitrariamente le reazioni vincolari nel punto conosciuti ogni assi del sistema di riferimento, poi scrivo le eq. di equilibrio:

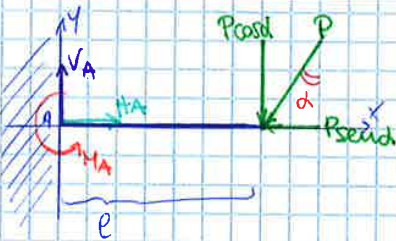
$$\begin{cases} \sum X = 0 & H_A = 0 & H_A = 0 \\ \sum Y = 0 & V_A - P = 0 & \Rightarrow V_A = P \\ \sum M_A = 0 & M_A - P \cdot e = 0 & M_A = P \cdot e \end{cases}$$

Il segno delle reaz. vinc. dipende da come è caricata la struttura, ma nei calcoli posso adottare il metodo di metterle conosciuti ogni assi, determinando il verso corretto a posteriori.



$$\begin{cases} \sum X = 0 & H_A = 0 \\ \sum Y = 0 & V_A + P = 0 \Rightarrow V_A = -P \\ \sum M_A = 0 & M_A + P \cdot e = 0 \Rightarrow M_A = -P \cdot e \end{cases}$$

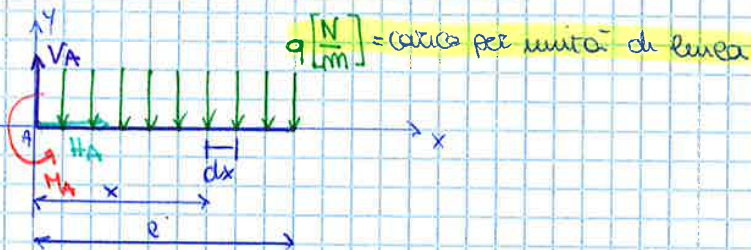
2 CARICO CONCENTRATO OBLIQUO ($P_x = -P \sin \alpha$; $P_y = -P \cos \alpha$)



$$\begin{cases} \sum X = 0 & H_A - P \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = 0 & V_A - P \cos \alpha = 0 \\ \sum M_A = 0 & M_A - P \cdot e \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

(braccio della super componente rispetto al polo A)

3 CARICO DISTRIBUITO UNIFORMEMENTE

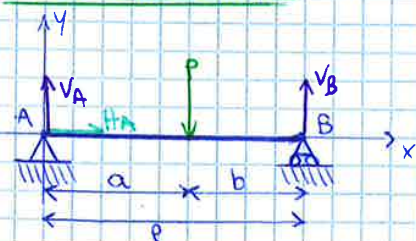


$q \left[\frac{N}{mm} \right] = \text{carico per unità di linea}$

$$\begin{cases} \sum X = 0 & H_A = 0 \\ \sum Y = 0 & V_A - \int_0^l q \cdot dx = 0 \rightarrow V_A - q \int_0^l dx = 0 \rightarrow V_A - q \cdot l = 0 \rightarrow V_A = q \cdot l \\ \sum M_A = 0 & M_A - \int_0^l (q \cdot dx) \cdot x = 0 \rightarrow M_A - q \int_0^l x \cdot dx = 0 \rightarrow M_A = \frac{q \cdot l^2}{2} \end{cases}$$

CASO II : TRAVE APPOGGIATA

1 CARICO CONCENTRATO

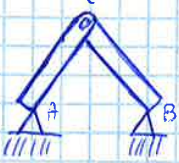


$$\begin{cases} \sum X = 0 & H_A = 0 \\ \sum Y = 0 & V_A + V_B - P = 0 \\ \sum M_A = 0 & -P \cdot a + V_B \cdot l = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + \frac{P \cdot a}{l} - P = 0 \rightarrow V_A = P \left(1 - \frac{a}{l} \right) \\ V_B = \frac{P \cdot a}{l} \end{cases}$$

Esiste una relazione algebrica per definire il GRADO DI IPERSTABILITÀ della struttura, che dipende dal n° di GrL che il corpo ha nel piano + n° di corpi rigidi del sistema + vincoli:

$$G = 3 \cdot n + 2 \cdot ce + 2 \cdot (r-1) \cdot Ci + a - m \cdot n$$

← incastri ← cerniere fisse ← corpi rigidi con Ci ← cerniere interne ← appoggi ← GrL corpo ← corpi rigidi



$$G = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 = 0$$

$G=0 \Rightarrow$ ISOSTATICA: tanti impedimenti quanto i GrL della struttura

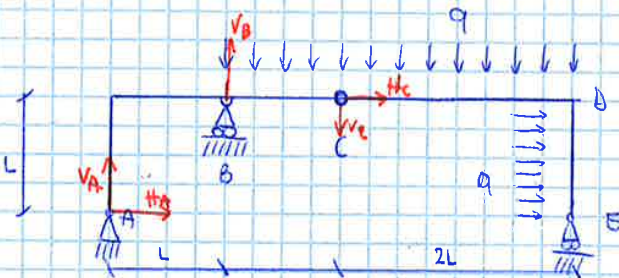
$G < 0 \Rightarrow$ LABILE

$G > 0 \Rightarrow$ IPERSTATICA: cumulativamente ho più impedimenti che gradi di libertà

Il grado di iperstaticità è una condiz. necessaria ma non sufficiente: devo verificare la cinematica relativa del sistema per valutare se i vincoli sono efficaci.

SISTEMI ARTICOLATI

Si risolvono anch'essi andando a scrivere le eq. di equilibrio. Ci serviamo di un esempio



Medesimo piano, trovi a sezione rettilinea con vincoli (4 \rightarrow 3 esterni e 1 interno C)
Carichi esterni distribuiti e costanti su tutta la luce si cui sono posti.

GRADO DI IPERSTABILITÀ

$$G = 3 \cdot n + 2 \cdot ce + 2 \cdot (r-1) \cdot Ci + a - m \cdot n$$

$$G = 0 + 2 + 2 \cdot (2-1) \cdot 1 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

EQ. EQUILIBRIO NEL PIANO (TECNICA DELLA SOTTOSTRUTTURAZIONE)

$\sum X = 0$
 $\sum Y = 0$
 $\sum M_p = 0$

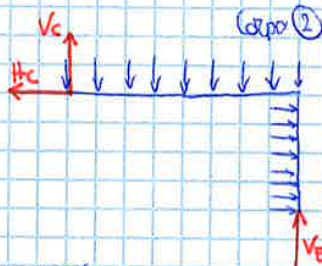
per un corpo monolitico no per ogni corpo isolato abbiamo scritte: per tutti i corpi del sistema ho le 3 eq.

corpo ①



$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

corpo ②

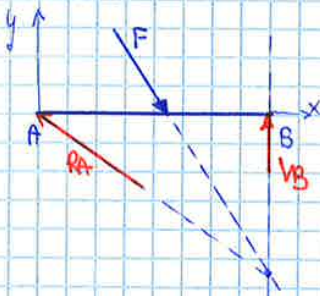


$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Ho 6 equazioni (non conto 2 volte quelle uguali e contrarie).

TRAVATURE RETICOLARI

C'è la possibilità di determinare le reazioni vincolari per via grafica



Triangolo delle forze in base alla determinazione delle reazioni vincolari

Una travatura reticolare può essere di due

tipi = sistema meccanico con dimensioni caratteristiche preponderanti, che può essere caricato in maniera diversa e per questo possiede nomi diversi:

ASTA = carichi applicati ai nodi delle travi, ovvero ai punti di estremità

Strutture composte da elementi caricati solo sui nodi → aste collegate insieme producono strutture reticolari

Nelle strutture reali i carichi vengono applicati nelle interconnessioni delle aste → questo nei nodi, ma questi non sono interconnessioni ideali: noi dobbiamo dimensionare l'oggetto immaginando la peggior situazione possibile.

asta = caricata sui nodi
interconnessione con connettore interno

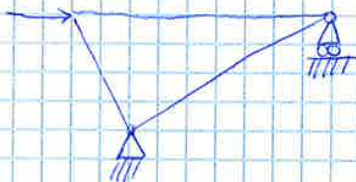
ogni componente di un'asta si comporta, ma volta caricata come

TIRANTE = quando il carico interno è di trazione

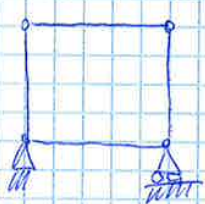
PUNTOLE = carico interno di compressione.

Possiamo calcolare le reazioni vincolari e ciò che succede all'interno della struttura basandoci su un modello fondato su ipotesi che non sempre esprimiamo perfettamente la realtà:

n di incognite: n di sforzi nell'asta + m di qtd complessivo delle strutture meccanico.

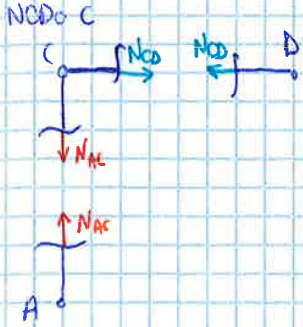


connette sui nodi



Definire aste collegate da connettore interne e caricate sui nodi è una condiz. necessaria ma non sufficiente a garantire l'esistenza di una struttura reticolare (isostatica): devo verificare che tutte le aste siano chiuse da triangoli

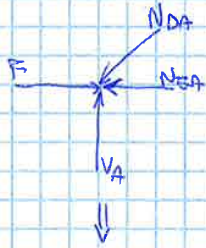
Scrivo la di equilibrio per tutti i nodi: devo "tagliare" le aste facendo nascere forze di azione-reazione.



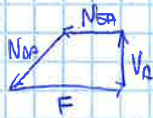
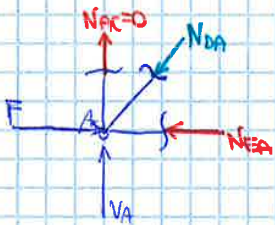
Voglio capire cosa rappresenta avere in ogni punto forze di azione e reazione.

$$\textcircled{C} \begin{cases} N_{CD} = 0 & \Sigma X = 0 \\ N_{AC} = 0 & \Sigma Y = 0 \end{cases} \text{ La zona del nodo C è sciolta}$$

NODO A



$$N_{DA} = -\frac{F}{2}\sqrt{2} \text{ e } N_{CA} = -F/2$$



Ma come mette reaz. vincolari e verso dipende dal mio disegno, in questo caso esiste una regola, a seconda che l'asta si comporti come tirante o puntone...

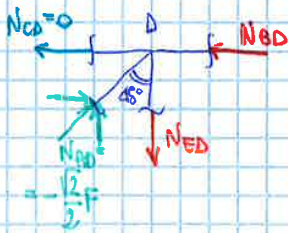
Se ho un tirante sto tirando gli estremi;

se taglio naturalmente l'asta nascono delle reazioni N opposte alle forze di tiro.

Se ho un puntone, lo spingo interno N e' entrante nella struttura.

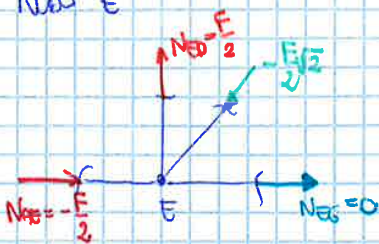
TRAZIONE \rightarrow sforzi interni positivi (verso l'esterno della struttura) } convenzione
COMPRESSIVE \rightarrow sforzi interni negativi (verso l'interno della struttura) }

NODO D



N_{ED} e N_{DD} sono uguali ed opposte alle componenti di N_{DD}

NODO E

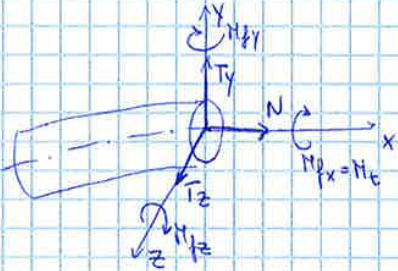


19-03-2014

SPREZZI INTERNI NELE TRAVI e CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Trave in equilibrio: impossibile di decomporre la struttura facendo nascere forze di azione e reazione interna tali per cui il troncone continua a rimanere in equilibrio per effetto dei carichi esterni e delle reazioni vincolari nella zona spezzata.

Devo costruire un metodo per il calcolo degli sprezz interni: definisce un asse di riferimento

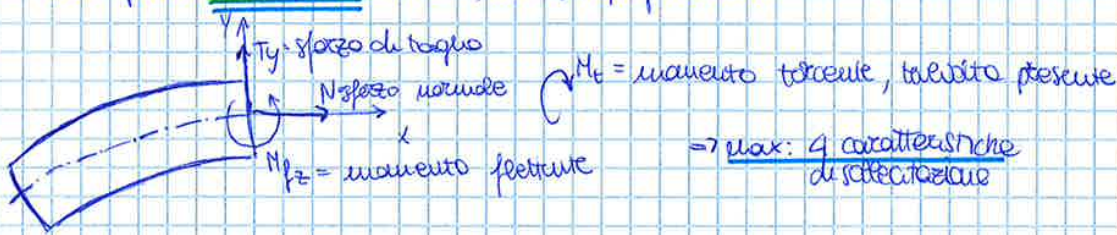


Momenti e forze di reazione interne scomposte rispetto al sistema cartesiano definito. Tali componenti sono colpite

- N = sforzo normale → produce allungamento se di trazione, produce accorciamento se di compressione
- Ty, Tz = sforzi di taglio
- Mpx = Mt = momento torcente
- My, Mz = momenti flettenti

Si hanno quindi al massimo 6 caratteristiche di sollecitazione, esattamente come il Gdl di un solido nello spazio e se n° di eq. di equilibrio.

Se la trave giace nel piano si ha una semplificazione



⇒ max: 4 caratteristiche di sollecitazione

Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione

► uso ripetutamente l'equilibrio:

- calcolo reazioni vincolari
- calcolo le caratteristiche di sollecitazione di una generica sezione S

- sforzo normale N: $\Sigma X = 0$
- sforzo taglio Ty: $\Sigma Y = 0$
- sforzo taglio Tz: $\Sigma Z = 0$
- momento torcente $\Sigma M^k = 0$
- Momento flettente (z): $\Sigma M^z = 0$
- Momento flettente (y): $\Sigma M^y = 0$

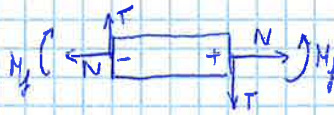
Ho due possibilità: posso tagliare sia il troncone di dx che di sx ⇒ devo ottenere lo stesso risultato.

Nel momento in cui taglio una trave ho due forze: una convenzionalmente positiva, e l'altra negativa

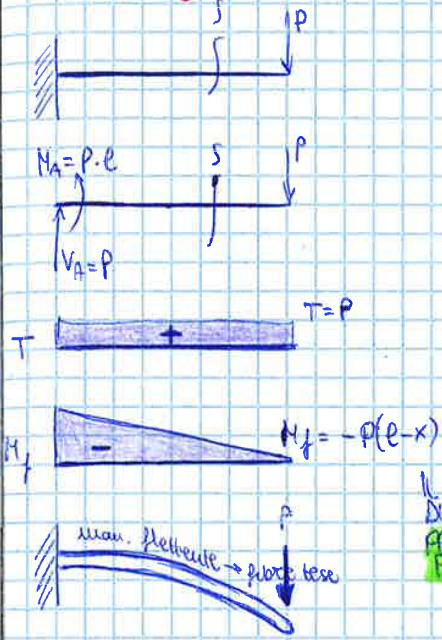


il versi indicati nel disegno sono quelli da considerare positivi per convenzione negli esercizi.

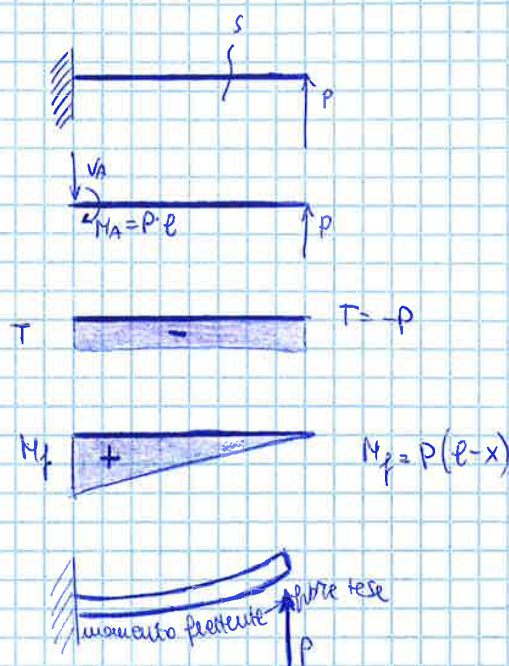
man. flettente negativo → sopra
 man. flettente positivo → sotto



CASO A

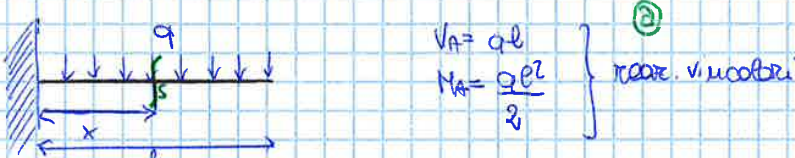


CASO B

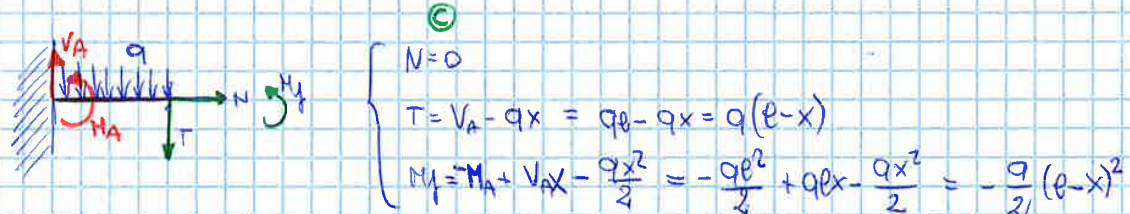


IL MOMENTO VA DERIVATO DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE

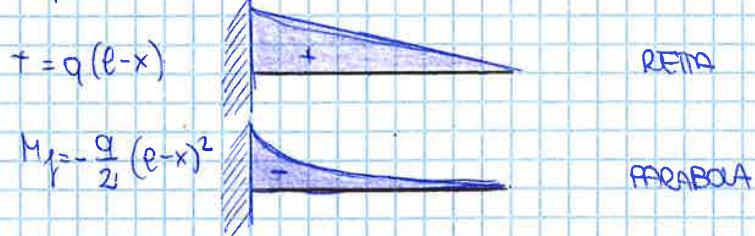
Caso uniformemente distribuito



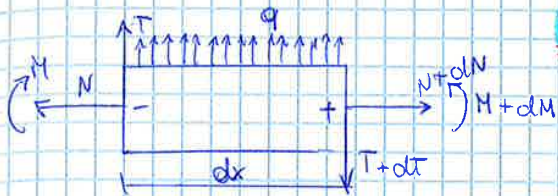
b) Sezione generica con $0 < x < l$



d) Diagrammi:



LEGGI DIFFERENZIALI



Carico distribuito $q \rightarrow$ N è qui in equilibrio perché il carico è verticale

$$T + dT - T - q dx = 0 \rightarrow dT - q dx = 0 \quad \boxed{\frac{dT}{dx} = q}$$

$$M_f + dM_f - M_f - T dx - \frac{q dx^2}{2} = 0$$

l'infinitesimo di ordine superiore \rightarrow lo trascuro

$$dM_f - T dx = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx} = T}$$

derivata momento flettente = taglio

Otengo $\frac{d^2 M_f}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = q \rightarrow$ q ci dice la curvatura del momento flettente

es $M_f = \frac{-q(l-2x+x^2)}{2} \rightarrow \frac{dM_f}{dx} = \frac{-q(-2+2x)}{2} \rightarrow \frac{d^2 M_f}{dx^2} = -q$

derivata 2° negativa \rightarrow concavità verso l'alto, tuttavia essendo l'asse girato al contrario, nel diagramma lo faccio verso il basso

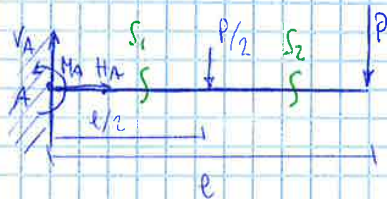
In generale comunque sia lato la funzione e concavità segue la direzione del carico

Caratteristiche di sollecitazione = diagrammi di sforzi di funzioni continue a tratti

- carico concentrato \rightarrow discontinuità nel taglio (diagramma)
- carico distribuito \rightarrow curvatura momento flettente
- connessioni intere \rightarrow il diagramma del momento flettente deve passare per zero (eccetto nel caso in cui non sia coperto nella connessione).

21-03-2014

es

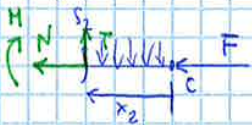


Voluto le caratteristiche di sollecitazione

1. Reazioni vincolari
2. Sforzi e sezioni
3. Equilibrio nelle sezioni
4. Tracciate e diagrammi

$$\begin{cases} \sum X = 0 & H_A = 0 \\ \sum Y = 0 & V_A - P/2 - P = 0 \rightarrow V_A = \frac{3}{2}P \\ \sum M_A = 0 & M_A - P/2 \cdot l/2 - P \cdot l = 0 \rightarrow M_A = \frac{5}{2}Pl \end{cases}$$

S₂ $0 < x < b$



$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

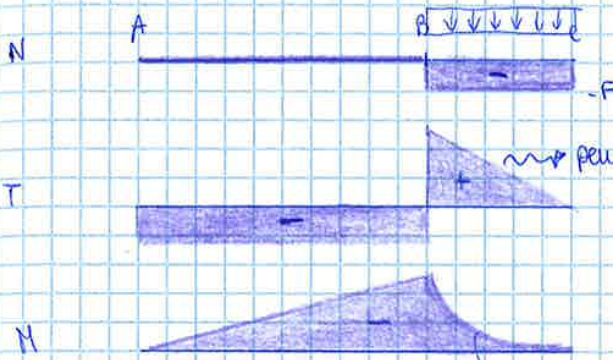
$$N = -F$$

$$T = qx_2$$

$$M = -\frac{qx_2^2}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 & M = 0 \\ x_2 = b & M = -\frac{qb^2}{2} \end{cases}$$

(d) Diagrammi

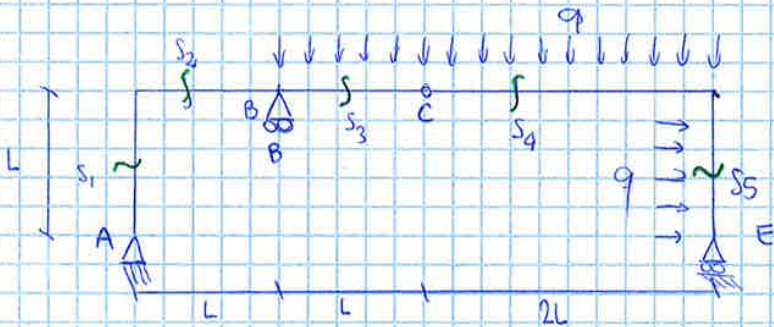


pendente pari a $q = \frac{dT}{dx}$

discontinuità di forza \Rightarrow discontinuità nei diagrammi

concavità negativa perché q è verso il basso (ho ribaltato il diagramma di momento)

es STRUTTURA A PORTALE CON VINCOLI INTERNI



dato sappiamo che

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -q \\ \frac{dM}{dx} = T \\ \frac{d^2M}{dx^2} = -q \end{cases}$$

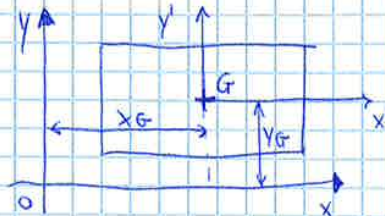
S₁

$$\begin{aligned} N &= V_A \\ T &= H_A \\ M &= H_A \cdot L \end{aligned}$$

S₂ dato cambiare anche la struttura precedente, ma c'è discontinuità quindi cambia la sezione. Le forze e i carichi cambiano comportamento tra colonna e soletta. Per S₂ considera la forza positiva \Rightarrow devo considerare anche gli elementi precedenti

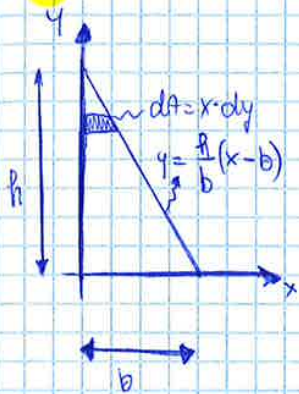
► bisogna determinare le coordinate del baricentro:

$$\begin{cases} x_G = 0 = \left(\int_A x dA \right) \cdot \frac{1}{A} = \frac{S_y}{A} \\ y_G = 0 = \frac{1}{A} \left(\int_A y dA \right) = \frac{S_x}{A} \end{cases}$$



se avessi scelto un SRT di riferimento solidale col baricentro S_y e S_x sarebbero zero. Le posizioni non sono altro che le distanze medie da entrambi gli assi \Rightarrow in quel punto il momento statico sarà comuto per i punti negativi oppure per i positivi (zero)

es. Momento statico di una sezione triangolare

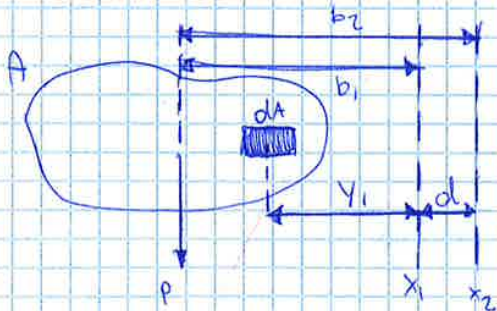


retta del lato
momento statico rispetto all'asse x: $x = b \left(1 - \frac{y}{h} \right)$

$$S_x = \int_A y dA = \int_A x y dy = \int_0^h y \cdot b \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy = \int_0^h b y \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{b h^2}{6}$$

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI STATICI : pag 78

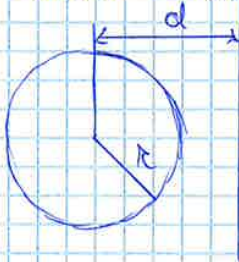
momento statico S_1 rispetto a x_1 , uguale al valore S_2



$$\begin{cases} S_1 = \int_A y_1 dA = A b_1 \\ S_2 = A \cdot b_2 = A(b_1 + d) = b_1 A + d \cdot A = S_1 + d \cdot A \end{cases}$$

Se uno dei due assi è baricentrico il corrispondente S momento statico va a zero.

es. Sezione circolare

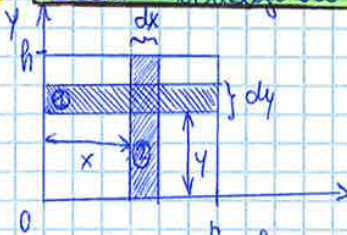


$$\begin{aligned} S_2 &= A \cdot d_G \quad \text{perché } S_1 = 0 \\ S_2 &= \pi R^2 d \end{aligned}$$

NON INERZIA DI ALTRA POLARE

$$I_p = \int_A x^2 dA$$

es. Sezione rettangolare piana

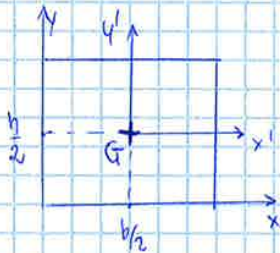


$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \right\} \text{ integrali doppi}$$

① $I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot b dy = \frac{bh^3}{3}$

② $I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 \cdot dx \cdot h = \frac{hb^3}{3}$

Ora voglio calcolare il momento d'inerzia baricentrico = fisso un sist di riferimento

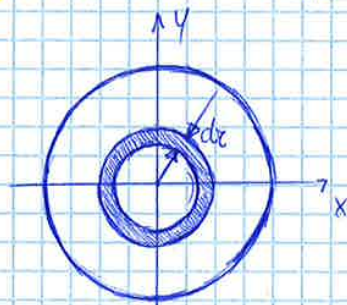


Cambiamo gli estremi di integrazione rispetto a prima!

① $I_{x_0} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$

② $I_{y_0} = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12}$

es. Sezione circolare piana

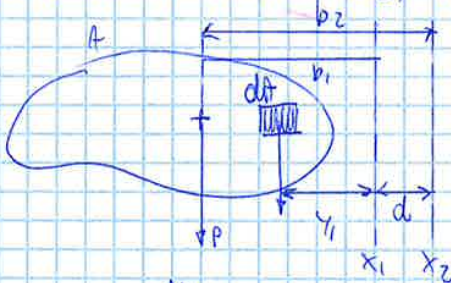


$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 (2\pi r dr) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$I_x = I_y = \frac{I_p}{2}$ per assai simmetrie

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEL MOMENTO D'INERZIA

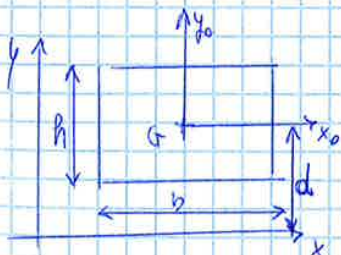
Nota man. d'inerzia I_1 , voglio calcolare I_2 rispetto a x_2



$$\begin{aligned} I_2 &= \int_A x_2^2 dA = \int_A (x_1 + d)^2 dA = \int_A (x_1^2 + d^2 + 2x_1 d) dA = \\ &= I_1 + d^2 A + 2S_1 d = I_2 \end{aligned}$$

→ Se x_1 è baricentrico $S_1 d = 0$ perché $S_1 = 0$, perciò $I_2 = I_1 + Ad^2$

es



$I_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y_0} = \frac{hb^3}{12}$ con $b=10$ $h=12$ $d=20$

$I_x = I_{x_0} + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot d^2 = \frac{bh^3}{12} + 120 \cdot 20^2$

In questo modo posso ottenere il sistema di riferimento principale \Rightarrow importante per progettare la posizione di un oggetto per far sì che operi al massimo momento possibile.

Rispetto ad assi principali il momento centrifugo è sempre nullo.

es) Riprendendo i dati proposti nell'es precedente voglio trovare gli assi principali di inerzia:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-10875)}{30562,5 - 16250} = 36,99^\circ \Rightarrow \text{rotazione positiva in senso orario}$$

angolo per cui ottengo, dopo la rotazione, gli assi principali di inerzia per cui

09-09-2014

SOLICITAZIONI SEMPLICI

1. sforzo normale

Sollecitazione \rightarrow trazione
 \rightarrow compressione
 sulle superficie di taglio.

Definisco σ_{xx} TENSIONE UNITARIA
 \rightarrow direzione delle trazioni
 normale rispetto quale sezione

$$\Rightarrow N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad \text{equivale a } N \text{ e' cumulativamente la somma di tutti i contributi puntuali.}$$

Nei casi di trave pura con struttura a sezione costante avrò $\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$ perché non ho alcuna discontinuità.

$$[\sigma] = \left[\frac{N}{mm^2} \right] = MPa$$

Considerazioni valide se $\left\{ \begin{array}{l} \text{non ho variaz di sezione} \\ \text{non ho carichi applicati} \end{array} \right.$

COMPORTAMENTO MECCANICO NELLE STRUTTURE

Forze, momenti

Spostamenti, rotazioni

Carichi di sollecitazione

Riformazione E

Tensioni unitarie (nei punti della struttura) σ

Una trave sottoposta a trazione P avrò un allungamento assoluto Δl proporzionale al carico applicato, posso introdurre ALLUNGAMENTO RELATIVO $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$, rapporto tra variazione Δl e lunghezza di partenza l .

LEGE DI HOOKE

Regime lo il comportamento elastico dei materiali: legge di allungamento di una molla: $F = kx$

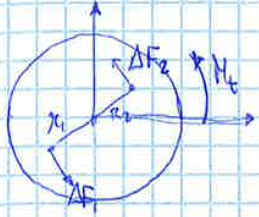
Puntualmente, ad ogni punto del materiale corrisponde una sollecitazione. La grandezza

E' il MODULO ELASTICO DEL MATERIALE o MODULO DI YOUNG.

Per tutti i punti della sezione deve essere nel complesso deve essere l'equivalente

$$\Delta F_1 \cdot x_1 + \Delta F_2 \cdot x_2 + \dots + \Delta F_m \cdot x_m = M_t$$

$$\Delta F_i = \tau_i \cdot \Delta A_i \Rightarrow \tau_i = \frac{\Delta F_i}{\Delta A_i} \quad A_i \rightarrow 0 \quad \text{integrale e non sommatoria}$$



$$M_t = \int_A x \cdot \tau \, dA$$

Tensione puntuale su infiniti punti della struttura

τ non è costante, il risultato varia da punto a punto.

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_i = x_i \cdot \frac{\theta}{\rho} \\ \tau = G \cdot \gamma \end{array} \right\} \tau = G x \frac{\theta}{\rho} \Rightarrow M_t = \int_A x \cdot G x \frac{\theta}{\rho} \, dA = G \frac{\theta}{\rho} \int_A x^2 \, dA = \frac{G \theta}{\rho} J_p$$

momento d'inerzia polare J_p

Legame tra momento torcente e rotazione \Rightarrow rigidità torsionale di una sezione circolare

Angolo di torsione: $\theta = \frac{M_t \rho}{G J_p} \rightarrow$ sostituendo ottengo $\tau = \frac{M_t x}{J_p}$

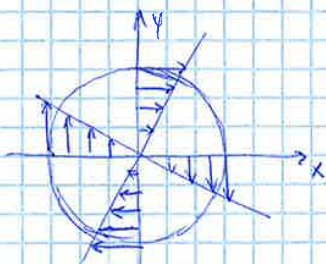
τ è sempre massima alle circonf. esterne della struttura.

Esistono diversi tipi di materiali, caratteristiche diverse e dunque E diversi.

ACCIAIO: lega Fe-C $E = 210.000 \text{ MPa}$

ALUMINIO $E = 70000 \text{ MPa}$

es. Barra di torsione a sez. circolare piena di diametro $d = 30 \text{ mm}$: applico un momento torcente $M_t = 100 \text{ Nm}$. Tensione tangenziale unitaria τ maggiore per alluminio o acciaio? È UGUALE perché τ dipende dal momento torcente e dalla geometria!!!!!!



Rappresentaz. grafica di τ_{M_t} su una sezione circolare. Nelle verifiche sperimentali avviene τ nella parte esterna, punto in cui ho la sollecitazione massima.

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot d}{2 J_p} \quad \text{potrebbe essere la responsabile della rottura della struttura}$$

Definiamo il modulo di resistenza torsionale $W_t = \frac{J_p}{\frac{d}{2}}$

Per una sezione circolare piena: $W_t = \frac{\pi}{16} d^3$

Per una sezione circolare cavo: $W_t = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$

Anche in questo caso esiste un fattore di deformazione torsionale $L = \frac{1}{2} M_t \theta$

Determinare il diagramma σ - ϵ :

• MODULO ELASTICO E

• TENSIONE DI SNERVAMENTO σ_s : oltre ad essa il materiale passa dal comportamento elastico a quello plastico: è necessario valutare il parametro per non pregiudicare il funzionamento dell'oggetto \rightarrow sanno anche valutare dalla rottura che avviene dopo lo snervamento.

• TENSIONE DI ROTTURA σ_R

① A_R allungamento a rottura.

Nello prova si hanno diverse fasi, solitamente si divide in 4 zone

- ① zona di allungamento evidente (legge di Hooke)
- ② zona di ^{evidente} snervamento: deformazione evidente con leggero aumento del carico
- ③ zona di incrudimento: deformazione plastica (irreversibile), fino al punto massimo
- ④ zona di snervamento locale: alla fine di questa zona trova il punto di rottura.

Materiali con zona plastica molto estesa sono definiti materiali duttili, quindi non è una risposta sempre negativa.

La zona 2 non è presente in tutti i materiali.

Se non è presente posso usare convenzionalmente una deformazione residua pari allo 0,2%, oltre a questo punto si considera l'inizio della zona ~~elastica~~ plastica.

Stessa prova \rightarrow posso determinare sia σ e τ

MATERIALI TEMPORARIAMENTE FRAGILI



allungamento a rottura $< 5\%$

TEMPORARIAMENTE DUTILI



$\Delta \epsilon > 5\%$

11-01-2014

es. Trave con lunghezza $l = 200$ mm, sezione quadrata $20 \cdot 20$ mm, applico carico di trazione $P = 20000$ N. Calcolo allungamento assoluto in caso di trave in

- acciaio $E = 21000$

- alluminio.

Le molecole sono a stessa σ

verifico in quale caso avviene lo snervamento

acciaio \rightarrow non inizia lo snervamento

alluminio \rightarrow

ⓑ $\sigma_N = \frac{N}{A}$ $\sigma_F = 0$ $\tau = \frac{M_T}{J_P} \cdot \frac{d}{2}$

Ⓒ $\sigma_N = \frac{N}{A}$ $\sigma_F = \left(\frac{M_f}{J_z} \cdot \frac{d}{2} \right)$ variazione $\tau = \frac{M_T}{J_P} \cdot \frac{d}{2}$

se ho un taglio $T = 10000 \text{ N}$, calcolo $\tau_{\text{taglio}} \approx 60 \text{ MPa}$

ha il valore max in corrispondenza del baricentro in cui ho valore nullo di momento flettente. Dare una proporzione (con sia scalo delle strutture) e τ_{taglio} non compare, perché nei calcoli effettivi viene moltiplicato

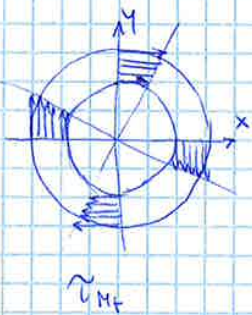
30-01-2014

$\sigma_N = \frac{N}{A} = 72 \text{ MPa}$

$\tau_{M_T} = \frac{M_T}{J_P} r = 24 \text{ MPa}$

$\sigma_F = \frac{M_f}{I_x} y \rightarrow \sigma_{F_{\text{max}}} = 73 \text{ MPa}$

$\tau_T = \frac{T S_x}{I_x b}$



$\sigma_{zz} = \sigma_N + \sigma_F = 145 \text{ MPa}$

$\tau_{zx} = \tau_{M_T \text{ max}} = 24 \text{ MPa}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yx} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 145 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma_p & 0 & 24 \\ 0 & -\sigma_p & 0 \\ 24 & 0 & 145 - \sigma_p \end{bmatrix} = 0$$

→ equ di terzo grado con 3 soluzioni

$$\begin{cases} \sigma_p = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_p^2 - 145 \sigma_p - 24^2 = 0 \end{cases}$$

→ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 149 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= \end{aligned}$$

Tensore del punto maggiormente sollecitato descritto rispetto al nuovo sistema di riferimento
Si possono calcolare gli invarianti

$$\begin{bmatrix} 149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Progettazione $\sigma_m \neq 0$ S? (in sicurezza)

È possibile come rapporto di sequenti

L'ipotesi che abbiamo fare per b.

diversamente, è molto più complessa

1° caso σ_a variabile σ_m cost

2° caso σ_a variabile σ_m variabile

1° caso

indeterminazione di tensione alternate

$S = \frac{\sigma_a'}{\sigma_a}$ → dentro del punto se disprezzata per il punto
risparmiando a

Es

$F = 10000 \text{ N}$ $d = 30 \text{ mm}$

$N = 10000 \text{ N}$

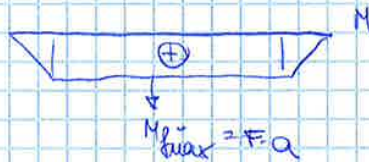
$\sigma_m \Rightarrow N$

$\sigma_a \Rightarrow M_f$

$\sigma_p = 510 \text{ MPa}$ $\sigma_s = 450 \text{ MPa}$ $\sigma_D = 250 \text{ MPa}$



• Reazie vincolari



$\sigma_m = \frac{N}{A}$ $\sigma_a^{max} = \frac{32 M_f}{\pi D^3}$

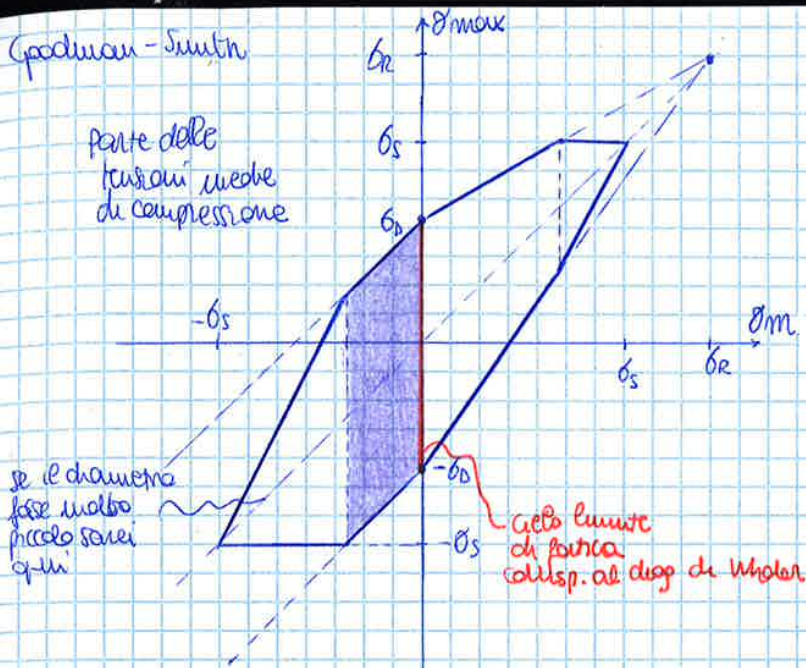
$\sigma_N = 14 \text{ MPa} = \frac{N}{A}$

$\sigma_t = \frac{M_f}{\frac{\pi D^3}{32}} \cdot \frac{D}{2} = 188,6 \text{ MPa}$

Ho individuato il tipo di sollecitazione: sforzo e diagramma di Hoop, qualcosa di nuovo tra curve di Goodman e limite di snervamento:

$\sigma'_m = \frac{\sigma_s - \sigma_D}{1 - \frac{\sigma_D}{\sigma_p}} = 372 \text{ MPa}$

Goodman - Smith



Non posso mettere subito il punto di progetto, devo progettare il diametro in funzione di questo punto di progetto

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{A} = \frac{4 \cdot 20000}{\pi d^2} \quad \text{trazione}$$

$$\sigma_{min} = \frac{P_{min}}{A} = -\frac{4 \cdot 50000}{\pi d^2} \quad \text{compressione}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{4 \cdot 35000}{\pi d^2} \quad \text{trazione}$$

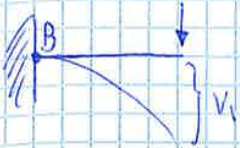
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = -\frac{4 \cdot 15000}{\pi d^2} \quad \text{compressione} \Rightarrow I^o - II^o \text{ quadrante.}$$

Seo nella zona evidenziata: eq di progetto $\sigma_{max} - \sigma_m \leq \frac{\sigma_N}{S}$

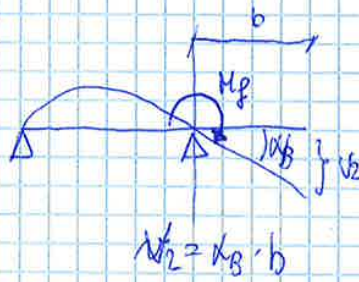
$$\sigma_{max} = (\sigma_m + \sigma_a) \leq \frac{\sigma_N}{S} + \sigma_m \Rightarrow \sigma_a \leq \frac{\sigma_N}{S} \Rightarrow \frac{4 \cdot 35000}{\pi d^2} \leq \frac{250}{2} \Rightarrow d \geq 18,8 \text{ mm}$$

$\sigma_m = 48 \text{ MPa} \Rightarrow$ ipotesi corretta dello zero evidenziato

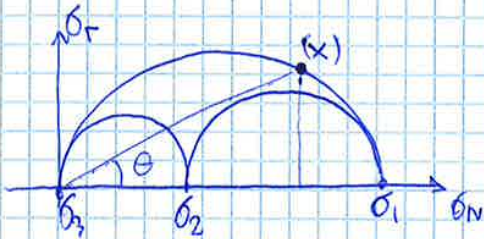
Sovrapp. effetti $V_{TOT} = V_1 + V_2$



incastro in B
in b ho $M_f = F \cdot b$



ORIENTAZ. SISTEMI REF. PRINCIPALI

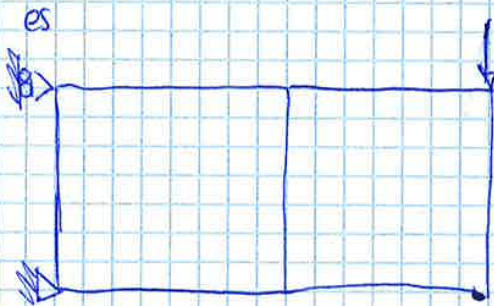


$$[D] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Note una tensione principale $\rightarrow \cos^2 \theta =$

Abrasioni

$$[[\sigma] \sigma_N] [m] = \sigma$$



$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

nel calcolo al metodo dei nodi uso F_0

Per prendo la trave maggiormente sollecitata

(anche se e' di compressione perché per lavoro C)

Se $F(t) = F_0 + F_1 \sin(\omega t) \rightarrow$ divido il problema $\rightarrow F_0$
 $\rightarrow F_1$

2) struttura è in equilibrio ed è staticamente determinata se esistono sei vincoli semplici nello spazio e tre nel piano. Se i vincoli sono insufficienti (caso di meno) o sono inefficienti (caso di più) la struttura è labile, se sono in sovrannumero è staticamente indeterminata. È possibile studiare e calcolare le reazioni vincolari sfruttando le equazioni di equilibrio (allo traslazione e alla rotazione del corpo) sei nello spazio e 3 nel piano:

$$2) \begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Una struttura ipostatica è anche staticamente determinata, iperstatica è staticamente indet. (perché esistono più incognite che equazioni, il sistema non è risolvibile), altrimenti è labile. Le reazioni vincolari sono sempre incognite e si collegano in funzione dei carichi esterni (ma sono costanti ma dipende a seconda del carico).

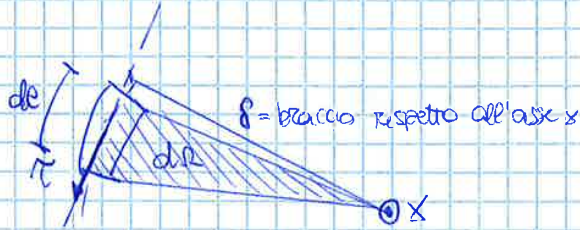
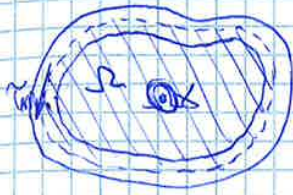
3) Tip di Travi reticolari e definizione di asta.

Un'asta è un membro di trave collegata al resto della struttura mediante cerniere interne (che si ipotizzano perfette, ideali) dette nodi e caricata solo sui nodi stessi. In base a questo modello un'asta può trasmettere carichi soltanto lungo l'asse dell'asta. Un sistema di aste così definite collegate tra loro da cerniere col una trave reticolare. In base alle ipotesi, in una struttura di questo tipo le aste caricano ai nodi senza eccentricità. Nella realtà, tuttavia, le cerniere interne non sono ideali e i carichi non sono concentrati sempre solo sui nodi, ma in prima approssimazione le travi reticolari sono un modello molto utile. Una tr. è ipostatica se il numero di incognite, $(m+3)$, ovvero gli spazi interni alle m aste e le reazioni vincolari, è pari a $3c$, (dove c è il numero di nodi). (Triang. con lati adiacenti!)

4) Prova di Trazione per materiali metallici + 5) Param. caratteristico del materiale

Per determinare il comportamento meccanico di un materiale è necessario effettuare delle prove sperimentali su provini, sottoponendoli questi ultimi a trazione o compressione per ricavare i parametri caratteristici del materiale. Solitamente si sfruttano macchine di prova di tipo idraulico o elettromeccanica, le prove vengono effettuate seguendo specifiche normative che dettano la tipologia di provino (cambia a seconda che la prova sia di trazione o compressione) e la velocità di variazione nell'applicazione del carico (dipende dall'elasticità del materiale, e sempre molto bassa). Durante la prova vengono misurati il carico applicato o l'allungamento del provino, da questi si ricavano le tensioni $\sigma = \frac{P}{A}$ e le deformazioni $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$.

Questa ipotesi, nota come ipotesi di Breda, è applicabile ad una sezione di qualsiasi forma, purché abbia parete sottile.



Ω = area poligona racchiusa dalla linea mediana della sezione a parete sottile.

Suppongo di analizzare una parte della sezione, di lunghezza dl e spessore s ; la forza applicata su di essa vale $dF = \tau \cdot dA = \tau \cdot s \cdot dl$, il momento infinitesimo rispetto all'asse della trave x è $dM = \tau \cdot dA \cdot r = \tau \cdot s \cdot dl \cdot r = 2\tau s \, d\Omega$ con $d\Omega = \frac{dl \cdot s}{2}$ area del triangolo evidenziato.

Il contributo dei mom. infinitesimi alla sezione deve dare il momento torcente M : integrando sommo tutti i contributi delle aree $d\Omega$, che non si sovrappongono e danno l'area delimitata dalla linea mediana della sezione a parete sottile:

$$M = \int dM = \int 2\tau s \, d\Omega = 2\tau s \int d\Omega = 2\tau s \Omega$$

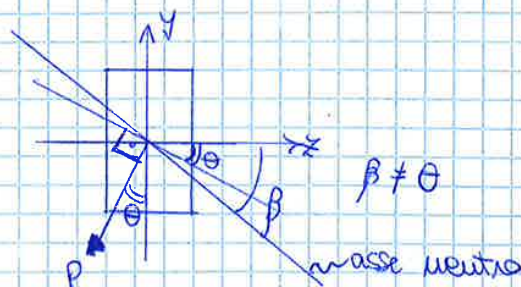
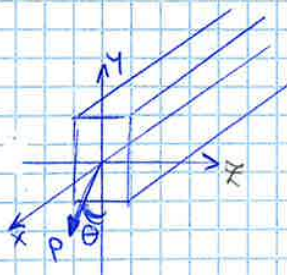
La caratteristica di sollecitazione vale quindi $\tau = \frac{M}{2s\Omega}$

Con un ragionamento analogo si ottiene l'angolo di torsione unitario:

$$\Theta_u = \frac{M_t}{AG\Omega^2} \sum \frac{e_i}{s_i} \quad \vee \quad \Theta_u = \frac{M_t}{AG\Omega^2} \frac{l}{s} \quad \text{rispettivamente per sezioni a spessore discontinuo o spessore costante.}$$

Flessione deviata. In quale tipologia di sez. l'asse neutro è l all'asse di sollecitazione?

Si parla di flessione deviata quando il vettore momento flettente non è allineato con uno degli assi principali della sezione, l'asse di sollecitazione (individuato dalla direzione del carico che mom. flettente) non è perpendicolare all'asse neutro.



Nel caso considerato il vettore momento flettente è inclinato di θ rispetto all'asse y ; rispettando le convenzioni di segno delle caratteristiche di sollecitazione, la componente $M_x = -P \cos \theta \cdot x$ del momento flettente è negativa perché tende a liberare dalla parte delle y positive, mentre $M_y = P \sin \theta \cdot x$ è positiva perché

allo coordinato lineare dx ($ds = \frac{dx}{\cos\theta} \approx dx$ perché $\cos\theta \approx 1$), e $\tan\theta \approx \theta$ perché l'angolo θ è molto piccolo, dunque $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{R} = \frac{N(x)}{EJ}$.

In queste condizioni è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti analizzando separatamente le condizioni di carico sulla struttura per poi sommare algebricamente i risultati delle forze ottenute. Le strutture complesse possono dunque essere scomposte in una serie di casi elementari, la somma dei loro contributi dà la forza totale.

11) Trave singola composta a parità di cond. di carico, vincoli e lunghezza, da cosa dipende la linea elastica?

La linea elastica è definita come il polinomio che si ottiene dalla doppia integrazione della seguente relazione: $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{N(x)}{EJ}$.

Essa dunque dipende dalle tratti di sez. $N(x)$ che è legata alle condizioni di carico e di vincolo, ma anche dalle quantità (EJ) definite RIGIDEZZA FLESSIONALE della Trave. Essa dipende dal materiale (per la presenza del modulo elastico o di Young E) e dal momento d'inerzia J . Si evince che se la trave considerata ha sez. costante allora la rigidità non dipenderà dallo scostamento x rispetto all'origine del sistema di riferimento, mentre se la sezione è variabile, con essa varierà anche J , quindi la rigidità, ed EJ dovrà essere compreso nella doppia integrazione in dx per il calcolo della linea elastica.

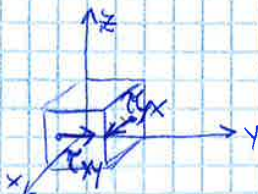
12) Simmetria del tensore delle tensioni.

Il tensore delle tensioni $[\sigma]$ rappresenta la tensione $\{t\}$ presente in un determinato punto P di un continuo, in base alla relazione $\{t\} = [\sigma] \{n\}$. Per conoscere lo stato di tensione in un punto dunque è sufficiente conoscere lo stato di tensione su tre superfici ortogonali passanti per il punto P , grazie al tensore $[\sigma]$ così definito:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Esse 9 componenti del tensore delle tensioni, in base al teorema di reciprocità di BIAOTTA, soltanto 6 sono indipendenti (tre σ e tre τ): le τ tangenziali sono sempre uguali a due a due. Considerando il seguente tensore

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Scriviamo l'equilibrio alla traslazione lungo x:

$$\left(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy + \left(-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx + \rho_x dx dy = 0$$

Estendendo al caso tridimensionale è sufficiente aggiungere il contributo di σ_z e ricordare che le tensioni, per diverse facce, devono essere moltiplicate per l'area:

$$\left(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(-\sigma_{zx} + \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy + \rho_x dx dy dz = 0$$

Semplificando opportunamente si ottiene l'eq. indefinita di equilibrio alla traslazione lungo x:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho_x = 0$$

Lo stesso vale per le direzioni y e z, che si ottengono procedendo come sopra:

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \rho_z = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho_y = 0$$

15) Tensore delle tensioni nello stato di tensione piana.

Esistono casi per cui il tensore delle tensioni che definisce lo stato di tensione in un punto P si semplifica notevolmente. Esso è formato generalmente da 9 componenti ed in base al principio di reciprocità soltanto 6 sono indipendenti (matrice simmetrica): nel caso di tensione piana almeno una delle

6 sia diagonale principale è nulla, e con essa le τ tangenziali corrispondenti. Ad esempio nelle piastre inflesse solitamente $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

In questi casi il calcolo delle tensioni principali è molto agevole per via grafica, essendo qui nota una delle tensioni principali (0).

Si ottiene un tensore di questo tipo:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

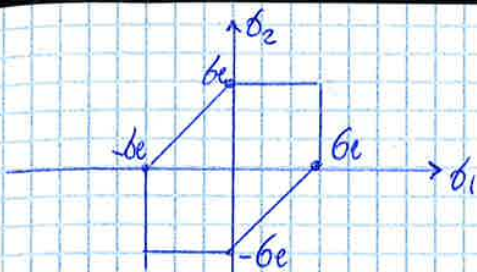
16) Tensore delle deformazioni in stato di deformazione piana.

Lo stato di deformazione piana prevede che una delle 3 E sia diagonale principale del tensore delle deformazioni sia nulla, e con essa le γ corrispondenti. Apprendendo $\epsilon_z = 0$ si avrà anche $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ottenendo il seguente tensore:

$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ noto per metà.}$$

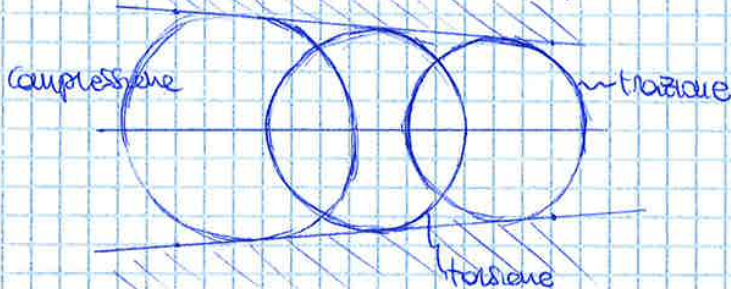
Sfruttando le equazioni tensione-deformazioni e tensioni-spostamenti dato dalla legge di Hooke posso scrivere $\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ e

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{xz} = G \gamma_{zx} = 0$$



È il criterio più conservativo.

- Il criterio di Mohr è un'evoluzione del crit. della tens. tang. max e afferma che il cedimento in un componente avviene se il più grande dei cerchi di Mohr è tangente o oltrepassa la retta di inviluppo dei cerchi corrispondenti alle pare di trazione, torsione e compressione di quel materiale.



È utilizzato per i materiali duttili, ma può anche essere sfruttato per i materiali fragili per i quali le tensioni limite di compressione superano sensibilmente quella di trazione.

19) Von Mises (con dimostrazione)

Il criterio di Von Mises è utilizzato per i materiali duttili ed è un miglioramento del criterio dell'energia di deformazione. Afferma infatti che il cedimento nel componente avviene a causa del tensore deviatorico o di distorsione, quello uno solo dei due tensori in cui può essere scomposto il tensore delle tensioni.

$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]$, il tensore sferico o idrostatico non influisce sul cedimento.

Il modulo del criterio di Von Mises viene ricavato sfruttando il concetto di energia di distorsione (calcolata come differenza fra energia di deformazione ed energia volumica). Afferma che il cedimento avviene per effetto dell'energia di distorsione $U_D = U_T - U_V$ con

$$U_T = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3))$$

$$U_V = \frac{\sigma_m}{2} + \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{6} + \frac{V_f - V_0}{V_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{6} + (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

$$U_T - U_V = dx dy dz + \epsilon_1 dx dy dz + \epsilon_2 dx dy dz + \epsilon_3 dx dy dz - dx dy dz = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) dx dy dz$$

(dove ϵ_i sono le deformazioni date da $\epsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)]$ per la legge di Hooke)

Sviluppando i calcoli si ottiene $U_T - U_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$

Il caso di tensione monoassiale prevede invece $U_T = \frac{\sigma_e^2}{2E}$ e $U_V = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_e^2$

21) **Criterio di Tresca e travi**

$$\sigma_{td} = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} \geq \sigma_s \Rightarrow \text{cedimento}$$

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad \tau_2 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \quad \tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad \sigma_c = \frac{\sigma_s}{2}$$

La tensione tang. max. deve essere inferiore alla tensione limite.

Nelle travi al più una tensione principale $\sigma \neq 0 \Rightarrow$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{In questo caso una delle tensioni principali è sempre } \neq 0 \text{ e le altre due si ricavano } \sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \pm \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2})$$

Sostituendo queste tensioni principali nelle relazioni del criterio di Tresca si ottiene che per una trave si ha cedimento se

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > \frac{\sigma_s}{S} \quad \text{con } S \text{ coeff. di sicurezza.}$$

22) **Diagrammi di Wohler**

I diagrammi di Wohler sono sostanzialmente il risultato delle prove sperimentali a fatica di un determinato materiale: presentano in ascisse le numero di cicli N (che può essere espresso in notazione decimale o esponenziale) e in ordinate la tensione alternata σ_a . Dal diagramma di Wohler si ricava il n° di cicli che il materiale è in grado di sopportare se sottoposto ad una determinata σ_a con $\sigma_m = 0$. Se N è rappresentato in sola decimale il diagramma presenta, tra $N=0$ (comportamento statico corrispondente a σ_R) e $N=10^3$ la cosiddetta **zona di fatica**, fatica in campo elastico. I provini che sopravvivono oltre un certo numero di cicli ($\approx 10^6$) si considerano come possibile durata infinita se sottoposti ad una determinata tensione alternata detta **TENSIONE LIMITE DI FATICA** σ_D . È utile progettare un componente a vita infinita e necessario inserire σ_D nell'eq. di progetto.

Se le coordinate di N è esponenziale invece la curva parte da $N=10^3$ (è marcata la fatica di fatica) ed è rappresentata con linee spezzate.

La legge che interpola la curva esponenziale è $\sigma_N = A(N)^b$ con

• σ_N = tensione alternata corrispondente ad N cicli

• $A = \frac{(\sigma_{1000})^2}{\sigma_D}$ e $b = -\frac{1}{3} \log_{10} \left(\frac{\sigma_{1000}}{\sigma_D} \right)$

• σ_{1000} = tensione alternata limite per $N=1000$

• σ_D = tensione limite di fatica



condizione di carico ed $N_k = n_k^0$ di cicli che il componente era in grado di sopportare in base al dop di Wohler & sottoposto a quella condizione di carico fino al collasso. La teoria di Miner prevede cedimento se

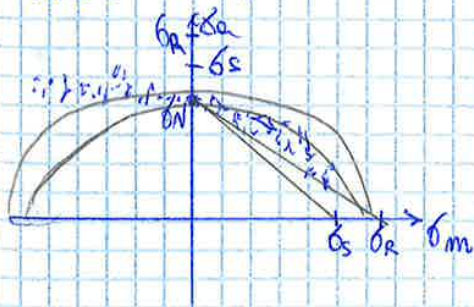
$$\sum_k D_k = \sum_k \frac{m_k}{N_k} \geq 1$$

Si è visto che in realtà il cedimento si verifica, in molti casi, per valori compresi tra 0,6 e 1,6, non solo se si supera l'unità: questo è dovuto al fatto che i tipi di impalli D_k a cui la struttura è sottoposta hanno ampiezze diverse e probano quindi danni diversi \Rightarrow il cedimento è influenzato anche dall'ordine di applicazione del carico

25) **Effetto della tensione media nelle prove di fatica**

Nella realtà è impossibile che un componente sia sottoposto esattamente ad un ciclo di sollecitazione sinusoidale ($\sigma_m = 0$), ecco perché le prove di fatica analizzano anche l'effetto della tensione media di trazione e di compressione. Si osserva sperimentalmente che sottoponendo i provini a fatica con una tensione media di trazione, la tensione alternata che il materiale è in grado di tollerare diminuisce all'aumentare del valore di σ_m . Al contrario se la tensione media è di compressione non si osservano sostanziali variazioni della tensione alternata applicabile rispetto al caso in cui $\sigma_m = 0$ il più quindi dire che le σ_m di trazione sono dannose per il comportamento a fatica, mentre le $\sigma_m < 0$ sono in un certo senso "favorevoli".

I risultati delle prove sperimentali possono essere riportati in diagrammi con in ascissa la σ_m e in ordinata la σ_a .



I risultati sperimentali sono molto dispersi, sono state proposte perciò delle relazioni matematiche per interpolare:

- relazione di Goodman $\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$ (più usata, passa per σ_N e σ_R)

- Soderberg $\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_S} = 1$ (più restrittive, trascura dei dati)

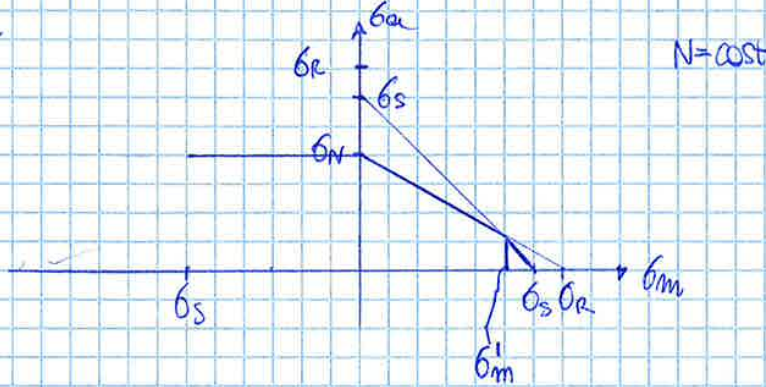
- parabola $\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$

- ellittica $\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$

La prima retta è definita dall'eq di Goodman $\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$, ed interseca le

retta a 45° nel punto $\sigma_m = \frac{\sigma_s \cdot d_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}}$

Per le σ_m negative si suppone che la σ_a rimanga invariata e si traccia una retta parallela all'asse delle ascisse, anch'essa limitata dalla tensione di snervamento.



28) Parametro da cui dipende k_t per travi cilindriche a sez. piena con intaglio. Il fattore di concentrazione delle tensioni k_t dipende dalle caratteristiche geometriche della trave, in particolare dal rapporto $\frac{D}{d}$ dove D = diametro sezione di quota, d = diametro sezione intagliata, nonché dal rapporto $\frac{r}{d}$ dove r è il raggio dell'intaglio. Inoltre k_t dipende dal tipo di carico a cui è sottoposta la trave. Questi sono i parametri da individuare nei diagrammi di k_t disponibili in vari manuali: k_t non dipende dunque dal materiale ma solo dalle caract. geom e dal carico applicato.

29) Confronto diag. di Wohler con e senza intaglio.

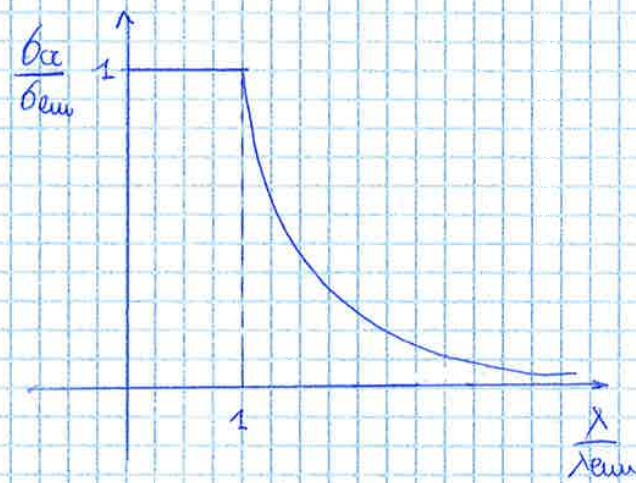
Il diagramma di Wohler descrive il comportamento a fatica del materiale, ma le sue caratteristiche cambiano se il componente è soggetto ad intaglio. Il fattore di concentrazione delle tensioni in campo ciclico k_f , non solo dipende dalle caratteristiche geometriche e di carico (come il k_t) ma anche dalle tipologie di materiale e dal numero di cicli a cui è sottoposto il materiale: si osserva che esso diminuisce al diminuire del numero di cicli N .

A seconda dell'interpretazione il diag. di Wohler può assumere caratteristiche diverse: più comunemente si scala e' intero diagramma del valore di k_f (superato il limite di fatica σ_D) dividendo sia σ_D (tensione di rottura) che σ_D per k_f . In questo caso l'eq. di progetto diventa $\sigma_{ammessa} \leq \frac{\sigma_D}{S}$ con $\sigma_{Deff} = \frac{\sigma_D}{k_f}$ e σ_m = tensione massima della sezione senza intaglio.

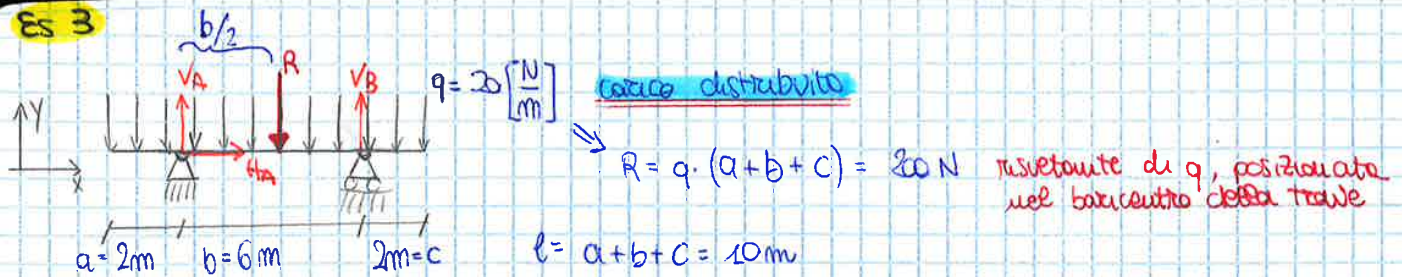
Secondo il modello di Palmirello invece è la tensione σ_{1000} per $N=1000$ cicli ad essere scalato dal fattore K_{1000} corrispondente, e questo punto viene ricordato

$\lambda^2 = \frac{e_0^2}{p^2}$ e' detto snellezza del componente: $\phi_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \Rightarrow$ la tensione critica e'

funzione del modulo elastico E (che dipende anche dalla temperatura) e della snellezza (avendo dalla lunghezza e geometria del componente). Osservando il seguente diagramma, con in ascisse λ adimensionalizzato rispetto alla λ_{euler} (tipico del materiale) e in ordinate ϕ_{cr} rispetto a ϕ_{euler} , si osserva che dati due provini dello stesso materiale (stessa ϕ_{euler}) e con la stessa geometria (stesso p), ma di diversa lunghezza, il piu' lungo si mantiene in campo di stabilita', il secondo andra' nella zona di prop. inversa tra λ e ϕ_{cr} .



Es 3



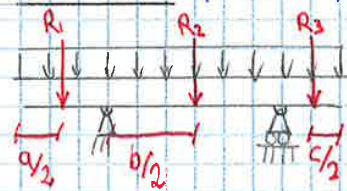
a) Isostatici: $\text{cerniera (2 GdL)} + \text{rotella (1 GdL)} : q = (2+1) - 3 = 0 \Rightarrow$ ISOSTATICA

b) Reazioni vincolari: 1 vincolo non interrompe la continuità dell'elemento trave! Altrimenti si avrebbero 3 elementi con 3 GdL ($3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow$ struttura labile)

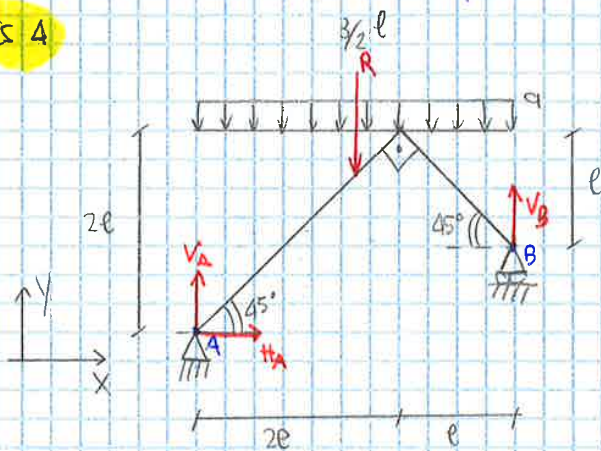
$$\begin{cases} \rightarrow H_A = 0 \text{ N} & H_A = 0 \text{ N} \\ \uparrow +V_A + V_B - R = 0 & V_A + V_B - R = 0 \rightarrow V_A = 200 - 100 = 100 \text{ N} \\ \curvearrowright -R \cdot \frac{b}{2} + V_B \cdot b = 0 & V_B = \frac{R}{2} = 100 \text{ N} \end{cases}$$

\Rightarrow struttura simmetrica distribuita simmetricamente

Alternativa: spezzare q in tre parti, mettendo le risultanti nei rispettivi baricentri delle distribuzioni uniformi \Rightarrow posso scegliere arbitrariamente come spezzare il carico



Es 4



$q = 30 \text{ N/m}$
 $l = 1 \text{ m}$
 Risultante di $q : R = q \cdot 3e = 90 \text{ N}$
 da posizionare nel baricentro!

a) Oggetto unico a forma di squadra
 Gradi di ipostaticità: $q = 2 + 1 - 3 = 0$ ISOSTATICA

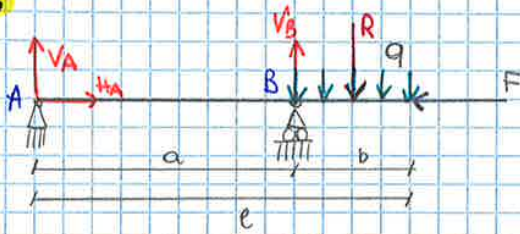
b) Reazioni vincolari

$$\begin{cases} \rightarrow H_A = 0 \text{ N} & H_A = 0 \\ \uparrow +V_A + V_B - R = 0 & V_A = R - V_B = 90 - 45 = 45 \text{ N} \\ \curvearrowright -R \cdot \frac{3e}{2} + V_B \cdot 3e = 0 & V_B = R \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{R}{2} = 45 \text{ N} \end{cases}$$

La struttura si comporta come prima, anche se ha una forma a squadra: è analoga all'es precedente, si ritiene proiettando la struttura sul basso \Rightarrow devo scegliere un sistema di riferimento coerente al carico.

Verifica: eq. di momento rispetto ad un altro polo B \rightarrow combinazione lineare delle altre eq.

ES 6



$a = 2\text{ m}$
 $b = 1\text{ m}$
 $F = 50\text{ N}$
 $q = 20\text{ N/m}$

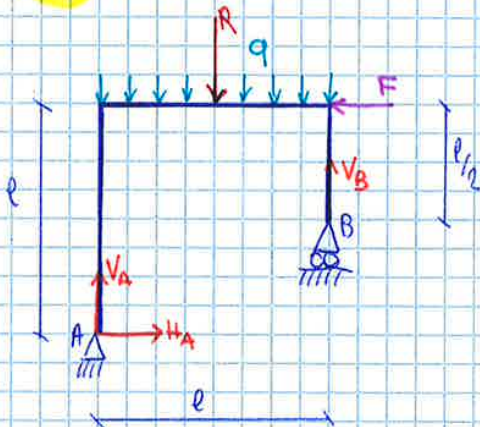
Calcolo $R = q \cdot b = 20 \cdot 1 = 20\text{ N}$

1) $q = (2+1) - 3 = 0$

2)
$$\begin{cases} \rightarrow) & +H_A - F = 0 & H_A = F = 50\text{ N} \\ \uparrow) & +V_A + V_B - R = 0 & V_A = R - V_B = 20 - 25 = -5\text{ N} \\ \curvearrowright) & +V_B \cdot a - R \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 & V_B = 20 \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 20 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25\text{ N} \end{cases}$$

Si come q genera una coppia sulla struttura, offre anche i vincoli, per equilibrarlo, facciamo nascere una coppia controbilanciante: V_A e V_B devono essere l'una opposta all'altra, ma non necessariamente in modulo sono uguali

ES 7



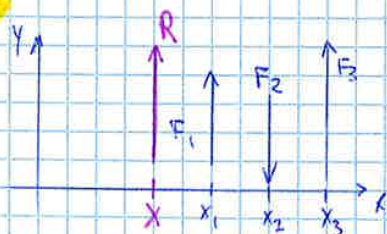
$e = 1\text{ m}$
 $F = 25\text{ N}$
 $q = 70\text{ N/m}$
 \downarrow
 $R = q \cdot e = 70 \cdot 1 = 70\text{ N}$

1) $q = (2+1) - 3 = 0$

2)
$$\begin{cases} \rightarrow) & H_A - F = 0 & H_A = F = 25\text{ N} \\ \uparrow) & +V_A + V_B - R = 0 & V_A = R - V_B = 70 - 10 = 60\text{ N} \\ \curvearrowright) & -R \cdot \frac{e}{2} + V_B \cdot e + F \cdot e = 0 & V_B = \frac{R}{2} - F = \frac{70}{2} - 25 = 10\text{ N} \end{cases}$$

P.O.L.G. $\begin{cases} \uparrow) & V_B = R - V_A = 10 \\ \curvearrowright) & -V_A \cdot e + H_A \cdot \frac{e}{2} + F \cdot \frac{e}{2} + R \cdot \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{0}{2} + \frac{F}{2} + \frac{R}{2} = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} + \frac{70}{2} = 60\text{ N} \end{cases}$

ES 8



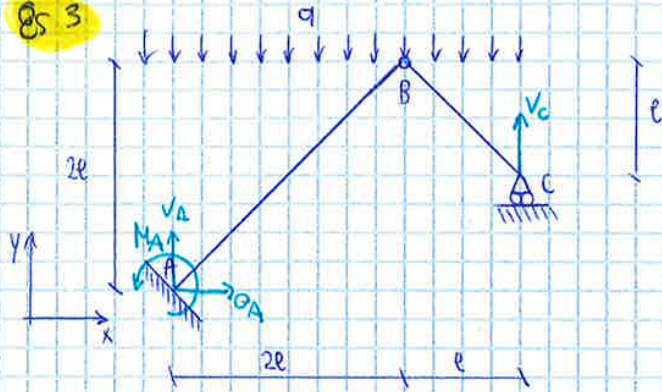
$F_1 = 500\text{ N}$ $F_2 = 800\text{ N}$ $F_3 = 1000\text{ N}$
 $x_1 = 5\text{ m}$ $x_2 = 7\text{ m}$ $x_3 = 8\text{ m}$

$\uparrow) R = 1000 + 500 - 800 = 700\text{ N}$ (da $-R + F_1 - F_2 + F_3$)
 $\curvearrowright) -Rx + F_1x_1 - F_2x_2 + F_3x_3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2500 - 5600 + 8000}{700} = 4\text{ m}$

17-03-2014

ESERCITAZIONE 2

853



$l = 1\text{m}$
 $q = 30\text{ N/m}$
 $R = q \cdot 3L$ (nel baricentro)

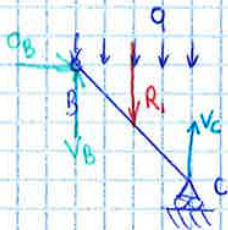
a) $G = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \left(\frac{3^2}{2} - 1 \right) \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 3 + 1 + 2 - 6 = 0$ ISOSTATICA

b) Risolvo mediante strutture semplici

$\rightarrow) O_A = \emptyset$
 $\uparrow) +V_A + V_C - R = 0$
 $\curvearrowright) +M_A + V_C \cdot 3l - R \cdot \frac{3}{2}l = 0$

Ogni sottoparte è in equilibrio: spezzo nella camera interna.

• Scelgo la parte di dx



Calcolo la reaz esterne V_C : faccio in modo di evidenziarle con un'eq di momento rispetto al polo B

$\curvearrowright) +V_C \cdot l - R_1 \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow V_C = \frac{R_1}{2} = 15\text{ N}$

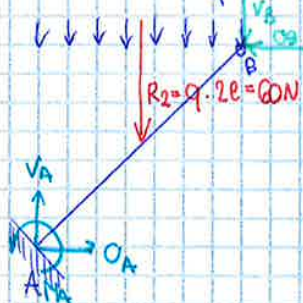
$R_1 = q \cdot l = 30\text{ N}$

$\rightarrow) O_B = \emptyset$

$\uparrow) +V_B - R_1 + V_C = 0 \quad V_B = R_1 - V_C = R_1 - \frac{R_1}{2} = 15\text{ N}$

• Analizzo la parte sx

Il valore delle reazioni nelle camere sono gli stessi di quelli trovati prima (sono disegnate in verso opposto).



$\rightarrow) O_A = 0$
 $\uparrow) V_A - V_B - R_2 = 0$
 $\curvearrowright) M_A - R_2 l - V_B \cdot 2l = 0$

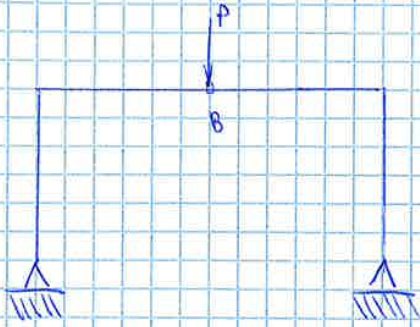
$O_A = 0$
 $V_A = V_B + R_2 = 60 + 15 = 75\text{ N}$
 $M_A = R_2 l + V_B \cdot 2l = 60 + 15 \cdot 2 = 90\text{ N}$

c) Uso l'eq. ausiliaria

Scelgo un nodo interno e calcolo il momento su una delle parti della struttura ponendo uguale a zero.

$B \rightarrow \overline{BC} \Rightarrow \curvearrowright) +V_C \cdot l - R_1 \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad V_C = R_1/2$

→ Asterisimo



Il carico P è applicato direttamente alla bussola B

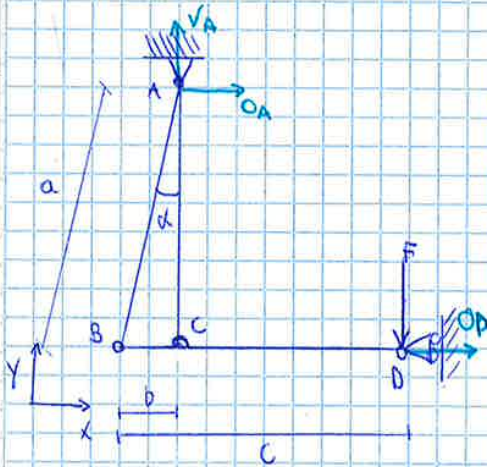
Eq ausiliaria $\vec{B} \rightarrow \vec{BC}$: $V_c l + H_c \cdot h = 0$

(continuo a non vedere P perché è applicato al polo del quale sono partito per calcolare il momento dell'eq ausiliaria)

Strutture semplici

Ho solo un carico P: è indifferente mettere $P/2$ e $P/2$ nelle due parti opposte considerare P soltanto una volta (da una parte sola). Questo accade perché le reazioni H_B e V_B vanno determinate in funzione del carico P.

ES 5



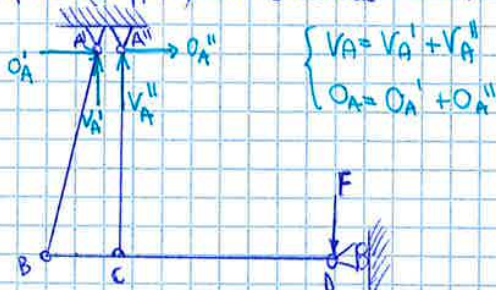
$a \sin \alpha = b \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{b}{a} = 9,59^\circ$ $AC = a \cos \alpha = 29,6 \text{ cm}$

$G = \underbrace{2+1}_{\text{vincoli esterni}} + \underbrace{2(2-1) \cdot 1 + 2(2-1)}_{\text{vincoli interni veri e propri}} + \underbrace{2(2-1) \cdot 1}_{\text{sovrapposizioni in A, che è considerato sia come vincolo esterno sia come interno}} - 3 - 3 = 0$

• Per la struttura completa posso quasi scrivere 3 eq linearmente indipendenti \Rightarrow non è il caso di sottosottituzione

$$\begin{cases} \rightarrow) & O_A + O_D = 0 \\ \uparrow) & V_A - F = 0 \\ A) & O_D \cdot AC - F(c-b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_A = -91,2 \text{ N} \\ V_A = F = 100 \text{ N} \\ O_D = \frac{F(27)}{AC} = 91,2 \text{ N} \end{cases}$$

• Il metodo dell'eq ausiliaria non è direttamente applicabile, ma posso usare un trucco: separo (scoppio) la cerniera in A e considero la parte AB

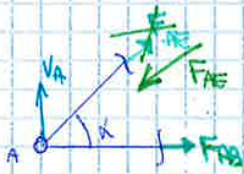


Prato a sfruttare il metodo delle strutture semplici.

Essendo aste passivo nascere sole reazioni assiali anche se taglio trasversalmente la aste: non potranno nascere reazioni di taglio (come nelle strutture precedenti).

Metodo dei nodi

Nodo A



il nodo deve essere in equilibrio, lungo i tagli le reaz. sono normali al taglio perché sono aste.



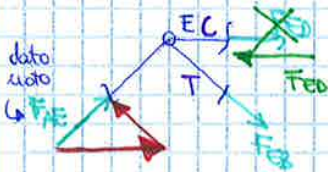
Scrivo V_A come la somma di due contributi nelle direzioni delle reazioni delle aste: queste ultime saranno opposte in verso alle componenti del carico esterno (V_A) e uguali.

in modulo:

$$F_{AB} = V_A = F/2 = 1000 \text{ N}$$

$$F_{AE} = V_A \sqrt{2} = F/\sqrt{2} = 1414$$

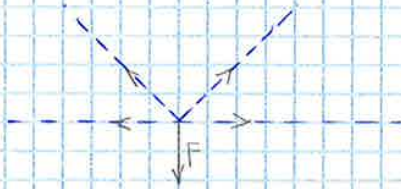
Nodo E: Parto dal carico noto, in questo caso B reazione F_{AE} , costruisco il triangolo:



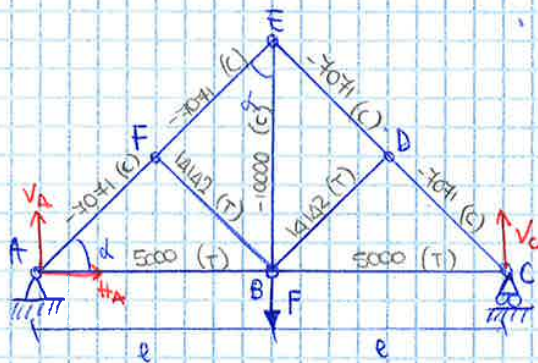
$$F_{EB} = F_{AE} = 1414 \text{ N}$$

$$F_{ED} = 1414 \cdot \sqrt{2} = 2000 \text{ N}$$

Verifica: conto equilibri al **nodo B** → ad esso convergono equilibri noti, quindi in B si deve creare un poligono di forze che chiude F ⇒ nodo equilibrato



Es 7



$e = 3\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$, $F = 10 \text{ kN}$

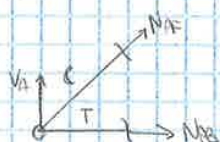
a) $G = -9 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2(2-1) \cdot 2 + 2(3-1) \cdot 3 + 2(5-1) \cdot 1 = -27 + 3 + 4 + 2 + 8 = 0$

b) Reaz vincolari: struttura simmetrica carico simmetricamente:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = V_C = F/2 = 5000 \text{ N} \end{cases}$$

c) Metodo di Ritter

Nodo A



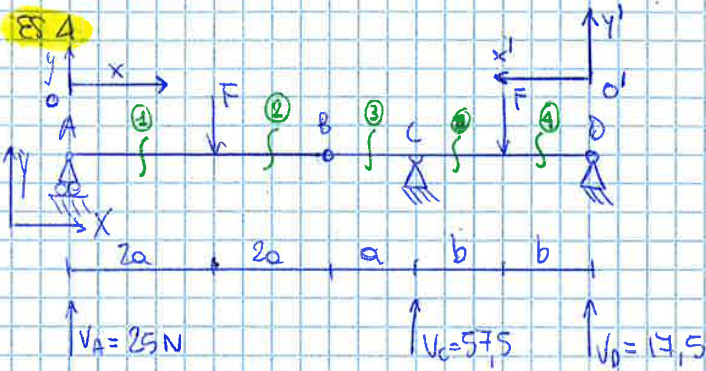
$$\uparrow) N_{Af} \cos 45 + V_A = 0 \Rightarrow N_{Af} = -\frac{V_A}{\cos 45} = -\frac{5000}{\sqrt{2}/2} = -7071 \text{ N}$$

$$\rightarrow N_{Ab} + N_{Af} \sin 45 = 0 \Rightarrow N_{Ab} = -N_{Af} \sin 45 = 5000 \text{ N}$$

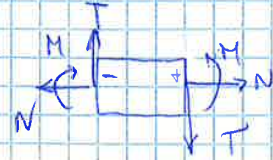
24-02-2014

Esercizio 3

ES 4

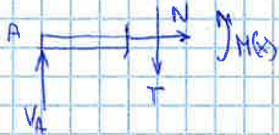


$F = 50\text{ N}$
 $a = 1,2\text{ m}$
 $b = 2\text{ m}$



Studio delle reazioni interne: parto dal punto A definendo un sistema di riferimento locale x, y
 distribuito: carico concentrato, momento
 vincolo (cerniera o vincolo esterno)

① $0 < x < 2a$



Scrivo le reazioni di equilibrio

$\rightarrow) N(x) = 0$

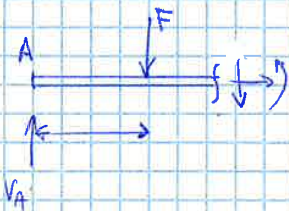
$\uparrow) -T(x) + V_A = 0 \rightarrow T(x) = V_A = 25\text{ N}$

$x \curvearrowright) +M(x) - V_A \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = V_A \cdot x$ ma legge che varia linearmente con x

è un momento lo come può di riduzione al punto x

\downarrow
 $\begin{cases} x=0 \rightarrow M(0) = 0\text{ Nm} \\ x=2a \rightarrow M(2a) = 25 \cdot 2 \cdot 1,2 = 60\text{ N/m} \end{cases}$

② $2a < x < 4a$ (non c'è un unico sistema di riferimento, non conviene)



$\rightarrow) N(x) = 0$

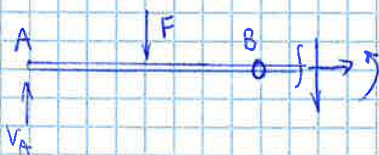
$\uparrow) +V_A - F - T(x) = 0 \rightarrow T(x) = V_A - F = 25 - 50 = -25\text{ N}$

$x \curvearrowright) +M(x) + F(x - 2a) - V_A \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = V_A \cdot x - F(x - 2a)$

\downarrow
 $\begin{cases} x=2a \rightarrow M(2a) = 60\text{ Nm} \\ x=4a \rightarrow M(4a) = 25 \cdot 4 \cdot 1,2 - 50 \cdot (2a) = 0 \end{cases}$

Il momento vale zero per $x=4a \Rightarrow$ corretto perché la cerniera in B non è in grado di sopportare momento.

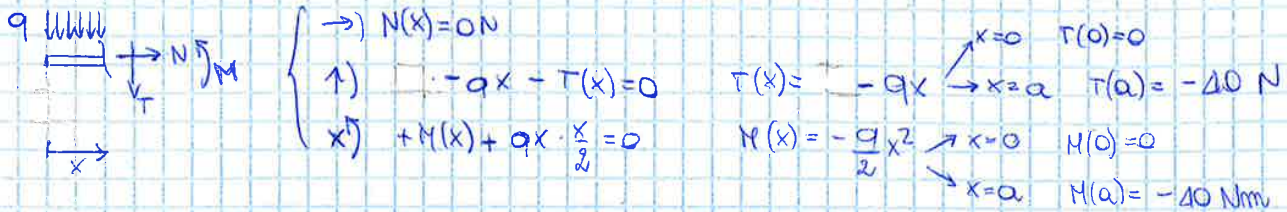
③ $4a < x < 5a$



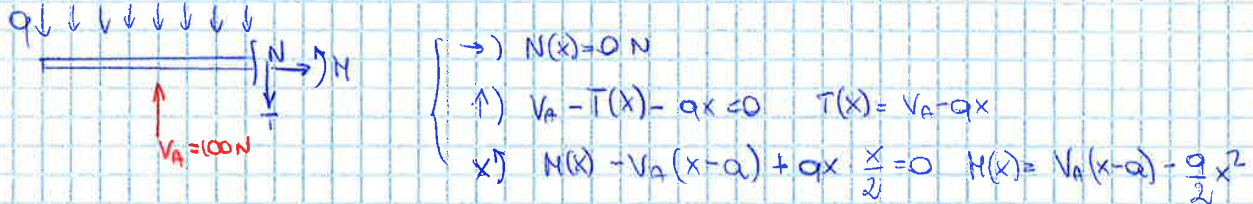
È comparsa una cerniera, ma le forze in gioco non sono cambiate \Rightarrow il vincolo interno di tipo cerniera non introduce alcuna discontinuità \Rightarrow le esatt. interne vanno la stessa forma analitica del tratto precedente:

$M(x) \rightarrow M(5a) = -30\text{ N/m}$

$0 < x < a$

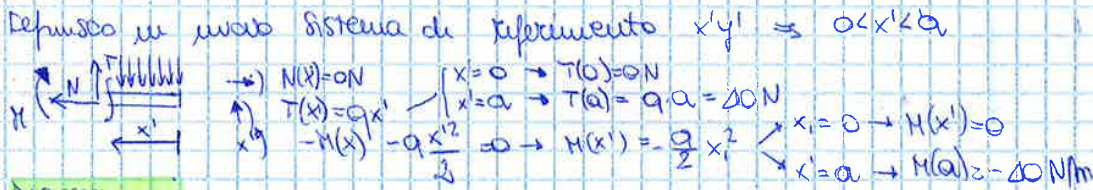


$a < x < a+b$

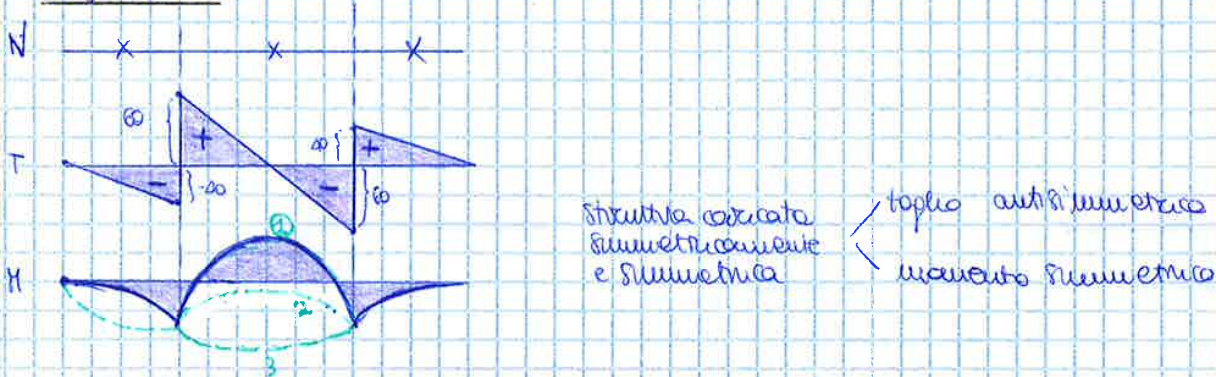


- $x=a$ $T(a) = 100 - 20a = 60N$ $M(a) = -40Nm$
- $x=(a+b)$ $T(a+b) = 100 - 20(8) = -60N$ $M(a+b) = 100(b) - \frac{20}{2} \cdot 64 = -40Nm$

$a+b < x < 2a+b \Rightarrow 0 < x' < a$



Diagrammi

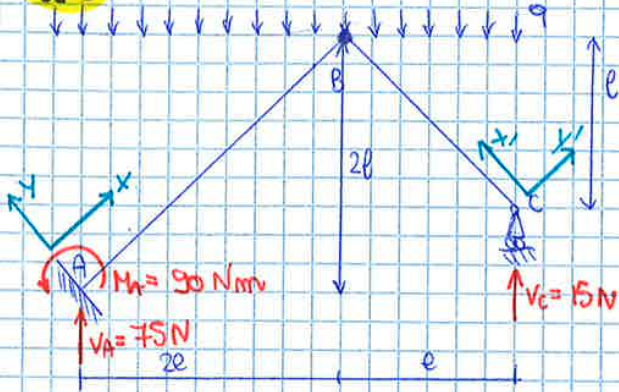


- in questo tratto il caratteristico (quale curvatura segue) devo analizzare la relazione tra derivata 2° del momento e q . $q = -\frac{d^2M}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2}$ dice la curvatura ma d'eq. si dice di trovare la curvatura per la presenza del meno.

$$q = -\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)$$

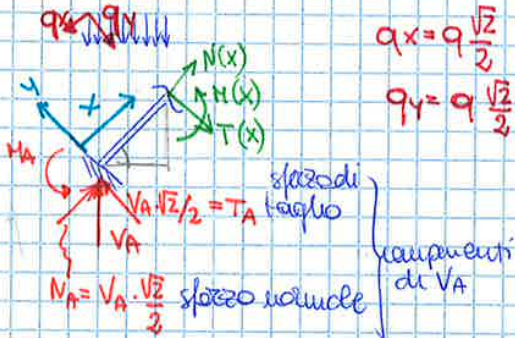
- Per il tratto centrale non posso avere il caso 3, per lo stesso discorso della derivata. Per capire se il momento diventa positivo o rimane sotto lo zero devo fare il conto per $x = (a + \frac{b}{2})$, dove necessariamente devo avere un max perché il toppe è annulla.

Es 5



$l = 1 \text{ m}$
 $q = 30 \text{ N/m}$

$0 < x < 2\sqrt{2}l$



$q_x = q \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $q_y = q \frac{\sqrt{2}}{2}$

componenti del carico distribuito

$\rightarrow) N(x) - q \frac{\sqrt{2}}{2} x + N_A = 0 \rightarrow N(x) = q \frac{\sqrt{2}}{2} x - V_A \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\uparrow) -T(x) - q \frac{\sqrt{2}}{2} x + T_A = 0 \rightarrow T(x) = V_A \frac{\sqrt{2}}{2} - q \frac{\sqrt{2}}{2} x$
 $x') +M(x) - V_A \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + (q \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}) (\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) + M_A = 0$

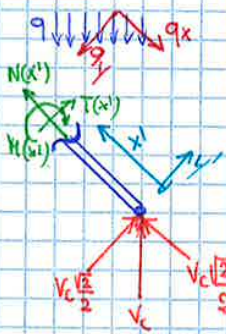
$M(x) = V_A \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{q \sqrt{2}}{4} x^2 - M_A$

$x = 2,5 \quad M(2,5) =$

$x = 0 \Rightarrow N(0) = -53 \text{ N}, \quad T(0) = 53 \text{ N}, \quad M(0) = -90 \text{ Nm}$

$x = 2\sqrt{2}l \Rightarrow N(x) = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} - 53 = 4 \text{ N}, \quad T(x) = -7 \text{ N}, \quad M(x) = \frac{75}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{30}{4} \cdot 2^2 - 90 = 0$

$0 < x' < l\sqrt{2}$



$q_x = q \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $q_y = q \frac{\sqrt{2}}{2}$

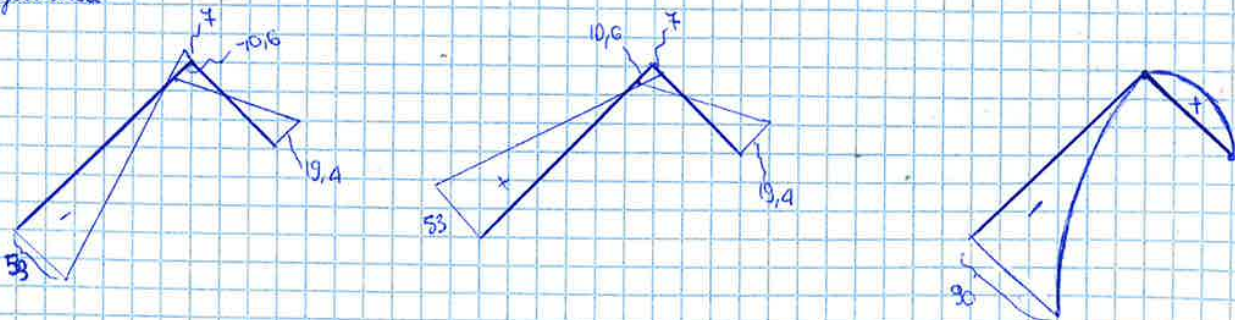
$\rightarrow) -N(x') - V_C \frac{\sqrt{2}}{2} + q \frac{\sqrt{2}}{2} x' = 0 \rightarrow N(x') = \frac{\sqrt{2}}{2} (q x' - V_C)$
 $\uparrow) T(x') + V_C \frac{\sqrt{2}}{2} - q \frac{\sqrt{2}}{2} x' = 0 \rightarrow T(x') = \frac{\sqrt{2}}{2} (q x' - V_C)$
 $x') -H(x') + V_C \frac{\sqrt{2}}{2} x' - (q \frac{x'}{2} \sqrt{2}) (\frac{x'}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$

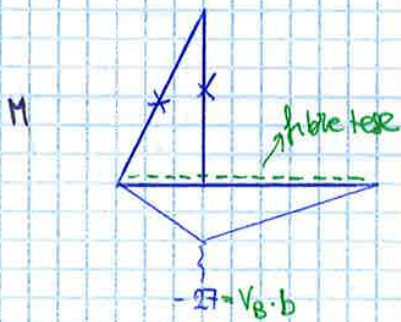
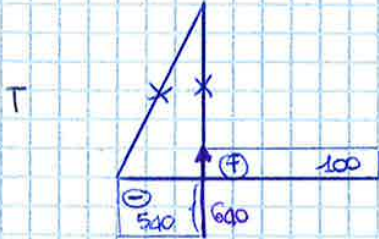
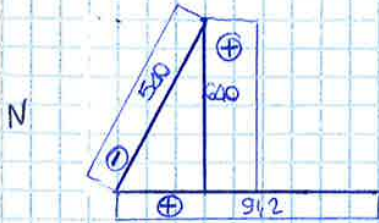
$H(x) = V_C \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{q}{4} x'^2 \Rightarrow H(\frac{l\sqrt{2}}{2}) = \frac{15}{2} - \frac{30}{4} \cdot \frac{2}{4} =$

$x' = 0 \Rightarrow N(0) = -10,6 \text{ N}, \quad T(0) = -10,6 \text{ N}, \quad M(0) = 0$

$x' = l\sqrt{2} \Rightarrow N(x') = \frac{\sqrt{2}}{2} 30\sqrt{2} - 10,6 = 19,4 \text{ N}, \quad T(x') = 19,4 \text{ N}, \quad M(x') = 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{30}{4} \cdot 2 = 15 - 15 = 0$

Diagrammi





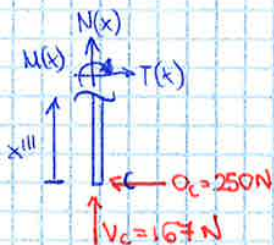
Es 3

Caratteristiche di soffercatura

$e < x'' < 2e$

$$\begin{cases} N(x'') = -250 \text{ N} \\ T(x'') = -167 \text{ N} \\ M(x'') = +M - Q_c \cdot h - V_c x'' = +500 - 167 x'' \end{cases} \begin{cases} x'' = e & M(e) = -1 \text{ Nm} \\ x'' = 2e & M(2e) = -502 \text{ Nm} \end{cases}$$

$0 < x''' < h$

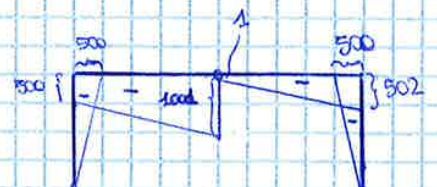
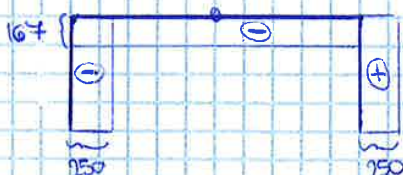


1) $N(x''') = -V_c = -167 \text{ N}$

2) $T(x''') = Q_c = 250 \text{ N}$

$$x''') \quad -M(x''') - Q_c x''' = 0 \rightarrow M(x''') = -250 x''' \quad \begin{cases} x''' = 0 & M(0) = 0 \text{ Nm} \\ x''' = h & M(h) = -500 \text{ Nm} \end{cases}$$

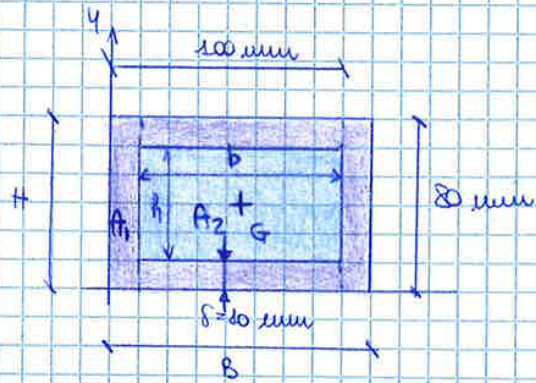
Diagrammi



ESERCIZI

1

- Calcolo
- ? Baricentro
- ? Momenti d'inerzia baricentrici



a) Calcolo del baricentro

In questo oggetto ho "bollo" una figura geometrica semplice: posso immaginare di procedere in senso opposto, sottraendo l'area piccola a quella grande

$$S_x = A_1 y_{G1} - A_2 y_{G2}$$

$$S_y = A_1 x_{G1} - A_2 x_{G2}$$

Per considerazioni simmetriche ho $\int x_G = 50 \text{ mm}$
 $\int y_G = 20 \text{ mm}$

b) Calcolo dei momenti d'inerzia:

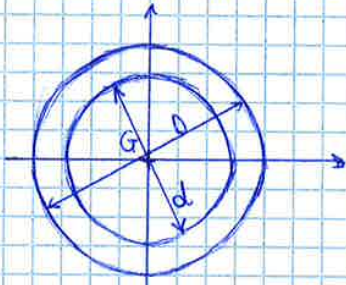
$$I_{x_0} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_0} = \frac{B^3H}{12} - \frac{b^3h}{12}$$

Abbiamo svolto operazioni booleane

2

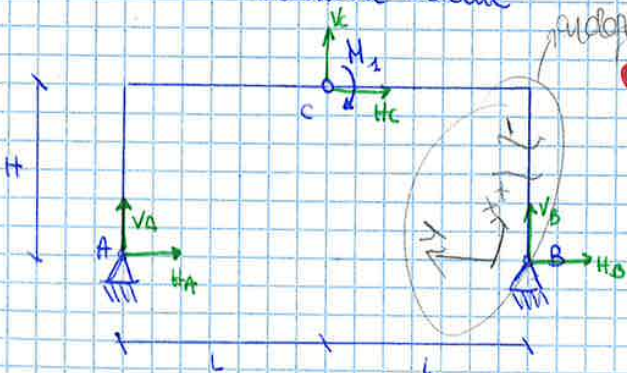
Sezione circolare cava



$$I_x = I_y = \frac{I_{\text{diametro}}}{2} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

Es 3.7 Libro

Portale con
 1 colonna interna
 2 colonne esterne

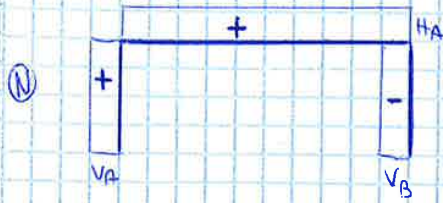


M_1 applicato a destra

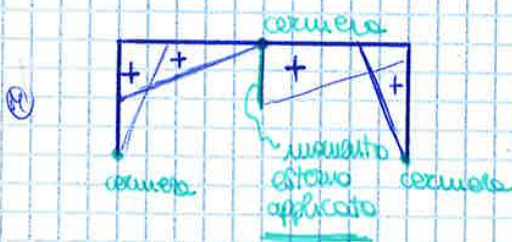
Reazioni vincolari

$$\begin{cases} V_A + V_B = 0 \\ H_A + H_B = 0 \\ 2V_B e - M_1 = 0 \\ -V_A e + H_A h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_A = -V_B \\ H_B = -H_A \\ V_B = M_1 / 2L \\ V_A = \frac{H_A h}{e} \end{cases}$$

Diagrammi



Lo spazio normale lo disegno dove voglio non è importante, basta che ci sia il segno!



Osservo il carico M_x M_y $M \oplus$ fibre tese

Se il momento flettente è positivo allora le fibre tese sono sotto

$M \ominus$ se il momento flettente è negativo allora le fibre tese sono sempre sopra fibre tese

Se dai conti ottengo un segno \ominus (negativo) lo metto sotto, altrimenti sopra

$$\left| \begin{matrix} - \\ + & + \\ + \end{matrix} \right|$$

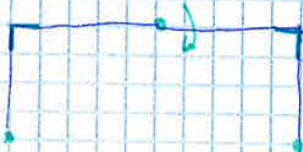
È verificata la regola $\frac{dM}{dx} = T$?

S_1 : momento crescente \rightarrow derivata positiva (indipendentemente dal mio disegno)

S_2 : } momento decrescente \rightarrow derivata negativa, inoltre essendo il taglio costante significa che le rette devono avere lo stesso coeff. angolare (più devono essere rette parallele in S_2 e S_3 !)

S_4 : decrescente \rightarrow derivata negativa

Osservo il diagramma:



Spigoli: \oplus

Il momento nel punto dello spigolo dalla parte prima (S_x) è per forza dello stesso valore e segno di quello della parte dopo (S_x) lo spigolo

mom. inerzia
baricentrica
di un rettangolo

$$J_{x_B} = \int_A y^2 dA = \frac{bh^3}{12} \quad \text{e} \quad J_{y_B} = \frac{hb^3}{12}$$

Per il calcolo del momento inerzia riferito al baricentro totale del corpo fare una trasposizione

In questo caso il momento di inerzia $J_{xy} = \int_A xy dA = 0$ perché è in riferimento ad un sistema baricentrico e di simmetria per la figura (almeno un asse quale su un asse di simmetria).

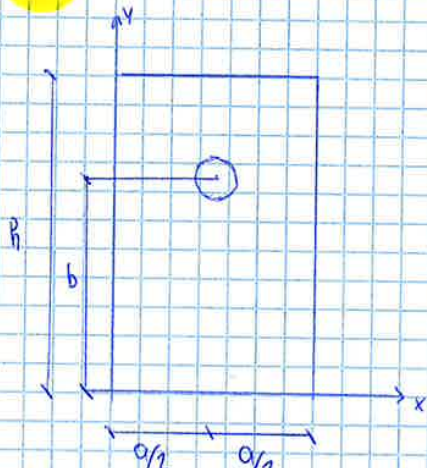
$$\left. \begin{aligned} J_{x_G} &= J_{x_B} + (y_B - y_G)^2 A \\ J_{y_G} &= J_{y_B} + (x_B - x_G)^2 A \end{aligned} \right\} \text{momento inerzia rispetto al baricentro G (tra trasposizione)}$$

$$J_{x_G y_G} = J_{x_B y_B} + (x_B - x_G)(y_B - y_G) A \quad \text{momento di inerzia in centro di massa}$$

$$J_{x_{G_{TOT}}} = J_{x_{G_1}} - J_{x_{G_2}} = 6,7 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_{G_{TOT}}} = J_{y_{G_1}} - J_{y_{G_2}} = 3,17 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

ES 2



- a = 200 mm
- D = 250 mm
- h = 400 mm
- d = 40 mm

- a. calcol. mom. statici S_x, S_y
- b. posiz. baricentro G
- c. mom. inerzia I_{x_0}, I_{y_0}

	Base b	altezza h	Area	x_B	y_B	S_x	S_y
1 (P)	200	400	80000	100	200	$1,6 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^6$
2 (V)	d=40		1256,64	100	250	314160	125664

$$S_{x_{TOT}} = S_{x_1} - S_{x_2} = 1,6 \cdot 10^7 - 314160 = 15685840$$

$$x_G = \frac{S_{y_{TOT}}}{A_{TOT}} = 100 \quad y_G = \frac{S_{x_{TOT}}}{A_{TOT}} = 199 \text{ mm}$$

$$S_{y_{TOT}} = S_{y_1} - S_{y_2} = 7874336$$

	J_x	J_y	$x_B - x_G$	$y_B - y_G$	trasposizione (Ad^2)	trasposizione (Ad^2)
1	$10667 \cdot 10^4$	$255,67 \cdot 10^5$	0	1	0	80000
2	$25,133 \cdot 10^4$		0	51	0	3268520,64

$$J_x(\text{cerchio}) = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$J_{x_{G_1}} = J_{x_1} + Adx_1^2 = J_{x_1} = 10667 \cdot 10^4$$

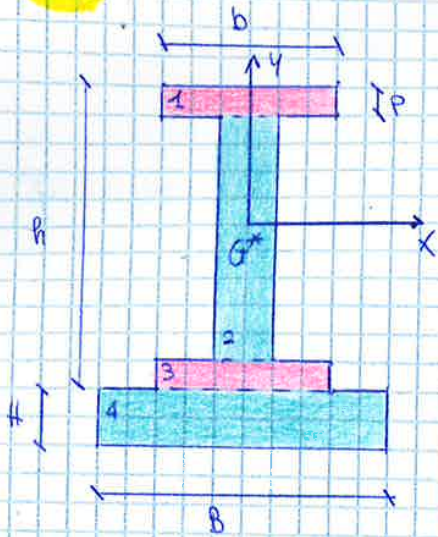
$$J_{x_{G_2}} = J_{x_2} + Adx_2^2 = J_{x_2} = 25,133 \cdot 10^4$$

$$J_{x_{G_{TOT}}} = J_{x_{G_1}} - J_{x_{G_2}} = 106,64 \cdot 10^4$$

$$J_{y_{G_1}} = J_{y_1} + Ady_1^2 = 255,75 \cdot 10^6$$

$$J_{y_{G_2}} = J_{y_2} + Ady_2^2 = 351,985 \cdot 10^4$$

Es 4



$b = 60 \text{ mm}$ $h = 100 \text{ mm}$ $a = 10 \text{ mm}$ $p = 5 \text{ mm}$

$B = 90 \text{ mm}$ $H = 10 \text{ mm}$

- a. S_x e S_y rispetto a G^*
- b. distanza G^* e G (baricentro complessivo)
- c. I_{x_G} complessivo

	b	h	A	x_B	y_B	$S_x = A y_B$	$S_y = A x_B$
1	60	5	300	0	47,5	14250	0
2	10	90	900	0	0	0	0
3	60	5	300	0	(-47,5)	-14250	0
4	90	10	900	0	(-55)	-49500	0

$S_{x_{TOT}} = S_{x_1} + S_{x_2} + S_{x_3} + S_{x_4} = -49500$

$S_{y_{TOT}} = 0$

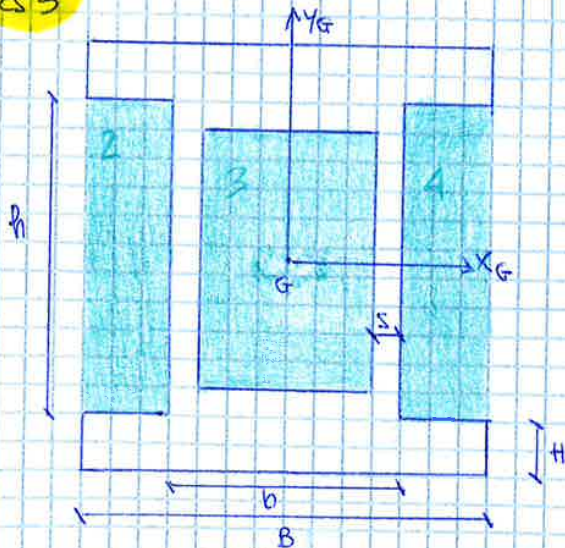
$y_B = \frac{S_{x_{TOT}}}{A_{TOT}} = -20,625$

$x_B = 0$

	$J_{x_B} = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$J_{y_B} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$	$x_B - x_G$	$y_B - y_G$	(trasporto) $A d_x^2$	$A d_y^2$
1	625	90000	0	68,125	1392304,688	0
2	607500	7500	0	20,625	382851,56	0
3	625	90000	0	-26,875	216649,69	0
4	7500	607500	0	-34,375	1063446,56	0

$I_{x_1} = 1392929,4$; $I_{x_2} = 990351,56$; $I_{x_3} = 217304,69$; $I_{x_4} = 1070976,56$ $I_{x_G} = 36,41 \cdot 10^5$

Es 5



$b = 120 \text{ mm}$ $h = 200 \text{ mm}$ $s = 10 \text{ mm}$ $B = 240 \text{ mm}$

$H = 20 \text{ mm}$

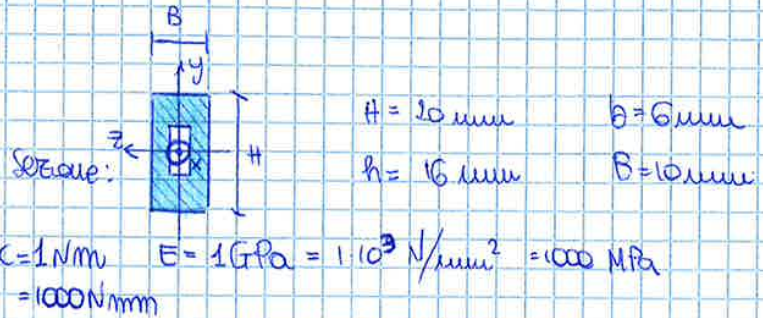
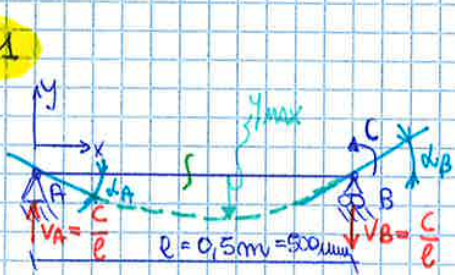
- a. S_{x_G} , S_{y_G} , posizione baricentro
- b. I_{x_G} , I_{y_G}

14-01-2014

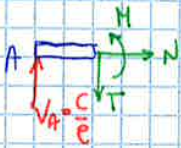
ESERCIZIO 5

linea elastica $y'' = \frac{M(x)}{EJ_z}$

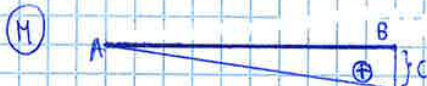
ES 1



[S] $0 < x < e$



$\rightarrow) N(x) = 0$
 $\uparrow) \frac{C}{e} - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = \frac{C}{e}$
 $x) -V_A \cdot x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{C}{e} x$



$y'' = \frac{C}{e} \frac{x}{EJ_z}$

MOMENTO D'INERZIA ATTORNO A \bar{z} $J_z = J_z^{Prevo} - J_z^{Voto} = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12} = 4619 \text{ mm}^4$

$y' = \frac{C}{2eEJ_z} x^2 + a$

$y = \frac{C}{6eEJ_z} x^3 + ax + b$

• Condizioni al contorno:

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = b$
 $y(l) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{C l^3}{6eEJ_z} + a l \Rightarrow a = -\frac{C l}{6eEJ_z}$

• Ho ottenuto le costanti, ho quindi ricavato rotazione e freccia:

$$\begin{cases} y' = \frac{C x^2}{2eEJ_z} - \frac{C l}{6eEJ_z} \\ y = \frac{C x^3}{6eEJ_z} - \frac{C l}{6eEJ_z} x \end{cases}$$

► Calcolo la rotazione in A e B ($\Rightarrow x=0, x=l$)

$\textcircled{A} y'(0) = -\frac{C l}{6eEJ_z} = \frac{1000 \cdot 500}{6 \cdot 1000 \cdot 4619} = -0,018 \text{ rad} = -0,018 \cdot 180 \approx -1^\circ$

è negativo rispetto alla convenzione da me scelta, che era rotazione in senso anti orario \Rightarrow ottengo una rotazione in senso orario in A.

$\textcircled{B} y'(l) = \frac{C l^2}{2eEJ_z} - \frac{C l}{6eEJ_z} = \frac{3C l - C l}{6eEJ_z} = \frac{C l}{3eEJ_z} = 0,0361 \text{ rad} \approx 2^\circ$

▶ Zona elastica: tratto AB

$$y'_{AB} = \frac{M(x)}{EJ_z} = -\frac{V_A x}{EJ_z}$$

$$y'_{AB} = -\frac{V_A x^2}{2EJ_z} + a = -\frac{V_A x^2}{2EJ_z} + \frac{V_A}{6EJ_z}$$

$$y_{AB} = -\frac{V_A x^3}{6EJ_z} + ax + b = -\frac{V_A x^3}{6EJ_z} + \frac{V_A x}{6EJ_z}$$

Condizioni al contorno

$$y_{AB}(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$y'_{AB}(l) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{V_A l^2}{6EJ_z} + a \Rightarrow a = \frac{V_A}{6EJ_z}$$

▶ Zona elastica: tratto BC

$$y''_{BC} = \frac{V_B x - V_B l - V_A x}{EJ_z} = \frac{(V_B - V_A)x - V_B l}{EJ_z} = \frac{F x - V_B l}{EJ_z}$$

$$y'_{BC} = \frac{F x^2}{2EJ_z} - \frac{V_B l x}{EJ_z} + C = \frac{F x^2}{2EJ_z} - \frac{V_B l x}{EJ_z} + 0,159$$

$$y_{BC} = \frac{F x^3}{6EJ_z} - \frac{V_B l x^2}{2EJ_z} + Cx + d = \frac{F x^3}{6EJ_z} - \frac{V_B l x^2}{2EJ_z} + 0,159x - 24,164$$

Condizioni al contorno

$$y_{BC}(l) = 0$$

$$y'_{BC}(l) = y'_{AB}(l) \quad \text{La derivata prima deve essere continua!}$$

$$\frac{F l^2}{2EJ_z} - \frac{V_B l^2}{EJ_z} + C = -\frac{V_A l^2}{2EJ_z} + \frac{V_A l^2}{6EJ_z} \Rightarrow C = 0,1590$$

$$0 = \frac{F l^3}{6EJ_z} - \frac{V_B l^3}{2EJ_z} + 0,1590 \cdot l + d \Rightarrow d = -24,1640$$

ⓐ

▶ Metodo alternativo: principio di sovrapposizione degli effetti

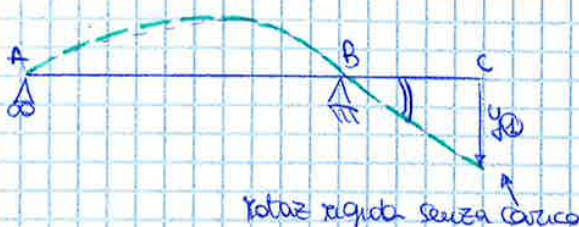


Spesso B struttura in B e aggiunge il momento di trasporto $F \cdot a$, poi sommo ad esso una trave incastrata in B:



carico B linea elastica di due travi a singola campata e poi sommo i risultati.

ⓑ F si scarica in B, e' come se non ci fosse, non e' influente dal punto di vista del momento



Le piatte di trave non curvate segue la linea elastica della parte precedente

$$y_B = x_{AB}(x=l) \cdot a = \left[\frac{(-F) x^2}{6EJ_z} - \frac{(-F) l}{6EJ_z} \right] a$$

$y(0) = y_1(0) = 0,0138 \text{ rad}$ (preludio solo a ricerca del primo contributo)
 $y(500) = y_1(500) = -0,023 \text{ rad}$ (preludio solo a ricerca del primo contributo)
 $y'_{TOT}(700) = y'_1(500) + y'_2(200) = -0,00226 - 0,01655 = -0,01881 \text{ rad} \Rightarrow$ saranno 1,2 contributi
 $y'_{TOT} = a \cdot y'_1(500) + y'_2(200) = 200(-0,023) - 2,2 = -7,6 \text{ mm}$
 espressione in radiani

Sostituendo i risultati ottengo:

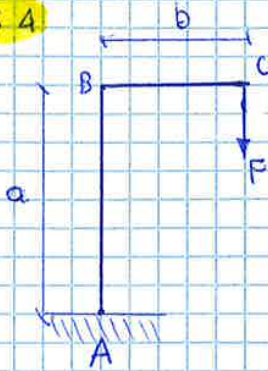
$$y'_{AB}(A=0) = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 3,2 \cdot 10^{-4}$$



$$y'_{AB}(B=500) = -0,041 \text{ rad} = -2,4^\circ$$

$$y'_{BC}(C=700) = 0,023 \text{ rad} = 1,345^\circ$$

$$y_{BC}(C=700) = -7,72 \text{ mm}$$

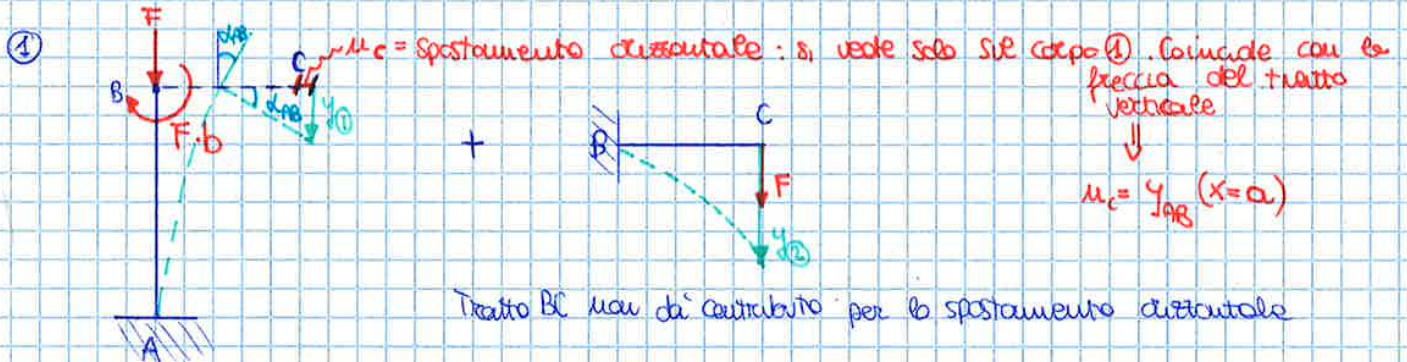
Es. 4



Sezione AB:  $\Rightarrow J_z^{AB}$
 Sezione BC:  $\Rightarrow J_z^{BC}$

► Sovrapposizione degli effetti

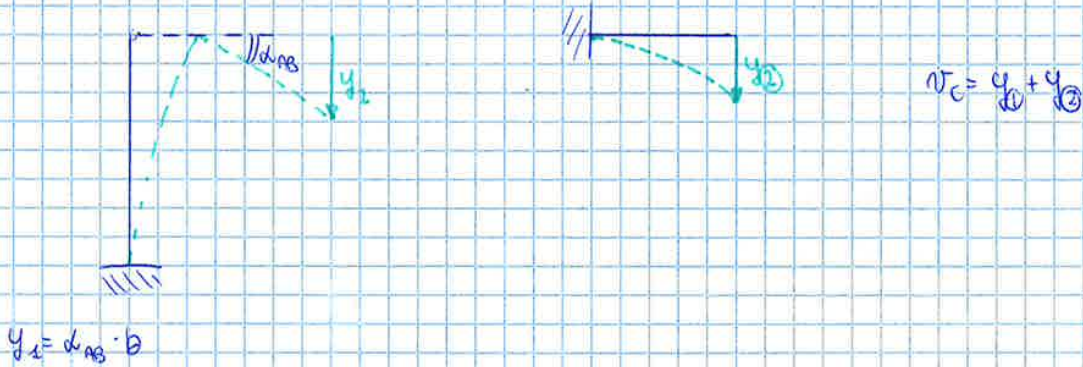
- La struttura si abbassa e si sposta verso destra (u_c)



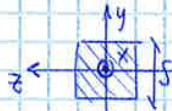
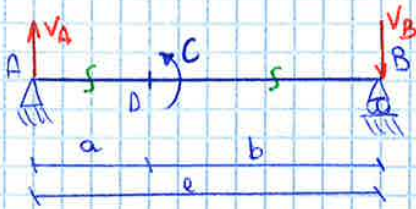
In 1° sento la forza e anche il momento di trasposizione, aggiungo anche il tratto BC senza caricarlo. F causa poca compressione, trascurabile.

La mensola 1 è mostrata in verticale, ma ho già fatto i calcoli

- Spostamento verticale v_c



ES 2



$s = 12 \text{ mm}$
 $l = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$
 $C = 10 \text{ Nm} = 10000 \text{ Nmm}$
 $E = 110 \text{ GPa} = 110000 \text{ MPa}$

a. E la linea elastica

b. per $a = b = 1000 \text{ mm}$ calcoli:
 → rotazione in A, B, D
 → flessione massima ed il deflettore

a)

• Reazioni vincolari

$\uparrow \rightarrow VA - VB = 0 \rightarrow VA = VB = C/e$
 $\rightarrow \parallel$
 $\downarrow \rightarrow C - eVB = 0 \rightarrow VB = \frac{C}{e}$

• Momento d'inerzia

$J_z = J_y = \frac{s^4}{12} = 1728 \text{ mm}^4$

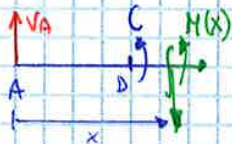
• Caratteristiche di sollecitazione

$S_1: 0 < x < a$

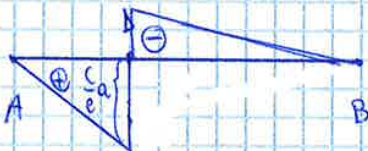


$x) \quad +M(x) - VAx = 0 \rightarrow M(x) = VA \cdot x = \frac{C}{e} x$
 $\begin{cases} x=0 & M(0) = 0 \\ x=a & M(a) = \frac{C}{e} a \end{cases}$

$S_2: 0 < x < a+b$



$x) \quad M(x) + C - VAx = 0 \rightarrow M(x) = VAx - C = C \left(\frac{x}{e} - 1 \right)$
 $\begin{cases} x=a & M = \frac{C}{e} a - C \\ x=a+b & M = C \left(\frac{e}{e} - 1 \right) = 0 \end{cases}$



• Linea elastica

$y''_{AD} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{C}{e} x \rightarrow y'_{AD} = \frac{Cx^2}{2eEJ_z} + A_1 \rightarrow y_{AD} = \frac{Cx^3}{6eEJ_z} + A_1x + B_1$

$y''_{DB} = \frac{C}{EJ_z} \left(\frac{x}{e} - 1 \right) \rightarrow y'_{DB} = \frac{Cx^2}{2eEJ_z} - \frac{Cx}{EJ_z} + A_2 \rightarrow y_{DB} = \frac{Cx^3}{6eEJ_z} - \frac{Cx^2}{2EJ_z} + A_2x + B_2$

- condizioni al contorno

$y_{AD}(0) = 0$

$y_{DB}(e) = 0$

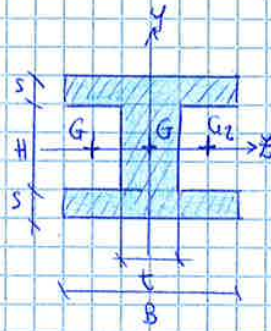
$y_{AD}(a) = y_{DB}(a)$

$y'_{AD}(a) = y'_{DB}(a)$

- Applico le condizioni

$\begin{cases} B_1 = 0 \\ \frac{Ca^2}{2eEJ_z} + A_1 = \frac{Ca^2}{2eEJ_z} - \frac{Ca}{EJ_z} + A_2 \rightarrow A_1 = A_2 - \frac{Ca}{EJ_z} \end{cases}$

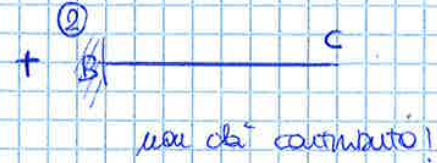
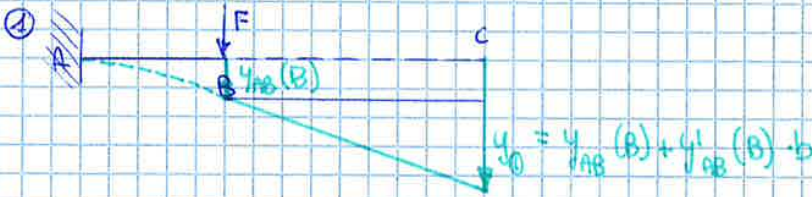
ES 5



- $a = 1500 \text{ mm}$
- $b = 2500 \text{ mm}$
- $B = 40 \text{ mm}$ $S = 6 \text{ mm}$
- $H = 70 \text{ mm}$ $t = 10 \text{ mm}$
- $F = 500 \text{ N}$ $E = 210000 \text{ MPa}$

MOM. INERZIA $J_z = \frac{B(H+2S)^3}{12} - 2 \left[\frac{15 \cdot H^3}{12} + 15 \cdot H \cdot (7,5)^2 \right] = 862268 \text{ mm}^4$

SARAPPESIZIONE EFFETT



$V_A = F = 500 \text{ N}$
 $M_A = F \cdot a = -750000 \text{ Nmm}$

$\sum (x) - M_A - V_A x = 0 \Rightarrow M(x) = V_A x + M_A = Fx - Fa = F(x-a)$

• Linea elastica

$y''_{AB} = \frac{M_B(x)}{EJ} = \frac{F(x-a)}{EJ} \rightarrow y'_{AB} = \frac{V_A x^2}{2EJ} + \frac{M_A x}{EJ} + A \rightarrow y_{AB} = \frac{V_A x^3}{6EJ} + \frac{M_A x^2}{2EJ} + Ax + B$

Condiz. al contorno: $y_{AB}(0) = 0$
 $y'_{AB}(0) = 0$ } $A = 0, B = 0$

$y'(C) = y'_{AB}(x=a) = -0,0031 \text{ rad} = -0,2^\circ = y'(B)$

$y(C) = y_{AB}(x=a) + y'_{AB}(x=a) \cdot b = -3,1 - 0,0031 \cdot 2500 = -10,86 \text{ mm}$

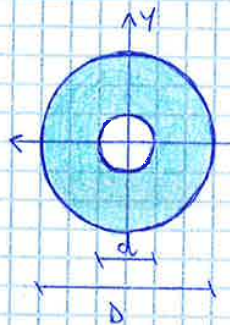
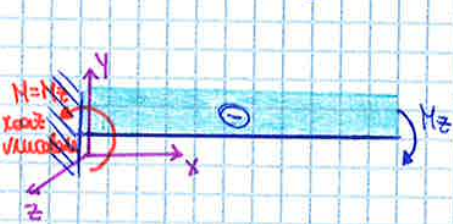
① Calcolo il coeff di sicurezza nel punto A: quanto siamo lontani dallo rottura
 È un coeff di sicurezza statico, perché i carichi sono statici

$$S = \frac{\sigma_s}{\sigma_f^{MAX}} = \frac{\text{TENSIONE SNERVAMENTO}}{\text{TENSIONE MASSIMA}} = \frac{300 \text{ MPa}}{180 \text{ MPa}} = 1,7 \Rightarrow \text{posso ancora aumentare il carico di } 70\% \text{ prima di arrivare ad } 1$$

• Selezio la sezione col carico maggiore \rightarrow nella sezione le tensioni variano ancora al variare della $y \rightarrow$ mi interessa solo $\sigma_f^{MAX} \rightarrow$ corrisponde effettivamente al punto A, che ci influenza se la struttura è temperata o meno.

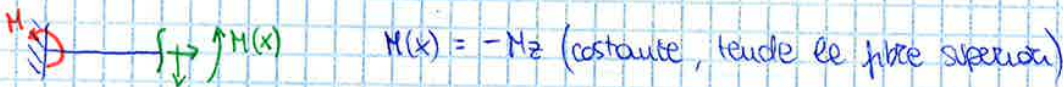
ES 4

Trave a sezione circolare



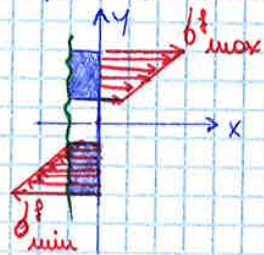
- D = 60 mm
- d = 10 mm
- e = 100 mm
- E = 210000 MPa
- ν = 0,3
- σ_s = 700 MPa
- a) M_z = 12 kNm = 12 · 10⁶ Nmm
- b) M_x = 7 kNm = 7 · 10⁶ Nmm

② Calcolo distribuzione di tensione, w_f e σ_f^{MAX} e S



• Sezione isotropamente sferizzata? è indifferente perché in questo caso il momento è costante per ogni x.

posso prendere una sezione generica: $\forall x$



$$\sigma_{xx}^p(y) = - \frac{M(x) \cdot y}{I_z} \quad \text{ancora tensione dovuta solo al momento flettente}$$

$$\sigma_{max}^f(y) = + \frac{Mz}{w_f}$$

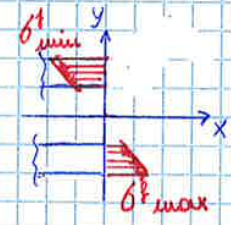
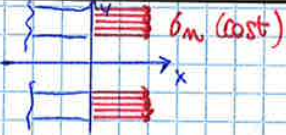
$$\sigma_{Max}^f = - \frac{-Mz}{\frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{D}{2} \right)^4 - \left(\frac{d}{2} \right)^4 \right]} \cdot \frac{D}{2} = \frac{Mz}{\frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{D}{2} \right)^4 - \left(\frac{d}{2} \right)^4 \right]} = \frac{12 \cdot 10^6}{2,12 \cdot 10^4} = 566,3 \text{ MPa}$$

$$w_f = \frac{\pi}{2D} \left[\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16} \right] = 2,12 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

• Coeff di sicurezza: $S = \frac{\sigma_s}{\sigma_f^{MAX}} = \frac{700}{566,3} = 1,2$ non ho ancora svernato il componente ma a suo rischio

Se aumento ancora il carico diminuisce il coeff di sicurezza

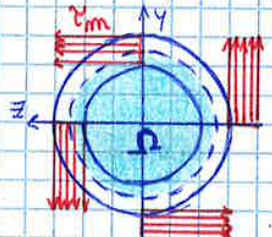
$$\sigma^m \approx \frac{N}{\left(\frac{2\pi d_m}{2}\right)S} = 39,79 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{xx}^f = \sigma^f = -\frac{Mz}{J_z} y \Rightarrow \sigma_{xx}^f_{max} \left(y = \frac{D}{2}\right) = \frac{200000 \cdot \frac{d}{2}}{25148,05 \cdot \frac{d}{2}} = 163 \text{ MPa}$$

La τ delle cerchie sovrapposte è assimilabile ad una τ media, approssimazione ad un valore medio costante:

$$\tau_m = \frac{M_t}{2,25S} = \frac{M_t}{2\left(\pi \frac{d_m^2}{4}\right)S} = 26 \text{ MPa} \approx \tau_{max}^t$$



Angolo di torsione unitario (per metro di lunghezza $l=1\text{m}$, perché non è data la lunghezza): $\gamma \cdot l = \Delta\theta \frac{d_m}{2} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\gamma}{d_m} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{26}{210000} = 3,22 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad \text{oppure: } \theta = \frac{M_t \cdot l}{\Delta G \Omega^2 S} = \frac{M_t}{\Delta G \Omega^2} \cdot \frac{2\pi \left(\frac{d_m}{2}\right)}{S} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

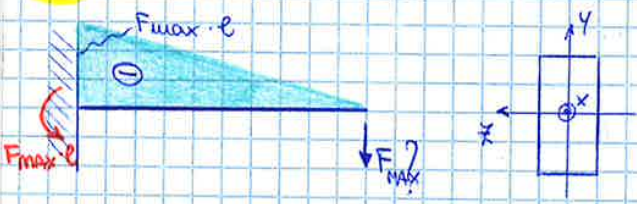
Calcolo tensioni nei punti A, B, C:

(A) $\sigma_{xx}^{TOT} = \sigma^m + \sigma_{min}^f$ minimo perché le fibre in alto sono compresse per il momento M_t imposto.

(B) $\sigma_{xx}^{TOT} = \sigma^m$ non ho tens. di flessione perché è l'asse neutro

(C) $\sigma_{xx}^{TOT} = \sigma^m + \sigma_{max}^f$

Es 8



Calcolo flessione massima e il carico corrispondente a cui inizia lo snervamento tanto come

$$\sigma_{max}^f = \frac{M_f}{W_f} = \frac{F_{max} \cdot l}{W_f} = \sigma_s \quad \text{uguale alla tens. di snervamento perché così ottengo coeff. di sicurezza } S=1$$

flessione massima $y_{max} = \frac{1}{8} \frac{F_{max} l^3}{EJ_z}$

A causa di F_{max} trasversale non nasce solo momento: si hanno anche tensioni di