NUMERO: 1529A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Brondino

MATERIA: Fisica I. Prof.Gamba

03/03/14

meccanica { cinematica, statica, dinamica }

- punto materiale
- sistemi di punti materiali
- corpo rigido
- sistemi di corpi rigidi

} numero finito di gradi di libertà

termodinamica

- fluidi
- gas

} numero infinito di gradi di libertà

MECCANICA CLASSICA:

- $v \ll c \simeq 299\,792\,458 \; m/s$
- $\Delta x \, \Delta(mv) \gg h \simeq 6{,}62606957 \cdot 10^{-34} \; kg \cdot m^2/s$ (principio di indeterminazione Heisenberg)

velocità abbastanza ridotte e dimensioni abbastanza grandi

MECCANICA QUANTISTICA:

grandi velocità / dimensioni piccole

GRANDEZZE FONDAMENTALI:

spazio	lunghezza	L	m	"strada fatta dalla luce in 1/299 792 458 secondi"
tempo	tempo	T	s	"9 192 631 770 periodi della radiazione di cesio 133"
materia	massa	M	kg	"fissato in modo che la cost. di Plank valga $6{,}62606X \cdot 10^{-34}$"

GRANDEZZE DERIVATE:

- $v = \dfrac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo}} \qquad [v] = \dfrac{m}{s}$ (velocità)

$$v = 20 \; \frac{m}{s} = 20 \; \frac{\frac{1}{1000} \; km}{\frac{1}{3600} \; h} = 20 \cdot \frac{3600}{1000} \frac{km}{h} = 20 \cdot 3{,}6 \; \frac{km}{h} = 72 \; \frac{km}{h}$$

S.I.

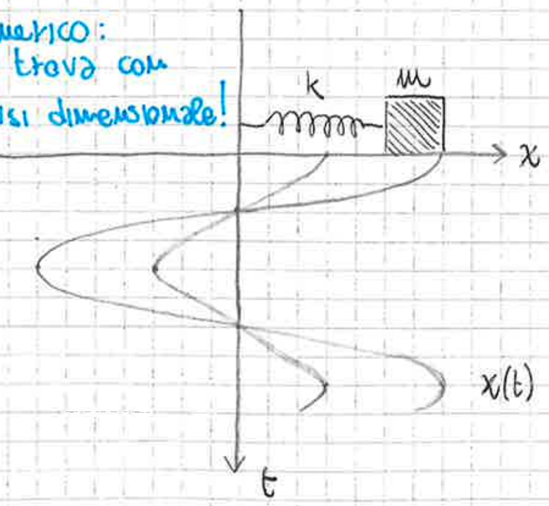
- $a = \dfrac{\text{variazione di velocità}}{\text{tempo}} \qquad [a] = \left[\dfrac{1}{T} \; v\right] = \dfrac{1}{T} \dfrac{L}{T} = \dfrac{L}{T^2} = \dfrac{m}{s^2}$ (accelerazione)

$$g = 9{,}81 \; \frac{m}{s^2}$$

ANALISI DIMENSIONALE:

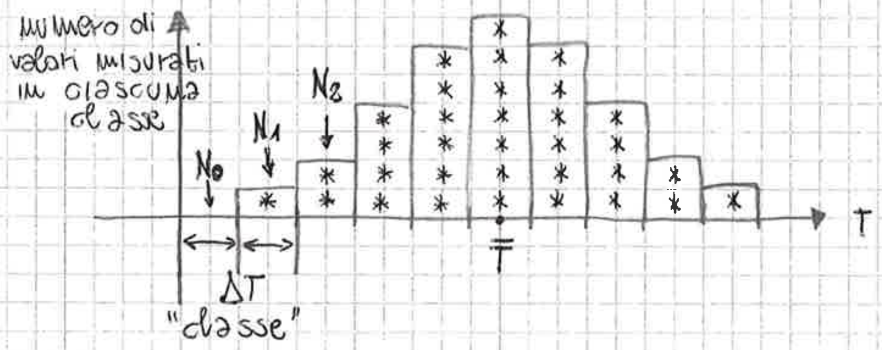
$$\underset{m}{x(t)} = \underset{m}{A} \sin\left(\frac{t \, 2\pi}{T}\right)$$

fattore numerico: non si trova con l'analisi dimensionale!



- oppure **ISTOGRAMMA:**

T_1
T_2
T_3
$\vdots$
T_N



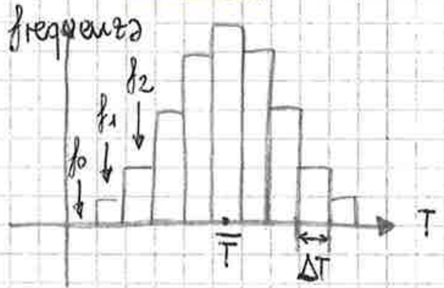
N_i = numero di valori misurati che sta tra $i\Delta t$ e $(i+1)\Delta t$

- **ISTOGRAMMA DELLE FREQUENZE:**

$$f_i = \frac{N_i}{N}$$

$$\Sigma N_i = N$$

$$\boxed{\Sigma f_i = 1}$$

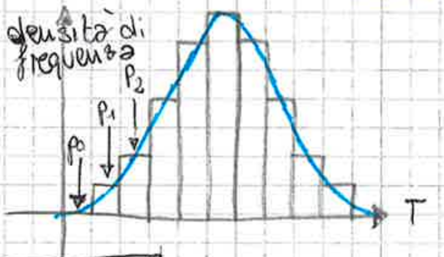


ora l'altezza di un rettangolino rappresenta la frequenza con la quale osserviamo un valore tra $i\Delta t$ e $(i+1)\Delta t$

- **ISTOGRAMMA DELLA DENSITÀ DI FREQUENZA:**

$$p_i = \frac{f_i}{\Delta T} = \frac{N_i}{N\Delta T}$$

"**ISTOGRAMMA NORMALIZZATO**"



$$\underset{\text{altezza}}{f_i = p_i} \cdot \underset{\text{base}}{\Delta t} = \text{area del rettangolino } i\text{-esimo}$$

$$\boxed{\Sigma p_i \Delta T = 1}$$

$$\boxed{p(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(T-\bar{T})^2}{2\sigma^2}}}$$

CURVA DI GAUSS, GAUSSIANA, CURVA A CAMPANA

$\sigma \to 1$, $\bar{T} \to 0$, $T \to x$

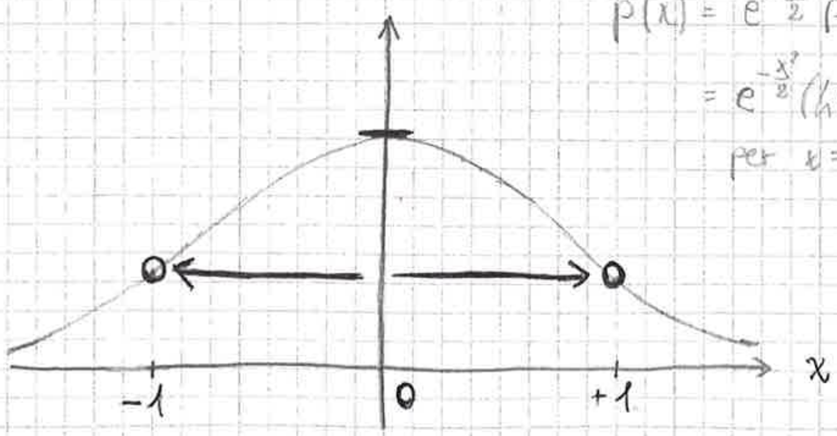
$$\boxed{p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}}$$ PARI

$\dot{p}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x) = 0$ per $x = 0$

$\ddot{p}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x)(-2x) + e^{-\frac{x^2}{2}}(-2) =$

$= e^{-\frac{x^2}{2}}(4x^2 - 2) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}(2x^2 - 1) = 0$

per $x = \pm 1$



- **ESERCIZIO:**

trovare il max in 0, flessi in ± 1; $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

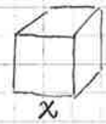
normalizzazione (voglio area 1)

$$\frac{df(x)}{dx} \cdot dx \simeq \underbrace{f(x+dx) - f(x)}_{\substack{df(x) \\ \text{incremento di } f}}$$

- differenziale:

$$\boxed{df(x) \simeq \frac{df(x)}{dx} \cdot dx}$$ è la derivata di f moltiplicata per l'incremento dx

- esempio:



$V(x) = x^3$ volume del cubo

quanto aumenta il volume del cubo se il lato diventa $x + dx$?

$$dV \simeq \frac{dV}{dx} dx = 3x^2 \cdot dx \qquad \text{vale se } dx \ll x$$

approssimazione del 1° ordine

$$x = 1\ m, \quad dx = 1\ cm$$

$$dV \simeq 0{,}03\ m^3$$

DIFFERENZIALE IN 2 VARIABILI:

$g = g(\ell, T)$

$f = f(x, y)$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \simeq \frac{f(x+dx, y) - f(x,y)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \simeq \frac{f(x, y+dy) - f(x,y)}{dy}$$

VARIAZIONE RELATIVA:

$f(x)$

$$d\ln f(x) = \frac{d\ln f(x)}{dx} \cdot dx = \frac{1}{f(x)} \cdot \overbrace{\frac{df(x)}{dx} \cdot dx}^{df} = \frac{df(x)}{f(x)}$$ variazione relativa

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{f} = d\ln f}$$ la variazione relativa è il differenziale del logaritmo

- esempio:

$f = g \cdot h$ PRODOTTO

$$\frac{df}{f} = d\ln f = d\ln(g \cdot h) = d[\ln g + \ln h] = d\ln g + d\ln h = \frac{dg}{g} + \frac{dh}{h}$$

$$\boxed{\frac{df}{f} = \frac{dg}{g} + \frac{dh}{h}}$$ la variazione relativa di un prodotto è la somma delle variazioni relative dei fattori

$\Downarrow$

- l'errore relativo su un prodotto è la somma degli errori relativi sui fattori

ERRORE STANDARD DELLA MEDIA:

$$\bar{T} = \frac{1}{N}(T_1 + T_2 + \dots + T_N)$$

$\sigma_{\bar T}$ (variabilità sulla media) $\quad$ σ_T (variabilità sulle misure)

se faccio 100 misure e me ricavo la media per 100 giorni di fila)

$\Rightarrow$ intuitivamente $\sigma_{\bar T} << \sigma_T$

$$\sigma_{\bar T}^2 = d\bar{T}^2 = \left[\frac{1}{N}(dT_1 + dT_2 + \dots + dT_N)\right]^2 = \frac{1}{N^2}\Big[\overbrace{dT_1^2 + dT_2^2 + \dots + dT_N^2}^{N} + \underbrace{2dT_1 dT_2 + \dots}_{\text{media} \simeq 0}\Big] \simeq \frac{1}{N^2} N \sigma_T^2$$

scarto sulla media

$\sim \frac{N^2}{2}$ termini tutta la parentesi

se faccio la media sulle ripetizioni degli esperimenti sopravvivono solo i quadrati perfetti (indicata a matita sopra)

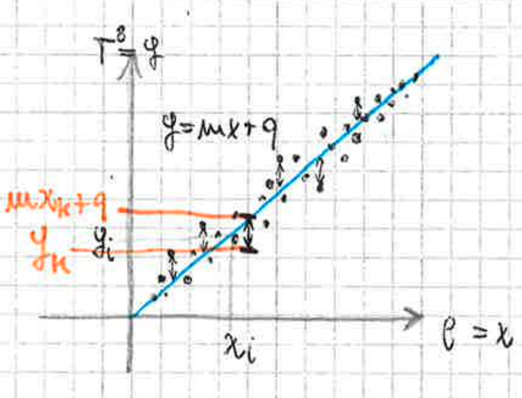
$$\boxed{\sigma_{\bar T}^2 = \frac{1}{N}\sigma_T^2} \qquad \boxed{\sigma_{\bar T} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_T}$$

l'errore standard sulla media è uguale all'errore sulla singola misura diviso per fattore $\sqrt{N}$; se voglio raddoppiare la precisione su $\bar T$ devo fare 4 volte più misure, triplicare $\rightarrow$ 9 volte più misure etc.

METODO DEI MINIMI QUADRATI:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)\cdot \ell$$

m = coefficiente angolare



trovare la retta che minimizza le distanze dai punti sperimentali

$$\left.\begin{matrix} x_1, x_2, x_3, \dots, x_N \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_N \end{matrix}\right\}$$ DATI; m, q INCOGNITE (parametri della retta di regressione)

cerco la retta che minimizza i quadrati delle distanze dei punti sperimentali dalla retta stessa $\Rightarrow$ introduco la

FUNZIONE COSTO:

$$f(m,q) = \sum_{k=1}^{N}(\underbrace{mx_k + q}_{\text{valore "teorico"}} - \underbrace{y_k}_{\text{valore sperimentale}})^2$$ $\rightarrow$ cerco minimo della funzione

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial m} = \sum_{k=1}^{N} 2(mx_k + q - y_k)\cdot x_k \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q} = \sum_{k=1}^{N} 2(mx_k + q - y_k)\cdot 1 \end{cases}$$

metto in evidenza le incognite!

NOTAZIONE SCIENTIFICA:

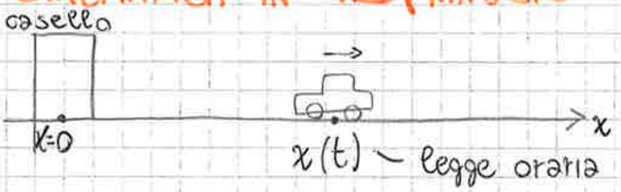
$15,4 \text{ km} = 15400 \text{ m} = 1,54 \cdot 10^4 \text{ m}$

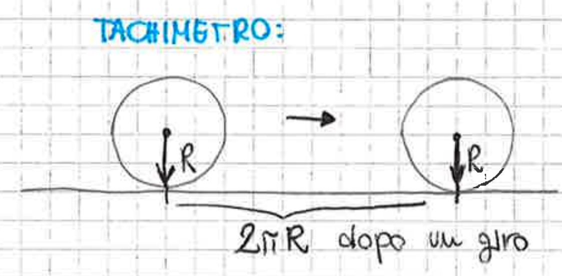
- la parte intera è sempre > 0 e di una sola cifra

ESEMPIO:

- circonferenza della Terra:
  $40\,000\,000 \text{ m} = 4 \cdot 10^7 \text{ m}$
- diametro di una cellula:
  $10 \mu m = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 10^{-5} \text{ m}$
- atomi di C in 12 g C:
  $6 \cdot 10^{23}$
- secondi in un giorno:
  $24 \cdot 3600 = 2,4 \cdot 10^1 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \cong 8 \cdot 10^4$
- secondi in un anno:
  $365 \cdot 8,64 \cdot 10^4 = 3,65 \cdot 10^2 \cdot 8,64 \cdot 10^4 = 3,65 \cdot 8,64 \cdot 10^6 \sim 30 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^7$

CINEMATICA IN 1D (KINESIS = MOVIMENTO):



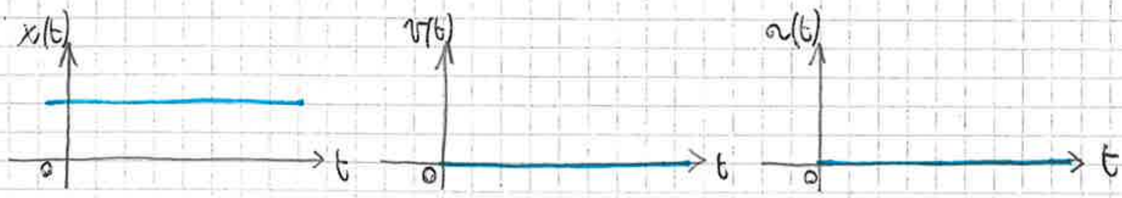


GRANDEZZE CINEMATICHE:

- posizione: $x(t)$ legge del moto
- velocità: $v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
- accelerazione: $a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d v(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

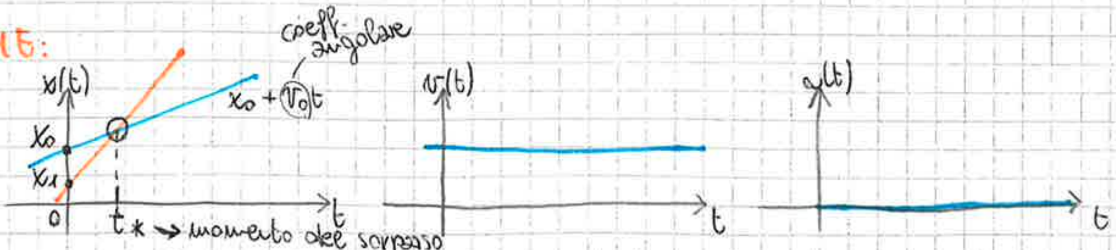
1. QUIETE:

$x(t) = x_0$
$v(t) = 0$
$a(t) = 0$



2. MOTO UNIFORME:

$x(t) = x_0 + v_0 t$
$v(t) = \text{cost.}$
$a(t) = 0$



$x_0 + v_0 t_* = x_1 + v_1 t_* \Rightarrow x_0 - x_1 = t_*(v_1 - v_0) \Rightarrow t_* = \frac{x_0 - x_1}{v_1 - v_0}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 140

• **RIASSUMENDO:**

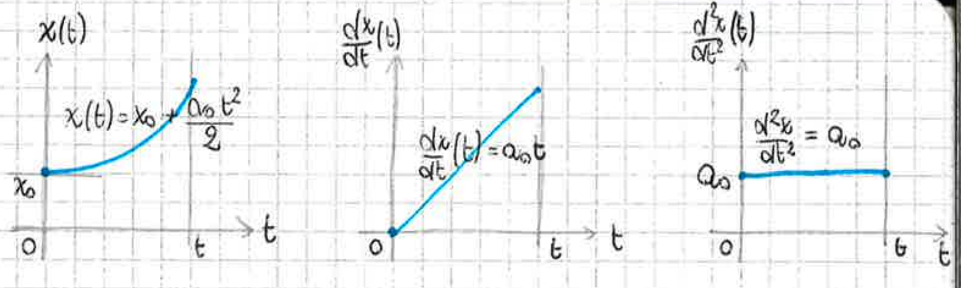
$$x(t) = x_0 + \frac{a_0 t^2}{2}$$

$\int dt$ ↑   ↓ d/dt

$$\frac{dx}{dt}(t) = a_0 t$$

$\int dt$ ↑   ↓ d/dt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0$$



• **PROBLEMA:** caso in cui sto già viaggiando con velocità $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$ e inizio un sorpasso, perciò accelero con accelerazione costante $\boxed{\frac{d^2x}{dt}(t) = a_0}$ rispetto a prima cambiamo solo i dati iniziali

$$x(0) = x_0 \qquad \frac{dx(0)}{dt} = v_0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2}(t) = a_0$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(0) + \int_0^t \frac{d^2x}{dt^2}(t')\,dt' = v_0 + \int_0^t a_0\,dt' = v_0 + a_0 t$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = v_0 + a_0 t}$$ **PRIMA INTEGRAZIONE**

$$x(t) = \underbrace{x(0)}_{x_0} + \int_0^t \frac{dx}{dt}(t')\,dt' = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t')\,dt' =$$

$$= x_0 + \left[v_0 t' + \frac{a_0 t'^2}{2}\right]_0^t = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}}$$ **SECONDA INTEGRAZIONE**

• **RIASSUMENDO:**

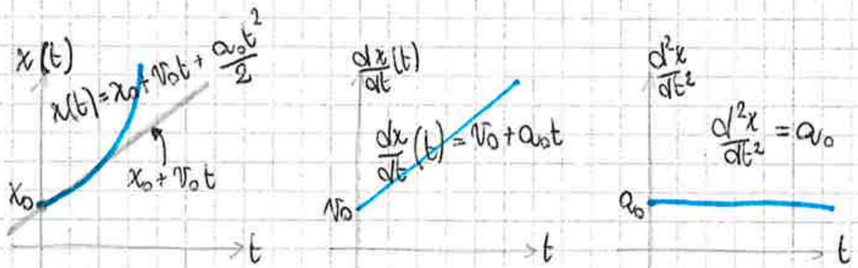
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}$$

$\int dt$ ↑   ↓ dt

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t$$

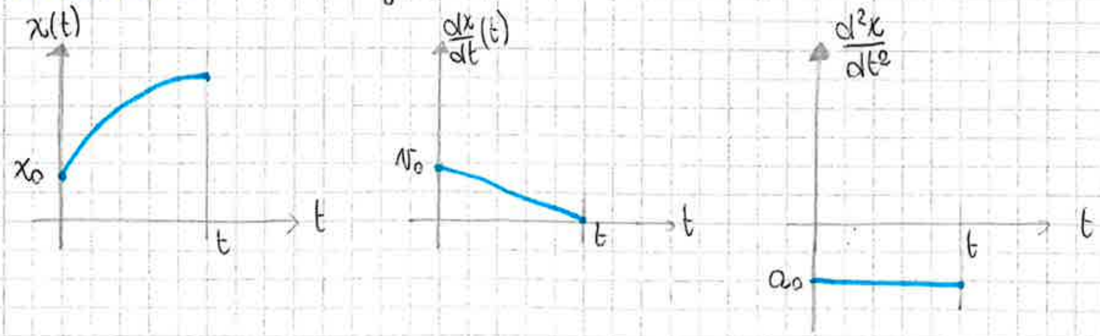
$\int dt$ ↑   ↓ dt

$$\frac{d^2x}{dt} = a_0$$



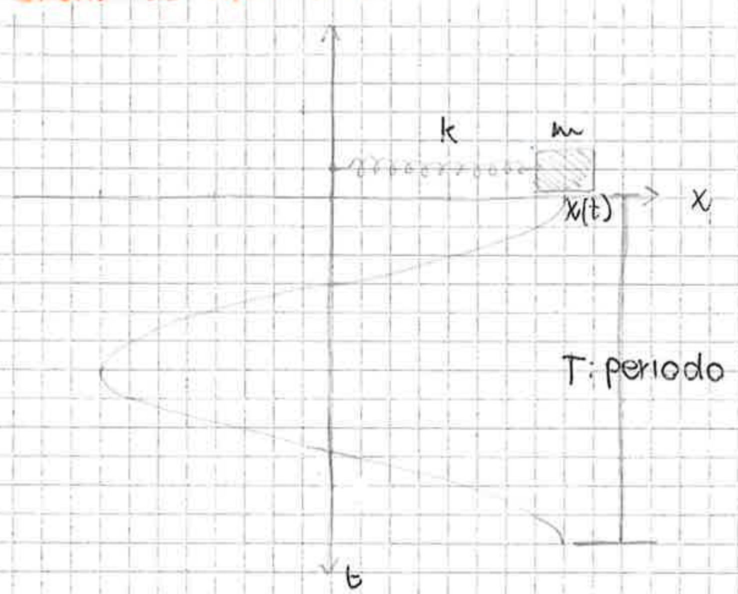
grafici nel caso di $a_0 > 0$

• **PROBLEMA:** se a_0 fosse minore di 0:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 140

OSCILLATORE ARMONICO:



$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

è un moto vario!

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\frac{2\pi}{T}\cdot A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\boxed{A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

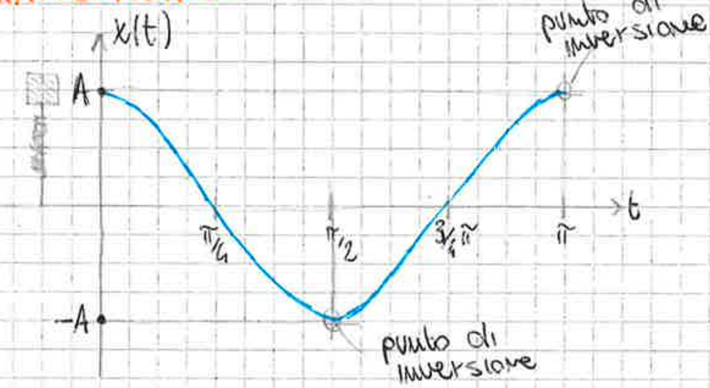
$\omega = \frac{2\pi}{T}$: pulsazione

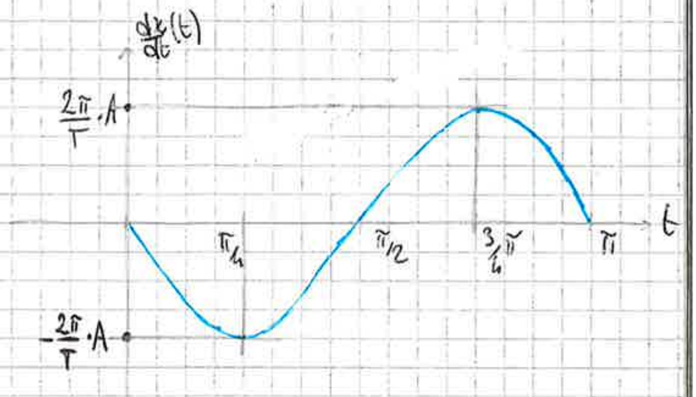
- potrei riscrivere:

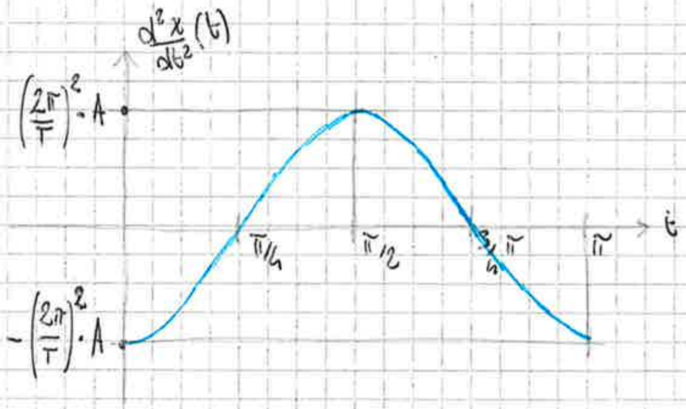
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot x(t)}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE

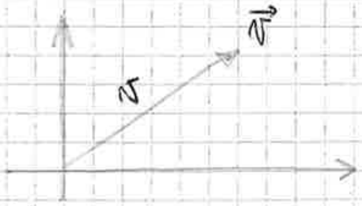
GRAFICAMENTE:







VETTORI:



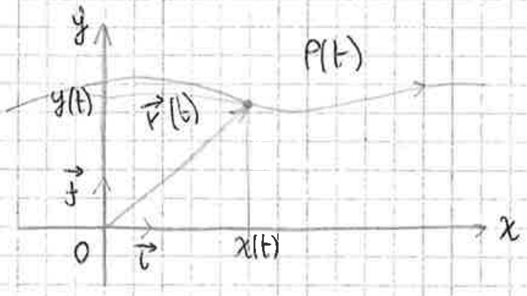
$v = |\vec{v}|$

- SCALARI (temperatura, pressione, ...)
- VETTORIALI (velocità, accelerazione, ...)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 140

CINEMATICA NEL PIANO:

11/03/14



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}(t)\,\vec{j}$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\,\vec{j}$$

$\downarrow \quad \vec{g} = -g\vec{j} \qquad g = 9{,}81\ m/s^2$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{g}$$

$$\vec{i}\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \cancel{\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}}\right) = \left(\cancel{-g\vec{j}}\right)\cdot\vec{i} \qquad \begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\\ \vec{j}\cdot\vec{j} = 1\\ \vec{i}\cdot\vec{j} = 0\end{cases}$$

$\left\{\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0\right.$ moto uniforme

$$\vec{j}\cdot\left(\cancel{\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}\right) = \left(-g\vec{j}\right)\cdot\vec{j}$$

$\left\{\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g\right.$ moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = 0\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}(t) = -g\end{cases} \xrightarrow{\text{integro}} \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}(t) = \dfrac{dx}{dt}(0) = U_0\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{dy}{dt}(0) - g\cdot t = V_0 - gt\end{cases} \xrightarrow{\text{integro}} \begin{cases}x(t) = x_0 + U_0 t & ①\\[2mm] y(t) = y_0 + V_0 t - \dfrac{gt^2}{2} & ②\end{cases}$$

curva in forma parametrica

LEGGE DEL MOTO

$\Rightarrow$ TRAIETTORIA?

devo eliminare t:

$t = \dfrac{x - x_0}{U_0}$ ricavato da ①

sostituisco in ②: $\boxed{y = y_0 + V_0\,\dfrac{x - x_0}{U_0} - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x - x_0}{U_0}\right)^2}$

parabola!

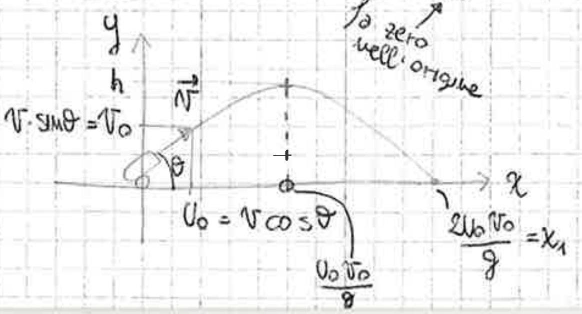
TRAIETTORIA

- semplificazione:

$x_0 = 0,\ y_0 = 0$

$$\boxed{y = \frac{V_0}{U_0}x - \frac{g}{2U_0^2}x^2 = \underbrace{\frac{x}{U_0}}\ \overbrace{\left(V_0 - \frac{gx}{2U_0}\right)}^{=0 \text{ quando } x = \frac{2U_0V_0}{g}}}$$

fa zero nell'origine

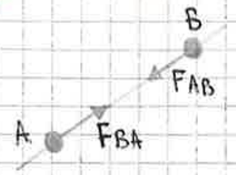


$$tg\,\theta = \frac{V_0}{U_0}$$

$$\vec{v} = \vec{i}\cdot\underbrace{v\cdot\cos\theta}_{U_0} + \vec{j}\cdot\underbrace{v\cdot\sin\theta}_{V_0}$$

dati iniziali: x_0, y_0, V_0, U_0

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE (TERZA LEGGE DEL MOTO):



$F_{AB} + F_{BA} = 0$

Le forze che due corpi esercitano uno sull'altro sono sempre uguali e dirette in verso opposto.

- nel caso terra-luna, la forza è la stessa ma essendo la massa della terra molto più grande essa rimane sostanzialmente ferma (queste azioni non sono uguali alla variazione di velocità ma alla variazione di quantità di moto, ergo conta la massa)

SECONDA LEGGE:

$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ dimensioni fisiche $[F] = [m \cdot a] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$ (Newton)

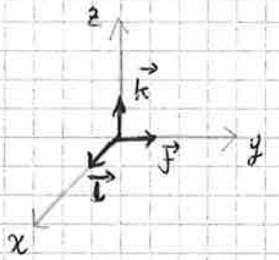
- se $m = cost$ e ricordo che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, allora: $[1N = 1kg \cdot m/s^2]$

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}}$$ (forza = massa · accelerazione)

- se ho una forma esplicita per $\vec{F}$ ottengo un eq. differenziale del 2° ordine per $\vec{r}(t)$ che posso risolvere.

ESEMPIO: (FORZA GRAVITAZIONALE)

$\vec{F}_{peso} = -mg\vec{k}$



$\downarrow \vec{F}_{peso}$

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\vec{k}}$$ equazione differenziale del moto di un corpo soggetto alla forza peso

$[g \simeq 9{,}81 \ m/s^2]$

come già visto:

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \end{cases}$$

OMOGENEE (prime due); NON OMOGENEA (terza)

- tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione indipendentemente dalla massa
- la massa è una misura dell'inerzia del corpo (cioè una misura della resistenza di un corpo ad abbandonare lo stato di moto rettilineo uniforme)

massa ≠ peso

$\downarrow$ m (quantità di materia) $\uparrow$ kg

$\downarrow$ $m \cdot g$ (forza) $\uparrow$ N

(la massa rimane "invariata" ma il peso cambia a seconda di dove mi trovo: l'astronauta nello spazio ha peso = 0 ma la stessa massa che aveva sulla terra)

NB: l'integrazione dell'eq. differenziale è semplice perché l'accelerazione è costante!

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \\ y = y_0 + v_0 t \\ z = z_0 + w_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$[\vec{v}(0) = v_0\vec{i} + v_0\vec{j} + w_0\vec{k}]$

[LEGGE DEL MOTO DA II EQ NEWTON]

- $\int_0^t \frac{d^2z}{dt'^2}(t')\,dt' = -\int_0^t g\,dt' \Rightarrow \frac{dz}{dt}(t) - \underbrace{\frac{dz}{dt}(0)}_{w_0} = -gt \Rightarrow \int_0^t \frac{dz}{dt}(t')\,dt' = \int_0^t (w_0 - gt')\,dt' \Rightarrow z(t) - z_0 = w_0 t - \frac{gt^2}{2}$

$\Rightarrow z(t) = z_0 + w_0 t - \frac{gt^2}{2}$

• ALTRO METODO PER TROVARE $x(t)$ CHE SPIEGA $\boxed{K = m\frac{v^2}{2}}$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,x(t)$$

ricordiamo il caso di una forza costante (peso):

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg$$

$$m\int_0^t \frac{d^2x(t')}{dt^2}\,dt' = -\int_0^t mg\,dt' = -mgt \Leftarrow$$ non c'era l'incognita $x(t)$ a 2° membro!

in questo caso invece:

$$m\int_0^t \frac{d^2x(t')}{dt^2}\,dt' = -k\int_0^t x(t')\,dt' \Leftarrow$$ integrale di una funzione incognita, quindi:

TRUCCO:

$$\Rightarrow m\frac{d^2x(t)}{dt^2}\cdot\frac{dx(t)}{dt} = -k\,x(t)\cdot\frac{dx(t)}{dt}$$ $\Leftarrow$ moltiplico per la velocità $\frac{dx(t)}{dt}$ ambo i membri dell'eq.

$$\frac{d}{dt}\left\{\underbrace{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2}_{\text{ENERGIA CINETICA } K}\right\} = -k\frac{d}{dt}\left[\frac{x^2(t)}{2}\right]$$ $\Leftarrow$ sto derivando un'equazione che presenta $f[x(t)]$ a primo membro e $x(t)$ a secondo membro $\Rightarrow$ ricordo il th. di derivazione di una funzione composta $\frac{d}{dt}f[x(t)] = \frac{df}{dx}[x(t)]\cdot\frac{dx}{dt}$ che mi permette di "raccogliere" l'operatore di derivata

porto tutto a primo membro:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \frac{k}{2}x^2(t)\right\} = 0$$ $\Leftarrow$ equazione differenziale 2° ordine sotto forma (derivata totale) = 0

ENERGIA CINETICA (K)

INTEGRO:

$$\boxed{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \frac{k}{2}x^2(t) = cost = E}$$ (E) ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA (si conserva)

(U) ENERGIA POTENZIALE

[costante di integrazione]

• E si ricava dai dati iniziali:

$$\boxed{E = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{k}{2}x_0^2}$$

• dato che $E = K + U$ ci sarà un momento in cui K è massima e U minima, e viceversa; l'energia è un integrale primo del moto, cioè nasce dalla 1ª integrazione della 2ª equazione di Newton

• $K = \frac{m}{2}v^2$, $U = \frac{k}{2}x^2$, $K + U = E$

$\Rightarrow$ unità di misura: $[E] = [K] = \left[\frac{m}{2}v^2\right] = kg\cdot\left(\frac{m}{s}\right)^2 = J \rightarrow$ Joule

CONTINUA NELLA PAGINA SEGUENTE!

$\Rightarrow X(t_f) = \sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_f \pm \Phi_0\right)$ $\longrightarrow$ $\left[X = \sqrt{\frac{k}{2E}}\cdot x \;,\quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cdot X\right]$

$\Rightarrow \boxed{x(t_f) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_f \pm \Phi_0\right)}$ torno alla variabile x

legge del moto:

$[\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta = \sin(\vartheta + \pi)]$ ricordando questo

$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \Phi_0\right)}$ [scarico il $-$ sulla fase arbitraria Φ_0]

$\left[A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \;,\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \;,\quad \Phi_0 = \pm \arcsin X(0)\right]$

$\Downarrow$

$\boxed{x(t) = A\cdot\sin(\omega t + \Phi_0)}$ $\Leftarrow$ LEGGE DEL MOTO

DIPENDENZA DI A, Φ_0 DALLE CONDIZIONI INIZIALI x_0, v_0:

$$\begin{cases} E = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2 \\ A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x_0^2} \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \Phi_0) \\ \frac{dx}{dt}(t) = A\omega\cos(\omega t + \Phi_0) \end{cases}$$

• condizioni iniziali $(t = 0)$

$$\begin{cases} x_0 = A\sin\Phi_0 \\ \frac{v_0}{\omega} = \frac{A\cancel{\omega}\cos\Phi_0}{\cancel{\omega}} \end{cases}$$ [quadro e sommo per trovare A]

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2\sin^2\Phi_0 + A^2\cos^2\Phi_0 = A^2\overbrace{(\sin^2\Phi_0 + \cos^2\Phi_0)}^{1} = A^2$$

$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$ $\Leftarrow$ AMPIEZZA

$\frac{\omega x_0}{v_0} = \frac{\sin\Phi_0}{\cos\Phi_0} = \tan\Phi_0 \Rightarrow \boxed{\Phi_0 = \arctan\frac{\omega x_0}{v_0}}$ $\Leftarrow$ FASE [divido per trovare Φ_0]

$$\begin{cases} \Phi_0 = \arctan\frac{\omega x_0}{v_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \end{cases}$$

• $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$; $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega^2$

$\boxed{E = \frac{1}{2}A^2 k = \frac{m}{2}A^2\omega^2}$

pulsazione

"NU", frequenza

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$ periodo

$\sin(\omega t) = \sin(2\pi\nu\cdot t)$

- $[L] = [F \cdot \Delta x] = Nm = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = J$
- forza e spostamento concordi $\Rightarrow$ lavoro positivo, forza e spostamento discordi $\Rightarrow$ lavoro negativo.

caso massa-molla:

$F(x) = -kx$

$$\int_0^x F(x')\,dx' = \int_0^x -kx'\,dx' = -\frac{kx^2}{2}$$

$\Rightarrow$ sapevamo calcolare l'integrale $\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)\,dx$

- fare l'integrale vuol dire conoscere una primitiva di $F(x)$; poniamo che $U(x)$ sia una qualsiasi primitiva di $F(x)$: in questo caso posso quindi scrivere:

$$U(x) = -\int_a^x F(x')\,dx' \longleftarrow \text{[una qualsiasi primitiva di } F(x)]$$

punto fissato

segno $-$ messo per convenienza!

$$\frac{dU(x)}{dx} = -F \qquad \text{[la derivata di } U(x) \text{ va come meno la forza]}$$

$$\boxed{\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)\,dx = -U[x(t)] + U[x(0)]} \qquad \text{[TH. FOND. CALC. INT]}$$

- riscrivo il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(0)\right]^2 = -U[x(t)] + U[x(0)]$$

E

$$\boxed{\underbrace{\frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{U[x(t)]}_{\text{energia potenziale}} = \frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(0)\right]^2 + U[x(0)]} \Leftarrow \text{CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA}$$

energia cinetica + energia potenziale

energia totale
[CONSERVATA!]

$$\underbrace{U(x)}_{\text{energia potenziale}} = -\underbrace{\int_a^x F(x')\,dx'}_{\text{lavoro fatto dalla forza per spostare il punto da } a \text{ verso } x}$$

cambiato di segno

- il fotone, che non è un oscillatore classico ma quantistico, segue un'altra legge: $\boxed{E = \frac{h}{2\pi}\omega}$ $\quad [h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s]$

RIASSUNTO:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F[x(t)] \Leftarrow \text{II LEGGE DI NEWTON}$$

$\cdot \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2\right\} = \underbrace{F[x(t)]\ \frac{dx(t)}{dt}}_{\text{POTENZA} = F \cdot v}$$

la variazione di en. cinetica dipende dalla potenza applicata

$\int_0^t dt$ con cambio di variabile $t \to x$ a membro destro

$$\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{dx(0)}{dt}\right]^2 = \underbrace{\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)\, dx}_{\text{LAVORO} = F \cdot x} \Leftarrow \text{TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA}$$

(TEOREMA DELLE FORZE VIVE K = "vis viva")

$U(x) = -\int_a^x F dx'$

$$\underbrace{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]}_{\text{EN. CINETICA}} + \underbrace{U[x(t)]}_{\text{EN. POTENZIALE}} = \overbrace{E}^{\text{EN. TOTALE}} \Leftarrow \text{TEOREMA DI CONSERVAZIONE EN. TOTALE}$$

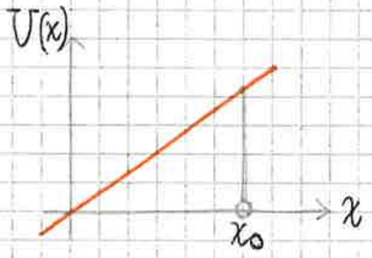
- $[\text{potenza}] = [\text{forza} \cdot \text{velocità}] = N \cdot \frac{m}{s} = \frac{J}{s} = W \to$ Watt

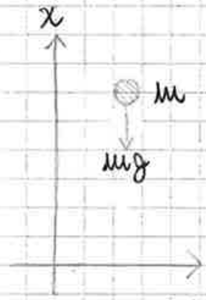
FORZA PESO:

$F = -mg$

$U(x) = -\int_0^x (-mg)\, dx' = mgx$

$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$ [la primitiva è definita a meno di una cost. additiva]



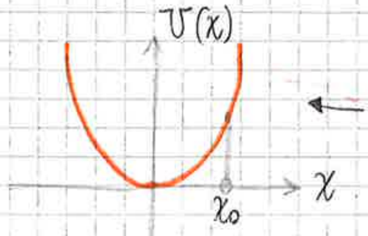


FORZA ELASTICA:

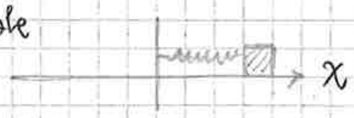
$F(x) = -kx$

$U(x) = -\int_0^x (-kx')\, dx' = \frac{kx^2}{2}$

$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$ [il corpo è accelerato verso le regioni che hanno en. potenziale più bassa]



"buca di potenziale"



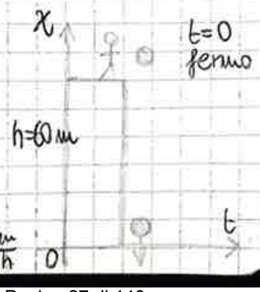
ESERCIZIO:

$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = E$, cioè:

ho sfruttato l'arbitrarietà nella scelta della costante additiva per avere $U(x=0)=0$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}_{\text{ist. finale}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0}_{\text{ist. iniziale}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$\Rightarrow |v| = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot (9{,}81\ \tfrac{m}{s^2}) \cdot 60\,m} \simeq 34\,\tfrac{m}{s} \simeq 120\,\tfrac{km}{h}$$



$$\frac{\cancel{R+h}}{\cancel{GMm}} = \frac{1 \cdot \cancel{GMm}}{\frac{GMm}{R+h_0} + \frac{1}{2}m v^2} - R \Rightarrow h = \frac{R+h_0}{1 + (R+h_0)\frac{v^2}{2GM}} - R$$

termine piccolo, ε

FORZA GRAVITAZIONALE AL SUOLO:

$$F(R) = -G\frac{Mm}{R^2} = -gm$$

raggio della terra

$$= g = 9{,}81\ m/s^2$$

ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO:

$$\boxed{U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}} \leftarrow \text{[potenziale di Lennard-Jones]} \qquad \boxed{a, b > 0}$$

descrive le forze che agiscono tra molecole biatomiche in modo abbastanza preciso.

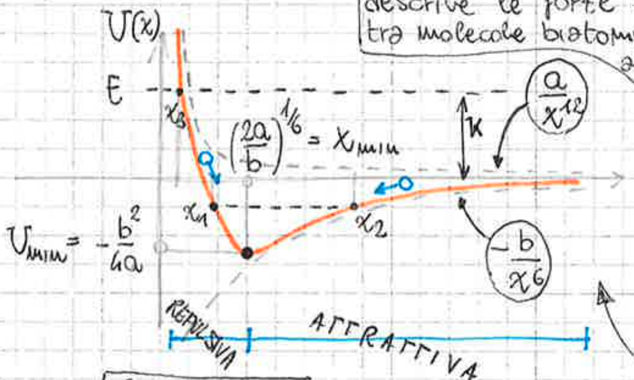
$U(x) = a(x)^{-12} - b(x)^{-6}$

$U'(x) = -12a(x)^{-13} + 6b(x)^{-7} = 0$

$12a(x)^{-13} = 6b(x)^{-7} = \frac{b}{x^7}$

$\frac{2a}{b}\frac{x^7}{x^{13}} \quad \frac{2a}{bx^6} = 1$

$x^6 = \frac{2a}{b} \Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}} = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$



[energia potenziale attrattiva a lungo raggio e repulsiva a breve raggio]

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

1. il moto è possibile solo per quegli x per cui $U(x) < E$
   $K + U = E$ $\quad (K \geq 0)$
   $U = E - K$

2. $E = U_{minimo} \Rightarrow$ il corpo è fermo alla posizione $x = x_{min}$ (se acquisisse energia cinetica dovrebbe diminuire quella potenziale che è già minima $\Rightarrow$ non è possibile!)

3. $U_{min} < E < 0 \Rightarrow$ il corpo oscilla tra i punti di inversione x_1 e x_2

4. $E > 0$ il corpo parte da fermo in x_3 e si allontana verso $+\infty$ con velocità: $\frac{m}{2}v^2 = K \simeq E \Rightarrow v \simeq \sqrt{\frac{2}{m}E}$ [a $+\infty$ il potenziale vale $\sim 0 \Rightarrow E = 0 + K$]
   - nel caso della molecola di H_2, questa situazione corrisponde alla dissociazione: $H_2 \rightarrow H + H$

5. $\varepsilon = -U_{min} = b^2/4a$ ha un significato di energia di dissociazione.

per esempio: $\varepsilon H_2 = 0{,}72$ aJ (atto Joule) (atto $= 10^{-18}$)

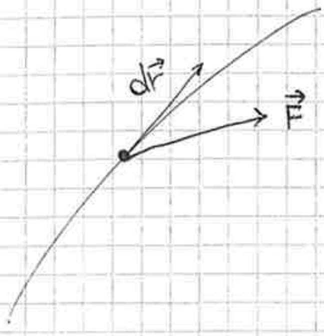
$x_{min}\ H_2 = 74$ pm (picometri) (pico $= 10^{-12}$)

- **POTENZIALE DI LENNAR-JONES**: $U(x) = \varepsilon\left[\left(\frac{x_{min}}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{x_{min}}{x}\right)^6\right]$

la scala naturale di energia è data dall'energia di dissociazione

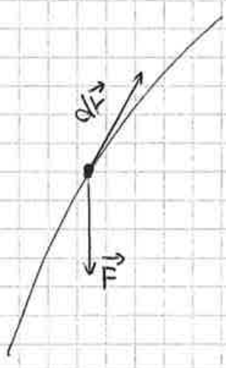
rapporti adimensionali

la scala naturale di lunghezza è data dalla distanza di riposo x_{min}

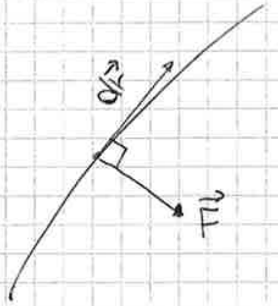


$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$

[positivo se $\vec{F}$, $d\vec{r}$ sono "concordi"]



[negativo se $\vec{F}$, $d\vec{r}$ sono "discordi"]

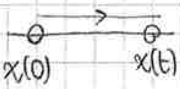


[zero se $\vec{F} \perp d\vec{r}$]

FORZA DEVIATRICE

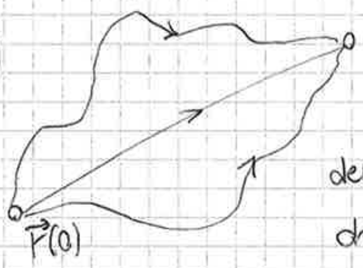
• voglio introdurre una primitiva all'integrale del lavoro:

(1D)



ho un solo modo per andare da $x(0)$ a $x(t)$

(3D)



in 3D potrebbe succedere che l'integrale del lavoro dipenda dalla strada che faccio per calcolarlo!

• se siamo così fortunati che l'integrale non dipende dal cammino possiamo introdurre l'energia potenziale come già nel caso 1D; in questo caso dico che il campo delle forze è conservativo. Allora esiste una funzione potenziale:

$$V(\vec{r}) = \int_{\emptyset}^{\vec{r}} \vec{F}[\vec{r}'] \cdot d\vec{r}'$$

dipende solo dal punto di arrivo (per ipotesi)

solo un cammino

$$V(\vec{r}) \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \vec{F}[\vec{r}_k] \cdot \Delta\vec{r}_k$$

[la posso sempre definire ma in generale dipende dalla scelta del cammino. Questa $V(\vec{r})$ è una specie di primitiva di $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$]

[derivando $V(\vec{r})$, ritrovo $\vec{F}(\vec{r})$?]

$$V(\vec{r} + \Delta\vec{r}_N) \simeq \sum_{k=0}^{N} \vec{F}[\vec{r}_k] \cdot \Delta\vec{r}_k$$

$$V(\vec{r} + \Delta\vec{r}_N) - V(\vec{r}) \simeq \vec{F}[\vec{r}_N] \cdot \Delta\vec{r}_N$$

• prendo al posto di $\Delta\vec{r}_N$:

$\vec{i}\,\Delta x$, $\vec{j}\,\Delta y$, $\vec{k}\,\Delta z$

$$\frac{V(\vec{r} + \vec{i}\Delta x) - V(\vec{r})}{\Delta x}$$

$$\begin{cases} V(\vec{r} + \vec{i}\Delta x) - V(\vec{r}) \cong \vec{F} \cdot \vec{i}\Delta x = \boxed{F_x}\,\Delta x \\ V(\vec{r} + \vec{j}\Delta y) - V(\vec{r}) \cong \vec{F} \cdot \vec{j}\Delta y = F_y\,\Delta y \\ V(\vec{r} + \vec{k}\Delta z) - V(\vec{r}) \cong \vec{F} \cdot \vec{k}\Delta z = F_z\,\Delta z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x^{(x,y,z)} = \partial V / \partial x \\ F_y^{(x,y,z)} = \partial V / \partial y \\ F_z^{(x,y,z)} = \partial V / \partial z \end{cases}$$

[una specie di generalizzazione 3D della primitiva, serve per l'en. potenziale]

• generalizza il th. fond. calc. int. al caso 3D, derivo V rispetto a x, y, z e trovo le componenti F_x, F_y, F_z della forza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 140

ESEMPI DI FORZE POSIZIONALI NON CONSERVATIVE:

1) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{k} \times \vec{r}$

$\vec{k}$ versore cartesiano, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- verificare che $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{k} \times \vec{r} = \vec{k} \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = x\vec{j} - y\vec{i}$$

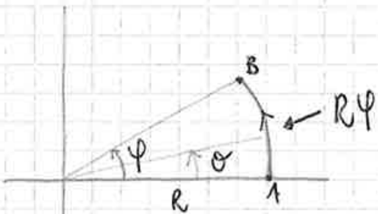
$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{cases} , \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$\Rightarrow F_x = -y \,,\; F_y = x \,,\; F_z = 0$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} = 1 \Rightarrow$ la forza non soddisfa la condizione $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

- $L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (\vec{k} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} =$

$$= \int_A^B R^2 \, d\theta = R^2 \varphi$$



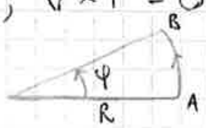
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{i} R\cos\theta + \vec{j} R\sin\theta \\ d\vec{r} = -\vec{i} R\sin\theta \, d\theta + \vec{j} R\cos\theta \, d\theta \\ \vec{k} \times \vec{r} = \vec{j} R\cos\theta - \vec{i} R\sin\theta \\ (\vec{k} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = (\vec{j} R\cos\theta - \vec{i} R\sin\theta) \cdot (\vec{j} R\cos\theta - \vec{i} R\sin\theta) \, d\theta = \\ = (R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta) \, d\theta = R^2 \, d\theta \end{cases}$$

- potremmo pensare che tutte le volte che $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ allora L_{AB} non dipende dal cammino e la forza è conservativa; in realtà c'è un'altra cosa che potrebbe andare storta: se esiste qualche punto $\vec{r}$ dove $\vec{F}$ non è definita.

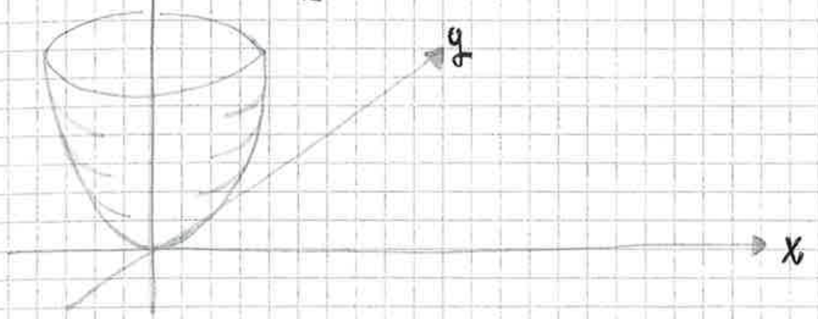
TH: se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ e non ci sono punti dove $\vec{F}$ non è definita, allora L_{AB} non dipende dal cammino e quindi posso definire un'energia potenziale in modo che sia $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

2) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{k} \times \vec{r}/r^2$ [questa non è definita in $r=0$]

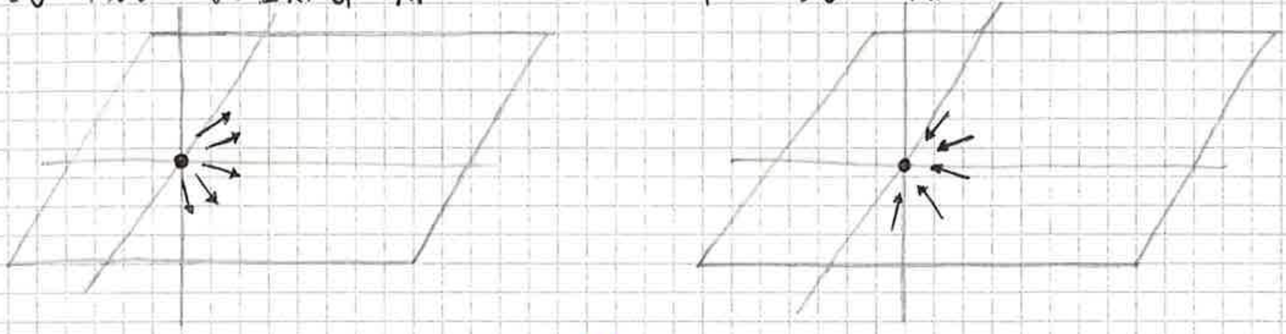
- verificare che, dove è definita, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
- verificare che $L_{AB} = R\varphi$



$U(x,y) = \frac{k}{2}(x^2+y^2)$



$\vec{\nabla}U = kx\vec{i} + ky\vec{j} = kr\,\vec{e}_r = k\vec{r}$ $\qquad$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -k\vec{r}$



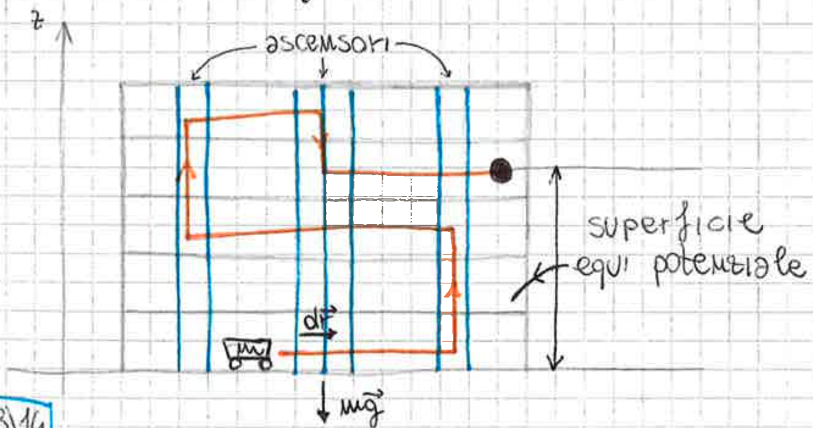
FORZA COSTANTE IN 3D (FORZA DI GRAVITÀ):

$\vec{F} = -mg\vec{k}$ $\quad \downarrow g$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$

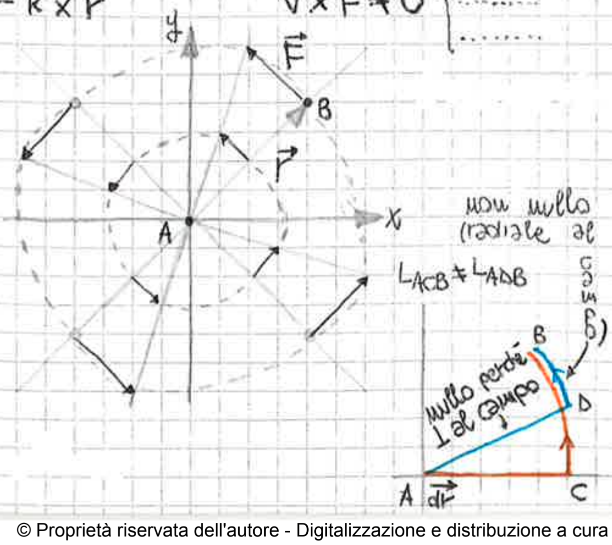
- $U(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^{\vec{r}} (-mg\vec{k})\cdot(\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz) = \int_0^{\vec{r}} mg\,dz = mgz$



25/03/14

FORZA NON CONSERVATIVA:

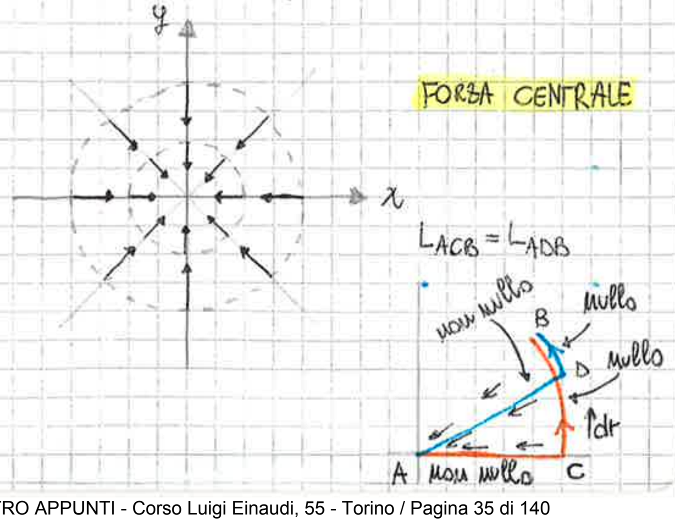
$\vec{F} = \vec{k}\times\vec{r}$ $\qquad$ $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq 0$ $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \neq \frac{\partial F}{\partial y} \right.$ ....



FORZA CONSERVATIVA:

$\vec{F} = -\vec{r}$ $\qquad$ $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

FORZA CENTRALE



$$\begin{cases} F_x(x,y) = 0 + \dfrac{\partial F_x}{\partial x}\cdot x + \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\cdot y + \dots \\ F_y(x,y) = 0 + \dfrac{\partial F_y}{\partial x}\cdot x + \dfrac{\partial F_y}{\partial y}\cdot y + \dots \end{cases} \qquad = \frac{\partial F_y}{\partial x}(0,0)$$

perche è uno sviluppo di Taylor ⇒ è una costante!!

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy = F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy$$

$$L_{ABC} = \int_{AB}\left[F_x(x,y)\,dx + \cancel{F_y(x,y)\,dy}\right] + \int_{BC}\left[\cancel{F_x(x,y)\,dx} + F_y(x,y)\,dy\right] =$$

$$= \int_{AB}\left[\underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial x}}_{cost}\cdot x + 0\right]dx + \int_{BC}\left[\underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial x}}_{cost}\cdot \varepsilon + \frac{\partial F_y}{\partial y}\cdot y\right]dy =$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\left[\frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot x + 0\right]dx + \int_0^{\varepsilon}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x}\cdot\varepsilon + \frac{\partial F_y}{\partial y}\cdot y\right]dy$$

1° ordine

$$L_{ABC} \underset{\varepsilon \ll 1}{\cong} \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\partial F_y}{\partial x}\varepsilon^2 + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$L_{ADC} \cong \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\partial F_x}{\partial y}\varepsilon^2 + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\varepsilon^2}{2}$$

se $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} \neq \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \Rightarrow L_{ABC} \neq L_{ADC}$

CAMPI CONSERVATIVI:

- $\vec{F}(\vec{r})$ si dice conservativo (= ammette un potenziale) se esiste $V(\vec{r})$ tale che $\vec{F} = \vec{\nabla}V(\vec{r})$; nel qual caso $V(\vec{r}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}')\,d\vec{r}'$ e è integrale non dipende dal cammino che porta da $\vec{a}$ a $\vec{r}$ ma solo dai punti di partenza e arrivo, inoltre il $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ [se il campo ammette potenziale allora è irrotazionale]

TEOREMA:

(connesso / semplicemente connesso)

- se $\vec{F}(x,y,z)$ è continuo con derivate continue su un dominio "senza buchi" e inoltre $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ allora ammette un potenziale. [se il campo è irrotazionale allora ammette potenziale]

VERIFICA:

- $\vec{k}\times\vec{r}$ non soddisfa $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$
- $\vec{k}\times\dfrac{\vec{r}}{r}$ soddisfa $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ ma non è definita in O

TUTTE LE FORZE CENTRALI AMMETTONO POTENZIALE:

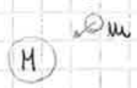
$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r}$ FORZA CENTRALE $\qquad \vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$

- nel caso della molla:

$f(r) = -kr$ modulo

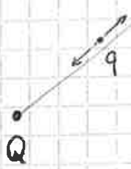
- nel caso dell'attrazione gravitazionale:

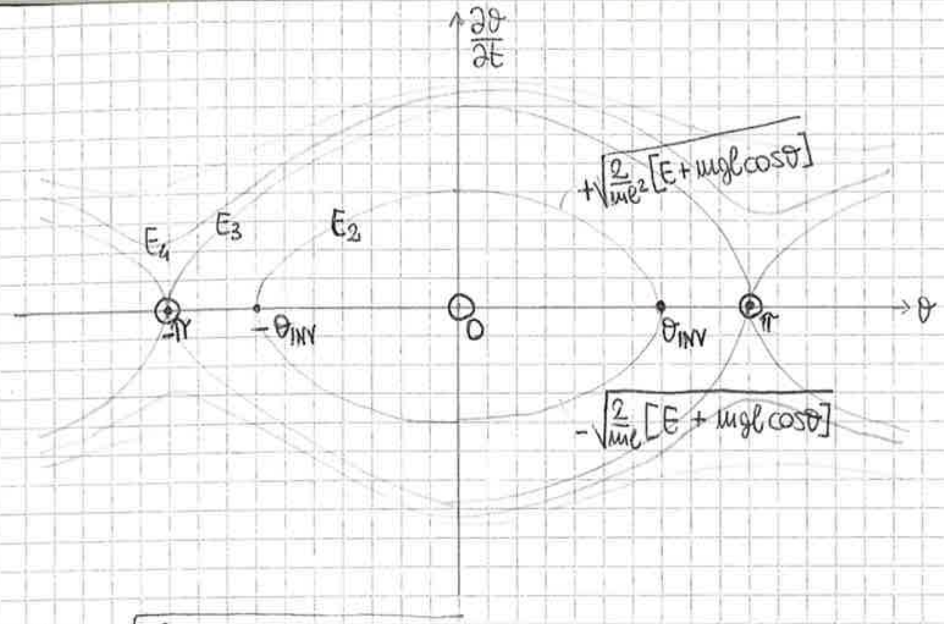
$f(r) = -G\dfrac{Mm}{r^2}$



- nel caso della forza elettrostatica:

$f(r) = +k\dfrac{Qq}{r^2}$





PIANO DELLE FASI (piano posizione\velocità)

PUNTI DI EQUILIBRIO:

$\frac{dU}{dt}(\theta) = 0$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

- i punti di minimo di U sono punti di equilibrio stabile, quelli di massimo sono punti di equilibrio instabile.

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E + mgl\cos\theta]}$$

- immagino di far partire il pendolo da $\theta = -\theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ (fermo)

$\Rightarrow E = -mgl\cos\theta_0$ [solo en. potenziale]

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}[mgl\cos\theta - mgl\cos\theta_0]} = \pm\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

- è a variabili separabili $\Rightarrow$ la riscrivo e integro:

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = +\int_0^{T/2} dt = \frac{T}{2}$$

semiperiodo

[ho scelto $\oplus$ perché, dalle cond. iniziali che ho scelto, so che $v > 0$]

$$T = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

[cos è pari, quindi posso riscriverla come $\Rightarrow$]

$$T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}$$

$$T = 4\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots\right]$$

[questa serie ci dice che se θ_0 è molto piccolo ($\theta_0 \ll 1$) sopravvive solo il termine 1 $\Rightarrow T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, che non dipende dall'ampiezza di θ_0; se tengo conto della successiva correzione ho che $T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots\right]$]

- supponiamo di voler avere una precisione non inferiore a 1/1000:

allora $\frac{\theta_0^2}{16} \lesssim 10^{-3} \Rightarrow \theta_0 \lesssim \sqrt{0{,}016} = 0{,}126$ rad

$$\Rightarrow \boxed{\frac{180°}{\pi}\theta_0 \lesssim 7°}$$

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \frac{\pi}{2}\cdot\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots\right]$ come si ottiene?

$\left[\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sqrt{\cancel{1} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - \cancel{1} + 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}} = \right.$ raccolgo 2 e porto fuori: $\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} =$$

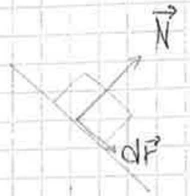
$\left[\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin\varphi\right]$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin^2\varphi}} \qquad \sin^2\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin^2\varphi = \varepsilon$$

[se θ_0 piccolo è del tipo $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots$]

31/03/14

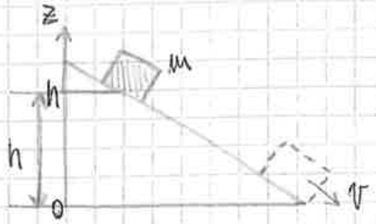
VINCOLO LISCIO:



$\vec{N} \perp$ superficie di vincolo

$dL = \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$

- in generale i vincoli per cui $dL = 0$ si dicono **VINCOLI IDEALI**



massa parte da ferma; v_f?

$K_f + U_f = K_i + U_i$

$\frac{m}{2} v_f^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$

- non importa come è fatto il vincolo se è liscio, purché non salga ad una quota più alta di quella di partenza.

ATTRITO DINAMICO:

$$\boxed{\vec{f}_d = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{v}} \Leftarrow \text{FORZA DI ATTRITO DINAMICO}$$

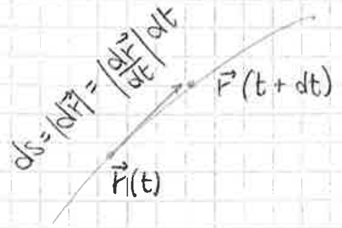
- μ_d: coefficiente di attrito dinamico (costante di proporzionalità)
- è una forza che dipende dalla velocità (non più dalla posizione) e per questo è una **FORZA DISSIPATIVA**

$$\frac{m}{2}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}(t_f)\right]^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}(0)\right]^2 = \underbrace{\int_0^{t_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{(LAVORO)}}$$

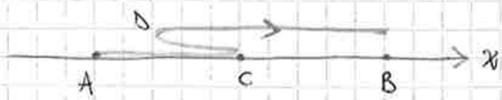
- in generale $\int_0^{t_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{t_f} \vec{F}\left[\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right] \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$
- ad esempio, calcolo il lavoro L per $\vec{f}_d$ in 2D:

$$L = \int_0^{t_f} \vec{f}_d \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -\mu_d N \int_0^{t_f} \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -\mu_d N \int_0^{t_f} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2$



$$\int ds \simeq \sum_{k=0}^{N} |\Delta \vec{r}_k|$$



$$\int_A^B ds = \int_A^C ds + \int_C^D ds + \int_D^C ds + \int_C^B ds =$$

$$= |AC| + |CD| + |DC| + |BC|$$

- confrontiamo con il caso della forza elastica:

$$\int_A^B x\,dx = \int_A^C x\,dx + \cancel{\int_C^D x\,dx} + \cancel{\int_D^C x\,dx} + \int_C^B x\,dx \longrightarrow \text{perché} \simeq \sum_{k=0}^{N} x_k \Delta x_k \leftarrow \left[\text{preso con segno!}\right]$$

$$\begin{cases} x: & m\frac{d^2x}{dt^2} = P_T - f_d = mg\sin\theta - \mu_d N \quad (1) \\ y: & 0 = N - mg\cos\theta \quad (2) \end{cases}$$

(2): $N = mg\cos\theta$

(1): $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta = mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}(t) = g\underbrace{(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)}_{\alpha \text{ (costante)}} = \alpha \cdot g$$

- se come dato iniziale prendo $x(0)=0$, $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$

$$x(t_f) = v_0 t_f + \frac{\alpha g}{2} t_f^2 = \frac{h}{\sin\theta} \to \ell$$

$$\frac{dx}{dt}(t_f) = v_0 + \alpha g t_f$$

- per semplicità considero il caso $v_0 = 0$

$$x(t_f) = \frac{\alpha g}{2} t_f^2 = \frac{h}{\sin\theta} \Rightarrow t_f = \sqrt{2h/\alpha g\sin\theta}$$

$$\frac{dx}{dt}(t_f) = \alpha g t_f = \alpha g\sqrt{\frac{2h}{\alpha \cdot g \cdot \sin\theta}} = \sqrt{\frac{2\alpha g h}{\sin\theta}}$$

- viene lo stesso risultato trovato prima?

$$\alpha = \sin\theta - \mu_d\cos\theta \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)gh}{\sin\theta}} = \boxed{\sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right)}} \quad \text{sì!}$$

- anche con $v_0 \neq 0$ si ritrova il risultato di prima

ATTRITO STATICO:

- la statica è un caso particolare della dinamica, quello in cui $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$ e $\vec{F} = 0$; nel nostro caso:

$$0 = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_s} \leftarrow \text{attrito statico}$$

- proiettando:

$$\begin{cases} N = P_N = mg\cos\theta & (1) \\ f_s = P_T = mg\sin\theta & (2) \end{cases}$$

[posso vedere f_s come la componente orizzontale della reazione vincolare esercitata dal piano]

- **COULOMB** (si devono a lui gli studi sull'attrito!):

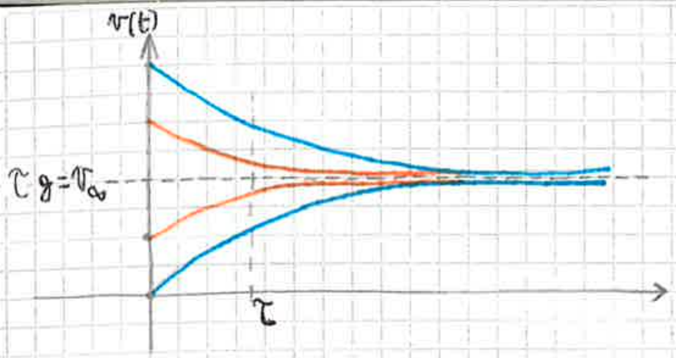
$|\vec{f_s}| \leq \mu_s N \Rightarrow$ anche qui esiste un angolo critico: quello al quale il corpo inizia a scivolare

$$(1)\ mg = \frac{N}{\cos\theta} \overset{(2)}{\Rightarrow} f_s = mg\sin\theta = N\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = N\tan\theta \Rightarrow \boxed{f_s = \mu_s N}$$

- esiste un $\theta = \theta_{c,s}$ al quale il corpo inizia a scivolare:

$$f_s \leq N\underbrace{\tan\theta_{c,s}}_{\mu_s} = \mu_s N$$

$\mu_s \to$ COEFF. ATTRITO STATICO



- l'altro metodo per risolverla è per separazione di variabili:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v = g\left(1 - \frac{\gamma}{mg} v\right)$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{1 - \frac{\gamma}{mg} v} = \int_0^t g\, dt' = g \cdot t \Rightarrow \left[-\frac{mg}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{\gamma}{mg} v\right)\right]_{v_0}^{v(t)} = g t$$

- sviluppando i calcoli ottengo nuovamente $\boxed{v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) \cdot e^{-t/\tau}}$ ⊛

LEGGE DEL MOTO SMORZATO ESPONENZIALMENTE:

- applicando $\int_0^{t_f} dt$ ad ambo i membri dell'eq. della velocità ottengo:

$$x_f - x_0 = \int_0^{t_f} \left[v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau}\right] dt = \left[v_\infty \cdot t - \tau (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau}\right]_0^{t_f} =$$

$$= v_\infty t_f - \tau (v_0 - v_\infty)(e^{-t_f/\tau} - 1)$$

- $x_f - x_0 = v_\infty t_f + \tau (v_0 - v_\infty)(1 - e^{-t_f/\tau})$

$$t_f \to t \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_\infty t + \tau (v_0 - v_\infty)(1 - e^{-t/\tau})}$$

- disegnare grafico di $x(t)$ per $v_0 < v_\infty$, $v_0 > v_\infty$, $v_0 > 0$, $v_0 < 0$
- se il fluido è molto viscoso τ è piccolo e $mg \simeq \gamma v \Rightarrow v \simeq \frac{mg}{\gamma}$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \simeq 0 \qquad \left[\tau = \frac{m}{\gamma}\right]$$

$$\underbrace{m \frac{d^2x}{dt} = mg - \gamma \frac{dx}{dt}}_{\text{FISICA NEWTONIANA}} \Rightarrow \text{nel limite di fluido molto viscoso diventa: } \underbrace{\gamma \frac{dx}{dt} \simeq mg}_{\text{FISICA ARISTOTELICA}}$$

⊛ $\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{1 - \frac{\gamma}{mg} v} = \int_0^t g\, dt' = g \cdot t \Rightarrow \left[-\frac{mg}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{\gamma}{mg} v\right)\right]_{v_0}^{v(t)} = gt \qquad \tau = \frac{m}{\gamma} \; ; \; g \cdot \tau = v_\infty$

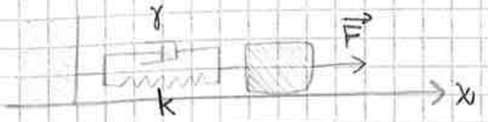
$-\frac{mg}{\gamma}\left[\ln\left(1 - \frac{\gamma}{mg} v(t)\right) - \ln\left(1 - \frac{\gamma}{mg} v_0\right)\right] = gt \Rightarrow -g\tau\left[\ln \frac{\left(1 - \frac{v(t)}{v_\infty}\right)}{\left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right)}\right] = g \cdot t \to \ln \frac{\left(1 - \frac{v(t)}{v_\infty}\right)}{\left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right)} = -\frac{t}{\tau}$

$\frac{\left(1 - \frac{v(t)}{v_\infty}\right)}{\left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right)} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \left(\frac{v_\infty - v(t)}{v_\infty}\right)\left(\frac{v_\infty}{v_\infty - v_0}\right) = e^{-t/\tau} \Rightarrow v_\infty - v(t) = e^{-t/\tau}(v_\infty - v_0)$

$\Rightarrow v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau} \Rightarrow v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau}$

01/04/14

OSCILLATORE ARMONICO:



$F_e = -kx$

$F_v = -\gamma v$

- $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt}(t) - kx(t)$ [caso con smorzamento]

termine proporzionale a v

$$\cancel{m} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftarrow$$ [EQ. OMOGENEA (descrive oscillazioni LIBERE)]

- conviene usare variabili complesse; nel caso senza smorzamento:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \qquad \left[\omega^2 = \frac{k}{m}\right]$$

- estendiamo l'eq. al caso complesso:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z \Leftarrow$$ [EQ LINEARE OMOGENEA]

num. complesso

$$\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = -\omega^2 \bar{z}$$ [ho preso il complesso coniugato]

SOMMO M. a M.

$$\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\frac{(z+\bar{z})}{2}}_{Re(z)} = -\omega^2 \underbrace{\frac{(z+\bar{z})}{2}}_{Re(z)}$$ [divido per 2 entrambi i membri]

- $x = Re(z) \Rightarrow$ basta prendere la parte reale ad ambo i membri e ritrovo l'eq. reale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Leftarrow$$ [EQ. REALE]

*) 1° trucco: passare a variabili complesse;

*) 2° trucco:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \quad ; \quad \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$ [proprietà dell'esponenziale]

- diciamo che $e^{\lambda t}$ è una AUTOFUNZIONE dell'operatore di derivazione d/dt con AUTOVALORE λ

ho $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z \Rightarrow$

- cerco la soluzione nella forma:

$\boxed{z(t) = e^{\lambda t}}$, con λ da determinarsi $\Rightarrow$

$\boxed{\lambda_\pm = \pm i\omega}$

$\Uparrow$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -\omega^2 \cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Leftarrow$$ [EQ. ALGEBRICA DI 2° GRADO per gli autovalori λ]

- 1° caso:

$$\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \omega_0^2 > \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \frac{k}{m} > \frac{\gamma^2}{4m^2} \Rightarrow \gamma < 2\sqrt{km} \Leftarrow$$ [PICCOLO COEFF. DI SMORZAMENTO]

$$\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} = \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)} = i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}_{\omega < \omega_0}$$

[il sistema oscilla un po' più lentamente]

$$\boxed{\lambda_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega}$$

$$z_\pm(t) = e^{\left(-\frac{1}{\tau} \pm i\omega\right)t} = \boxed{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\pm i\omega t}}$$

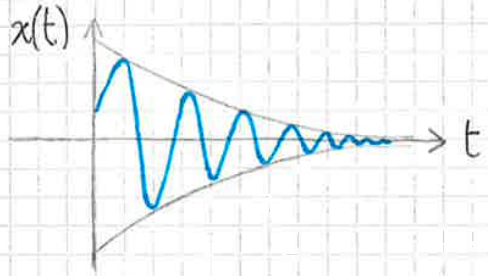
$$z(t) + \overline{z(t)} = \mathbf{c}\, e^{-t/\tau} \cdot e^{i\omega t} + c.c.$$

$$\mathbf{c} \to c \cdot e^{i\varphi}$$

$$\frac{z(t) + \overline{z(t)}}{2} = \frac{c \cdot e^{-t/\tau}\, e^{i(\omega t + \varphi)} + c.c.}{2}$$

[parte reale del numero complesso]

$$\boxed{x(t) = c \cdot e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)} \Leftarrow$$ [INTEGRALE GENERALE DEL SISTEMA SMORZATO LIBERO]



[SMORZAMENTO DEBOLE]

- 2° caso:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \gamma = 2\sqrt{km}$$

$\Rightarrow \omega = 0 \Leftarrow$ [SMORZAMENTO CRITICO (le oscillazioni scompaiono)]

- **osservazione:**

$$x(t) = c \cdot e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) = e^{-t/\tau}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

[due funzioni indipendenti]

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\omega \to 0} \cos\omega t = 1 \\ \lim_{\omega \to 0} \sin\omega t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ [perdo una soluzione quando $\omega \to 0$]

- dove è finita la soluzione mancante?

$\Rightarrow$ pongo $\boxed{B = \frac{b}{\omega}}$ e riscrivo:

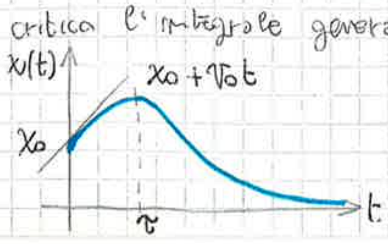
$$x(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t\right)$$

- ora quando $\omega \to 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\omega \to 0} \cos\omega t = 1 \\ \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin\omega t}{\omega} = t \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ nel caso di smorzamento critico l'integrale generale è:

$$\boxed{x(t) = e^{-t/\tau}(A + Bt)}$$



• passando a prendere $Re(z)$:

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi_F)}$$

• compare un denominatore che può rendere l'ampiezza molto grande!

• questa è una soluzione particolare, non ci sono costanti arbitrarie che io possa modificare a piacere; però non è integrale generale ⇒

TRUCCO:

$$m \frac{d^2 x_p(t)}{dt^2} = -k x_p(t) + F_0 \cos(\Omega t + \varphi_F) \Leftarrow \text{[EQ. NON OMOGENEA]}$$

$$m \frac{d^2 x_{omog}(t)}{dt^2} = -k x_{omog}(t) + 0 \Leftarrow \text{[EQ. OMOGENEA ASSOCIATA]}$$

[SOMMO MEMBRO A MEMBRO]

$$m \frac{d^2}{dt^2}\left[x_{omog}(t) + x_p(t)\right] = -k\left[x_{omog}(t) + x_p(t)\right] + F_0 \cos(\Omega t + \varphi_F)$$

⇒ [SOLUZ. PARTICOLARE DELL'EQ. FORZATA] + [INTEGRALE GENERALE EQ. LIBERA] =

= [INTEGRALE GENERALE DELL'EQ FORZATA]

$$x(t) = x_{omog}(t) + x_{PART}(t) = \underbrace{A\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{[OSCILLAZIONI PROPRIE DEL SISTEMA INDOTTE DALLE CONDIZIONI INIZIALI]}} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi_F)}_{\text{[OSCILLAZIONI INDOTTE DALLA FORZANTE]}}$$

COST. ARBITRARIE

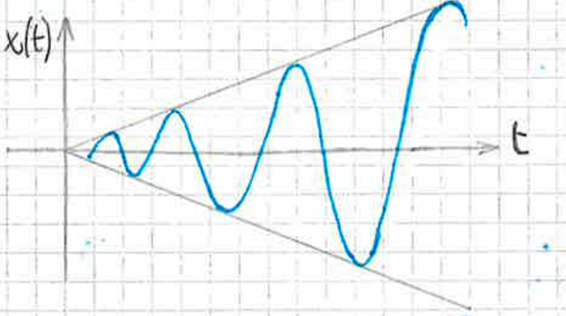
[RISONANZA]

$[\omega^2 \neq \Omega^2]$

• quando è esattamente $\Omega = \omega$

$$x_p(t) = A\, t \cdot e^{i\omega t}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m\omega}\, t \cdot \sin(\omega t + \varphi_F)$$



PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

• ora immaginiamo due forzanti:

① $x_1(t) = \frac{F_1/m}{\omega^2 - \Omega_1^2} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$

② $x_2(t) = \frac{F_2/m}{\omega^2 - \Omega_2^2} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$

} oscillazioni indotte

③ $x_3(t) = A_3 \cos(\omega t + \varphi_3)$

④ $x_4(t) = A_4 \cos(\omega t + \varphi_4)$

} oscillazioni proprie

① → $m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + F_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$

② → $m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 + F_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$

③ → $m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -k x_3$

④ → $m \frac{d^2 x_4}{dt^2} = -k x_4$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 140

- passando alla parte reale:

[il sistema smorzato risponde con un ritardo]

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)+4\frac{\Omega^2}{\tau^2}}}\cos(\Omega t+\varphi_F-\Delta\varphi)$$

[impedisce al denominatore di diventare ∞]

- la soluzione generale:

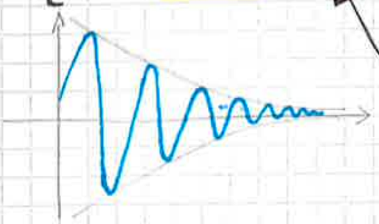
$$x(t) = \underbrace{A e^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi)}_{\text{OSCILLAZIONI SMORZATE LIBERE}} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\frac{4\Omega^2}{\tau^2}}}\cos(\Omega t+\varphi_F-\Delta\varphi)}_{\text{OSCILLAZIONI INDOTTE DALLA FORZANTE}}$$

(COSTANTI ARBITRARIE): A, φ

[OSCILLAZIONI SMORZATE LIBERE]

[OSCILLAZIONI INDOTTE DALLA FORZANTE]

[STATO STAZIONARIO]



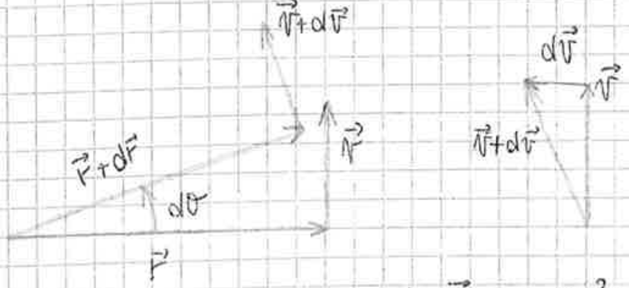
[TERMINE TRANSITORIO o TRANSIENTE: dopo alcuni tempi τ il termine sparisce]

[indotte da cond. iniziali fuori dall'equilibrio]

DETERMINARE A, φ IN FUNZIONE DI $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$

$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \vec e_\theta \, r \frac{d\theta}{dt} = (r\omega)\,\vec e_\theta = r\omega(\vec k \times \vec e_r) = (\omega\vec k)\times(r\vec e_r) \Rightarrow$ $\boxed{\vec\omega = \omega\vec k}$ vettore vel. angolare

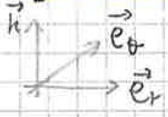
$\Rightarrow \boxed{\vec v = \vec\omega \times \vec r}$ [vedi disegno del campo delle velocità]



$\Leftarrow$ { quando lo spostamento è piccolo al primo ordine $d\vec r \perp \vec r$, $d\vec v \perp \vec v$, $\vec v \perp \vec r$, $\vec a \perp \vec v$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec a = -\omega^2 r\, \vec e_r =$ [ACCELERAZIONE CENTRIPETA]

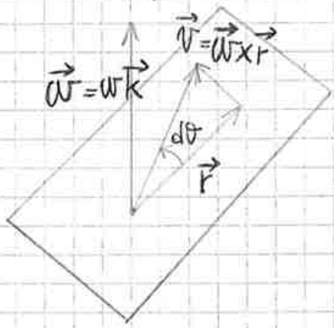
$= \omega^2 r \underbrace{\vec k \times \vec e_\theta}_{-\vec e_r} =$



$= (\omega\vec k)\times(\underbrace{\omega r\,\vec e_\theta}_{\vec v}) \Rightarrow \boxed{\vec a = \vec\omega \times \vec v}$

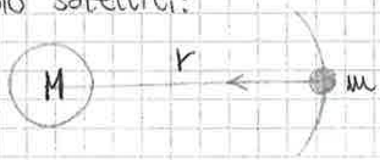
- specchietto:

$$\begin{cases} v = \omega r \\ a = \omega^2 r \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec v = \vec\omega \times \vec r \\ \vec a = \vec\omega \times \vec v \end{cases}$$



ORBITE CIRCOLARI:

- per esempio satelliti:



- periodo dell'orbita circolare?

$a = \omega^2 r \Leftarrow$ [accelerazione centripeta che serve per tenere il satellite sull'orbita, alla quale deve corrispondere una forza centripeta] $\Rightarrow$

$F_c = ma = m\omega^2 r = \frac{GmM}{r^2}$ $\Leftarrow$ [attrazione gravitazionale]

- la forza centripeta deve essere fornita dall'attrazione gravitazionale:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

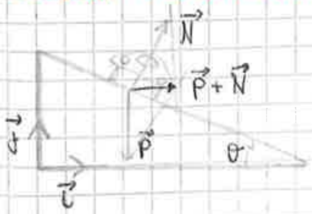
- oppure:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\, r^{3/2}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 140

CURVA SOPRAELEVATA:



$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$ $\Rightarrow$ angolo di inclinazione ottimale per percorrere la curva con velocità v?

$\Rightarrow$ caso in cui l'attrito è trascurabile!

- la situazione ottimale si realizza quando $\vec{P}+\vec{N} = \vec{F}_{cp}$, dove $\vec{F}_{cp}$ è esattamente la forza centripeta necessaria per tenere la macchina sulla sua traiettoria circolare

$$\vec{P}+\vec{N} = m\frac{v^2}{r}\vec{i} \Rightarrow -mg\vec{j} + N(\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta) = m\frac{v^2}{r}\vec{i}$$

$$\begin{cases} (\vec{i}\,\cdot) & N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \quad (1) \\ (\vec{j}\,\cdot) & -mg + N\cos\theta = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} \quad (2) \end{cases}$$

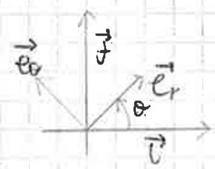
sostituisco in (1) $\Rightarrow \cancel{m}g\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cancel{m}v^2}{R} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$

MOTO PIANO GENERICO:

- aspetti cinematici (v, a) [coordinate polari]

$\vec{e}_r = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$

$\vec{e}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$ oltre che dalla derivata si vede [illegible] (considero $\vec{e}_\theta$ ipotenusa)



$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$

- se $\theta = \theta(t)$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{e}_r[\theta(t)] = \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}}_{=\vec{e}_\theta} \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\omega} = \omega\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\omega\vec{e}_r$$

- $\vec{r} = r\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + \omega r\vec{e}_\theta = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$\left[v_r = \frac{dr}{dt}\right.$ componente radiale$\left.\right]$ $\left[v_\theta = r\cdot\omega\right.$ componente tangenziale$\left.\right]$

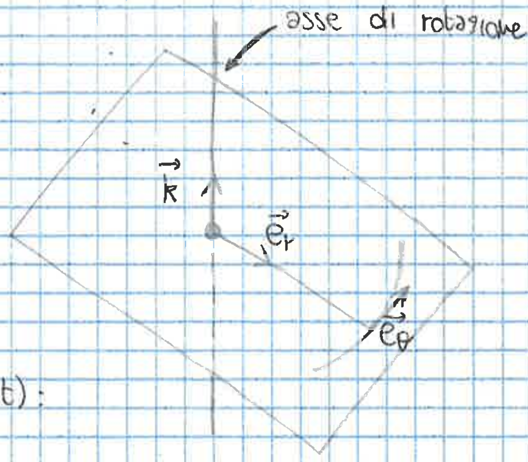
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_r\vec{e}_r + \omega r\vec{e}_\theta) = \frac{dv_r}{dt}\vec{e}_r + v_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d\omega}{dt}r\vec{e}_\theta + \omega\frac{dr}{dt}\vec{e}_\theta + \omega r\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} =$$

$\omega = d\theta/dt$

$$= \underbrace{\frac{dv_r}{dt}}_{=\frac{d^2r}{dt^2}}\vec{e}_r + \boxed{\underbrace{v_r}_{=\frac{dr}{dt}}\omega\vec{e}_\theta} + \boxed{\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=\frac{d^2\theta}{dt^2}}}r\vec{e}_\theta + \boxed{\omega\frac{dr}{dt}\vec{e}_\theta} - \omega^2 r\vec{e}_r =$$

$$= \overbrace{\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r\right)}^{a_r}\vec{e}_r + \overbrace{\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)}^{a_\theta}\vec{e}_\theta$$

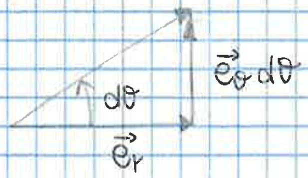
08/04/14



MOTO ROTATORIO:

$$\frac{d}{d\theta}\vec{e_r} = \vec{e_\theta}$$

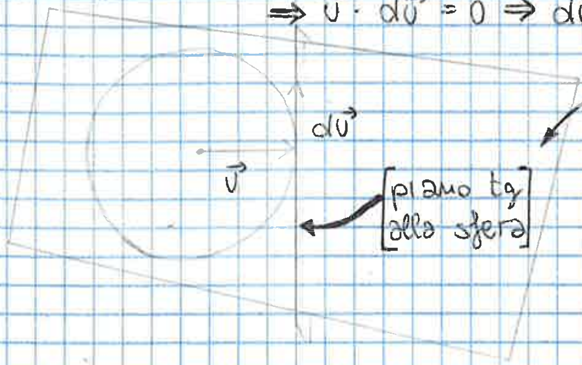
$$d\vec{e_r} = \vec{e_\theta}\, d\theta$$



- vale solo per il moto rotatorio?
- In generale, sia $\vec{u}$ un qualsiasi vettore unitario $\vec{u}(t)$:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = 1 \quad ; \quad d\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot d\vec{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot d\vec{u} = 0 \Rightarrow d\vec{u} \perp \vec{u}$$



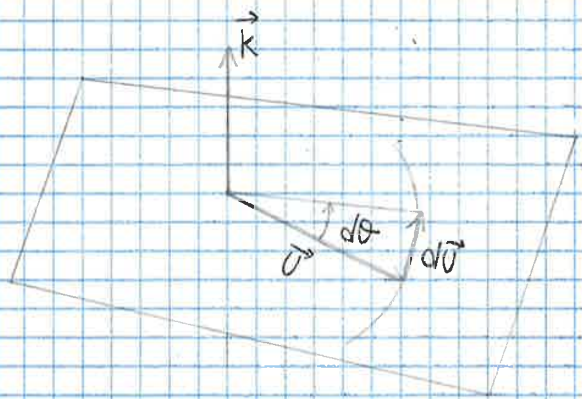
[piano individuato da $\vec{u}$ e $d\vec{u}$]

[su tempi brevi tutti i moti del versore $\vec{u}$ sono rotazioni infinitesime]

$$d\vec{u} = \vec{k} \times \vec{u} \cdot d\theta$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{k} \times \vec{u}\, \omega = (\underbrace{\omega\vec{k}}_{\vec{\omega}}) \times \vec{u}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}}$$



- **MOTO ROTATORIO UNIFORME:**

$v = \omega r$ [velocità tangenziale]

$a = \omega^2 r$ [accelerazione centripeta radiale]

- **MOTO ROTATORIO NON UNIFORME:**

$r =$ costante

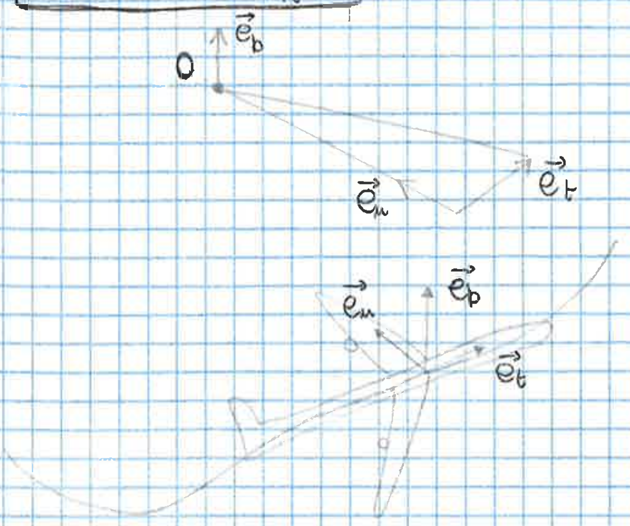
$a_r = -\omega^2 r \; ; \; a_\theta = \alpha r$ [ammetto una componente tangenziale dell'accelerazione]

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \; ; \; \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n}$$

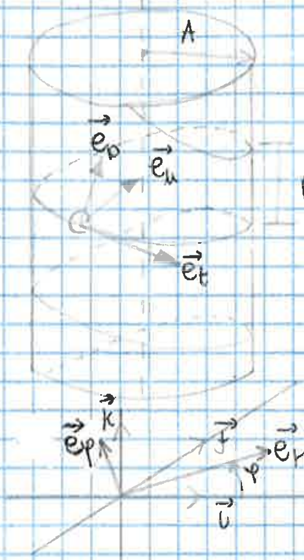
• nel moto rotatorio avevamo che:

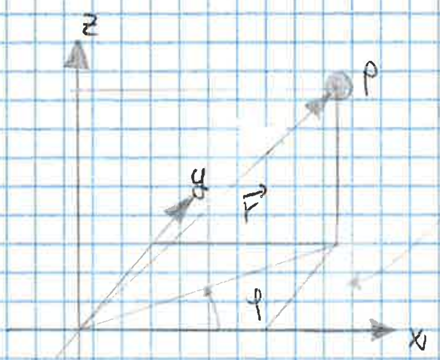
$$\begin{cases} \vec{e}_t = \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_n = -\vec{e}_r \\ \vec{e}_b = \vec{k} \end{cases}$$



ESERCIZIO:

determinare la reazione vincolare esercitata dalla guida sull'anello che scivola senza attrito.





definisco angolo φ che sottende la proiezione di $\vec{r}$ sul piano xy

$$\vec{r}(\varphi) = A\vec{i}\cos\varphi + A\vec{j}\sin\varphi - p\frac{\varphi}{2\pi}\vec{k} =$$
$$= A\vec{e}_r - p\frac{\varphi}{2\pi}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = A\vec{e}_\varphi - \frac{p}{2\pi}\vec{k} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \sqrt{A^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} = C$$

parametro d'arco

$$\left(A\vec{e}_\varphi - \frac{p}{2\pi}\vec{k}\right)d\varphi \rightarrow ds = |d\vec{r}| = C \cdot d\varphi$$

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{C}\left(A\vec{e}_\varphi - \frac{p}{2\pi}\vec{k}\right)$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{R}\vec{e}_n$$

$$\vec{e}_n = -\vec{e}_r$$

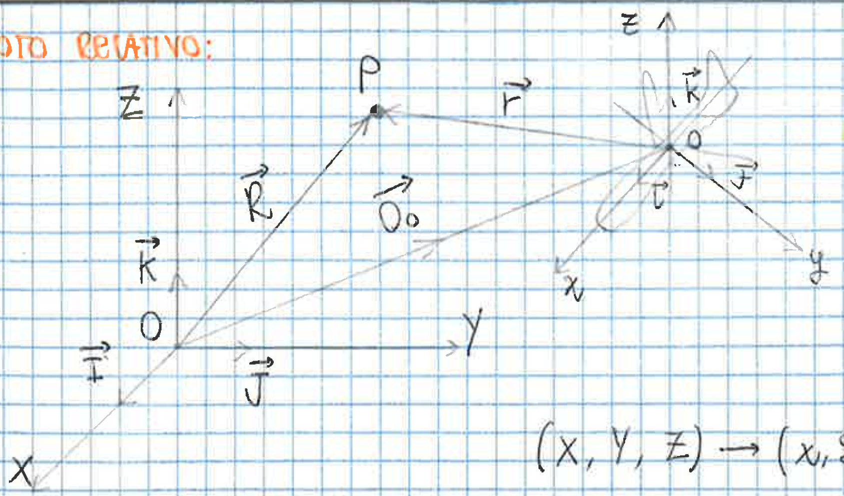
raggio di curvatura

$$R = A + \frac{p^2}{4\pi^2 A}$$

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n = \frac{A}{C}\vec{k} + \frac{p}{2\pi C}\vec{e}_\varphi$$

[MOTO DI PRECESSIONE]

MOTO RELATIVO:



S.R. MOBILE

$(X, Y, Z) \rightarrow (x, y, z)$

S.R. FISSO (inerziale)

$$\boxed{\vec{R} = \vec{O}_0 + \vec{r}}$$

velocità dell'aereo nel S.R.F.

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{O}_0 + \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

[dovute al fatto che il S.R. è mobile]

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}_{} + \overbrace{x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}} =$$

[$\vec{v}$ = velocità relativa dell'oggetto vista dall'aeroplano]

$$= \vec{v} + x(\vec{\omega} \times \vec{i}) + y(\vec{\omega} \times \vec{j}) + z(\vec{\omega} \times \vec{k}) = \vec{v} + \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{V} = \underbrace{\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}} + \vec{v}}$$

[velocità di trascinamento]

[velocità relativa misurata nel sistema di riferimento mobile]

[velocità assoluta misurata nel sistema di riferimento fisso]

[la velocità di trascinamento c'è anche quando $v = 0 \Rightarrow$ non dipende da v, ovvero anche gli oggetti che nel S.R. mobile sembrano fermi in realtà hanno quella velocità]

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$[\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}] \qquad [\vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{v}]$$

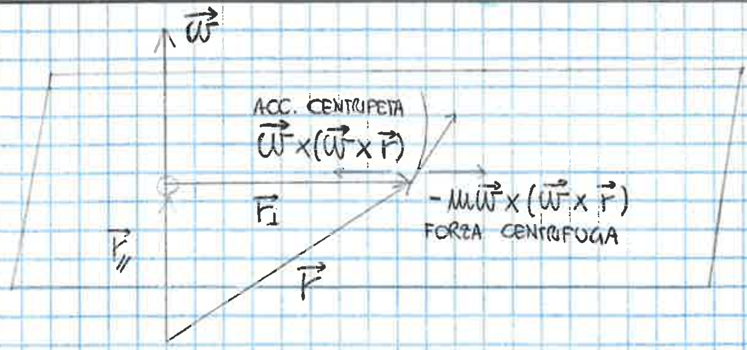
$$= \underbrace{\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} + \vec{a} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

[accelerazione di trascinamento]

[Coriolis]

[accelerazione relativa dell'oggetto nel sistema mobile]

[accelerazione aereo nel S.R.F.]

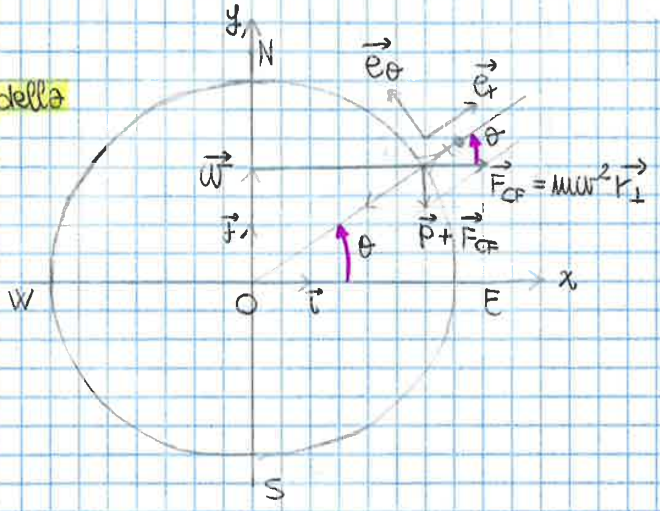


$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$
$$= \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\cancel{\vec{r}_\parallel} + \vec{r}_\perp)] =$$
$$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp) = -\omega^2\vec{r}_\perp$$

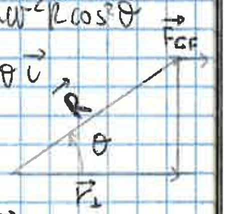
[ACCELERAZIONE CENTRIPETA]

$$\Rightarrow F_{CF} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\omega^2\vec{r}_\perp$$

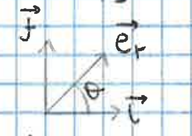
deviazione della verticale:



$$(\vec{P}+\vec{F}_{CF})\cdot\vec{e}_r = -mg_0 + m\omega^2 R\cos^2\theta$$
$$\vec{F}_{CF} = m\omega^2\vec{r}_\perp = m\omega^2 R\cos\theta\,\vec{i}$$
$$\vec{F}_{CF}\cdot\vec{e}_r = m\omega^2 R\cos^2\theta$$



$$g = g_0 - \omega^2 R\cos^2\theta =$$
$$= g_0 - \Delta g \Rightarrow$$

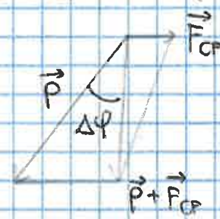


$$\vec{i} = \vec{e}_r\cos\theta$$

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{g_0} =$$
$$= \frac{\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600\,s}\right)^2(6370\ km)}{9{,}8\ m/s^2}\cos^2\theta \simeq (0{,}003)\cos^2\theta$$

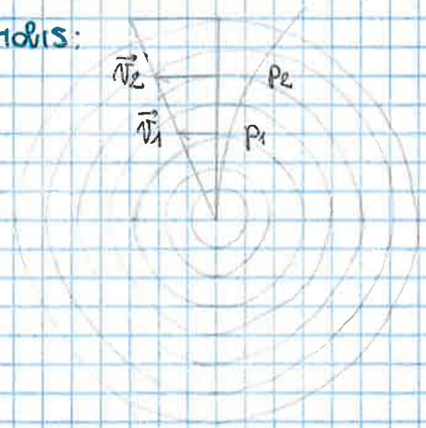
equatore:

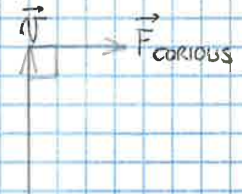
$$\Delta\varphi \simeq 0{,}1°$$



14/04/14

- FORZA CENTRIFUGA: $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = +m\omega^2\vec{r}_\perp$
- FORZA DI CORIOLIS: $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}$
- coriolis:





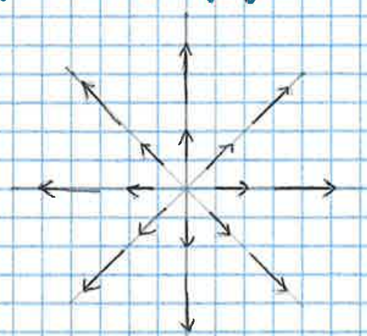
$$\vec{F}_{COR} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

[FORZA DEVIATRICE]

[non fa lavoro]

- la forza centrifuga, al contrario:

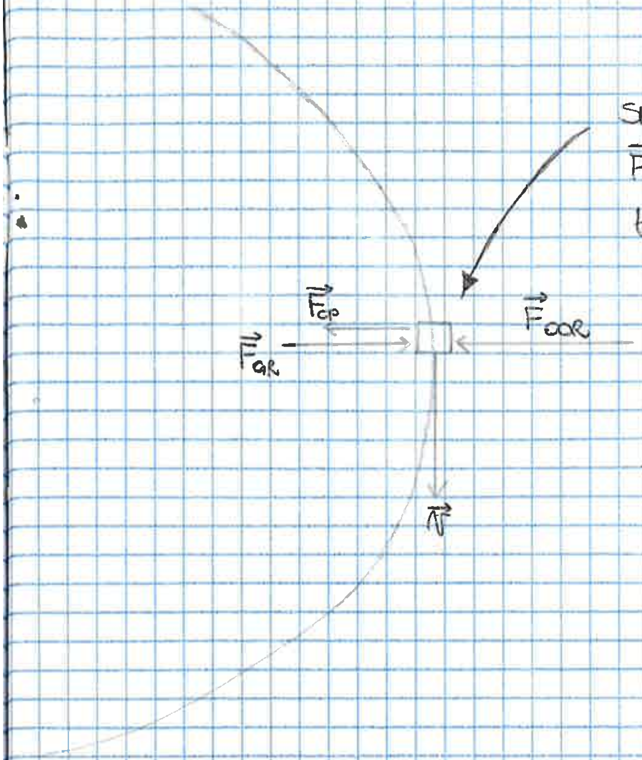


$$\vec{F}_{CF} = \omega^2 r\,\vec{e}_r \Leftarrow \text{[FORZA CENTRALE]}$$

$$U_{CF} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

$$-\nabla U_{CF} = \vec{F}_{CF}$$

VENTI EQUILIBRATI E GEOSTROFICI:



Si compensano e danno quella forza centripeta $\vec{F}_{cp}$ che serve per tenere la massa d'aria sulla traiettoria circolare

$$F_{GR} \sim F_{COR}$$

"**venti equilibrati**"

$$V \cdot \nabla p \sim 2 V \rho \omega \cdot v \cdot \sin\theta$$

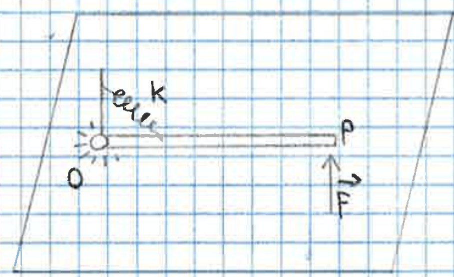
VOL MASSA D'ARIA; DENSITÀ ARIA; FORZA DI GRAD. IN MODULO; LATITUDINE

$$\Rightarrow v \sim \frac{\nabla p}{2 \rho \omega \sin\theta}$$

"**venti geostrofici**"

DINAMICA ROTAZIONALE:

• se ho un sistema incernierato, conta anche il punto di applicazione della F, l'effetto che risulta dall'applicazione della forza è proporzionale a $|OP| \cdot F$



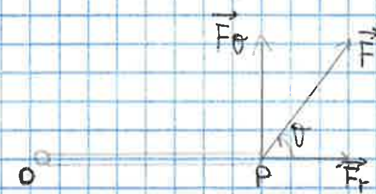
$$M_o = |OP| \cdot F$$

[momento della forza F rispetto al polo O]

polo

(momento della forza, momento torcente, coppia) = (braccio) x (forza)

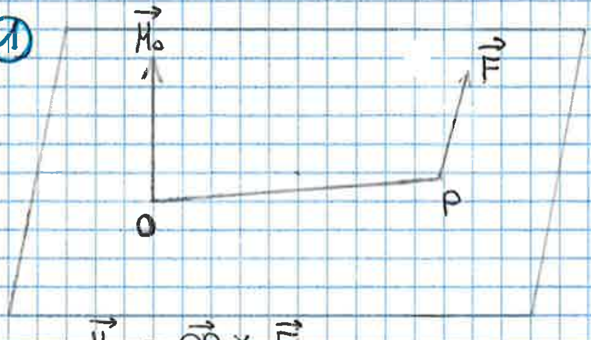
PORTA INCERNIERATA IN O:



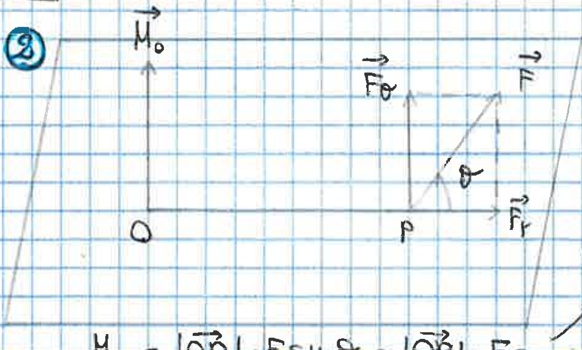
• solo la componente tangenziale della forza serve per aprire la porta, l'altra è bilanciata dalla reazione vincolare della porta $\Rightarrow M_o = |OP| \cdot F_\theta = |OP| \cdot F \cdot \sin\theta$

posso interpretarlo così $\Leftarrow$ $\boxed{\vec{M}_o = \vec{OP} \times \vec{F}}$

[MOMENTO DELLA FORZA F (rispetto al polo O)]

① 

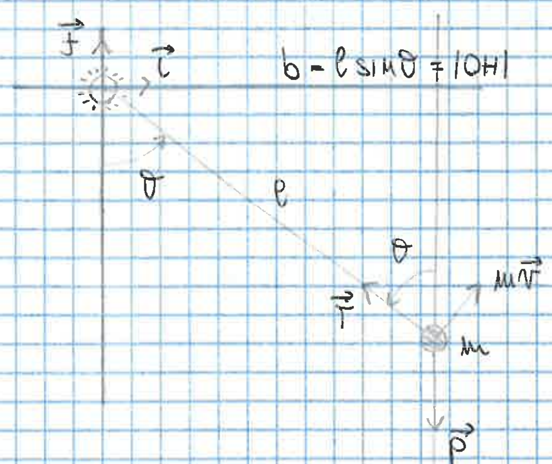
$$\vec{M}_o = \vec{OP} \times \vec{F}$$

② 

distanza dal polo per componente tangenziale di F

$$M_o = |\vec{OP}| \cdot F \sin\theta = |\vec{OP}| \cdot F_\theta$$

EQUAZIONE DEL PENDOLO CON IL TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE:



$$\vec{M_0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- siccome abbiamo un moto nel piano,

$$\vec{M_0} = M_0 \vec{k}$$

$$\vec{L_0} = L_0 \vec{k}$$

[componente z di $\vec{L_0}$ (≠ modulo)]
⇒ può avere segno: + rot. antioraria; − rot. oraria

- posso riscrivere come eq. scalare:

$$M_0 = \frac{dL_0}{dt}$$

$$M_0 = M_0^{(P)} + M_0^{(T)}$$

peso, tensione

$$\begin{cases} M^T_0 = 0 \text{ perché il braccio è nullo!} \\ M^P_0 = -mg \cdot \ell \sin\theta \end{cases}$$

[scompare la reaz. vincolare incognita]

$L_0 = \ell \cdot m v_\theta$ $\quad [\vec{L} = \vec{OP} \times m\vec{v} = (r\vec{e}_r) \times m(\cancel{\vec{v}_r} + \vec{v}_\theta)]$

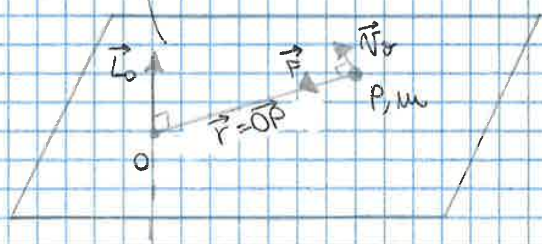
contribuisce solo la componente tg della velocità!

$$\frac{dL_0}{dt} = \ell \cdot m a_\theta = \ell \cdot m \cdot \ell \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

accelerazione angolare

$$\Rightarrow \underbrace{m\ell^2}_{\text{[momento d'inerzia]}} \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{[accelerazione angolare]}} = \underbrace{-mg\ell\sin\theta}_{\text{[momento della forza]}}$$

FORZE CENTRALI:



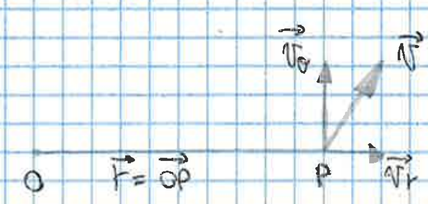
$$L_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{M_0} = 0$$

la forza centrale ha sempre momento nullo

⇓

$\vec{L_0}$ = costante ⇒ [siccome $\vec{L_0}$ individua il piano ad esso ortogonale, il moto di ciascun pianeta avviene in un piano che è detto "piano invariabile", nel caso della Terra si chiama "piano dell'eclittica"]



$\vec{k}$ = direzione di $\vec{L_0}$

$$\vec{L_0} = L_0 \vec{k}$$

$$L_0 = r \cdot m v_\theta = r \cdot m r \frac{d\theta}{dt}$$

$$L_0 = \underbrace{mr^2}_{\text{momento d'inerzia}} \frac{d\theta}{dt}$$

$P_f - P_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt \Rightarrow$ se $\vec{F} = 0$ $\quad \vec{P_f} = \vec{P_i} \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme

$\vec{L_{Of}} - \vec{L_{Oi}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{M_O}\,dt \Rightarrow$ se $\vec{M_O} = 0$ $\quad \vec{L_{Of}} = \vec{L_{Oi}} \Rightarrow$ moto piano, velocità areolare cost.

$K_f - K_i = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$ se $L = 0$ $\quad K_f = K_i \Rightarrow$ nel caso delle forze conservative $L = -\nabla U$

$\Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$ (cons. en. meccanica)

· TEOREMA DELL'IMPULSO:

$$\vec{P_f} - \vec{P_i} = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt}_{\text{IMPULSO}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt\right)}_{\vec{F}_{media}} \cdot \Delta t$$

$[\Delta t = t_f - t_i]$

$$\underbrace{\vec{p_f} - \vec{p_i}}_{\Delta \vec{p}} = \vec{F_m} \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \vec{F_m} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

URTO ELASTICO

$$\boxed{F_m = \frac{-2mv}{\Delta t}}$$

FILM PALLINA DA GOLF:

$15 : t_F = 40000 : t$

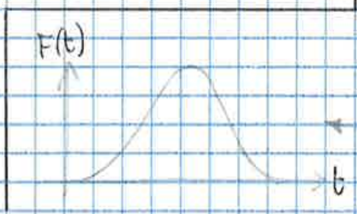
$t = \frac{15}{40000}\, t_F$

$\Delta t_{URTO} = \frac{15}{40000} \cdot 1s \simeq 4 \cdot 10^{-4}\,s$

$\Delta t_{VOLO} = \frac{15}{40000} \cdot 5s \simeq 2 \cdot 10^{-3}\,s$

$\Delta x_{VOLO} \simeq 3 \cdot 40\,mm \simeq 0{,}1\,m$

$v \simeq \frac{\Delta x_{VOLO}}{\Delta t_{VOLO}} = \frac{0{,}1\,m}{2 \cdot 10^{-3}\,s} = 0{,}5 \cdot 10^{2}\,m/s = 50\,\frac{m}{s} \simeq 180\,\frac{km}{h}$



$F_m = \frac{2mv}{\Delta t_{URTO}} = \frac{\cancel{2}(5 \cdot 10^{-2}\,kg)(50\,m/s)}{\cancel{2}\,4 \cdot 10^{-4}\,s} = 1{,}2 \cdot 10^{4}$ Newton

ESERCIZIO:

[Urto anelastico]

$v = 100\,m/s$

$m = 0{,}02\,kg$ $\quad$ tempo di arresto?

· th. impulso + th. en. cinetica

$mv \simeq F_m \Delta t \quad ; \quad \frac{1}{2}mv^2 \simeq F_m \Delta x$

$$F_m \simeq \frac{mv^2}{2\Delta x} = \frac{0{,}02\,kg \cdot 10000\,m^2 s^{-2}}{2 \cdot 0{,}01\,m} = 10000\,N$$

$$\Delta t \simeq \frac{mv}{F_m} = \frac{0{,}02\,\cancel{kg} \cdot \cancel{100}\,\cancel{m}\,\cancel{s^{-1}}}{\cancel{10000}\,\cancel{kg} \cdot \cancel{m} \cdot s^{\cancel{-2}\,-1}} = 2 \cdot 10^{-4}\,s$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 140

$$= \boxed{\sum_{j>i} \overrightarrow{P_j P_i} \times \vec{F}_{ji} = 0}$$

[$\overrightarrow{P_jP_i} \parallel \vec{F}_{ji} \Rightarrow$ prod. vettore $= 0$]

• quantità dinamiche relative a ciascun punto P_i:

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$$

$$\sum_i \vec{L}_{O,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_O$$

$$\sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = K$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}\right) = \cancel{\vec{R}^{(I)}}^{\,0} + \vec{R}^{(E)} = \vec{R}^{(E)}$$

$$\sum_i \vec{M}_{O,i} = \sum_i \left(\vec{M}_{O,i}^{(I)} + \vec{M}_{O,i}^{(E)}\right) = \cancel{\vec{M}_O^{(I)}}^{\,0} + \vec{M}_O^{(E)} = \vec{M}_O^{(E)}$$

$$\sum_i U_i = \sum_i \left(U_i^{(I)} + U_i^{(E)}\right) = U^{(I)} + U^{(E)}$$

• quantità di moto totale del sistema:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} M \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}\right) =$$

[posizione del CENTRO DI MASSA del sistema
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N}$$]

$$M = m_1 + \dots + m_N = \sum_i m_i$$

[massa totale del sistema]

$$= \frac{d}{dt} M \vec{r}_{CM} = M \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = M \vec{v}_{CM} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = M \vec{v}_{CM}}$$

[il centro di massa è una media pesata dei vettori posizione dei singoli punti]

CENTRO DI MASSA TERRA-SOLE:

$m_{\odot} \simeq 300000\, m_{\oplus}$; $d_{\odot} \simeq 1{,}4 \cdot 10^6$ km $= 109\, d_{\oplus}$

prendo sole nell'origine $\Rightarrow x_{\odot} = 0$

$$x_{CM} = \frac{\cancel{m_{\odot} x_{\odot}} + m_{\oplus} x_{\oplus}}{m_{\odot} + m_{\oplus}} = \frac{m_{\oplus}}{m_{\odot} + m_{\oplus}} x_{\oplus} \simeq$$

$$\simeq \frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}} x_{\oplus} \simeq (3 \cdot 10^{-6})(150 \cdot 10^6 \text{ km}) = 450 \text{ km} \simeq 3 \cdot 10^{-4} d_{\odot}$$

[il CM Terra-Sole è all'interno del sole!]

CENTRO DI MASSA GIOVE-SOLE:

• rifacendo considerando Giove (♃) invece della Terra:

$m_♃ = 10^{-3} m_{\odot}$; $x_♃ = 5$ u.a. [unità astronomiche]

$$x_{CM} \cong \frac{m_♃}{m_{\odot}} x_♃ = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 450\,000 \text{ km}$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA DEI SISTEMI:

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$$

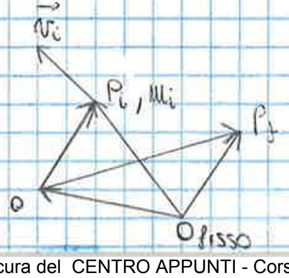
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{= \vec{a}_i} = \sum \left(\cancel{\vec{F}_i^{(I)}}^{\,0\,[P.A.R.]} + \vec{F}_i^{(E)}\right) = \cancel{\vec{R}^{(I)}}^{\,0} + \vec{R}^{(E)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}}$$ [I eq. cardinale della DINAMICA dei SISTEMI]

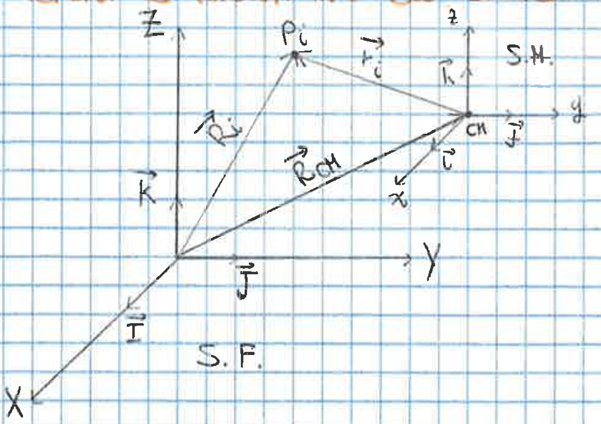
• analogamente posso calcolare:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(E)} \quad \left[\vec{L}_O = \sum \overrightarrow{OP_i} \times m_i \vec{v}_i\right]$$

[caso in cui il polo O è fisso!]



SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA:



$$\vec{R}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i$$

$$\vec{A}_i = \vec{A}_{CM} + \vec{a}_i$$

$$\vec{F}_i = m\vec{A}_i = m\vec{A}_{CM} + m\vec{a}_i$$

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i - m\vec{A}_{CM}$$

[unica forza apparente: non ci sono rotazioni]

- I eq cardinale:

$\vec{p} = 0$ [il momento si ha solo con $\vec{F}$ che imprimono rotazioni!]

- II eq cardinale:

$$\sum \vec{r}_i \times (-m_i \vec{A}_{CM}) =$$ [momento delle forze apparenti]

$$= -M \underbrace{\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}\right)}_{\substack{= 0 \text{ nel S.R.} \\ \text{del centro di massa}}} \times \vec{A}_{CM}$$

x_{CM}

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{(E)}}$$

RELAZIONE TRA MOMENTO ANGOLARE ed ENERGIA CINETICA CALCOLATI NEL S.R.M. DEL C.M. e NEL S.F.

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i) \times m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i) =$$

$$= \sum_i \vec{R}_{CM} \times m_i \vec{V}_{CM} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_{CM} + \sum_i \vec{R}_{CM} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i =$$

0 perché $\vec{R}_{CM}$ (oppure $\vec{V}_{CM}$) sono 0 nel S.R. del CM

$$= \vec{R}_{CM} \times (\sum_i m_i) \vec{V}_{CM} + \cancel{(\sum_i m_i \vec{r}_i)} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \cancel{(\sum m_i \vec{v}_i)} + \vec{L}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{L} = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}}_{\substack{\text{mom angolare} \\ \text{come se tutta la} \\ \text{massa fosse concen-} \\ \text{trata nel C.M.}}} + \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\substack{\text{contributo che viene dalla} \\ \text{rotazione del sistema attorno} \\ \text{al proprio C.M.}}}}$$

[TEOREMA DI KÖNIG PER IL MOMENTO ANGOLARE]

$$\boxed{T_K = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{CM}^2}_{\substack{\text{energia cinetica} \\ \text{come se tutta} \\ \text{la massa fosse} \\ \text{concentrata nel CM}}} + \underbrace{K_{CM}}_{\substack{\text{energia cinetica dovuta} \\ \text{ai moti relativi al C.M.}}}}$$

[TEOREMA DI KÖNIG PER L'ENERGIA CINETICA]

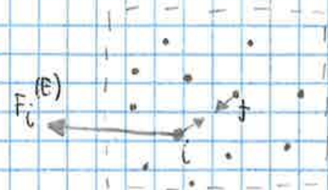
- casi particolari:
- $m_1 = m_2$: $V_{1f} = V_{2i}$; $V_{2i} = V_{1f}$ [le velocità si scambiano!]
- $m_2 \gg m_1$: $V_{1f} = 2V_{2i} - V_{1i}$; $V_{2f} \simeq V_{2i}$

05/05/14

DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE (II + III L.d.N):

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{R}^{(E)}$$ [I EQ CARDINALE (EQ Q.D.M.)]

[q.d.m. totale] [risultante forze esterne]



$[\vec{F}_{ij} \overset{P.A.R.}{=} \vec{F}_{ji}]$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{M}_O^{(E)} - \vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM}$$ [II EQ CARDINALE (EQ MOMENTO ANGOLARE)]

[momento angolare totale]

$$K_f - K_i = W_{i\to f}^{(E+I)}$$ [lavoro] [TH EN CINETICA]

[en. cinetica]

- **leggi di conservazione:**

$\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const} = m\vec{v}_{CM} \Rightarrow$ CM si muove di moto rettilineo uniforme

$\vec{M}_O^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{const}$ $(\vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM} = 0)$ EX: orbite pianeti giacciono su piano

$W = 0 \Rightarrow K = \text{const}$ (oppure forza dipende da un potenziale $\Rightarrow K + U = \text{const}$)

- la conservazione può essere anche lungo una singola direzione $\vec{u}$:

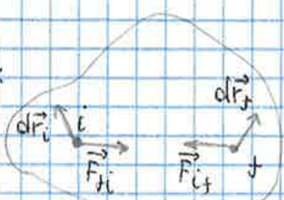
$\vec{R}^{(E)} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{u} = \text{const.} \Rightarrow$ p. es. $\vec{u} = \vec{i}$: $x_{CM} = x_{0,CM} + v_{0,x} \cdot t$

$y_{CM} = y_{0,CM} + v_{0,y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

LAVORO DELLE FORZE INTERNE:

$$K_f - K_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_{k,f}^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_{k,i}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

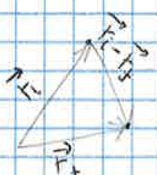


$$dW^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i =$$

ES: gas in espansione

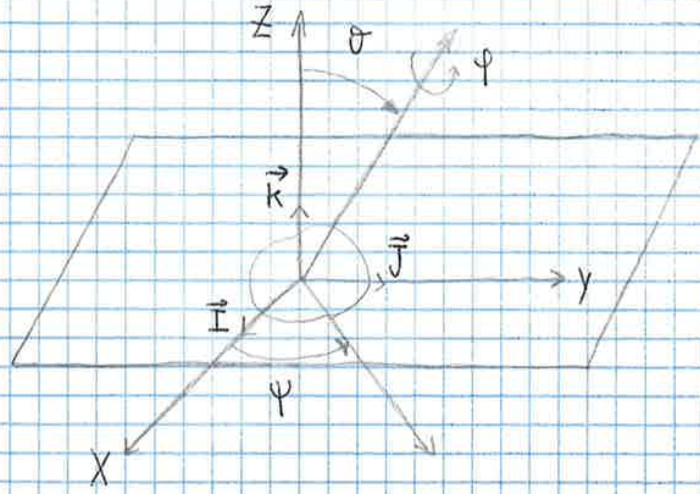
$$= \sum_{i,j} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) =$$

$$\overset{P.A.R.}{=} \sum_{i<j} (-\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) = \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$



- vediamo che, perché le forze interne possano fare lavoro, le posizioni relative dei punti materiali cambiano $\Rightarrow$ le forze interne non fanno lavoro in un corpo rigido (distanza tra i punti materiali costanti) e in sistemi di corpi rigidi con vincoli ideali (cioè nei quali non viene fatto lavoro), ed anche negli urti elastici

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO:



- 6 gradi di libertà ⇒
- 6 gradi di configurazione:

$$\underbrace{x_G, y_G, z_G}_{\text{[coordinate del C.M.]}}, \underbrace{\psi, \vartheta, \varphi}_{\text{[angoli di Eulero]}}$$

- 6 componenti di velocità:

$$\underbrace{\frac{dx_G}{dt}, \frac{dy_G}{dt}, \frac{dz_G}{dt}}_{\text{[3 vel. lineari]}}, \underbrace{\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}}_{\text{[3 vel. angolari]}}$$

- per descrivere la dinamica servono 6 equazioni ⇒

2 eq cardinali:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}, \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(E)}$$

- per usare concretamente queste eq devo saper scrivere $\vec{P}$ ed $\vec{L}_O$ in termini delle 6 velocità viste prima.
- per quanto riguarda $\vec{P}$, è facile:

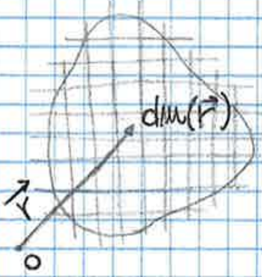
$$\vec{P} = M\vec{v}_G = M\left(\vec{I}\frac{dx_G}{dt} + \vec{J}\frac{dy_G}{dt} + \vec{k}\frac{dz_G}{dt}\right)$$

- però, per usare praticamente questa relazione, devo saper determinare il centro di massa del corpo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$$ [caso di sistemi di punti materiali]

- se i corpi sono continui devo pensare di suddividerli in tante piccole parti; nel limite in cui la suddivisione è molto fine ottengo che:

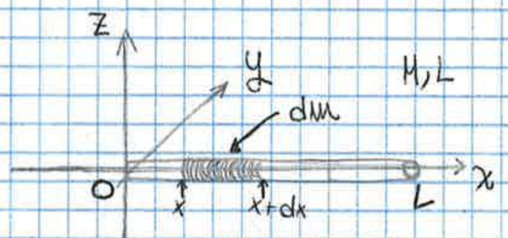
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_{corpo} \vec{r}\, dm$$



[caso di corpo rigido continuo]

$$M = \int_{corpo} dm$$

ASTA SOTTILE UNIFORME:



$\rho_L = \frac{M}{L}$ [densità lineare di massa]

$$dm = \rho_L \cdot dx = \frac{M}{L}\, dx$$

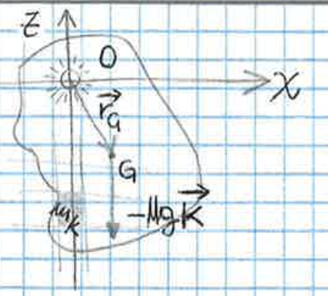
[massa per unità di lunghezza]

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x \frac{M}{L}\, dx = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

ESERCIZIO: asta non uniforme ⇒ $\rho_L(x) = a + bx$

$$dm = \rho_L \cdot dx = (a+bx)\, dx \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x(a+bx)\, dx = \frac{1}{M}\left[\frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3}\right]_0^L = \frac{L^2}{M}\left(\frac{a}{2} + \frac{bL}{3}\right)$$

FORMA QUALSIASI:



- equilibrio di una piastra piana irregolare incernierata in un punto O:

$$\frac{dL_0}{dt} = M_0^{(E)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \vec{L}_0 = L_0 \vec{k} \\ \vec{M}_0^{(E)} = M_0^{(E)} \vec{k} \end{array} \right)$$

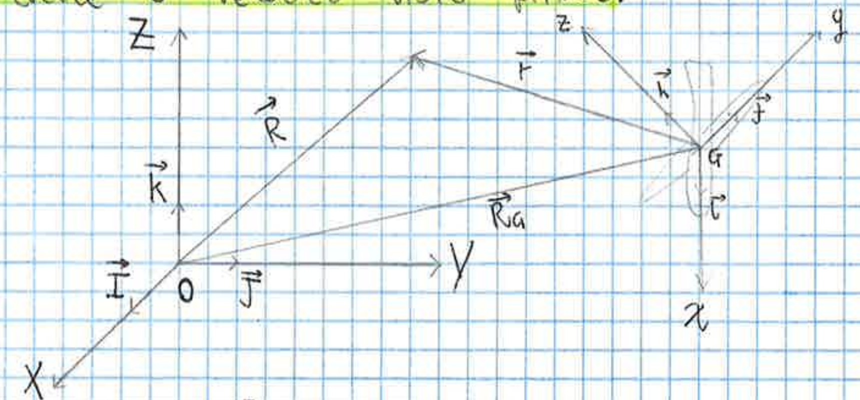
[EQUILIBRIO]

- se il corpo è inizialmente in quiete e $M_0^{(E)} = 0 \Rightarrow L_0 = 0$ per tutti i tempi e il corpo è in equilibrio

PELICE · VERSORE USCENTE FOGLIO

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times (-m_k g \vec{k}) = -\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k\right)}_{m \cdot \vec{r}_G} \times g\vec{k} = \vec{r}_G \times (-Mg\vec{k}) = 0 \; [\text{se } \vec{r}_G /\!/ \vec{k}]$$

- affrontiamo ora il problema di esprimere il momento angolare totale L_0 in funzione delle 6 velocità viste prima:



$$\vec{R} = \vec{R}_G + \vec{r}$$

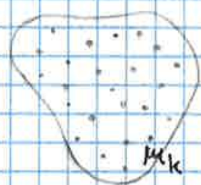
$$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}}_{} + \cancel{\vec{v}}$$

[i punti del corpo rigido sono fissi nel sistema di riferimento solidale col corpo rigido]

[velocità di trascinamento]

[formula fondamentale della cinematica del CR]

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \times m_k \vec{V}_k =$$



$$= \sum_{k=1}^{N} (\vec{R}_G + \vec{r}_k) \times m_k (\vec{V}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_G \times m_k \vec{V}_G + \cancel{\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_G \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)} + \quad [\Sigma m_k \vec{r}_k = 0] \text{ (vedi th. König)}$$

$[\Sigma m_k \vec{r}_k = 0]$

$$+ \cancel{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_G} + \boxed{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)} =$$

$$= \vec{R}_G \times M\vec{V}_G + \vec{L}_G$$

$$\vec{L}_G = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \Sigma m_k [r_k^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) \vec{r}_k]$$

$[a \times b \times c = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c]$

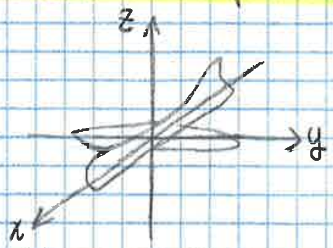
$$\vec{L}_G = \Sigma m_k [\underbrace{r_k^2 \vec{\omega}}_{} - \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) \vec{r}_k}_{}]$$

in generale $\vec{L}_G \not\parallel \vec{\omega}$!

[contributo $/\!/ \vec{\omega}$] [contributo in generale $\not\parallel \vec{\omega}$]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 140

• però anche un corpo non simmetrico ha 3 assi principali di inerzia ortogonali:



[direzioni principali di un aeroplano]

• se metto in rotazione un CR libero attorno ad uno degli assi principali, la velocità angolare $\vec{\omega}$ risulta costante e diretta come il momento angolare

$$\vec{L}_G = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$$

ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE:

$$K_G = \sum \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G)^2 = \sum \frac{1}{2} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^2 = \sum \frac{1}{2} m_k \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_k)}_{\vec{a}} \cdot (\underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{b}} \times \underbrace{\vec{r}_k}_{\vec{c}}) =$$

[th di KÖNIG] $[\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})]$

$$= \sum \frac{1}{2} m_k \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G = K_G$$

• adesso basta sostituire le relazioni viste prima per trovare:

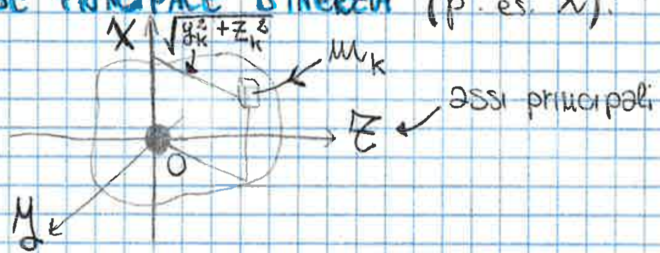
$$\boxed{K_G = \frac{1}{2} [I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2]}$$

dove con x, y, z indico le direzioni principali del corpo

• caso semplice: ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE PRINCIPALE D'INERZIA (p. es. x):

$$\vec{\omega} = \vec{i}\, \omega_x$$

$$\vec{L}_G = \vec{i} \cdot I_x \omega_x \quad // \quad \vec{\omega}$$



$$I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

[media pesata delle distanze al quadrato delle masse dall'asse di rot.]

$$\frac{dL_o}{dt} = \vec{M}_o^{(E)} \Rightarrow \frac{dL_{ox}}{dt} = I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_{o,x}^{(E)}$$

• confrontiamo con

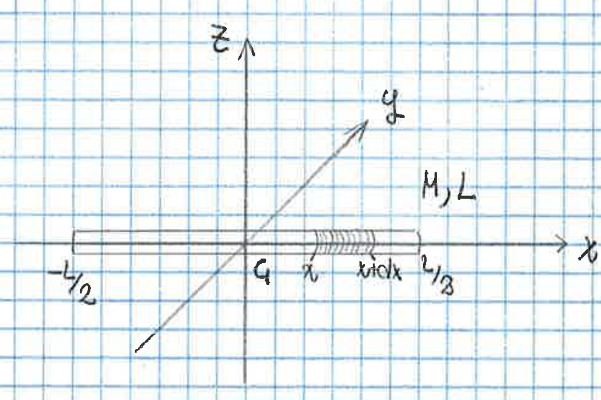
$$\frac{dP_x}{dt} = m \frac{dv_{Gx}}{dt} = R_x^{(E)}$$

[il momento di inerzia è il corrispettivo della massa per i moti di rotazione]

MOMENTO D'INERZIA DI UN'ASTA SOTTILE:

$\boxed{I_x \simeq 0}$

$\rho_\ell = M/L \; ; \; dm = \rho_\ell \, dx$



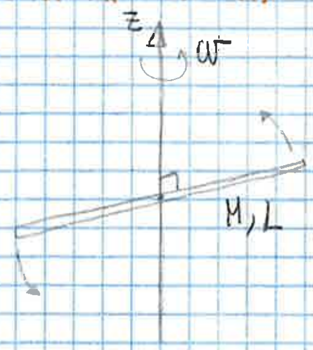
$$I_z = \int (\text{distanza da } z)^2 \, dm =$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx =$$

$$= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \left[\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right] =$$

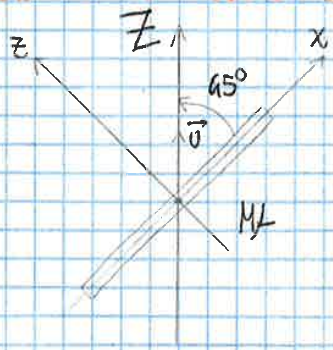
$$= \frac{M}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{2} L^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{24}\,12} = \frac{ML^2}{12}$$

ENERGIA CINETICA PER ROTAZIONE UNIFORME CON V. ANGOLARE ω:



$$I_z = \frac{ML^2}{12}$$

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{ML^2}{24}\omega^2$$



$$K = \frac{1}{2} I_v \omega^2 = \frac{ML^2}{48}\omega^2$$

$$I_v = I_x \cos^2\alpha + \cancel{I_y \cos^2\beta} + I_z \cos^2\gamma$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = \gamma = 45°, \ \beta = 90° \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$I_v = \frac{1}{2}(\cancel{I_x} + I_z) = \frac{ML^2}{24}$$

[SOTTILE]

ROTAZIONI ATTORNO AD UN ASSE CHE NON PASSA PER IL CM G:

• supponiamo di conoscere I_z

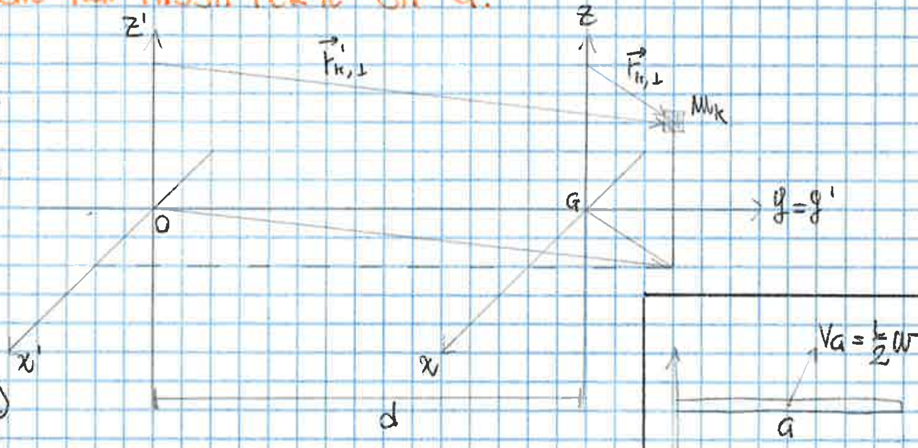
voglio calcolare $I_{z'}$, dove z' è un asse $\parallel$ a z e distante d

$$I_{z'} = \sum m_h (x_h'^2 + y_h'^2) =$$

$$= \sum m_h [x_h^2 + (y_h + d)^2] =$$

$$= \sum m_h [\underbrace{x_h^2 + y_h^2}_{I_z} + \underbrace{d^2}_{} + \underbrace{2dy_h}_{}] =$$

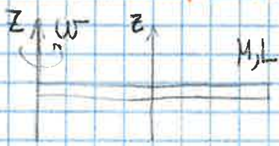
$$= I_z + d^2 \underbrace{\sum m_h}_{M} + 2d \underbrace{\cancel{\sum m_h y_h}}_{=0}$$



$$\Rightarrow \boxed{I_{z'} = I_z + Md^2}$$ [TEOREMA DI HUYGENS-STEINER]

$V_G = \frac{L}{2}\omega$

ASTA SOTTILE (ESTREMO):



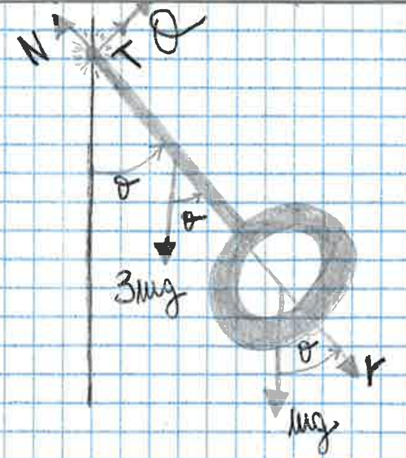
$$K = \frac{1}{2} I_Z \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4}\right)\omega^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\omega^2}_{K_G} + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{4}\omega^2$$

$$+ \frac{1}{2} M V_G^2$$ [th. di König]

$$I_Z = I_z + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$$

[REL. TH. HUYGENS-STEINER/KÖNIG]

• ora le reazioni vincolari:



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}$$

$$\begin{cases} \frac{dP_r}{dt} = R_r^{(E)} \\ \frac{dP_\theta}{dt} = R_\theta^{(E)} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM} \Rightarrow$$

$$a_r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \; ; \quad a_\theta = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

• $$\frac{dP_r}{dt}^{(asta)} = (3m)\left[-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$\frac{dP}{dt}^{(anello)} = m\left[-3R\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

[SOMMO]

$$\Rightarrow \frac{dP_r}{dt}^{(tot)} = -6mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

• $$\frac{dP_\theta}{dt}^{(asta)} = (3m)\cdot R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{dP_\theta}{dt}^{(anello)} = m\cdot 3R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

[SOMMO]

$$\Rightarrow \frac{dP_\theta}{dt}^{(tot)} = 6mR\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\begin{cases} R_r^{(E)} = -N + 4mg\cos\theta \\ R_\theta^{(E)} = T - 4mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r: \; -6mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -N + 4mg\cos\theta \\ \theta: \; 6mR\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - 4mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 6mR\underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{[eq del moto]}} + 4mg\sin\theta$$

$$6mR\left(-\frac{3}{7}\frac{g}{R}\sin\theta\right) + 4mg\sin\theta = \frac{10}{7}mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow N = 6mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 4mg\cos\theta$$

• $$\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{7}\frac{g}{R}\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$ ["raccolgo la derivata"]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\left[\frac{3g}{7R}\cos\theta\right] \Rightarrow$$ [integro sul tempo e moltiplico per 2]

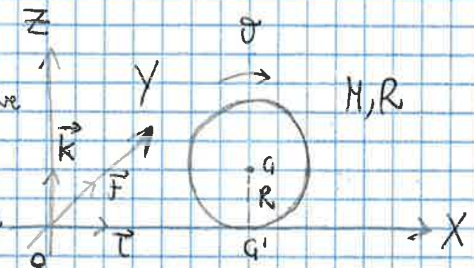
$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{6g}{7R}\cos\theta + C \Rightarrow$$

⇒ determino C ricordando che al tempo $t=0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0$; $\cos\theta = 0$ ⇒ $\boxed{C = 0}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{6g}{7R}\cos\theta \Rightarrow N = 6m\cancel{R}\,\frac{6g}{7\cancel{R}}\cos\theta + 4mg\cos\theta = \frac{64}{7}mg\cos\theta$$

ESERCIZIO:

• considero un anello omogeneo che rotola senza strisciare sull'asse x con velocità del CM $v_G = v$; calcolare momento angolare ed en. cinetica, e dire se si conservano



• ho 1 GdL, posso scegliere come coordinata di configurazione θ oppure x_G

$$\vec{L}_O = \vec{r}_G \times M\vec{v}_G + \vec{L}_G$$

$$\vec{r}_G = (x\vec{i} + R\vec{k})$$

continua di là!

$$\varepsilon = \frac{r}{d + r\cos\theta}$$

- Se scegliamo invece:

$\theta = 0 \rightarrow$ perielio

$$\varepsilon = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

1 $\theta = 0 \rightarrow$ afelio

$\varepsilon \cdot (d + r\cos\theta) = r$

$r(1 - \varepsilon\cos\theta) = \varepsilon d$

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

2 $\theta = 0 \rightarrow$ perielio

$\varepsilon \cdot (d - r\cos\theta) = r$

$r \cdot (1 + \varepsilon\cos\theta) = \varepsilon d$

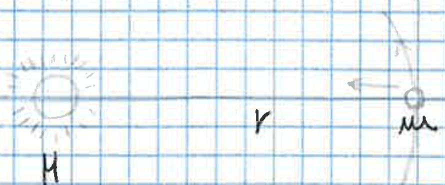
$$\boxed{r = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon\cos\theta}}$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} + \frac{\cos\theta}{d}}$$ [ancora più semplice se scritto in funzione di $1/r$]

LEGGI DI NEWTON => LEGGI DI KEPLERO

1. pr. di inerzia	1. orbite ellittiche con il sole in uno dei due fuochi
2. $\vec{F} = m\vec{a}$	2. costanza della velocità areolare
3. P.A.R. + legge di gravitazione universale	3. $T^2 \propto a^3$ [periodo di rivoluzione] [semiasse maggiore]

- ricordiamo che nell'approssimazione di orbite circolari abbiamo già ricavato alcuni di questi risultati



$$\begin{bmatrix}\text{accelerazione}\\ \text{centripeta}\end{bmatrix} = m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} = \begin{bmatrix}\text{accelerazione}\\ \text{gravitazionale}\end{bmatrix}$$

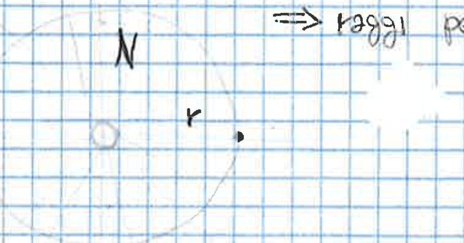
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

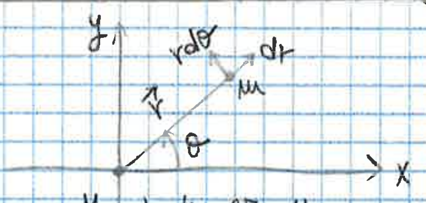
$$\Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} \cdot r^3$$

la legge della forza "reciproco del quadrato della distanza" fornisce la III legge di keplero

- c'è un altro argomento che può aver suggerito la legge dell'inverso del quadrato:

$\Longrightarrow$ raggi per unità di area che arrivano a distanza r: $N/4\pi r^3$





$\begin{cases} dr = v_r\, dt \\ r\, d\theta = v_\theta\, dt \end{cases}$

$\begin{cases} v_r = dr/dt \\ v_\theta = r d\theta/dt \end{cases}$

• **1ª costante** del moto nel piano è la componente z del momento angolare:

$$L = r \mu v_\theta = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}$$

$\Rightarrow$ 1 eq. differenziale I ordine [INTEGRALE PRIMO o COSTANTE DEL MOTO]

• **2ª costante** del moto nel piano è l'energia:

$$E = \mu \frac{v^2}{2} - \frac{GMm}{r} = K + V$$

$$\begin{cases} ① \quad L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ ② \quad E = \frac{\mu}{2} v^2 - \frac{GMm}{r} \end{cases}$$

a membro sinistro ho delle costanti, a membro destro ho due derivate prime (non seconde) $\Rightarrow$ MEGLIO!

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Rightarrow \text{sostituisco in ②}$$

$$E = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{GMm}{r}$$

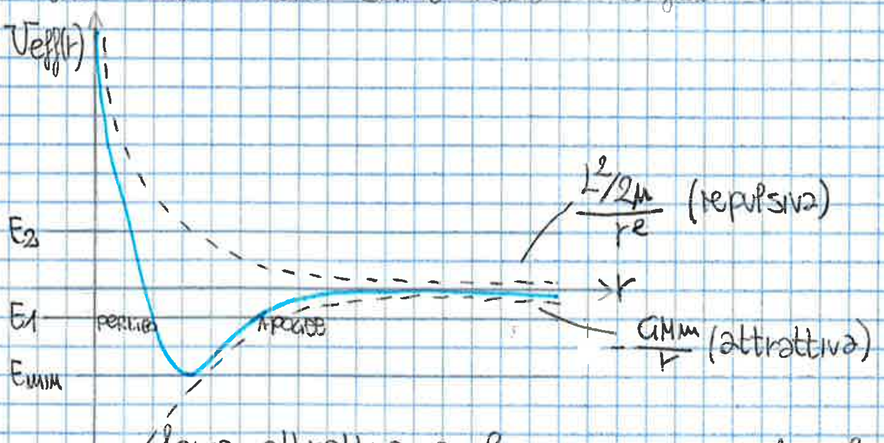
• ricavo $\frac{d\theta}{dt}$ da ① $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow$

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

[EQ. DIFF. I ORDINE NON LINEARE nella sola incognita r(t)]

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r}\right) = [V_{eff}(r)]$$

• energia di un sistema 1D "effettivo" che descrive come varia la distanza Terra-Sole senza descrivere come varia l'angolo θ



simile al potenziale di Lennar-Jones

$E = K + V_{eff}$

forza attrattiva a lungo raggio e repulsiva a breve raggio

• $E_{min} \Rightarrow$ corpo che descrive un'orbita circolare, perché il grafico descrive v_r, e se $v_r = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow r = \text{const}$

• $E_1 \Rightarrow$ orbita ellittica, il punto oscilla tra due punti (r_{min}, r_{max}) orbite limitate $E_{min} < E_1 < 0$

• $E_2 > 0 \Rightarrow$ il corpo si allontana all'infinito nello spazio $\Rightarrow$ orbite illimitate

NOTA BENE: finora non ho dimostrato che le orbite sono chiuse!

• identificando le costanti:

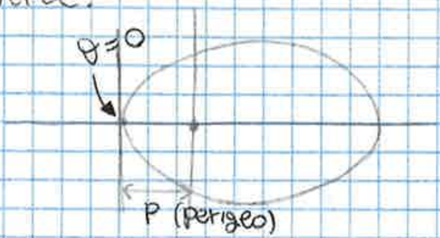
$$\frac{GMm\mu}{L^2} = \frac{1}{\varepsilon d} \quad ; \quad A = \frac{1}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$L^2 = GMm\mu \cdot \varepsilon d$$ [distanza dalla direttrice]

• la distanza d non è un parametro osservabile ⇒ la sostituisco con un parametro più utile:

$$r = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon\cos\theta}$$



$$p = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}$$

$$\varepsilon d = (1+\varepsilon)p$$

$$\Rightarrow L^2 = GMm\mu \cdot (1+\varepsilon)\, p$$ [parametri dell'orbita]

[punto di inversione]

• facciamo lo stesso con l'energia:

$$E = \frac{1}{2}\mu \underbrace{\cancel{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}_{0\ (\text{perigeo})} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} =$$

[la calcolo al perigeo (apogeo) perché in quel momento la variazione di r è nulla (tanto E è costante in qualsiasi punto dell'orbita)]

$$= \frac{L^2}{2\mu p^2} - \frac{GMm}{p} =$$

$$= \frac{GMm\cancel{\mu}(1+\varepsilon)\cancel{p}}{2\cancel{\mu}p^{\cancel{2}}} - \frac{GMm}{p} = (\varepsilon-1)\frac{GMm}{2p} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 \Rightarrow \text{iperbole} \\ = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{parabola} \\ < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{ellisse} \end{cases}$$

13/05/14

RIASSUNTO:

$$\begin{cases} E = (\varepsilon-1)\dfrac{GMm}{2p} \\ L^2 = GMm\mu(1+\varepsilon)\,p \end{cases}$$

• le costanti del moto sono apparse in funzione dei parametri arbitrari p, ε; se inverto le relazioni trovo

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GMm)^2\mu}} \quad ; \quad p = \sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,\frac{L^2}{2E}}$$

• posizionare un satellite al perigeo, in modo che la sua orbita abbia parametri arbitrari p, ε:

$$\text{soluz.}\begin{cases} v_0 = \sqrt{\dfrac{(1+\varepsilon)GMm}{\mu p}} \\ r_0 = p \end{cases}$$

• III legge di keplero

$GMm\mu\cdot\varepsilon d$; $d = \frac{a}{\varepsilon}(1-\varepsilon^2)$

[periodo di rivoluzione] → $T^2 \propto a^3$ ← [semiasse maggiore]

$$L = \mu r^2\frac{d\theta}{dt} = 2\mu\frac{dA}{dt} \rightarrow \left[dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta\right] \Rightarrow dA = \frac{L}{2\mu}dt \quad ; \quad b = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,a$$

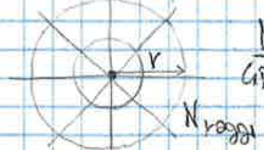
• per spazzare tutta l'area dell'iperbole ci vuole un tempo $t = T$

$$\underset{\pi ab}{A} = \frac{L}{2\mu}T \Rightarrow T = \frac{2\pi\mu ab}{L} = 2\pi\mu a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,a \Big/ \sqrt{GMm\mu a(1-\varepsilon^2)} \propto a^{3/2}$$

FORZA ELETTROSTATICA:

Coulomb

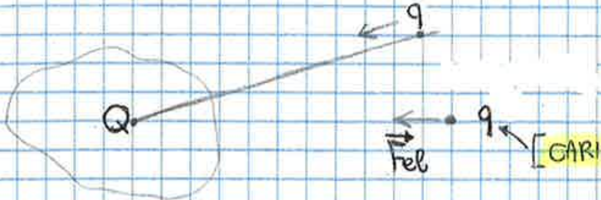
$\vec{F}_{el} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$; $[Q]=C$



$\frac{N}{4\pi r^2}$ [stessa legge di decadimento dell'intensità lu. luminosa]

- repulsiva se Q, q hanno lo stesso segno, attrattiva altrimenti. ⇒ esistono due tipi di cariche!
- inoltre $k = 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ ⇒ molto più intensa di quella gravitazionale

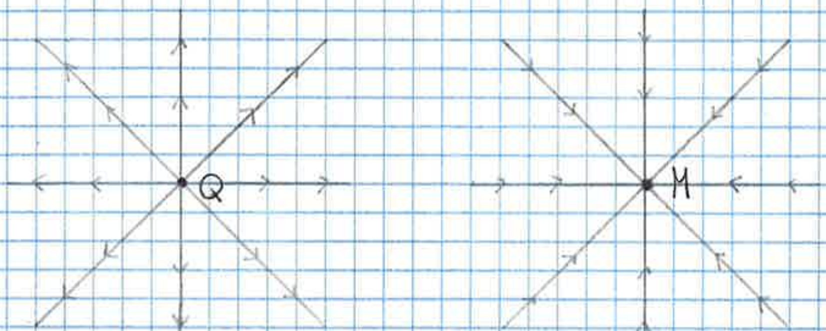
$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ → [ε_0: costante dielettrica nel vuoto]



$\boxed{F_{el} = k\frac{Qq}{r^2}}$

[CARICA DI PROVA]

CAMPO DI FORZE:



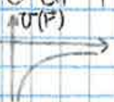
- dal punto di vista matematico non c'è quasi alcuna differenza tra lo studio del campo elettrostatico e quello del campo gravitazionale!
- consideriamo dapprima il caso gravitazionale, ma quasi tutti gli argomenti si trasportano subito al caso elettrostatico

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE:

$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$; $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

- calcolando il lavoro di $\vec{F}$ in uno spostamento da un punto ad un altro si trova

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$



$$\underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{CAMPO VETTORIALE}} = -\nabla \underbrace{U(r)}_{\text{CAMPO SCALARE}}$$

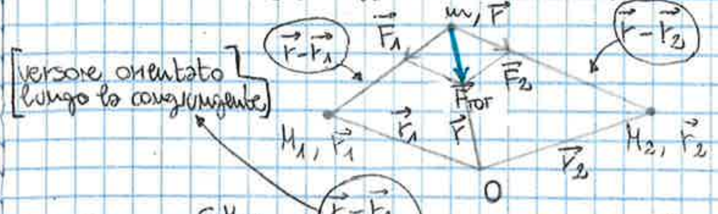
- in una geometria con simmetria sferica si ha:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow$$

$$-\vec{\nabla}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r = \vec{F}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

- che succede se ho una collezione di cariche o masse?



$$\vec{F}_1(\vec{r}) = -\frac{GM_1 m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad + \quad \vec{F}_2(\vec{r}) = -\frac{GM_2 m}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \quad = \vec{F}^{(TOT)}_{(\vec{r})} = \vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{F}_2(\vec{r})$$

$$U_1(\vec{r}) = -\frac{GM_1 m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad + \quad U_2(\vec{r}) = -\frac{GM_2 m}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \quad = U^{(TOT)}_{(\vec{r})} = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r})$$

- idem per il campo e il potenziale:

$$\vec{g}_1(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad + \quad \vec{g}_2(\vec{r}) = -\frac{GM_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \quad = \vec{g}^{(TOT)}_{(\vec{r})} = \vec{g}_1(\vec{r}) + \vec{g}_2(\vec{r})$$

$$V_1(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad + \quad V_2(\vec{r}) = -\frac{GM_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \quad = V^{(TOT)}_{(\vec{r})} = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$$

- in generale, se ho tante masse M_k:

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -G\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|}}$$

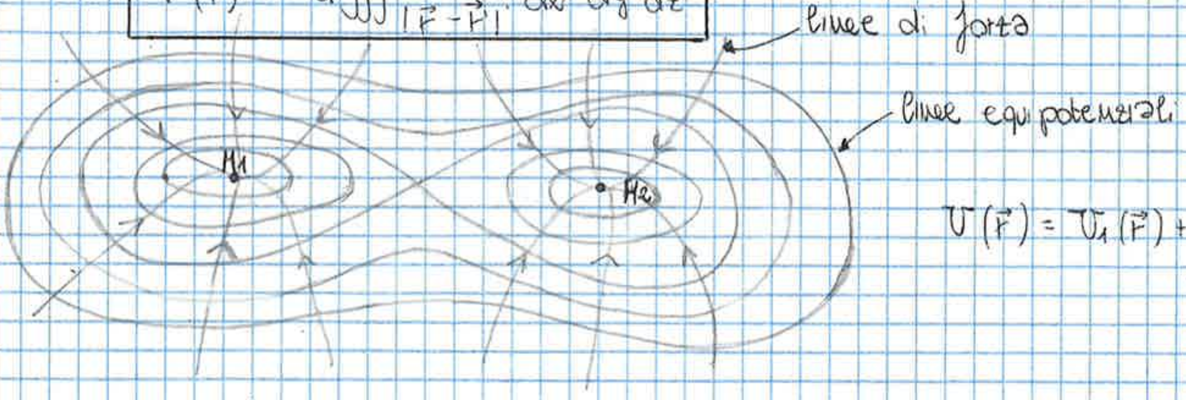
$$\boxed{V(\vec{r}) = -G\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|}}$$

- se ho una distribuzione continua di massa (o carica):

$dM = \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; $\vec{r}$ = pos. massa prova ; $\vec{r}\,'$ = pos sorgente

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -G\iiint\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dx'dy'dz'}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = -G\iiint\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dx'dy'dz'}$$



$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$$

- questi concetti si trasportano pari pari al caso del campo elettrostatico:

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\,\vec{e}_r \quad ; \quad U(\vec{r}) = \frac{kQq}{r}$$

- anche qui divido per la piccola carica di prova q:

$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$ [forza per unità di carica, o equivalentemente forza sentita da una carica di prova unitaria (q = +1)]

[CAMPO ELETTROSTATICO]