



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1528A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Allavena

MATERIA: Idraulica + Eserc. Prof.Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# IDRAULICA

29/09/2014

## • CAPITOLI GENERALI :

- 1) STATICA
- 2) CINEMATICA
- 3) DINAMICA
- 4) CORRENTI IN PRESSIONE
- 5) CORRENTI A SUP. LIBERA
- 6) MOTI A POTENZIALE
- 7) MOTI DI FILTRAZIONE

## • LIBRO: "Idraulica" - CITRINI-MASERA

Idraulica = meccanica dei fluidi

↓      ↓  
liquidi    gas

Parte tutta con: Leonardo → Galileo con Torricelli →  
Euler e Lagrange → Stokes, Kelvin, Kolmogorov, Heisenberg, ...

Il **FLUIDO** è una entità materiale che:

- oppone poca resistenza alla deformazione
- la resistenza dipende dalla velocità che esso oppone.

La deformazione è tanto più lenta, tanto più deforma lentamente. La forza da applicare è legata alla velocità di deformazione. Quando la velocità viene introdotto il tempo.

Liquidi: grande resistenza a cambiare il  $v$

Gas: poca resistenza a cambiare il  $v$

Ma liquido è poco comprimibile ma molto deformabile!

Il fluido viene immaginato come delle molecole molto distanti. L'analisi matematica è sostanzialmente basata sul concetto infinitesimale di  $dx$  e se lo

$\Delta V \propto \Delta P V$   $\rightarrow$  Proporzionale

$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon} \Delta P V$

$\epsilon$   $\rightarrow$  modulo di comprimibilità a compressione cubica

quando  $\Delta P$  è positivo,  $\Delta V$  è negativo ecco perché si ha il segno meno. Quindi:

$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{\epsilon}$  (\*)

tanto più  $\epsilon$  è grande e tanto più  $\Delta V$  è piccolo a parità di  $\Delta P$ .

$m = \rho V = \text{cost}$

$dm = d\rho V + \rho dV = 0 \rightarrow$  cioè non cambia

$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$  (\*\*)

andiamo a mettere insieme (\*) e (\*\*) e otteniamo:

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\epsilon}$

che è il legame tra quanto cambia la  $P$  e la  $\rho$ . Il valore  $d\rho/\rho$  cambia proporzionalmente all'incremento di  $dP$  considerando anche  $\epsilon$ .

Esempio:  $\epsilon$  molto grande  $\rightarrow \epsilon = 0(10^9) \text{ N/m}^2 \rightarrow \Delta P$  piccolo.

$dP = 0(10^4) \text{ N/m}^2$

quindi:  $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{10^4}{10^9} = 10^{-5}$

Gas: a volte si considerano anche i gas incompressibili e allora li si considera simili ai liquidi avendo  $d\rho$  e  $\epsilon$  bassi e allora  $d\rho/\rho$  simile a quello dei liquidi.

• celerità  $\rightarrow c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$   
 $\rightarrow c(\text{aria}) \approx 300 \text{ m/s}$   
 $\rightarrow c(\text{H}_2\text{O}) \approx 1400 \text{ m/s}$

$$T = \mu R \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

se  $R$  raddoppia  $\Rightarrow T$  raddoppia

$\frac{\Delta v}{\Delta r}$ : gradiente di velocità lungo il raggio

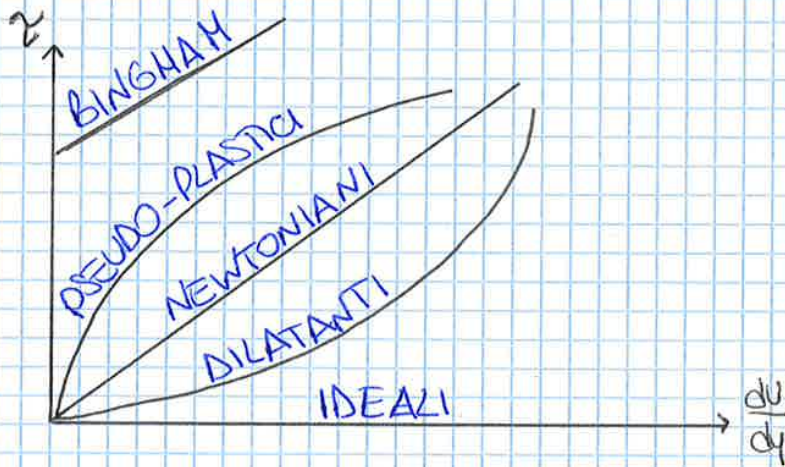
$$\frac{T}{R} = \tau = \mu \frac{dv}{dr}$$

$\tau$ : TENSIONI TANGENZIALI

$\tau$  è dato dal prodotto tra viscosità e gradiente di velocità lungo la normale.

I FLUIDI NEWTONIANI SODDISFANO  $\tau = \mu \frac{dv}{dr}$

Tutti i fluidi sono Newtoniani?

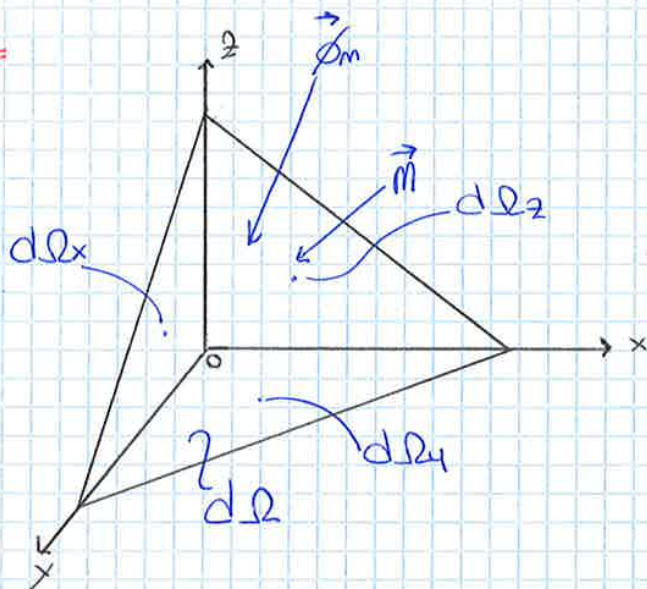


La reologia studia se il fluido è Newtoniano o meno con questo piano reologico.

- Bingham: hanno una  $\tau$  di base anche se non li deformato
- Pseudo-plastici: più li deformato e meno sono viscosi
- Newtoniano: passa sempre per l'origine e la pendenza della retta dipende da  $\mu$
- Dilatanti: più li deformato e più appaiono resistenti
- Ideali: non hanno  $\tau$

I fluidi tixotropici sono quelli in cui più passa il tempo e più la viscosità decresce.

Cauchy =



poichè  $\hat{m}_x$  è l'angolo direttore tra l'asse  $x$  e la normale  $\vec{m}$ ;

$$\begin{cases} d\Omega_x = -(\cos \hat{m}_x) d\Omega \\ d\Omega_y = -(\cos \hat{m}_y) d\Omega \\ d\Omega_z = -(\cos \hat{m}_z) d\Omega \end{cases}$$

tutte le forze di massa (peso, inerzia) sono proporzionali alla massa, cioè:

$$dm = \rho \, dx \, dy \, dz$$

$\uparrow$  m° o e f a

perciò per le forze di massa non cambia mai, ma cambia solo perché di sup.

forza di sup. ( $d\vec{T}$ ): perciò qui agisce:

$$\vec{\sigma}_m d\Omega - \vec{\sigma}_x d\Omega (\cos \hat{m}_x) - \vec{\sigma}_y d\Omega (\cos \hat{m}_y) - \vec{\sigma}_z d\Omega (\cos \hat{m}_z) = 0$$

$$\rightarrow \vec{\sigma}_m = \vec{\sigma}_x \cos(\hat{m}_x) + \vec{\sigma}_y \cos(\hat{m}_y) + \vec{\sigma}_z \cos(\hat{m}_z)$$

$$\begin{cases} \sigma_{mx} = \sigma_{xx} \cos(\hat{m}_x) + \sigma_{yx} \cos(\hat{m}_y) + \sigma_{zx} \cos(\hat{m}_z) \\ \sigma_{my} = \sigma_{xy} \cos(\hat{m}_x) + \sigma_{yy} \cos(\hat{m}_y) + \sigma_{zy} \cos(\hat{m}_z) \\ \sigma_{mz} = \sigma_{xz} \cos(\hat{m}_x) + \sigma_{yz} \cos(\hat{m}_y) + \sigma_{zz} \cos(\hat{m}_z) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

di cui 9 in funzione per le 3 giaciture.

premiati per cui  $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ , quindi  $\vec{\sigma}_m = p\vec{m}$ .

Do avere in ogni punto uno scalare ( $\pm$  info) e non più 6.

Nel fluido newtoniano:  $\tau = \mu \frac{dv}{dr}$   
 $\uparrow$   
 termini tangenziali

col profilo di velocità e con la viscosità allora ho una tensione tangenziale  $\tau$ .

$$\tau = 0 \quad \text{se} \quad \begin{matrix} \nearrow \mu = 0 \\ \searrow \frac{dv}{dr} = 0 \end{matrix} \rightarrow \vec{v} = \text{cost}$$

In statica  $\vec{v} = 0$  e allora  $\frac{dv}{dr} = 0$  e quindi  $\tau = 0$ ; ma se non ho mai  $\tau$  allora i termini fuori della diagonale sono sempre zero e allora ho solo 1 scalare che serve a caratterizzare il profilo ed è la pressione.

La statica vale per tutti i fluidi purché poniamo per il punto 0 origine del piano rettilineo.

Si parte dal fatto che  $\tau = 0$  e allora tutti gli  $\vec{\sigma}$  sono  $\perp$  alla sup. su cui agiscono. Se le forze tangenziali non esistono ( $\tau = 0$ ), allora possiamo  $|\vec{\sigma}_m| = \sigma_m$

questo vale su ogni sup.:

$$|\vec{\sigma}_x| = \sigma_x \quad |\vec{\sigma}_y| = \sigma_y \quad |\vec{\sigma}_z| = \sigma_z.$$

Ricordiamoci che il tetraedro di Cauchy conta le 3 direzioni. Vediamo lungo gli assi:

$$\begin{matrix} \textcircled{x} \\ \textcircled{y} \\ \textcircled{z} \end{matrix} \begin{cases} \sigma_m \cos(\hat{m}, \hat{x}) = \sigma_x \cos(\hat{m}, \hat{x}) \\ \sigma_m \cos(\hat{m}, \hat{y}) = \sigma_y \cos(\hat{m}, \hat{y}) \\ \sigma_m \cos(\hat{m}, \hat{z}) = \sigma_z \cos(\hat{m}, \hat{z}) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_m = \sigma_x \\ \sigma_m = \sigma_y \\ \sigma_m = \sigma_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \end{matrix}$$

l'eq. è indefinita in quanto vale in un qualunque punto dello spazio in un fluido in quiete.

Questa eq. regola la statica dei fluidi e quindi si dice come un la P.

Osservazioni:

1) se la forza di massa ammette potenziale, allora

$$\vec{F} = \text{grad}(U) \Rightarrow \rho \text{grad}(U) = \text{grad}(P)$$

allora le sup. equipotenziali sono anche isobare ( $P = \text{cost}$ ) e allora le sup. isobare coincidono con le isobare del campo potenziale.

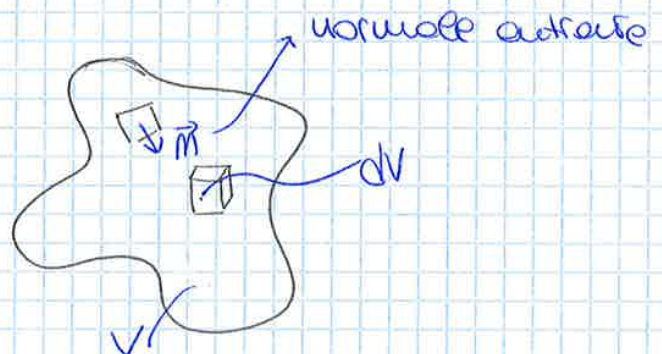
2) se il fluido è incomprimibile, allora  $\rho = \text{cost}$  e quindi lo considero come un numero:

$$\rho \vec{F} = \text{grad}(P) \Rightarrow \vec{F} = \text{grad}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

quindi la  $\vec{F}$  ammette potenziale che è proprio  $\frac{P}{\rho}$ .

3) abbiamo ricavato  $\rho \vec{F} = \text{grad}(P)$  che vale punto per punto, su tutto il volume  $V$  ha invece:  $\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \text{grad}(P) dV$ ,

questa è l'eq. globale della statica dei fluidi.



$\vec{F}_{dm}$ : forza di massa agente su  $dv$   
 $\uparrow$   
 $\rho dv$

se sommiamo tutte le  $\vec{F}_{dm}$  ho il peso  $\vec{P}$  che è una quantità globale.



Se prendo 2 punti in un fluido in quiete:



punti:  $h_A = h_B \rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} \rightarrow P_B = P_A + \gamma(z_A - z_B)$

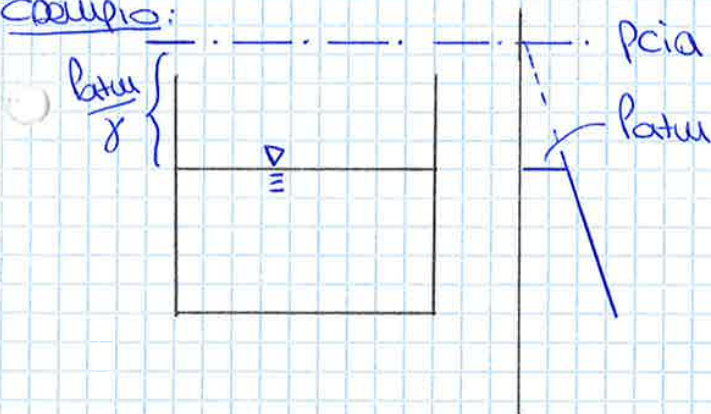
In statica dei fluidi, la  $P$  è una funzione lineare. La pendenza della retta è funzione del peso specifico (meno pendenza e più cresce il peso specifico).

Basta sapere la  $P$  di un punto che lo conosco ovunque.

Col crescere, la retta arriva in un punto in cui si annulla e questo è il **piano dei carichi idrostatici relativi** in cui  $P=0$ . Il piano può anche essere fuori dal fluido.

Se il punto si trova nel piano, allora la sua  $P=0$ .

Esempio:



se la sup. libera è ferma, allora ho la  $P_0$ .

$\rightarrow \frac{P_0}{\gamma} (h_0) = 10,33 \text{ m}$ : max depressione possibile

$\frac{P_0}{\gamma} (\text{Hg}) = 76 \text{ cm}$

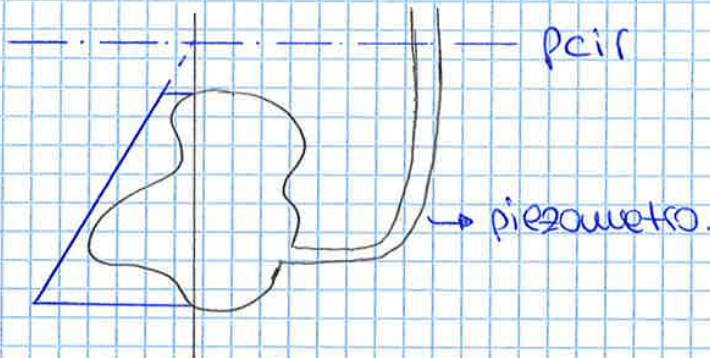
Sappiamo i 2 fluidi con linee non rette. Prendiamo  $N$  ed  $N'$  e li proiettiamo alla stessa altezza di  $N$  sopra e di  $N'$  sotto. Allora:

$$\begin{cases} P_M = P_{N'} \\ P_{N'} = P_N \end{cases} \quad \begin{cases} P_N = P_{N'} + \Delta \gamma_1 \\ P_{N'} = P_M + \Delta \gamma_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_{N'} + \Delta \gamma_1 = P_M + \Delta \gamma_2 \\ \text{ma } P_{N'} = P_M \end{cases}$$

quindi  $\Delta \gamma_1 = \Delta \gamma_2$

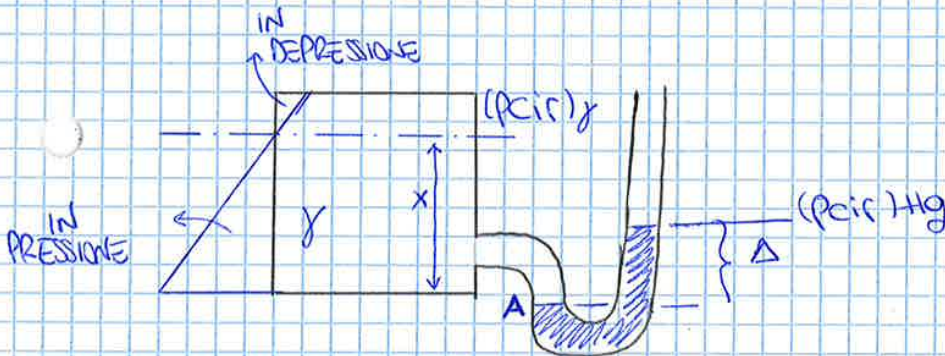
se  $\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow \Delta \gamma_1 = \Delta \gamma_2$  se  $\Delta = 0$  e allora non ci può essere una superficie inclinata!

Esempio: prendiamo un serbatoio chiuso sul quale facciamo un piccolo foro e attacchiamo un tubicino:



il fluido sale fino alla posizione del pcir

Esempio: MANOMETRO A Hg:

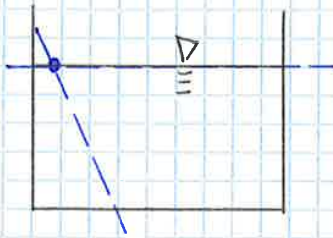


quando tutto fermo,  $P_A$  è uguale a pressione che si ha nel fluido  $\gamma$ :

$$P_A = x \gamma = \Delta \gamma_{Hg} \rightarrow x = \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} \Delta$$

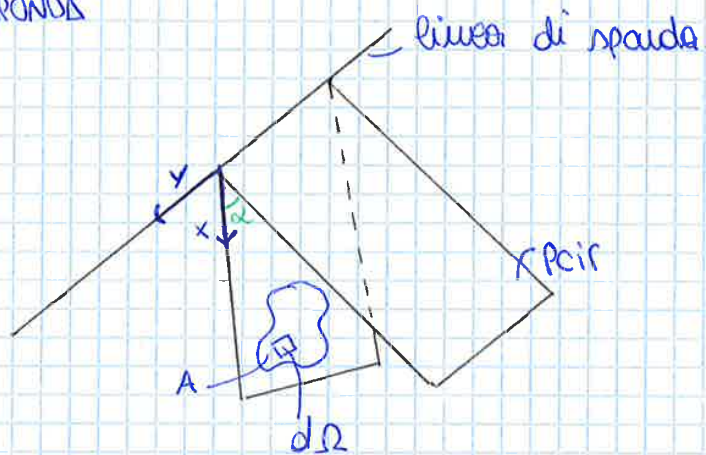
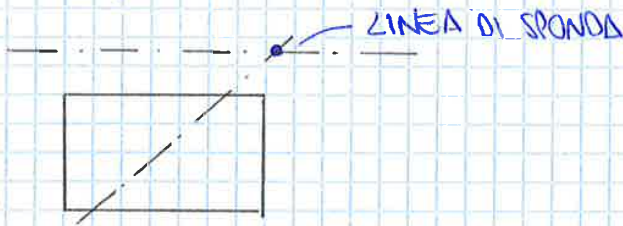
La  $P_r$  va anche in negativo e allora è minore della  $P_{atm}$ .

## SPINTA SU SUP. PIANA :



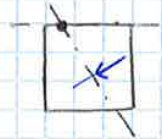
questo è la spinta che riceve dall'acqua.

L'intersezione tra il piano che contiene la sup. e il piano dei carichi idrostatici relativi, produce una retta, viene detta **LINEA DI SPONDA**; quindi:



pongo con  $S$  la spinta che è un vettore applicato e quindi ha direzione, verso, modulo e punto di applicazione:

- la direzione è  $\perp$  alla sup.
- il verso viene da sopra



però dove la  $P$  in  $A$ ?

$$P_A = h_A \gamma = (x_A \sin \alpha) \gamma$$

$$dS = P_A d\Omega = (x_A \sin \alpha) \gamma d\Omega$$

$$\rightarrow S = \int_{\Omega} (x_A \sin \alpha) \gamma d\Omega = (\sin \alpha) \gamma \int_{\Omega} x d\Omega = (\sin \alpha) \gamma \overset{\uparrow}{M} =$$

$$= (\sin \alpha) \gamma (x_G \Omega) = \gamma h_G \Omega = P_G \Omega$$

$$h_G = \frac{S}{\gamma \Omega} \quad P_G = \gamma h_G$$

**MOMENTO STATICO DELLA SEZIONE** ( $M = x_G \Omega$ )

particelli su  $d\Omega$  attorno:  $dS = \rho x \sin\alpha \, d\Omega$ , e quale è il momento di  $dS$ ?

$$dM_y = dS x_y = x_y^2 \rho \sin\alpha \, d\Omega$$

La risultante sarà:

$$M_y = \int_{\Omega} dM_y = \int_{\Omega} x_y^2 \rho \sin\alpha \, d\Omega = (\rho \sin\alpha) \int_{\Omega} x^2 d\Omega = (\rho \sin\alpha) I_y = S \xi \quad (*)$$

MOMENTO DI INERZIA

$$M_x = \int_{\Omega} dM_x = \int_{\Omega} x y \rho \sin\alpha \, d\Omega = (\rho \sin\alpha) \int_{\Omega} x y d\Omega = (\rho \sin\alpha) I_{xy} = S \eta$$

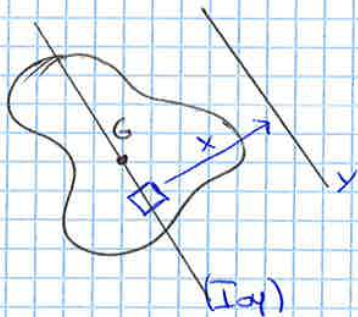
MOMENTO CENTRIFUGO

Ricaviamoci  $\xi$  da  $(*)$ :

$$S = \rho \Omega = \rho x_G \Omega = x_G \rho \sin\alpha \, \Omega$$

$$\rho \sin\alpha I_y = x_G \rho \sin\alpha \, \Omega \xi \rightarrow \xi = \frac{I_y}{x_G \Omega} = \frac{I_y}{M}$$

Possiamo anche scrivere  $I_y = I_{Oy} + x_G^2 \Omega$



$$I_y = \int_{\Omega} x^2 d\Omega = I_{Oy} + x_G^2 \Omega$$

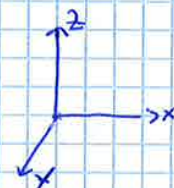
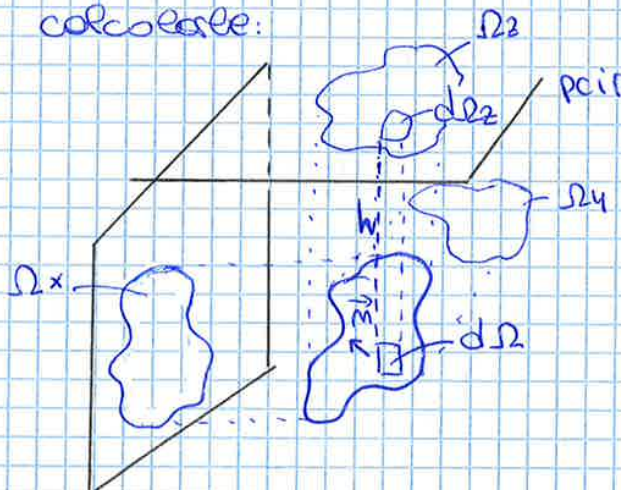
$$\rightarrow \xi = \frac{I_{Oy}}{M} + x_G$$

1/10/2014

### SPINTA SU SUP. CURVA:

2 modi per calcolarle:

1° modo:



T dipende dalla spinta del fluido. Calcoliamoci questa spinta mettendone un certo volume a piacere e un cubo che lo delimitiamo con due superfici piane e due superfici curve uguali per cui le loro spinte sono uguali per cui le loro risultanti sono uguali:

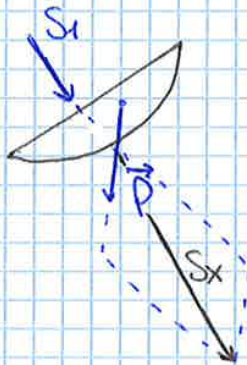


Poi ho le due superfici curve su cui calcolare la spinta, e una superficie piana su cui ho calcolato la spinta, quindi:

$$\vec{P} + \vec{S}_x + \vec{S}_1 = 0 \quad (1 \text{ eq. in 1 incognita})$$

$$-\vec{S}_x = +(\vec{P} + \vec{S}_1)$$

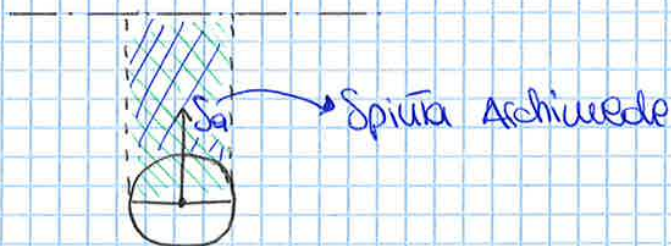
spinta che il fluido riceve dalle due superfici curve. Quindi:



trovo i vettori lungo le loro rette di azione per poi fare la regola del parallelogramma.

Andiamo a dimostrare il principio di Archimede:

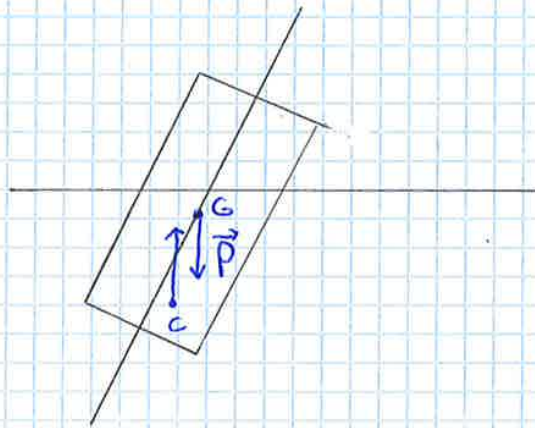
• 1° modo:



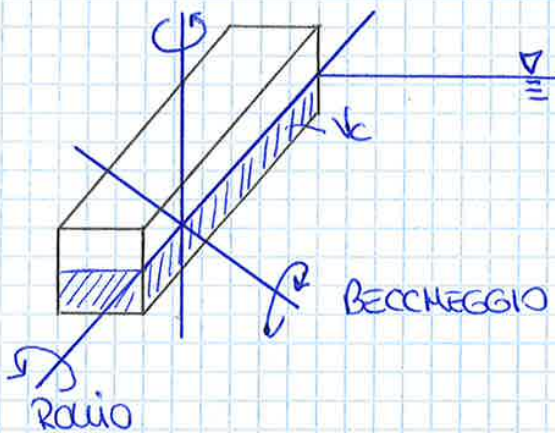
considero il cilindro con direttrici ad esso  $tg$  e immagino di dividerlo in 2 parti. Visto con ricore una spinta dalle due colonne di fluido che

se  $\vec{P}_c < \gamma V_c$  allora il corpo galleggia

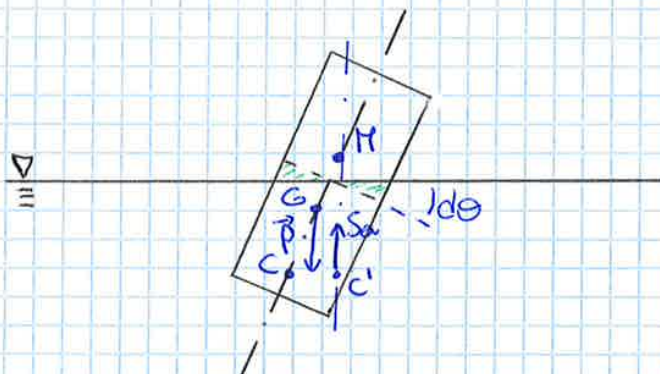
La posizione del punto C è stabile o instabile? Possiamo e perturbare la nostra situazione:



G non cambia in punto la meno del corpo ma varia, ciò che varia è C. Una piccola perturbazione fa nascere una coppia che fa spostare il corpo inclinandolo. Se il punto fono a dx di G allora creerebbe stabilità la coppia (caso delle navi).



Voglio una condizione che ci dica quando il corpo è stabile o meno al fatto.



H = metacento

C: quando era dritto  
C': quando è ruotato

per cui ciò che conta è la sezione del piano di galleggiamento rispetto all'asse di rotazione:

$$V_c \overline{GH} \sin \theta = \int r \sin \theta \, I_r \quad (\text{coppia = momento } M)$$

$$V_c \overline{GH} = I_r \rightarrow \overline{GH} = \frac{I_r}{V_c}$$

$$\overline{GH} = 0,1 \text{ m}$$

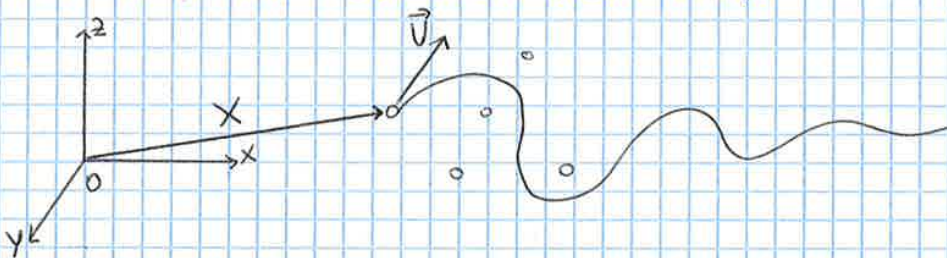
Più  $\overline{GH}$  è grande e più sarà trasversale e più la forza di richiamo con cui perturbo è forte perché nasce una coppia forte.  $\overline{GH}$  è buona perché non si dice e non si dice mai metitai.

6/10/2014

## CINEMATICA:

Entrano in gioco spazio e tempo; a parte destra di un fluido in movimento.

• **PUNTO DI VISTA LAGRANGIANO:** intuitivo che in ogni punto ci siano delle particelle, ognuna con una sua velocità e che lo riesco a "ricomporre" nel tempo:



la **TRAIETTORIA** è il luogo dei punti occupati nel tempo da queste particelle:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{a}}{dt}$$

Lagrange fissa le particelle che gli interessano e ne descrive la traiettoria:

$$\vec{x} = \vec{x}(x_0, y_0, z_0, t)$$

Prendiamo 2 punti in un fluido. La  $\vec{v}$  al tempo  $t + \Delta t$  è quella del punto che si è spostata dal tempo  $t$  in A in B, per cui:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_B(t + \Delta t) - U_A(t)}{\Delta t} = \frac{dU}{dt}$$

↑  
Lagrange

Summo e sottraggio la velocità  $t$  in B in punto in ogni punto ho diversi punti che "si muovono" ognuno con la sua velocità:

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_B(t + \Delta t) + U_B(t) - U_B(t) - U_A(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_B(t + \Delta t) - U_B(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_B(t) - U_A(t)}{\Delta t} =$$

variazioni di velocità ~~media~~ <sup>media</sup> ~~posizione~~ <sup>posizione</sup> ~~indipendentemente~~ <sup>indipendentemente</sup> ~~dalla~~ <sup>dalla</sup> ~~particella~~ <sup>particella</sup> che si trova

$$\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{U_B(t) - U_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{ds} |\vec{v}| = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

↑          ↑          ↑          ↑

variazioni spaziali ~~della~~ <sup>della</sup> ~~velocità~~ <sup>velocità</sup>      $\frac{d\vec{v}}{ds}$       $|\vec{v}|$       $\vec{v}$  <sup>CONVETTIVA</sup>

$\vec{a}$  LOCALE

DERIVATA EULERIANA O SOSTANZIALE!

per la densità →  $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{ds} |\vec{v}|$

per la temperatura →  $\frac{DT}{Dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{ds} |\vec{v}|$

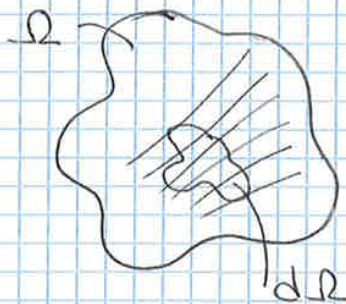
regola generale:  $\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{d \cdot}{dt} + \frac{d \cdot}{ds} |\vec{v}|$



- moto UNIFORME: pseudo il campo di moto non cambia lungo la traiettoria;  $\vec{v}$  non cambia in base al punto o al tempo.
- moto PIANO: non ha dipendenza dalla  $z \rightarrow \vec{v} = \vec{v}(xyt)$

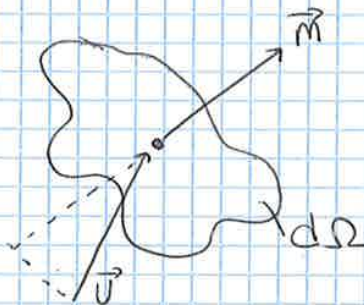
### CONCETTO DI PORTATA:

Prendiamo una curva chiusa in un fluido in movimento che abbia un'area infinitesima. Ad un certo tempo  $t^*$  considero le linee di corrente sulla linea chiusa:



ma  $\vec{v}$  è tg delle linee di corrente e allora non ha componenti  $\perp$  alla sezione, e quindi individuiamo come un tubo: Tubo di flusso, il quale separa il fluido al tempo  $t^*$

che scorre dentro rispetto a quello che scorre fuori. Ingrandisco la sezione infinitesima:



$$v_m = \vec{v} \cdot \vec{m}$$

allora  $\vec{v}$  ha una componente normale ( $v_m$ ) e una tangenziale.

PORTATA

$$d\varphi = v_m d\Omega = \vec{v} \cdot \vec{m} d\Omega$$

↑  
PORTATA

↑  
altezza sul tempo

considerando porzioni area  $\Omega$  finite:  $\varphi = \int_{\Omega} d\varphi = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{m} d\Omega$

al tempo  $dt$  la massa può cambiare se:

- 1) cambio il volume
- 2) cambio la densità

$$\Rightarrow \left( \frac{d\rho}{dt} \right) dx dy dz = - \operatorname{div} \rho \vec{v} \cdot dx dy dz dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} = - \operatorname{div} \rho \vec{v}}$$

di continuità perché se la massa si conserva, essere il fluido deve essere continuo.

EQ. DI CONTINUITÀ O DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA.

• fluido incompressibile:  $\rho = \text{cost} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

$$\rightarrow \text{GLOBALMENTE: } \int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\Omega dt = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV dt$$

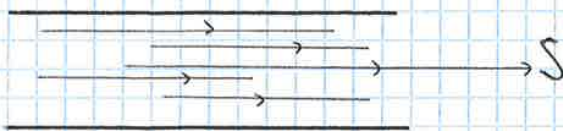
$$\int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

modo ad inserire la derivata facendo il dominio di integrazione è indipendente dalle variabili che sto derivando.

### CORRENTE:

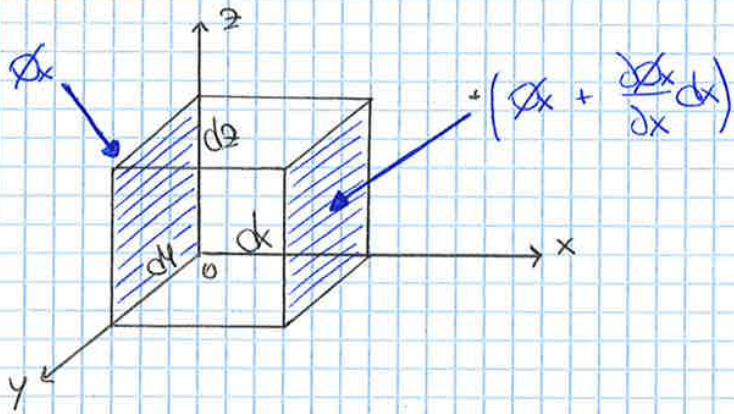
Quando il fluido si muove in moto uniforme si dice che ha una CORRENTE.

Un fluido si muove secondo una corrente quando tutte le particelle si muovono lungo una direzione, che chiameremo  $S$ :



CORRENTE  $\rightarrow$  le traiettorie sono sensibilmente rettilinee e //.  
 Possò definire delle grandezze globali come funzioni delle correnti e del tempo:

$$\left. \begin{matrix} \varphi \\ v \\ \Omega \end{matrix} \right\} f(S, t)$$



Prendiamo un generico punto  $O$  nel fluido e cerchiamo le equazioni che valgono per ogni punto del fluido. Prendiamo un elementino infinitesimo e osserva attorno una certa massa infinitesima  $dm$ . Definiamo con  $\rho$  la densità del punto con  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  per cui:

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

Scegliamo il punto di vista Euleriano, per cui  $\vec{A} = \frac{D\vec{U}}{Dt}$ .

Andiamo ora a calcolare  $\vec{R}$  che sono tutte le forze applicate sull'elemento (di massa e di resp.):

• di massa  $\rightarrow \vec{F} \rho dx dy dz$

↑ intensità della forza di massa

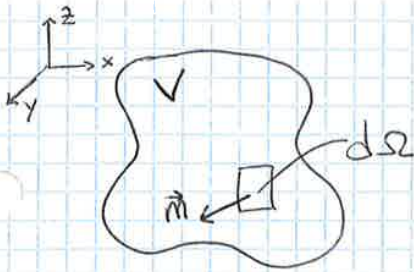
• di resp.  $\rightarrow (p_x dy dz) - (p_x + \frac{dp_x}{dx} dx) dy dz = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{dp_x}{dx} dx dy dz \\ - \frac{dp_y}{dy} dy dx dz \\ - \frac{dp_z}{dz} dz dx dy \end{array} \right.$

ponendo:

$$-\left(\frac{dp_x}{dx} + \frac{dp_y}{dy} + \frac{dp_z}{dz}\right) dx dy dz + F dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{D\vec{U}}{Dt}$$

$$\rightarrow \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \left(\frac{dp_x}{dx} + \frac{dp_y}{dy} + \frac{dp_z}{dz}\right) \quad \text{EQ. INDEFINITA DELLA MECCANICA DEI FLUIDI}$$

In ogni punto, per ogni fluido, questa formula deve valere.



di ogni termine calcoliamo l'integrale triplo sul volume:

• 1° pezzo  $\rightarrow \rho \vec{F} \rightarrow \int_V \rho \vec{F} dV$

• 3° pezzo  $\rightarrow \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dV =$   
 $= - \int_{\Omega} (\vec{\phi}_x \cos \hat{m}_x + \vec{\phi}_y \cos \hat{m}_y + \vec{\phi}_z \cos \hat{m}_z) d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\phi}_m d\Omega$

• 2° pezzo  $\rightarrow -(\rho \vec{A}) \rightarrow \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) =$   
 $= \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} =$   
 $\frac{d}{dx}(\rho u \vec{u}) - \vec{u} \frac{d}{dx}(\rho u)$

$= \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \left( \frac{d}{dx}(\rho u \vec{u}) + \frac{d}{dy}(\rho v \vec{u}) + \frac{d}{dz}(\rho w \vec{u}) \right) - \vec{u} \left( \frac{d}{dx} \rho u + \frac{d}{dy} \rho v + \frac{d}{dz} \rho w \right)$

$= \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d}{dx}(\rho u \vec{u}) + \frac{d}{dy}(\rho v \vec{u}) + \frac{d}{dz}(\rho w \vec{u}) - \vec{u} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) =$

eq. di continuità:  $\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = - \frac{d\rho}{dt}$

$= \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d}{dx}(\rho u \vec{u}) + \frac{d}{dy}(\rho v \vec{u}) + \frac{d}{dz}(\rho w \vec{u}) + \vec{u} \frac{d\rho}{dt} =$

$= \frac{d}{dt}(\rho \vec{u}) + \left( \frac{d}{dx}(\rho u \vec{u}) + \frac{d}{dy}(\rho v \vec{u}) + \frac{d}{dz}(\rho w \vec{u}) \right)$

$\rightarrow - \int_V \rho \vec{A} dV = - \int_V \frac{d\rho \vec{u}}{dt} dV - \int_V \left( \frac{d}{dx}(\rho u \vec{u}) + \frac{d}{dy}(\rho v \vec{u}) + \frac{d}{dz}(\rho w \vec{u}) \right) dV =$

$= - \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV - \left[ - \int_{\Omega} \rho \vec{u} (u \cos \hat{m}_x + v \cos \hat{m}_y + w \cos \hat{m}_z) d\Omega \right] =$

$= - \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \vec{u}_m d\Omega$

↑  
VELOCITÀ NORMALE A  $\Omega$

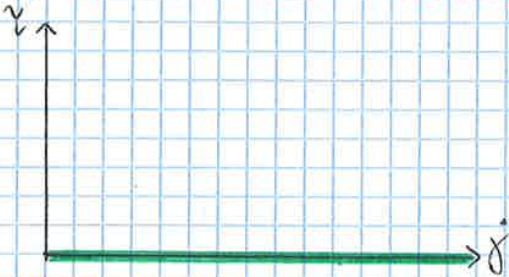
devo conoscere il profilo in punto  $\vec{v} = \vec{v}(r)$ :

$$\beta = \frac{\int_0^R v^2 dr}{v^2 R} \Rightarrow = \rho \vec{m} v^2 \beta = \rho \vec{m} \beta v \varphi$$

↑ ↑ ↑  
COEFF DI VELOCITÀ  $2\Omega R = \varphi$   
RACCORDO MEDIA

nel caso di correnti:  $\vec{M} = \vec{m} \rho \beta v \varphi$  e per le nostre precisazioni  $\beta = 1!$

### DINAMICA DEI FLUIDI PERFETTI O IDEALI:



ma hanno MAI  $\tau$ . Non  
travolgo mai fluidi ideali: me ne  
occupo però perché ho diverse  
situazioni in cui il modo del  
fluido non ideale è come se

fluido ideale.

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_x = P\vec{i} \\ \vec{\sigma}_y = P\vec{j} \\ \vec{\sigma}_z = P\vec{k} \end{cases}$$

Lo stato di sforzo è sempre l'esse resp.  
Fluido ideale  $\rightarrow \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$

ossia:  $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$

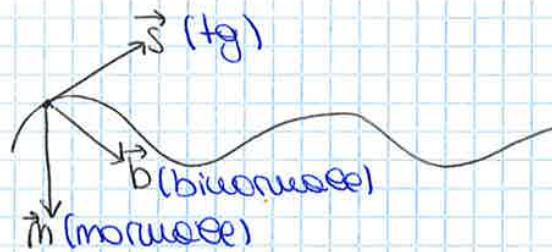
$\rightarrow \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(P)$

EQ. INDEFINITA DEI FLUIDI  
PERFETTI/IDEALI O EQ. DI  
EULERO (1745)

- incognite:  $\rho$   $u$   $v$   $w$   $P \Rightarrow$  ce ho 5 eq. in 5 incognite.

$$\begin{cases} \text{eq. stat} & (1) \\ \text{eq. continuità} & (1) \\ 3 \text{ eq. desc' ep. inf} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(P) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 & (\text{continuità}) \\ \rho = \text{cost} & (\text{stato}) \end{cases}$$



Proiettiamo l'eq. uscente 3 eq. scartori su  $\vec{s}, \vec{b}, \vec{n}$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left( \frac{du}{ds} + u \frac{du}{ds} \right) \\ \frac{d}{db} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \rightarrow \text{la traiettoria è sul piano del cerchio osculatore.} \\ \frac{d}{dn} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left( \frac{v^2}{r} \right) \end{cases}$$

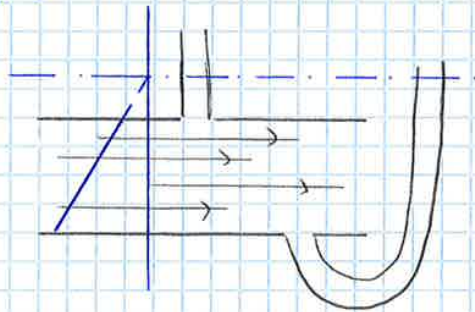
↳ raggio curvatura locale del cerchio osculatore.

quindi:

1°) esiste sempre una direzione  $\vec{b}$  che fa andare tutto come se fossero in statica.

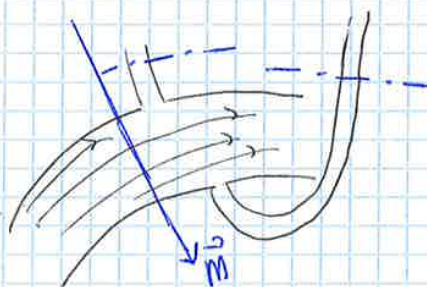
2°) se le traiettorie sono rettilinee e // allora  $r \rightarrow \infty$  per cui  $(v^2/r) \rightarrow 0$  e allora  $h = \text{cost}$  anche lungo  $\vec{n}$  oltre che lungo  $\vec{b}$  e allora su tutto quel piano non cambia il carico piezometrico  $h$ .

Sul piano dove  $\vec{n}$  la distribuzione delle pressioni è idrostatica:



con un tubo su quella sezione tras il pci.

3°) se invece la corrente è un po' curva:



i piezometri danno valori diversi: più lo radazzo e più i liquidi tendono a curvare.

avremo tre diverse  $z$ ,  $\frac{p}{\rho}$ ,  $\frac{v^2}{2g}$  affinché, però,  $H = \text{cost}$ .

Analizziamo i 3 termini:

- $z$ : **ENERGIA POTENZIALE** posseduta dalla particella per unità di peso:

$$\frac{mgz}{mg} = z$$

- $\frac{v^2}{2g}$ : **ENERGIA CINETICA**:

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg} = \frac{v^2}{2g}$$

- $\frac{p}{\rho}$ : **ENERGIA DI PRESSIONE**, quando si usi da microscopico macroscopico bisogna integrare, tirando fuori il colore. La  $p$  esiste nel mondo del continuo.

Adesso il teorema di Bernoulli afferma che: una particella (sotto le sue ipotesi), nel suo moto conserva l'energia meccanica fatta da en. potenziale, en. cinetica ed en. di pressione.  
 L'energia meccanica si conserva perché non ci sono dissipazioni (attriti).

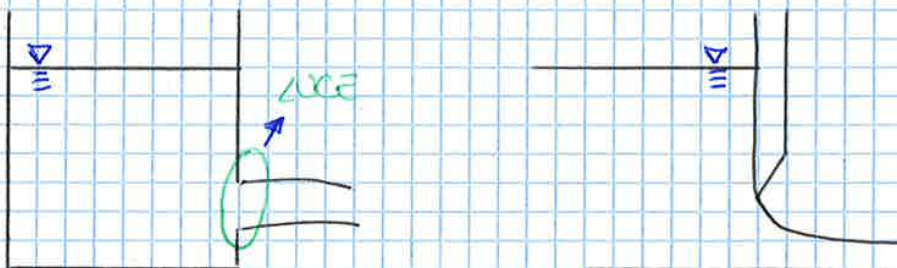
8/10/2014

### APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI:

- Hip:
- 1) fluido perfetto
  - 2) campo gravitazionale
  - 3)  $\rho = \text{cost}$
  - 4)  $\frac{d}{dt} = 0$  (stazionaria)  $\rightarrow$  moto permanente.

Tesi:  $H$  lungo una traiettoria è costante:  $H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$

**FORONBIA**: fluido che esce attraverso un foro:



Dato che i fluidi non fanno mai degli spigoli, il foro non può essere altro che circolare.

La porzione con cui esce il fluido us sempre più riducendosi.

Audiamo ad applicare Bernoulli e iniziamo dalle ipotesi:

1)  $\rho = \text{cost} \rightarrow \text{ok}$

2) campo delle gravità  $\rightarrow \text{ok}$

3)  $\frac{d}{dt} = 0$  stazionarietà  $\rightarrow \sigma$  continuo e mettere tanta portata quanta ne esce oppure ho un serbatoio con grande che posso dire che per un certo tempo tutto me cade se il livello non sta cambiando.  $\rightarrow \text{ok}$

4) fluido perfetto  $\rightarrow$  la viscosità per essere sentita, deve esistere un gradiente di velocità:  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$  e allora ho tensioni viscosi. Ma se  $\vec{v}$  è buona allora non c'è; ma se il foro è piccolo, allora il liquido del serbatoio si muove piano e solo nel foro inizio a vedere qualche movimento. Ogni volta che il fluido accelera tende a dissipare poco, mentre dissipa tanto quando tende ad allungarsi.

- zona fluida: suo effetto

- foro:  $\sigma$  effetto  $\rightarrow \sigma$  ha tanta dissipazione perché  $\mu$  non ha valori significativi  $\rightarrow \text{ok}$

Risultando:

se mi metto dove posso vedere delle linee o alcune traiettorie hanno una forte curvatura, ma più in basso (0,5-1)d, allora le traiettorie sono sostanzialmente rettilinee e parallele. Questa è la **SEZIONE CONTRATTA** < della sezione del foro.

Prendiamo una generica traiettoria  $\overline{AB}$  e proviamo a risolverlo:

$$h_A = h_B$$

$$z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$h + 0,5 \cdot d$  (pointing to  $z_A$ )  
 $\approx 0$  (pointing to  $\frac{p_A}{\rho}$ ):  $A$  è nel fluido cal  $\sigma$  velocità buona  
 $\approx 0$  (pointing to  $\frac{p_B}{\rho}$ ): se le traiettorie sono rettilinee e  $\parallel$  con  $h = \text{cost}$ , se la  $p$  nel bordo è  $p = 0$  allora, lo sarà anche ovunque nel tubo, in pratica  $z = \text{cost}$ .



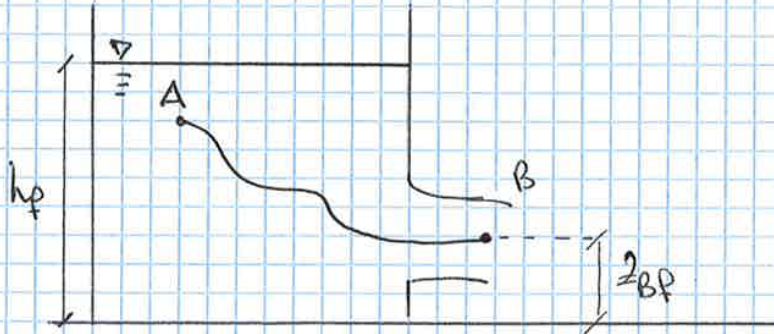
periculi:  $h = l_c \cdot a + \frac{v_B^2}{2g} \rightarrow v_B = \sqrt{(h - l_c a) 2g}$  e

costante in tutti i punti che essere hanno uguale velocità:

$$\phi = (P_0 + \rho v_B^2) (\rho a \cdot b)$$

↑  
profondità sezione (è un rettangolo)  
↑  
larghezza sezione.

→ caso 3 ←

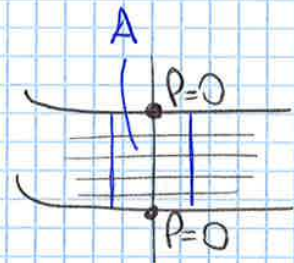


$$H_A = H_B$$

$$z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2g}$$

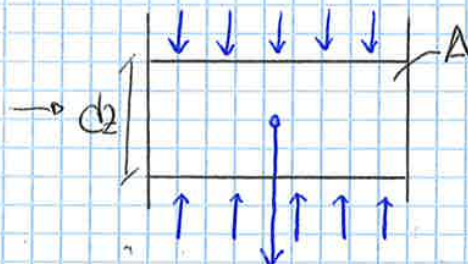
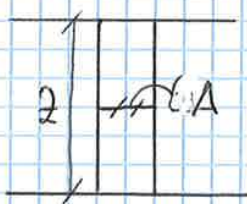
↑                      ↑  
 $h_P$                        $\approx 0$

acqua sopra e' assolutamente idrostatico:



se sul bordo del tubo si ha che  $P=0$  dove essere  $h = \text{cost}$  allora anche all'interno ho  $P=0$ . Ma se  $h = z_B + \frac{P_B}{\rho} = \text{cost}$  allora  $P_B = 0$  oppure una  $z_B$  cambia che è diverso da costante.

► Possiamo allora considerare una colonna di fluido:



Devo fare l'integrale del diagramma delle velocità e non più  $\vec{v}_{B/C}$  in quanto la velocità sta cambiando.

$b \ll h_f$  e allora lo posso porre come rettilineo e ottengo:

$$v = v_{B/C} \sqrt{2g(h_f - z_c)}$$

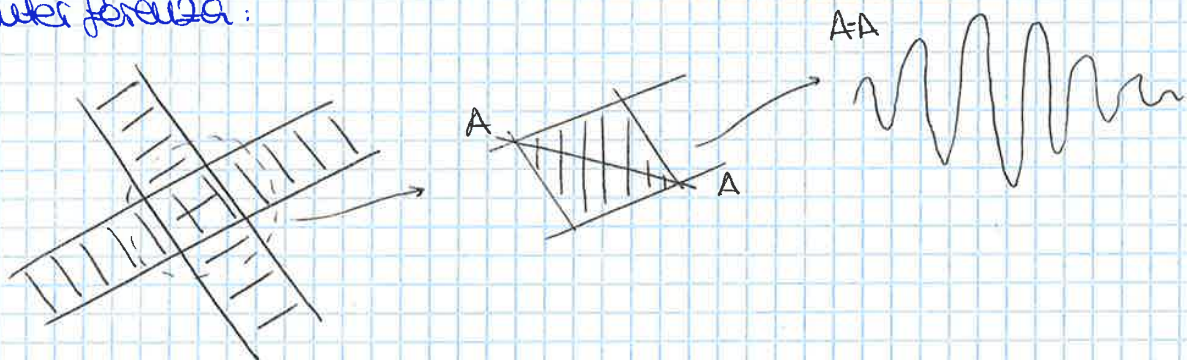
Essendo piccolo il tubicino approssimo il taglio della parabola con un piano il cui valore medio è presso collocato nel centro  $c$ ; poi moltiplico per la sezione contratta:

$$\varphi = \underbrace{c_c}_{z_c} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(h_f - z_c)}$$

13/10/2014

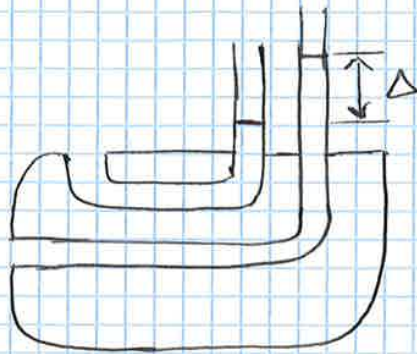
### MISURA DELLA VELOCITÀ IN UN FLUIDO:

- MUZZELLI
- ANEMOMETRO A FIO CALDO: sfrutta la dipendenza tra la velocità del fluido e il calore (metto materiale conduttore nel punto in cui collocare la velocità che viene investita da corrente e calcolo la  $T^\circ$  del filo in modo da mantenerlo costante). funziona bene nei gas e male nei liquidi.
- ANEMOMETRO LASER DOPPLER: i liquidi. L'onda si propaga con raggio concentrato (canale su cui viaggia la luce), ho creato piramidi fuori un cilindro con luce monocromatica. Faccio incidere 2 raggi laser e ottengo nel punto di interazione si viene a formare una frangia di interferenza:



piramidi se pone del fluido, avendo delle particelle, queste hanno tutte un grado di riflessione. Misurando la frequenza elettrica del segnale che pone, riesco a

Costruisco ancora:

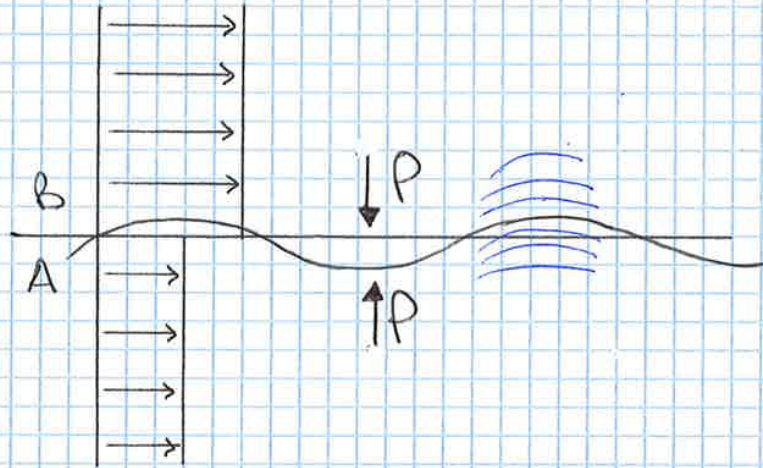


È stabile: cioè non ho  
nesso in movimento: i  
2 liquori sono fermi.

Esempio: sgeci aerei.

## PROCESSO DI INSTABILITÀ DI KEULIN-HELMHOLTZ:

Immaginiamo 2 fluidi perfetti che si muovono in // e  
sono stratificati:



Se è perfetto non ho  $\tau$  (tensioni tangenziali) tra i 2  
fluidi e penso immaginare che esista una sep. piana  
che li separa. Supponiamo ci sia una piccola perturbazione  
(anche infinitesima) sulla linea che li separa. Cosa accade?  
Pensiamoci su una cresta e consideriamo le traiettorie che li  
hanno davanti un po' accelerare e allora la perturbazione ha  
incrementato la velocità di quella zona e allora è  
diminuita la  $P$ ; da sotto invece la sezione 2° è allungata  
e allora cresce la  $P$ .

Allora la perturbazione è un dislivello tra sopra e  
sotto che ha cambiato la  $P$ , e allora si ha un feedback  
positivo che aumenta la cresta.

Alla fine ho come detto anche sulle sep. di  
interfaccia:

$$P_{TOT} = \int_p dP = \int_{\varphi} \gamma H d\varphi$$

POTENZA GLOBALE  
CHE TRANSITA NELLA  
CORRENTE

ma per ogni  $d\varphi$  occorre  $\gamma H d\varphi = \text{cost}$  lungo la traiettoria, e  
occorre  $P = \text{cost}$  lungo  $S$  (CORRENTE), quindi:

$$P = \text{cost} |_S = \int_{\varphi} \gamma H d\varphi = \int_{\Omega} \gamma H \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega} \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) \vec{U} d\Omega =$$

↑  
cambia per  
ogni tubo di  
fluido  
considerato

$$= \gamma \left[ \int_{\Omega} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \vec{U} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\vec{U}^3}{2g} d\Omega \right] = \gamma \left[ \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \varphi + \int_{\Omega} \frac{\vec{U}^3}{2g} d\Omega \right] =$$

↑  
se la sezione è  
trasversale non cambia  
e occorre  $h = \text{cost}$ .

↑  
 $\int_{\Omega} \vec{U} d\Omega$

invertiamo e introduciamo

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} \frac{\vec{U}^3}{2g} d\Omega}{\frac{U^3}{2g} \Omega}$$

COEF. DI RAGGIUNGO  
DELLE POTENZE  
CINETICHE O DI  
CORIOLIS.

$$= \gamma \left[ \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \varphi + \frac{\alpha U^3}{2g} \Omega \right] = \gamma \left[ \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \varphi + \frac{\alpha U^2}{2g} \vec{U} \Omega \right] =$$

$$= \gamma \left[ \varphi \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) \right] = \text{cost}$$

occorre lungo  $S$  in cui  $\gamma = \text{cost}$ ,  $\varphi = \text{cost}$ , occorre:  $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} = \text{cost}!$

$$H_{TOT} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} = \text{cost}$$

CARICO TOTALE PER TUTTA LA  
SEZIONE.

Tutti fluiscono se so punto vuole  $\alpha$ :

1) moto turbolento  $\rightarrow \alpha \cong 1$

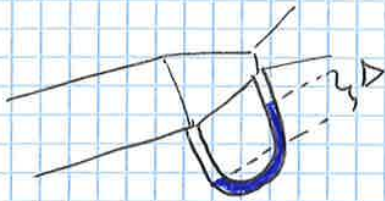


2) flume laminare  $\rightarrow \alpha \cong 2$

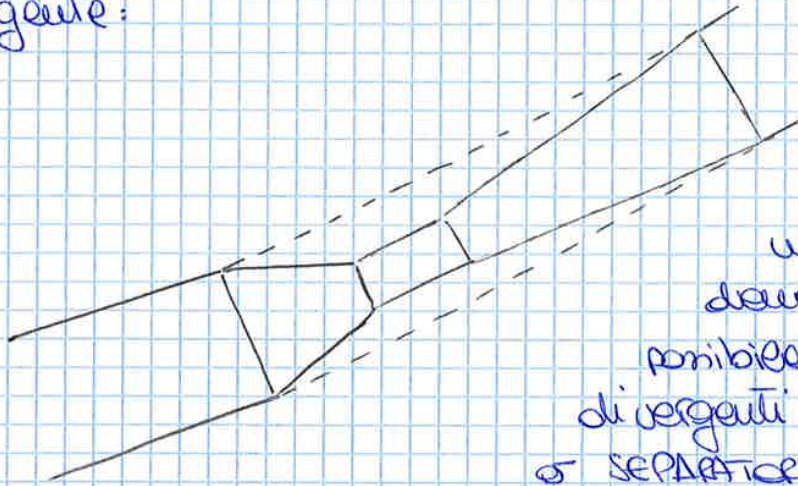


Per i corichi piezometrici metto 2 barchette nei punti e il dislivello tra i 2 menischi mi dà  $\delta$ . Ho dato che mi serve una differenza ( $h_1 - h_2$ ) ed il manometro differenziale:

$$\delta = h_1 - h_2 = \frac{\gamma_{\text{m}} - \gamma}{\gamma} \Delta$$



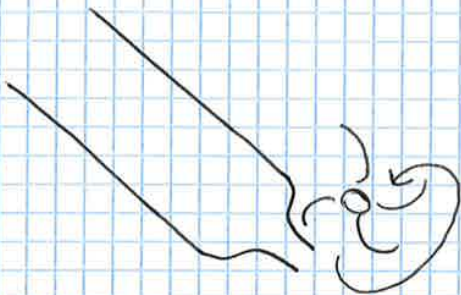
Il problema del venturimetro è che poi devo mettere un divergente:



in modo tale che la corrente si allarga poco alla volta. Il divergente deve dissipare il più possibile = la ragione è che nei divergenti si hanno i DISTACCHI DI FLUSSO o SEPARAZIONI DI CORRENTE. Se questi

un divergente stretto, mi si formerebbero dei vortici vorticosi che perdono e dissipano energia; allora faccio il tutto più lungo e "dolce" così il fluido resta attaccato al bordo e non forma il vortice.

Esempio: DIFFUSORE A MOULIN DI UNA TURBINA: TURBINA PELTON:



inverte le pale di una turbina che si mette a ruotare.

Gli impianti in alta montagna lavorano a bassi  $Q$  e alti  $H$ . Ruotano velocemente.

Esempio: TURBINA KAPLAN: prendiamo un fiume in cui si ha una portata; ho un canale che scavalca l'acqua e si turbina, sfruttando piccoli dislivelli. Queste turbine ruotano lentamente:

- a) instabilità
- b) deterioramento del c/s
- c) è in depressione: controcorrente perché se l'HO arriva a bocche, allora avrei un fluido bi fase.

**FLUIDI NEWTONIANI:**  $\mu \neq 0$

sono un sottoinsieme dei fluidi newtoniani:

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(P) - \mu \nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{3} \mu \text{grad}(\text{div} \vec{v})$$

EQ. DI NAVIER-STOKES

noi resteremo sempre nel caso in cui  $\rho = \text{cost}$  (fluido incompressibile):

$$\rho = \text{cost} \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(P) - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$\nearrow$  non essere come per Eulero  
 $\nabla^2$ : TERMINE DIFFUSIVO (Esempio: gradiente di calore in un briciolo di H<sub>2</sub>O).  
 $\nearrow$  Laplaciano

in un fluido viscoso  $\mu \nabla^2 \vec{v}$  fa sì che il gradiente del campo di moto sia più smorzato, "più dolce". È un termine lineare in quanto nasce da derivate seconde.

Siamo sempre andati avanti in un processo:

- $\rho \vec{F} = \text{grad}(P) \rightarrow P + F_c = 0$
  - $\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \rightarrow P + F_c + I + H = 0$
  - $\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(P) \rightarrow P + \pi + I + H = 0 \quad (\pi = -\int_{\Omega} \rho \vec{m} d\Omega)$
  - $\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(P) - \mu \nabla^2 \vec{v} \rightarrow P + \pi - T + I + H = 0$  EQ. GLOBALE FLUIDO VISCOSO
- $$T = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial m} d\Omega$$

$$\int_V \mu \nabla^2 \vec{v} dV = \mu \int_V \nabla^2 \vec{v} dV = \mu \int_V \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dV =$$

pendici:

$$x_G = \frac{a}{\sin 45} + \frac{l}{2} = \frac{0,1}{\sin(45)} + \frac{2}{2} = 1,14 \text{ m}$$

$$\rightarrow x_C = x_G + \frac{I_0}{H} = 1,14 + \frac{1,8}{12} = 1,43 \text{ m} = \bar{c}_0$$

(A) in punto A è una cerniera e può ruotare: equilibrio: deve rotazionare rispetto ad A

$$S \bar{c}_0 = P_m \bar{a}_G \rightarrow P_m = S \frac{\bar{a}_C}{\bar{a}_G} = 15819 \cdot \frac{\bar{c}_0 - \frac{a}{\sin 45}}{\frac{l}{2}} =$$

$$\text{momento} = forza \cdot braccio = 15819 \cdot \frac{1,43 - \frac{0,1}{\sin(45)}}{\frac{2}{2}} = 20406,5 \text{ N}$$

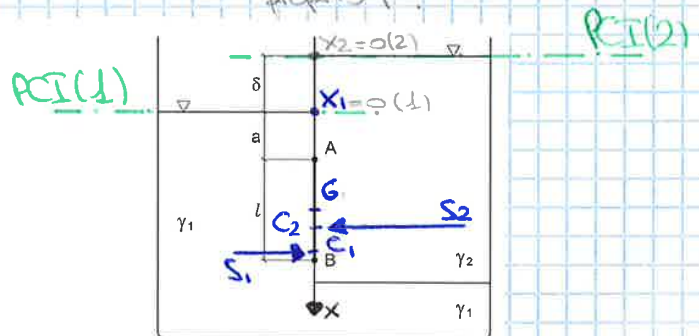
deve:  $P = \frac{P_m}{\cos 45} = \frac{20406,5}{\cos(45)} = 28863,5 \text{ N}$

$$P': \quad \sum (\frac{l}{2} - \bar{c}_C) = P' \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow P' = \frac{S(\frac{l}{2} - \bar{c}_C)}{\cos \alpha} = \dots = 15886 \text{ N}$$

③

Nel serbatoio parallelepipedo in figura è inserito un setto verticale che separa i liquidi 1 e 2, lasciando una fessura sul fondo. La distanza fra la superficie libera del liquido 2 e quella del liquido 1 è  $\delta$ . Trovare la spinta risultante sulla porzione di superficie verticale quadrata di lato  $l$  e traccia AB il cui lato superiore, orizzontale, è affondato di  $a$  sotto la superficie libera del liquido 1.

$\gamma_1 = 9.800 \text{ N/m}^3$ ;  $\delta = 0,3 \text{ m}$ ;  $a = 0,2 \text{ m}$ ;  
 $\gamma_2 = 8.830 \text{ N/m}^3$ ;  $l = 1 \text{ m}$ .  
 $[R = 1.970 \text{ N}; y = -0,052 \text{ m}]$



facile individuare i PCI in questo caso entrambi resp. a contatto con aria.

lato 1:

$$S_1 = \rho_1 \cdot A = \gamma_1 (a + \frac{l}{2}) (l \times l) = 9800 (0,2 + \frac{1}{2}) (1 \times 1) = 6860 \text{ N}$$

prendo lo zetto ponente per C1 e faccio  $x_{C1} = 0$ :

$$x_{G1} = a + \frac{l}{2} = 0,2 + \frac{1}{2} = 0,7 \text{ m}$$

$$X_{c1} = X_{G1} + \frac{I_0}{H} = 0,7 + \frac{\frac{1 \cdot 1}{12}}{0,7(1 \times 1)} = 0,7 + 0,12 = 0,82 \text{ m} = \overline{GC_1}$$

es2:

$$S_2 = \rho g^2 A = \rho_2 \left( \delta + a + \frac{e}{2} \right) (l \times l) = 8830 \left( 0,3 + 0,2 + \frac{1}{2} \right) (1 \times 1) = 8830 \text{ N}$$

$$X_{G2} = \delta + a + \frac{e}{2} = 0,3 + 0,2 + \frac{1}{2} = 1 \text{ m}$$

$$X_{c2} = X_{G2} + \frac{I_0}{H} = 1 + \frac{\frac{1 \cdot 1}{12}}{1 \cdot (1 \times 1)} = 1 + 0,08 = 1,08 \text{ m} = \overline{GC_2}$$

La risultante delle spinte è data:

$$R = S_2 - S_1 = 8830 - 6860 = 1970 \text{ N} \quad (\text{da dx a sx}) \quad (\leftarrow)$$

cerchiamo C anche il punto di applicazione di R;  
 calcolo il momento delle 2 forze che deve essere uguale al momento della risultante, e lo calcolo rispetto a un punto a scelta e scelgo G:

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{G} : S_2 \overline{GC_2} - S_1 \overline{GC_1} &= R \overline{GC} \\ \overline{GC} &= \frac{S_2 \overline{GC_2} - S_1 \overline{GC_1}}{R} = \\ &= \frac{8830 \cdot 0,08 - 6860 \cdot 0,12}{1970} = -0,06 \text{ m} \end{aligned}$$

↑  
 scelto in modo da mettere le rotazioni  
 in modo il -  
 nella parte in  
 contrario



5

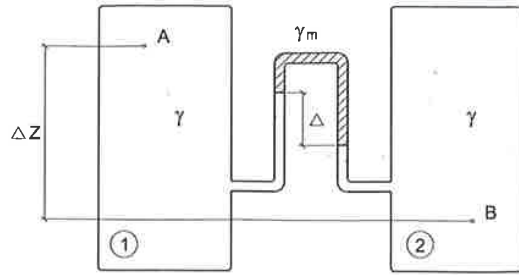
I due recipienti 1 e 2, contenenti lo stesso liquido di peso specifico  $\gamma$ , sono collegati come indicato in figura, ad un manometro differenziale con liquido manometrico di peso specifico  $\gamma_m < \gamma$ .

Determinare la differenza di pressione esistente fra due punti generici A e B dei due recipienti, fra i quali esista una differenza di quota  $\Delta z$ .

$\gamma = 9.500 \text{ N/m}^3$ ;  $\Delta = 0,15 \text{ m}$ ;

$\gamma_m = 8.600 \text{ N/m}^3$ ;  $\Delta z = 0,50 \text{ m}$ .

$[\Delta p = 4.615 \text{ Pa}]$



$\Delta p = ?$

$\Delta h = h_A - h_B$

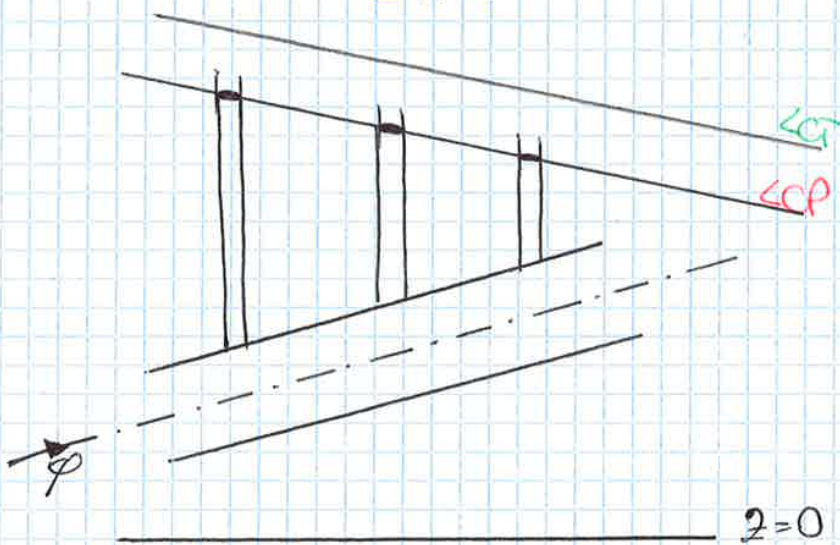
$\Delta \left( \gamma - \gamma_m \right) = \left( z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left( z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right)$

$\Delta (\gamma - \gamma_m) = \left( z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B - \frac{p_B}{\gamma} \right) \gamma = \Delta z \gamma + \Delta p$

$\Delta p = \Delta (\gamma - \gamma_m) - \Delta z \gamma = 0,15 (9500 - 8600) - 0,5 (9500) = -4615$

ma il manometro in B è minore di quello di A  $\Rightarrow$   
 $p_B > p_A$  quindi avrà dovuto fare  $\Delta p = p_B - p_A$  e non  
 $\Delta p = p_A - p_B$

Dato che  $\zeta_{CT}$  è orizzontale, allora l'energia si conserva.  
 Prendiamo da un fluido Newtoniano in cui  $\mu \neq 0$  e  
 allora un campo tensoriale Tangenziale che si oppone al  
 moto e crea attrito:



La linea dei  
 CT non è più  
 orizzontale ma  
 sta dissipando  
 energia e allora  
 è inclinata  
 verso il basso.

La dissipazione di energia dipende:

- dal fluido
- dalla parete
- dalla geometria della sezione
- ...

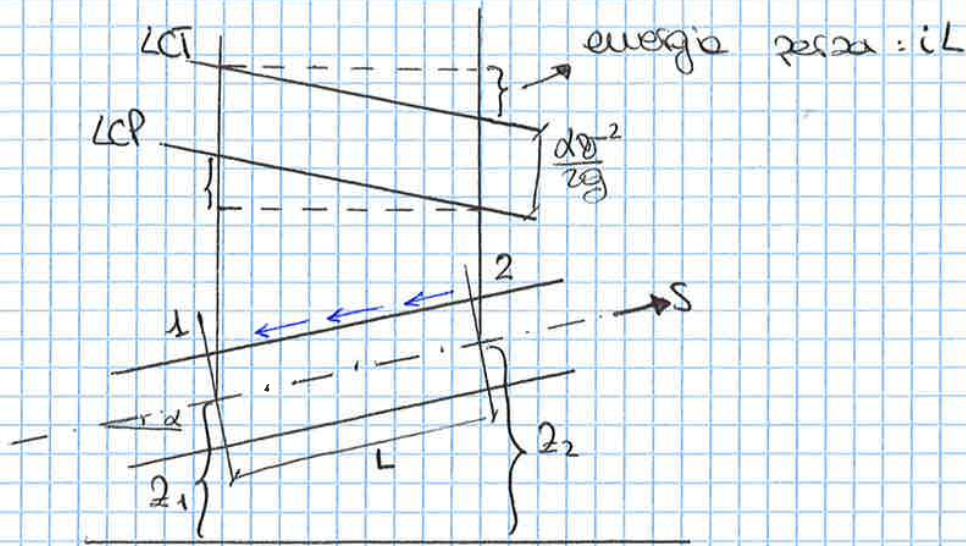
Allora andiamo perdendo energia della corrente che si  
 ritraiamo sotto forma di calore.

La  $\zeta_{CP}$  è parabolica a paragoni  $\zeta_{CT}$ .

Se mettiamo 3 piezometri allora che il risultato si debba.

I fluidi reali quando si muovono dissipano energia perché  
 hanno  $\mu$  che crea attrito:  $\tau = \mu \frac{dv}{dz}$

Nei fluidi reali, le particelle a contatto con la parete si  
 muovono alla stessa velocità della parete (a causa della  
 viscosità).



Prendo la sezione di fluido tra (1) e (2):

$$P + \pi - T + I + M_e - M_u = 0$$

$$5) -\gamma \Omega L \sin \alpha = P$$

$$P_1 \Omega - P_2 \Omega = \pi$$

$T$ : risultante tensione tangenziale sui bordi.

$$I = 0$$

$M_e - M_u = 0$ : uguali e opposte

$$\text{allora: } -\gamma \Omega L \sin \alpha + P_1 \Omega - P_2 \Omega - T = 0$$

$$-\gamma \Omega L \sin \alpha + P_1 \Omega - P_2 \Omega = T$$

$$\gamma \Omega \left[ \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right] = T$$

$$\gamma \Omega (h_1 - h_2) = T \rightarrow T = \gamma \Omega i L$$

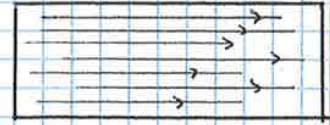
↑  
Forze che si  
compensano.

$$\lambda = \frac{T}{\Omega P} = \frac{\gamma \Omega i L}{\Omega P} = \frac{\gamma i L}{P} = \gamma i R$$

↑  
perimetro  
lunghezza

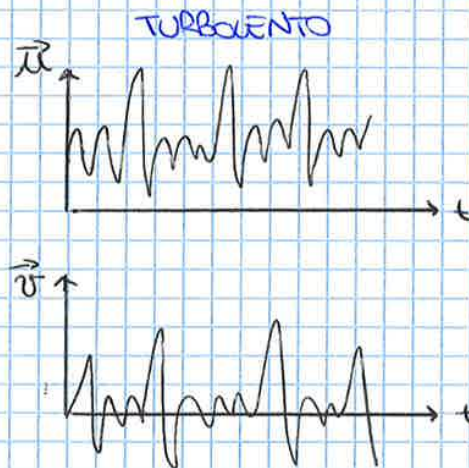
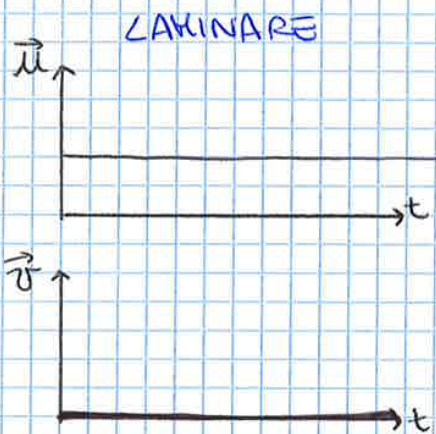
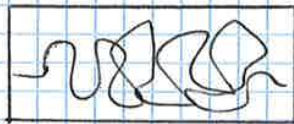
↑  
RAGGIO  
IDRAULICO della  
sezione:  $\left( R = \frac{\Omega}{P} \right)$

traiettorie e dopo tutte le particelle delle correnti si muovono su traiettorie rettilinee e // e moto regolari (rette); il fluido ha solo una direzione in cui lo vedo normalmente andare: **MOTO LAMINARE**



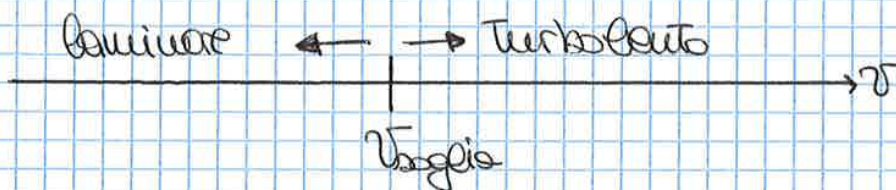
Aprò ancora il Tubicino, aumento ancora la portata e vedo sempre la stessa cosa (anche le velocità). A un certo punto cambia di poco la portata e dopo tutto cambia: ho un cambiamento strutturale in cui tutto è colorato: ciò avviene in un tratto di circa  $1-2 d$ ; dopo vuol dire che le traiettorie non sono più rettilinee e // davanti muovere in tutte le direzioni e dopo inizio il **MOTO**

**TURBOLENTO**



Risolveremo empiricamente il problema della turbolenza.

Quando cambia la portata  $Q$ , si anche cambia la  $U$  (velocità media):



Ma non è così: la soglia in realtà è un rapporto adimensionale:

Adimensionalizzazione dell'eq.: tu hai un tuo problema fisico con una scala delle lunghezze  $l$ , una scala delle velocità  $u_0$ , una scala del tempo  $t_0$ , una scala delle pressioni  $\rho u_0^2$  (bermusa) - Introduciamo dei valori NORMALIZZATI che variano tra 0 e 1:

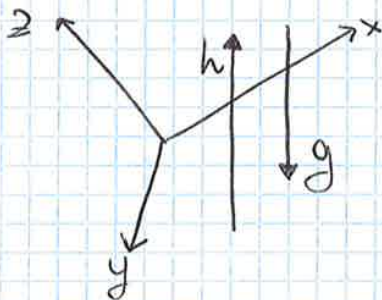
$$\cdot \tilde{x} = \frac{x}{l} \quad \tilde{y} = \frac{y}{l} \quad \tilde{z} = \frac{z}{l}$$

$$\cdot \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} = \frac{u, v, w}{u_0}$$

$$\cdot \tilde{t} = \frac{t}{t_0}$$

$$\cdot \tilde{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}$$

in termini di  $\sim$  posso confrontare le varie variabili.  
Ho introdotto grandezze adimensionali con lo scopo di far omogeneizzare problemi diversi tra loro. Andiamo ad inserire questi termini nell'eq. di partenza:



1) divido tutto per  $\rho$ :

$$(F-A) = \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) - \frac{M}{\rho} \nabla^2 u$$

$\uparrow$   $\text{grad}(gh)$   $\uparrow$   $v$

2) risolviamo:

$$x) \quad g \frac{dh}{dx} - \frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \frac{M}{\rho} \nabla^2 u \quad (\text{idem lungo } y \text{ e } z).$$

$$\uparrow \tilde{h} = \frac{h}{l} \rightarrow h = \tilde{h} l \text{ ma } l = \text{cost} \rightarrow \frac{e d\tilde{h}}{e dx} = \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}}$$

perciò:

$$g \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} - \frac{u_0 Du}{l_0 Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho u_0^2 d\tilde{p}}{e d\tilde{x}} - \frac{M}{\rho} \left( \frac{u_0}{l_0^2} \nabla^2 \tilde{u} \right)$$

3) moltiplico tutto per  $\frac{l_0}{u_0^2}$ :

condizione:  $\gamma \pi r^2 (z_2 - z_1) + \rho_1 \pi r^2 - \rho_2 \pi r^2 - T = 0$   
 $\gamma \pi r^2 (z_2 - z_1) + \rho_1 \pi r^2 - \rho_2 \pi r^2 = T$   
 $T = \gamma \pi r^2 \left[ \left( z_1 + \frac{\rho_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{\rho_2}{\gamma} \right) \right]$

$T = \gamma \pi r^2 (iL)$  : risultante delle forze  $\gamma$  sul bordo del cilindro; all'interno:

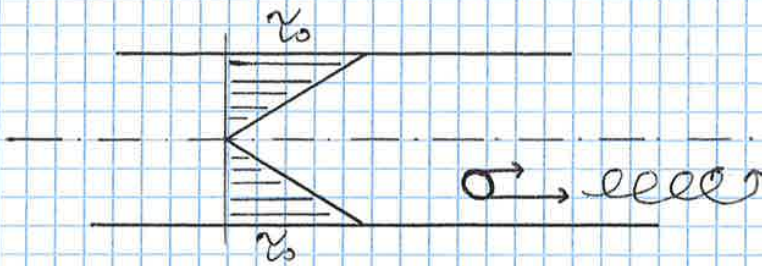
$$z(r) = \frac{\gamma \pi r^2 i k}{2 \pi r k} = \frac{\gamma i r}{2}$$



$z$  stessa corrente con generico  $r$ .

a) quando  $r = R \Rightarrow z(R) = \gamma i R$

b)  $z$  va linearmente:  $z = \gamma \frac{r}{R}$

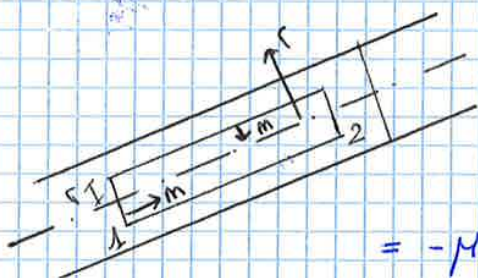


Le particelle in una corrente in moto laminare rotano e fanno crescere delle vortici che fanno tornare lungo la sezione.

Ricordiamoci che:  $T = M \int_{z_2} \frac{du}{dm} dz = M \frac{du}{dm} \Big|_{z_2} dz = M \frac{du}{dm} (2\pi r L) =$

↑  
non dipende

da  $dz$  e allora lo  
pono portone fuori:



$$= -M \frac{du}{dr} (2\pi r L)$$

↑  
 $dr$  opposto di  $dm$   
e allora cambia segno

$$\Rightarrow -M \frac{du}{dr} (2\pi r L) = \gamma \pi r^2 i k \rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{\gamma i}{2M} r$$

$$\rho(\vec{f} - \vec{A}) - \text{grad}(P) - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\vec{A} = \frac{\cancel{\partial u}}{\cancel{\partial t}} + u \frac{\cancel{\partial u}}{\cancel{\partial x}} + \cancel{\partial} \frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{y} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

proiettato dis. che resta deve' eq. sull'asse x:

$$\rho f_x = \frac{\partial P}{\partial x} - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\rho f_x = \frac{\partial P}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho g h + P) - \underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{P}{\rho} \right)}_{-c}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho c}{\mu} \xrightarrow{\text{integrando}} \frac{du}{dy} = -\frac{\rho c}{\mu} y + C_1$$

ma se scelgo  $y=0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\xrightarrow{\text{integrando}} U = U(y) = -\frac{\rho c}{2\mu} y^2 + C_2$$

ma se scelgo  $y = \pm d \Rightarrow \vec{u} = 0$

quindi:  $U = \frac{\rho c}{2\mu} (d^2 - y^2) = U(y) \rightarrow$  forma parabolica

A MENO CHE NON HO SPIEGATO, LA FORMA CENTRICE DI UN MOTTO LAMINARE È SEMPRE PARABOLICA.

$$U_{max} = \frac{\rho c}{\mu} h^2 \rightarrow U = \frac{2}{3} \frac{\rho c}{2\mu} h^2 = \frac{\rho c h^2}{3\mu}$$

scavo parietali orientati al ripido (2) :

$$h_2 = 2,0 + \frac{P_0}{\gamma_2} = 1 + \frac{P_0}{\gamma_2} = 1 + \frac{7140}{11240} = 1,63 \text{ m} \rightarrow \text{PCI}(2)$$

Ora calcoliamoci  $P_H$ :

$$P_H = \gamma_2 (h_2 - 2m) = (11240)(1,63 - 0,7) = 10453,2 \text{ Pa} \approx 0,103 \text{ atm}$$

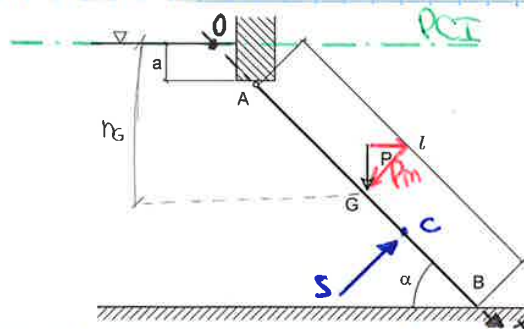
②

Determinare la minima forza verticale P, da applicarsi nel baricentro G, per assicurare l'equilibrio della paratoia piana di traccia AB, incernierata in A ed appoggiata in B, noti il battente a, l'inclinazione  $\alpha$  e le dimensioni della paratoia (profondità unitaria normalmente al disegno).

Se la cerniera fosse in B e l'appoggio in A, quale valore avrebbe la forza?

$a = 0,1 \text{ m}$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $l = 2 \text{ m}$ ;  $\gamma = 9.800 \text{ N/m}^3$ .

[ $P = 28.900,2 \text{ N}$ ;  $P' = 15.837,8 \text{ N}$ ]



Come è fatta la spinta che l'acqua esercita su una sup. piana? Agisce in C (centro di spinta) ed è  $\perp$  alla sup. piana.

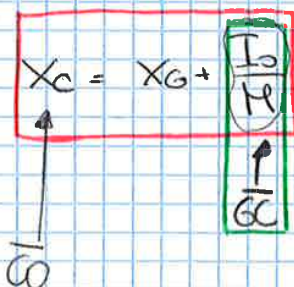
$$S = P_G \cdot \text{Area}_{\text{sup}}$$

$$P_G = \gamma h_G$$

PCI = con la sup. libera in punto e lì ho  $P=0$ . Allora calcolo  $P_G$  rispetto al PCI.

$$S = P_G \cdot A = \gamma (a + \frac{l}{2} \sin \alpha) (l \times 1) = 9800 (0,1 + \frac{2}{2} \sin(45)) (2 \times 1) = 15819 \text{ Pa}$$

prendo una  $x$  ponendo per C e lo faccio intersecare il PCI in  $x=0$  e quel punto è la cosiddetta linea di spinta:



$$I_0: \text{MOM. INERZIA} \rightarrow I_0 = \frac{b \cdot l^3}{12}$$

$b = \text{profondità}$

$$M: \text{MOM. STATICO} \rightarrow M = X_G \cdot A$$



tutte le forze agenti sul contorno

$$\sum x + \pi_1 + \pi_2 + P = 0 \rightarrow F_c + P = 0: \text{E.O. GLOBALE}$$

zero sul PCI dove  $P=0 \rightarrow \pi_1=0$

$$|P| = \rho_1 V = \rho_1 \left[ (h_2 + h_1) \left( \sqrt{h_1 + h_2} - \sqrt{h_2} \right) \frac{x}{h_2} x^2 \right]$$

per  $P \text{ non } = 0: |\pi_2| = \rho \frac{h_1}{2} (h_1 + 1)$ ;  $\bar{G}_c = \frac{I_3}{H} = \frac{h_1}{6}$

↑ riferito a  $G_1$

$G_1$ : baricentro sup. piana verticale.

C: centro di spinta =  $\frac{2}{3} h_1$   
(se parte dell'arco piana  $\frac{2}{3} h_1$ )

$$|S_x| = \sqrt{\pi_2^2 + P^2} \text{ ed è inclinata di } \arctan \frac{|P|}{\pi_2}$$

risultante delle componenti della spinta

per il secondo fluido tratto AB: per farlo la sup. libera e deve dare trovare i PCI e poi lavoro come prima:

$$x \rho_2 = \rho_1 h_1 \rightarrow x = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2} : \text{altezza del PCI 2} \rightarrow x + h_2 = 1,33 \text{ m}$$

↑ altezza tra PCI(2) e "zero" del fluido 2

da lavoro come prima:  $P + \pi_1 + \pi_2 + S_x = 0$

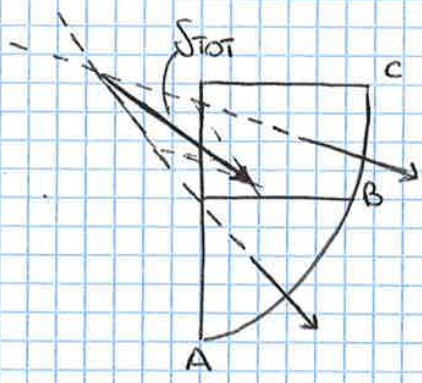
$$M = x G_2 \rho_2 \Rightarrow x G_2 = \frac{\int_0^x x dx \rho_2}{\rho_2}$$

$$|\pi_2| = x \rho_2 (\text{Area})$$

$$\rightarrow \sum x = \rho_2 \left( \frac{h_2}{2} + x \right) + x \rho_2 (\text{Area}) + P$$

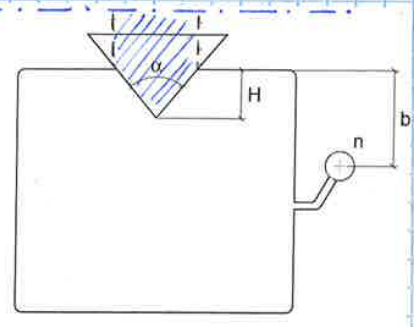
$$\rightarrow \sum_{TOT} = 16814 \text{ N} \text{ con } \alpha = 47^\circ$$

↑ TOTALE



②  $m = 0,07 \text{ kg/cm}^2$   
 $\rho_1 = 907 \cdot 1000 \cdot 9,81$   
 $\rho_2 = 0,804 \text{ kg/cm}^3$

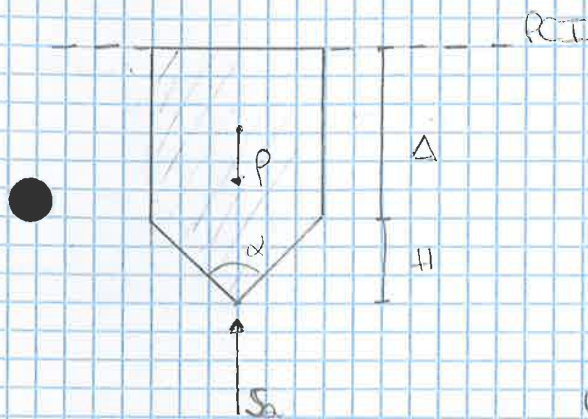
Nella parete superiore di un serbatoio chiuso pieno di acqua è praticata una luce, in cui è inserita una valvola conica.  
 Note la geometria del sistema e l'indicazione n del manometro metallico, determinare la forza S che deve agire sulla valvola per garantirne la chiusura.  
 Dati:  
 $n = 0,07 \text{ kg/cm}^2$        $H = 0,10 \text{ m}$   
 $b = 0,30 \text{ m}$                $\alpha = 60^\circ$   
 $[S = 44,52 \text{ N}]$



Iniziamo col cercare il PCI: le componenti orizzontali sono uguali e opposte e allora  $\sum R_x = 0$ . Il corpo ha solo una spinta verticale e allora è come se tra il corpo e il PCI avessi un piano di fluido.

$$V_{\text{coro}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$$

$$P + F_c = 0$$



$$P + S = 0 \rightarrow |S| = -P$$

PRINCIPIO ARCHIMEDE

Principio Archimede

$$PCI \rightarrow \Delta + H \rightarrow \Delta = ? \rightarrow m = \gamma(\Delta + b) \rightarrow \Delta = -b + \frac{m}{\gamma} = \dots = 0,4 \text{ m}$$

↑ densità

per cui PCI è ad altezza  $\Delta + H = 0,4 + 0,1 = 0,5 \text{ m}$

$$\begin{aligned}
 P &= \gamma V = \gamma (V_{\text{coro}} + V_{\text{cilindro}}) = \gamma \left( \frac{2}{3} \pi r^2 H + \pi r^2 \Delta \right) = \\
 &= \gamma \left[ \frac{2}{3} \pi r^2 \left( H + \frac{3}{2} \Delta \right) \right] = \\
 &= \gamma \left( \frac{2}{3} \pi r^2 H + \frac{3}{2} \pi r^2 \Delta \right) = \dots = 47,86 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$|S| = -P \rightarrow S = 47,86 \text{ N}$$

$$P_2 = \sqrt{2} V_2$$

6

A formare, con asse orizzontale, un tubo di ghisa di diametro esterno  $D$ , spessore  $(D-d)/2$  e lunghezza  $l$  viene versata della ghisa fra l'anima di diametro  $d$  e la forma di diametro  $D$ . Il carico di ghisa sull'asse del tubo è  $h$ .

Detti  $\gamma_\gamma$  il peso specifico della ghisa e  $\gamma_\alpha$  quello del materiale dell'anima, determinare il peso minimo  $G$  che deve avere la parte superiore della forma per non sollevarsi.

Dati:

$D = 420 \text{ mm}$

$h = 38 \text{ cm}$

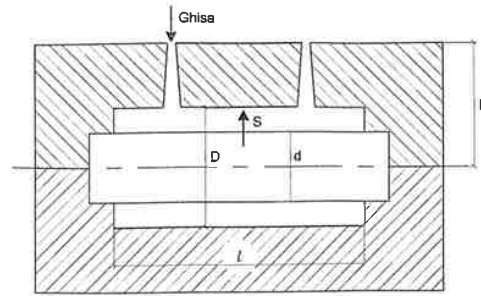
$d = 380 \text{ mm}$

$\gamma_\gamma = 70.560 \text{ N/m}^3$

$l = 1800 \text{ mm}$

$\gamma_\alpha = 13.720 \text{ N/m}^3$

$[G = 23076 \text{ N}]$



il  $\tau$  serve a gradire perché non sempre l'evento si ha appena accade qualcosa, ma spesso mi serve dopo tempo che mi viene "concesso" dal  $\tau$ .

se ad esempio, 1)  $\overline{x(t)y(t+\tau)} = 30 \rightarrow$  non è detto che è più grande perché è più correlato.  
 2)  $\overline{x(t)y(t+\tau)} = 2$

per confrontare il fenomeno devo dividerlo per lo sqm che mi indica la dispersione:

$$\frac{\overline{x(t)y(t+\tau)}}{\sqrt{\bar{x}^2} \sqrt{\bar{y}^2}}$$

Covarianza  
 sqm.  
 CROSS-CORRELAZIONE

Se 2 fenomeni sono correlati, allora c'è una equazione LINEARE tra i 2 processi.

Voglio capire se ho correlazione in un singolo segnale.

$$R_x(\tau) = \frac{\overline{x(t)x(t+\tau)}}{\bar{x}^2}$$

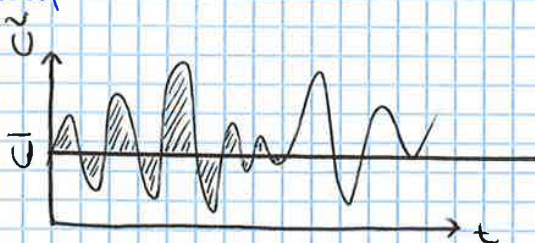
AUTO-CORRELAZIONE

$$J = \int_0^{\infty} A(\tau) d\tau$$

SCALA INTEGRALE: area  $\rightarrow$  legata alla prevedibilità del segnale.

indicazione della memoria del segnale e della sua dbe e l'inerzia del sistema. Tanto più ho memoria e più è facile fare le previsioni.

Imponiamo l'idea di Rayleigh:  $\tilde{U} = \bar{U} + u$  DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS.



$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{U}(t) dt$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int u(t) dt = 0$$

MEIA DEGLI SCARTI.

Egli vuole trovare delle eq. che descrivono solo la  $\bar{U}$ . Poi prende le eq. che descrivono il problema e applica la sua idea.

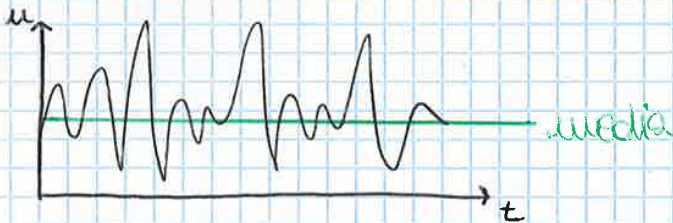
22/10/2014

Analizziamo il moto TURBOLENTO:

- la Turbolenza rompe le simmetrie. Caratteristiche generali:
  - 1) Caoticità (caos)
  - 2) Instabilità del sistema: da laminare a turbolento non si ha un passaggio graduale ma una specie ben definita per cui si è in uno o nell'altro.
  - 3) Fortemente dissipativo: dissipa energia
  - 4) Fortemente diffusivo: incrementa i processi di trasporto.
  - 5) Fenomeno stazionario: quando inizia la turbolenza la ricerca immaginare come tanti moti stazionari.

Reynolds: nasce l'idea di cercare di separare i dettagli della

● turbolenza dalle velocità medie: mantenendo il moto turbolento da "caos", percorrerà sempre una traiettoria da un punto ad un altro e oltre a quella media. D'indicare le oscillazioni da ciò che sono le medie coniche quando solo la media ed è come se ho solo la turbolenza



● La media la immagino nel tempo:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

VELOCITÀ  
MEDIA  
TEMPORALE

in generale:  $\bar{\phi} = \int_t^{t+T} \phi(t) dt$

problemi dell'operatore:  $\exists$  un tempo T? Se prendo il segnale turbolento che oscilla nel tempo in un punto, prendo l'intervallo T e ne calcolo la media; se però supponendo che preso un altro intervallo T ho un segnale uguale, allora T deve essere abbastanza grande affinché ciò avvenga. Ma è con un moto turbolento? Mi viene allora il dubbio che mai esiste T in

● quando la turbolenza genera informazioni nuove su scale sempre più grandi, allora a rigore, T mai esiste.

$$\tilde{U}_i = \bar{U}_i + u_i$$

↑  
termini turbolenti

→  $\frac{d(\bar{u}_i + u_i)}{dx_i} = 0$  : ho applicato l'operatore medio a tutto l'espressione.

Per media temporale è un operatore lineare:  $\frac{d}{dx_i} (\bar{U}_i + u_i) = 0$

$$\frac{d\bar{u}_i}{dx_i} + \frac{d\bar{u}_i}{dx_i} = 0$$

es. di partenza  
operatore della  
variabile che ci  
interessa.

$$\frac{d\bar{u}_i}{dx_i} + 0 = 0$$

● Analizziamo i vari termini:

(1):  $\frac{d\tilde{u}_i}{dt} \Rightarrow \frac{d(\bar{u}_i + u_i)}{dt} \Rightarrow \frac{d(\bar{u}_i + u_i)}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d\bar{u}_i}{dt}$

(3):  $-\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{P}}{dx_i} \Rightarrow \tilde{P} = \bar{P} + P \Rightarrow \dots \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{P}}{dx_i}$

(4):  $\frac{d}{dx_5} \frac{d}{dx_5} (\bar{U}_i + u_i) \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d}{dx_5} \frac{d}{dx_5} (\bar{u}_i)$

(5): non da problemi

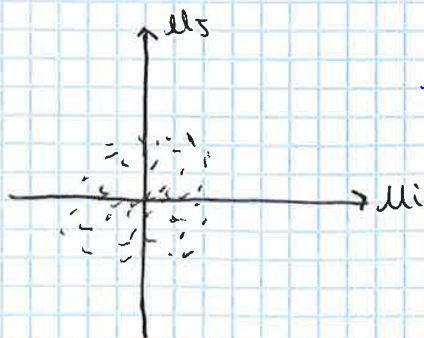
(2):  $\Rightarrow \dots \Rightarrow (\bar{U}_5 + u_5) \frac{d}{dx_5} (\bar{U}_i + u_i) =$

$$= \bar{U}_5 \frac{d\bar{U}_i}{dx_5} + \bar{u}_5 \frac{d\bar{U}_i}{dx_5} + \bar{U}_i \frac{d\bar{u}_i}{dx_5} + u_5 \frac{d\bar{u}_i}{dx_5} = \bar{U}_5 \frac{d\bar{U}_i}{dx_5} + u_5 \frac{d\bar{u}_i}{dx_5} =$$

$\swarrow \approx 0$                        $\swarrow \approx 0$

$$= \bar{U}_5 \frac{d\bar{U}_i}{dx_5} + \frac{d\bar{u}_i \bar{u}_5}{dx_5} - \bar{u}_i \frac{d\bar{u}_5}{dx_5} = \bar{U}_5 \frac{d\bar{U}_i}{dx_5} + \frac{d\bar{u}_i \bar{u}_5}{dx_5}$$

$\swarrow \approx 0$



non ho correlazione: caso

$u_i$  e  $u_5$  sono scorrelati e allora la media del prodotto è zero:

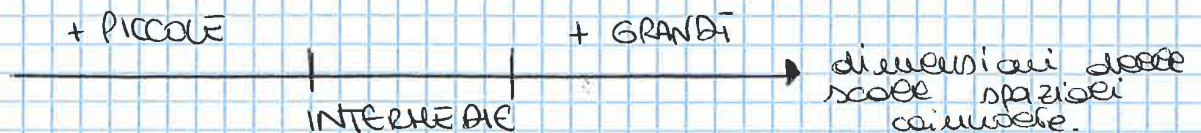
$$\frac{d\bar{u}_i \bar{u}_5}{dx_5} = 0$$

Le tensioni di Reynolds:

- esistono nei fluidi perfetti
- non esistono nelle singole particelle ma esistono nel momento in cui voglio studiare il moto medio del solo.

Ho il moto del fluido e devo mettere energia affinché il fluido si muova: metto energia che butto nel moto medio ma poi tutto in tensioni di Reynolds e viene portata alla turbolenza; allora la turbolenza viene perché toglie energia al moto medio e poi fa diventare ecc. calore e allora il moto turbolento si scade.

### CASCATA DI VORTICI:



immagino la turbolenza come tanti vortici incontrati uno dopo l'altro.

Le scale GRANDI i vortici devono essere con grandi da poter vedere la velocità del moto medio. Più sono grandi e più vedo gradienti di moto medio e più prendo energia. Profilo più piatto e ho meno energia per la turbolenza.

• Mi devono concedere di vedere le condizioni al contorno delle scale grandi sono diverse da caso a caso. Vedono le tensioni di Reynolds non legate alla viscosità (sono scale non viscosi). Poi anche l'energia di vortici di dimensioni più piccole che ci sono al loro interno (Kolmogorov 1941:  $\lambda$ ). Arrivo in un mondo con piccolo che non mi rende più conto delle condizioni al contorno.

Le scale INTERMEDIE sono tutte universali. Secondo Kolmogorov dipendono solo dall'energia che gli arriva da monte e non dalle scale al contorno. Fino a quando:

- vortici sono con piccoli e girano con veloci (avendo  $du/du$  grande), ma deve comporre  $\mu$ .

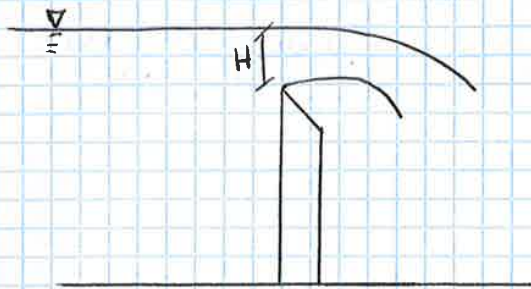
Le scale più PICCOLE sono dissipative. Ho anche una scala minima che viene bloccata dalla  $\mu$ . La  $\mu$  butta



$$\frac{\gamma}{Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\delta} = g(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{\frac{Q_4}{Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\delta}}_{\Pi_4}, \dots, \underbrace{\frac{Q_N}{Q_1^{\alpha_N} Q_2^{\beta_N} Q_3^{\delta_N}}}_{\Pi_N})$$

per continuare ad avere ugualianza:  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ . In questo caso cerchiamo una relazione in uno spazio  $(N+1)$  dimensionale. Sto lavorando in  $N-3+1 = N-2$  grandezze fondamentali e allora il mondo stesso  $g$  è più semplice di quanto stesso  $f$ .

Esempio:



legame  $\phi = \phi(H)$  portata.

$\phi = f(H, g, L, X)$

- to cambio mettendo togliendo
- come to cambio?
- non da contributo perché il fluido non tocca delle parti.
- to cambio cambiando forma

decido di essere come nuove grandezze  $H$  e  $g$ :

$$H^\alpha g^\beta = f_2\left(\frac{L}{H}\right)$$

$\alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{1}{2}$  per avere rapporto adimensionale.

ESERCITAZIONE 3:

28/10/2014

concetti utili:

• Def: CARICO TOTALE:  $H = z + \underbrace{\frac{p}{\rho}}_h + \frac{U^2}{2g} = \text{cost}$

• TEO: BERNOULLI: bilancio energetico. Fluido perfetto (max dist'pa energetica):  $H = \text{cost}$  lungo la traiettoria delle particelle

- Hp:
- 1)  $\rho = \text{cost}$
  - 2) fluido perfetto
  - 3) campo delle gravità

per sapere bene se il moto è laminare o turbolento calcolo:

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{6,26 \times 0,05}{10^{-6}} = 4 \cdot 10^5 \Rightarrow \text{moto turbolento}$$

valore di  $\nu$  dell'Acq

$Re \gg 2000$

$$\varphi_2 = v_2 A_2 = v_1 A_1 = 6,26 \times \left( \frac{(0,075)^2}{4} \pi \right) \approx 0,0277 \text{ m}^3/\text{s} = 27,7 \text{ l/s}$$

calcoliamo ora  $P_1$  senza prima sezione. Disegnate l'andamento delle linee dei carichi LCI e LCP sappiamo tramite Bernoulli che LCI = cost e che LCP non è regolare. La velocità è vincolata dal diametro della condotta:

•  $v = \frac{\varphi}{A}$  dato che  $\varphi = \text{cost} \Rightarrow$  è l'Area che controlla la  $v$ .

$$\frac{dv_1^2}{2g} > \frac{dv_2^2}{2g} : \text{col serbatoio LCP} = \text{LCI}$$

quindi:

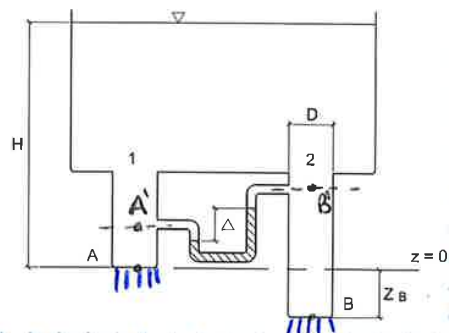
$$H = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{dv_1^2}{2g} \rightarrow (H - z_1 - \frac{dv_1^2}{2g}) \gamma = P_1$$

$$\rightarrow P_1 = \left( 2 - 0 - \frac{6,26 / \left( \frac{0,05^2}{4} \cdot \pi \right)}{2 \times 9,81} \right) 9800 \approx 79,9 \text{ kPa}$$

②

Da un serbatoio a livello costante si staccano due tubazioni verticali, ad imbocco raccordato, dalle quali effluisce a bocca piena liquido perfetto di peso specifico  $\gamma$ . Noti il carico  $H$  nel serbatoio rispetto al piano  $z = 0$  e l'indicazione del manometro differenziale a mercurio si chiede, in valore e segno, sempre rispetto al piano  $z = 0$ , la quota della sezione di sbocco della seconda tubazione e la portata fluente in essa.

$\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$        $\Delta = 0,10 \text{ m}$        $D = 0,10 \text{ m}$   
 $\gamma_m = 133300 \text{ N/m}^3$        $H = 5 \text{ m}$   
 $[z_B = -1,26 \text{ m}; Q = 0,087 \text{ m}^3/\text{s Nm}]$



Andiamo in prima la condotta 1:  $h_A = z_A + \frac{P_A}{\gamma} = 0$

• che succede in A'? :  $H_A = H_{A'}$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{dv_A^2}{2g} = z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma} + \frac{dv_{A'}^2}{2g} \Rightarrow h_A = h_{A'} = 0$$