NUMERO: 1521A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Muratore

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc. Prof.Ceragioli

ANALISI II

esercitazione : marco abrate , marco_abrate@polito.it

Esercizi : es. in rete
libro Lancellotti : esercizi di analisi II

Sito : didattica online
es. di analisi II e prove d'esame

Corso vecchio : fare convergenza uniforme

Argomenti principali : - integrazione numerica
- serie numeriche

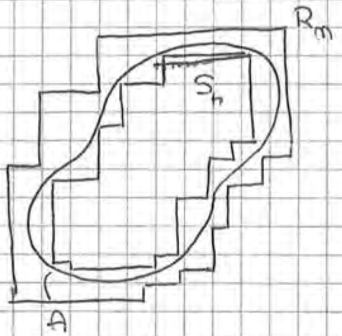
Esame : scritto e orale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 254

É evidente che le proprietà elencate prima sono soddisfatte se S é un plurirettangolo.
Inoltre, se S é degenere, cioé se é ridotto ad un segmento o ad un punto, allora $m(R) = 0$.

1) $m(S) \geq 0$
2) $S_1 \subseteq S_2$, $m(S_1) \leq m(S_2)$
3) $m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2) - m(S_1 \cap S_2)$

Ci sono 2 modi per approssimare l'insieme A:
- costruire un plurirettangolo tale che $A \subseteq R$
- approssimarlo dall'interno, $S \subseteq A$



Costruiamo allora 2 successioni di plurirettangoli:
- a partire da R_0, possiamo immaginare di costruire una successione di plurirettangoli sempre più piccoli (cioé ognuno contenuto nel precedente) ma tutti contenenti A: $A \subseteq R_n \subseteq \ldots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$
- a partire da S_0, contenuto in A, possiamo costruire una sequenza di pluri-rettangoli sempre più grandi (cioé ognuno ~~contenuto~~ contenente il precedente), ma tutti contenuti in A: $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq A$

Queste 2 successioni di pluri-rettangoli possono essere considerate approssimazioni geometriche dell'insieme A, rispettivamente "per eccesso" e "per difetto".
$\{m(S_n)\}$, $\{m(R_n)\}$ sono 2 successioni di numeri positivi.
Più precisamente, consideriamo le 2 successioni di numeri reali:
- $m(S_0) \leq m(S_1) \leq \ldots \leq m(S_n)$, é una successione crescente e limitata.
  Ammette un limite finito (estremo superiore).
$$\exists \lim_{n \to +\infty} m(S_n) = \ell_S$$
- $m(R_0), m(R_1), m(R_2), \ldots$, é una successione decrescente e limitata.
$$\exists \lim_{n \to +\infty} m(R_n) = \ell_R$$
Possiamo allora concludere che $\ell_S \leq \ell_R$.
Abbiamo applicato il Teorema del Confronto.

$\lim\ m(R_n) \geq 1$
$\lim\ m(S_n) = 0$ $\Rightarrow$ Q non é misurabile

Proposizione: un sottoinsieme limitato A del piano é misurabile se e solo se la sua frontiera ∂A ha misura uguale a zero.

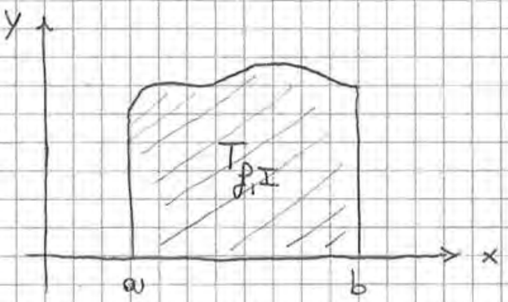
Integrale definito

Sia f una funzione e sia $I = [a,b]$ un intervallo chiuso contenuto nel suo dominio. Supponiamo che f sia limitata su $[a,b]$.

$$f : [a,b] \to R \quad \text{limitata}$$

CASO DELLE FUNZIONI NON-NEGATIVE

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I = [a,b]$



TRAPEZOIDE, insieme

$T_{f,I} = \{ (x,y) \in R^2 : x \in [a,b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x) \}$

Si dice che f é integrabile nel senso di Riemann su I se $T_{f,I}$ é misurabile

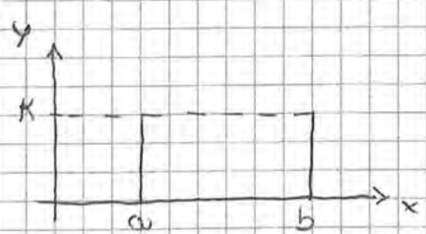
Inoltre, la misura di $T_{f,I}$ si dirà INTEGRALE DEFINITO (nel senso di Riemann) di f esteso all'intervallo I e si scrive:

$$m(T_{f,I}) = \int_{[a,b]} f(x)\, dx$$

↳ indica l'intervallo I su quale sto integrando

ES. $f(x) = K$ su $[a,b]$

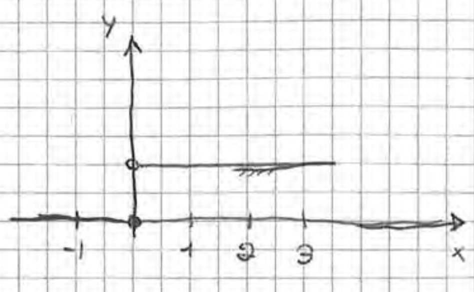
$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)K$$



ES. $H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

tra $[-1,3]$

$$\int_{[-1,3]} H(x)\, dx = 3$$



funzione monotona a tratti: suddivido $[a,b]$ in un numero finito di sottointervalli disgiunti e consecutivi tali che f è monotona su ciascuno di questi sottointervalli.

Proprietà integrale definito

Elenchiamo le principali proprietà dell'integrale definito.

- ADDITIVITÀ rispetto agli estremi d'integrazione: se f è una funzione integrabile su un intervallo I e se a, b, c sono 3 punti di I con $a < b < c$, allora:

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx + \int_{[b,c]} f(x)\,dx = \int_{[a,c]} f(x)\,dx$$

- ADDITIVITÀ rispetto alla funzione integranda: se f e g sono funzioni integrabili su un intervallo I e se a, b sono 2 punti di I con $a < b$, allora:

$$\int_{[a,b]} (f(x) + g(x))\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \int_{[a,b]} g(x)\,dx$$

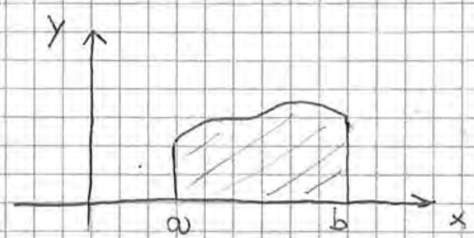
- OMOGENEITÀ: se f è una funzione integrabile su un intervallo I, a, b sono 2 punti di I con $a < b$, e $K \in \mathbb{R}$, allora:

$$\int_{[a,b]} K f(x)\,dx = K \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

- MONOTONIA: siano f e g funzioni integrabili su un intervallo $I = [a,b]$, e supponiamo che per ogni $x \in I$ si abbia $f(x) \leq g(x)$. Allora:

$$\int_I f(x)\,dx \leq \int_I g(x)\,dx$$

Osservazione: funzioni che differiscono in un numero finito di punti hanno lo stesso integrale.



Integrale orientato

Sia $f(x)$ una funzione integrabile nel senso di Riemann, e siano a e b 2 numeri reali qualunque. Supponiamo che l'intervallo chiuso i cui estremi sono a e b (in un ordine qualunque) sia interamente contenuto nel dominio di f.

Dato un sottoinsieme limitato e non vuoto V di $\mathbb{R}^3$, si comincia fissando un parallelepipedo Q che contiene V. Poi si costruisce una successione di pluri-parallelepipedi sempre più piccoli (nel senso dell'inclusione)

$$V \subseteq \ldots \subseteq Q_n \subset \ldots \subset Q_2 \subset Q_1 \subset Q$$

ma tutti contenenti V.

Similmente, partendo da un punto di V, si costruisce una successione di pluri-parallelepipedi sempre più grandi

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots \subset V$$

ma tutti contenuti in V.

Le misure di questi 2 pluri-parallelepipedi costituiscono 2 successioni numeriche $\{m(P_n)\}$ e $\{m(Q_n)\}$ entrambe limitate, la prima crescente, la seconda decrescente. Dunque esse ammettono limite finito e

$$\lim_{n\to+\infty} m(P_n) \leq \lim_{n\to+\infty} m(Q_n)$$

Se è possibile costruire le 2 successioni $\{m(P_n)\}$ e $\{m(Q_n)\}$ in modo che i 2 limiti coincidano si dice che V è misurabile, e si definisce volume di V il numero $m(V)$ uguale al valore comune dei 2 limiti.
Il volume rispetta le proprietà generali della misura.

Integrale doppio esteso ad un rettangolo

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rettangolo contenuto nel dominio di f. Supponiamo f limitata su R.

CASO DELLE FUNZIONI NON NEGATIVE:

$$T_{f,R} = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in R,\ 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2) \}$$

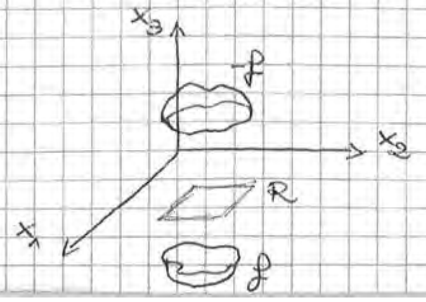
La funzione f si dice integrabile nel senso di Riemann su R se l'insieme $T_{f,R}$ è misurabile, e si assegna all'integrale doppio nel senso di Riemann di f su R il valore

$$\iint_R f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = m(T_{f,R})$$

CASO DELLE FUNZIONI NON POSITIVE:

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è non positiva su $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ si definisce:

$$\iint_R f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = -m(T_{-f,R})$$



$$\begin{cases} 16 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$\neq 0$ per evitare che si annulli il determinante

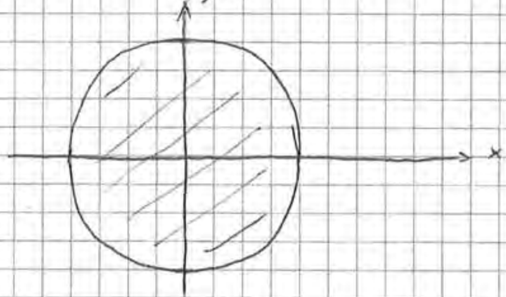
- $16 - x^2 - y^2 \geq 0$

  $x^2 + y^2 - 16 \leq 0$

Guardo la frontiera, cioè l'insieme che viene individuato dall'equazione

$x^2 + y^2 - 16 = 0$ è un'ellisse in forma canonica

$x^2 + y^2 = 16$ la frontiera è la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{16} = 4$



$x^2 + y^2 \leq 16$

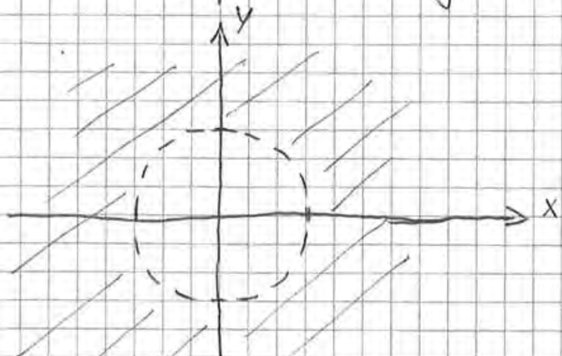
insieme interno alla frontiera, compresa la frontiera

- $x^2 + y^2 - 9 > 0$

  $x^2 + y^2 > 9$

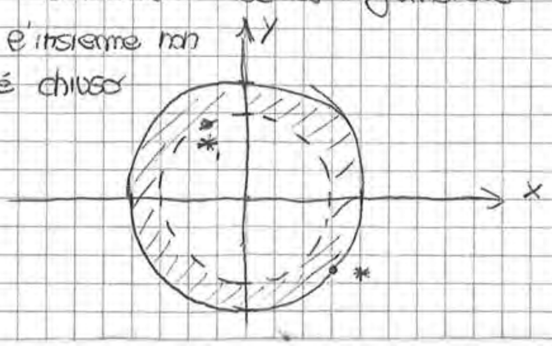
La frontiera è la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{9} = 3$

Il > significa che considero l'insieme esterno alla circonferenza, non compresa la frontiera.



Il dominio della funzione sarà allora:

*, l'insieme non è chiuso



* punti di frontiera: se ogni intorno interseca il complementare dell'insieme

D è limitato.

Le 2 circonferenze costituiscono i punti di frontiera.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 254

2) $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \sqrt{x^2+y^2} < z < x+2 \}$

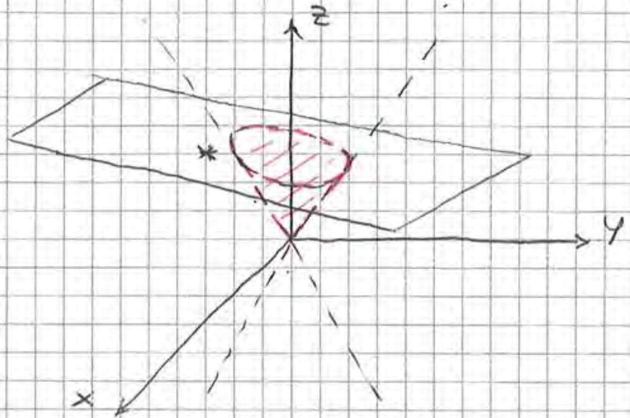
Ho una catena di disuguaglianze.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} < z \\ z < x+2 \end{cases}$$

- $\sqrt{x^2+y^2} < z \qquad z \geq 0$

$x^2+y^2 = z^2$ polinomio omogeneo di grado 2

$x^2+y^2-z^2 = 0$ cono, l'asse del cono sarà l'asse z



$z \geq 0$ non c'è la parte negativa

* l'intersezione è un'ellisse

- $z < x+2$

$x - z + 2 = 0$ eq. di un piano, è un polinomio lineare

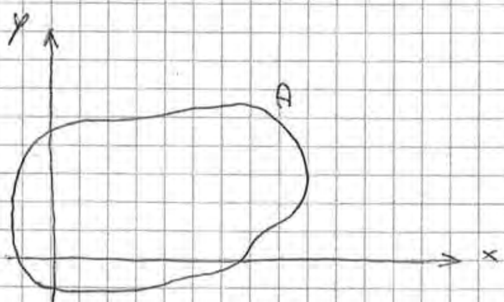
$z < x+2$ si prende l'insieme al di sotto del piano, frontiera non compresa.

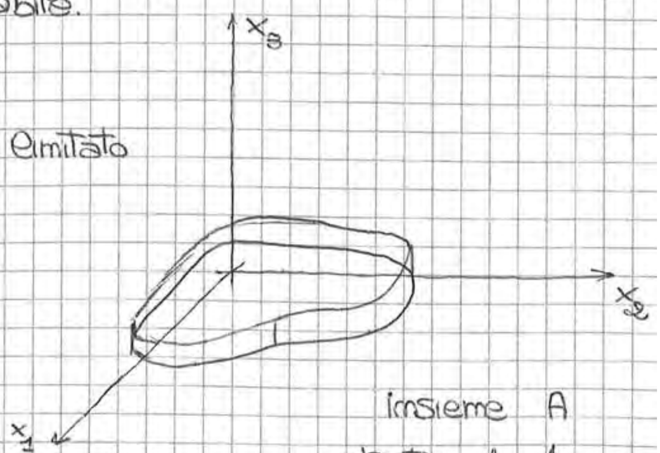
Integrale doppio esteso ad un insieme misurabile 09/10/14

I rettangoli costituiscono una generalizzazione naturale del concetto di intervallo. Tuttavia, la varietà di figure geometriche che possiamo immaginare nel piano è molto grande: limitarsi a domini di integrazione di forma rettangolare è una restrizione inaccettabile.

Pensiamo ad un caso più generale:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato





insieme A alzato di 1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 254

$$\tilde{f}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)\cdot h_A(x_1,x_2) = \begin{cases} f(x_1,x_2)\cdot \overset{1}{\cancel{h_A(x_1,x_2)}} & (x_1,x_2)\in A \quad h=1 \\ f(x_1,x_2)\cdot \underset{0}{\cancel{h_A(x_1,x_2)}} & (x_1,x_2)\in R\setminus A \quad h=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x_1,x_2) & (x_1,x_2)\in A \\ 0 & (x_1,x_2)\in R\setminus A \end{cases}$$

Il volume che ci interessa è definito come:

$f\geq 0 \quad \{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2)\in A,\ 0\leq x_3\leq f(x_1,x_2)\} = T_1$

$\{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2)\in R,\ 0\leq x_3\leq \tilde{f}(x_1,x_2)\} = T_2$

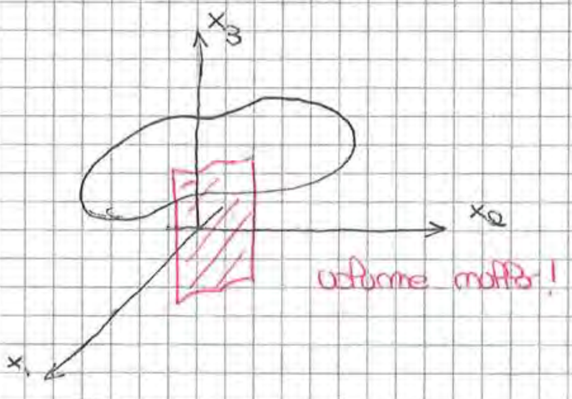
$\Rightarrow \text{vol}\, T_1 = \text{vol}\, T_2$

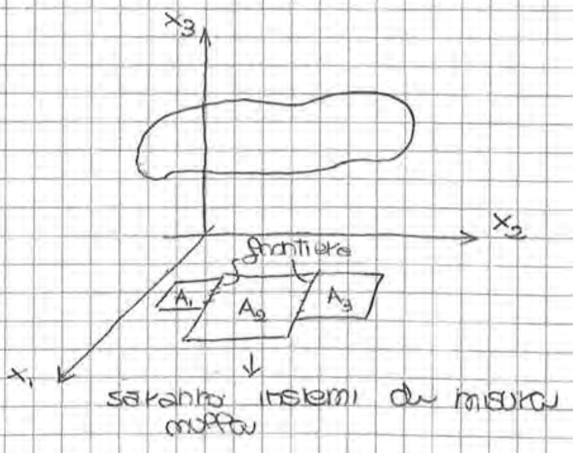
Definizione: si dice che $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è integrabile nel senso di Riemann su A se $\tilde{f}$ è integrabile su R, e si definisce l'integrale doppio di f nel senso di Riemann esteso ad A come:

$$\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint_R \tilde{f}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

Proposizione: se $A\subset\mathbb{R}^2$ è un insieme limitato di misura nulla, tale cioè che $m(A)=0$, allora qualunque funzione limitata $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è integrabile su A e $\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0$.

ESEMPIO:





Proprietà dell'integrale

1) ADDITIVITÀ RISPETTO ALLE FUNZIONI INTEGRANDE: se A è misurabile, e f,g sono integrabili su A, anche $f+g$ è integrabile su A e

$$\iint_A (f(x_1,x_2) + g(x_1,x_2))\,dx_1\,dx_2 = \iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 + \iint_A g(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

2) OMOGENEITÀ: se A è misurabile e f è integrabile su A, allora anche αf è integrabile su A e

$$\iint_A \alpha\, f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \alpha\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

Teorema: supponiamo che $f(x_1,x_2)$ sia continua nel rettangolo aperto S. Allora $F(x_1)$ è continua in ogni punto dell'intervallo J_1.

Dal momento che $F(x_1)$ è continua, dati 2 punti $a,b \in J_1$ $(a<b)$ si può considerare l'integrale

$$\int_a^b F(x_1)\,dx_1 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2 \right) dx_1$$

Si può procedere dualmente anche in senso inverso: $\int_c^d \left(\int_a^b f(x_1,x_2)\,dx_2 \right) dx_1$

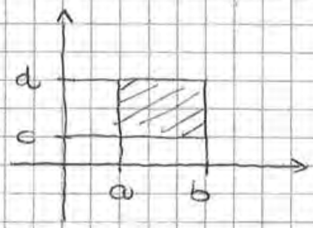
I valori numerici determinati nei 2 modi coincidono.
Il valore comune dei 2 integrali si usa indicare con il simbolo

$$\int_a^b \int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

Esso prende il nome di integrale doppio iterato della funzione f esteso al rettangolo chiuso $R=[a,b]\times[c,d]$

Teorema: se la funzione $f(x_1,x_2)$ è continua sul rettangolo $S=J_1\times J_2$, allora l'integrale doppio iterato di f su $R=[a,b]\times[c,d]$ coincide con l'integrale doppio nel senso di Riemann di f su R.

$$\iint_R f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_a^b\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$



$R=[a,b]\times[c,d]$ è un prodotto cartesiano
$= \{ (x_1,x_2) : a \le x_1 \le b,\ c \le x_2 \le d \}$

È un oggetto in dimensione 2.

ESEMPIO

1) $f(x_1,x_2) = \cos(x_1+x_2)$

$R=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Devo calcolare $I = \iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^{\pi/2} \left(\underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos(x_1+x_2)\,dx_1}_{F(x_2)} \right) dx_2 =$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left[\sin(x_1+x_2) \right]_{x_1=0}^{x_1=\pi/4} \right) dx_2 =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+x_2\right) - \sin(0+x_2) \right) dx_2 = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x_2\right) + \cos(0+x_2) \right]_{x_2=0}^{x_2=\pi/2} =$$

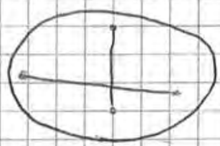
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} - \cos 0 = +\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2}-1$$

Generalizza la situazione: se $\alpha(x)$ continua su $[a,b]$, $\beta(y)$ continua su $[c,d]$ allora $\iint_{[a,b]\times[c,d]} \alpha(x)\cdot\beta(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b \alpha(x)\,dx\right)\left(\int_c^d \beta(y)\,dy\right)$.

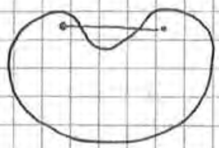
É una formula di riduzione

Insieme convesso

Insieme tale che:

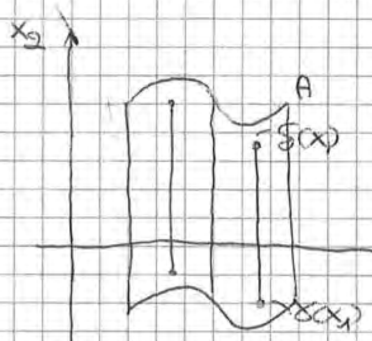


insieme convesso



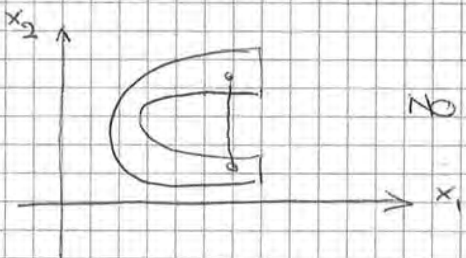
insieme non convesso

INSIEME VERTICALMENTE CONVESSO: tutti i segmenti verticali stanno nell'insiem



$A = \{(x_1,x_2) : x_1 \in [a,b]$ e $\gamma(x_1) \leq x_2 \leq \delta(x_1)\}$

$\gamma(x_1)$ e $\delta(x_1)$ sono 2 funzioni.

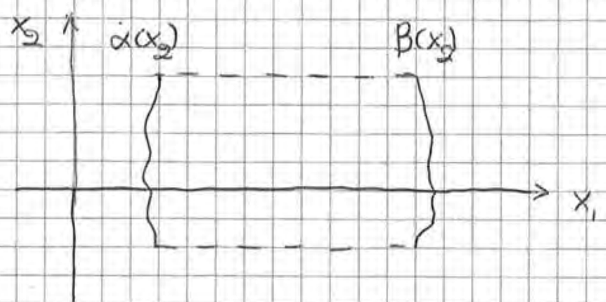


NO VERTICALMENTE CONVESSO

Convesso $\rightarrow$ Verticalmente convesso

Verticalmente convesso $\not\rightarrow$ Convesso

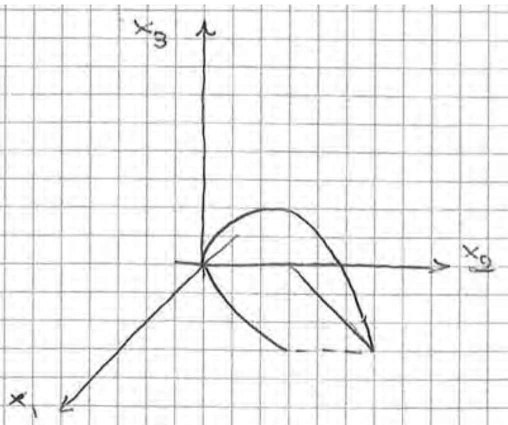
INSIEME ORIZZONTALMENTE CONVESSO



$B = \{(x_1,x_2) : x_2 \in [c,d]$ e $\alpha(x_2) \leq x_1 \leq \beta(x_2)\}$

$\alpha(x_2)$ e $\beta(x_2)$ sono 2 funzioni

Se é verticalmente convesso e orizzontalmente convesso non é detto che sia convesso.



É un volume.

$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x+1}2xy\,dy\right)dx=\int_0^1\left[xy^2\right]_{y=x^2}^{y=x+1}dx=\int_0^1\left[x(x+1)^2-x^5\right]dx=$$

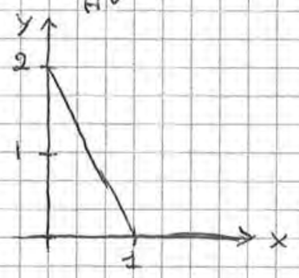
$$=\int_0^1(x^3+x+2x^2-x^5)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3+6+8-2}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

2) $f(x,y)=\sqrt{x}+2xy$

A è un triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(0,2)$

$I=\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$



Vediamolo come orizzontalmente convesso.

$A=\{(x,y):\ 0\le y\le 2,\ 0\le x\le \beta(y)\}$

Retta per 2 punti: $(0,2)$, ~~$(0,1)$~~ $(1,0)$

$y=-2(x-1)$

$y=-2x+2$

$2x=2-y$

$x=-\frac{1}{2}y+1$

AB $y=mx+q$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$y=-2x+2$

$$I=\int_0^2\left(\int_0^{-\frac{1}{2}y+1}\sqrt{x}+2xy\,dx\right)dy=\int_0^2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}+x^2y\right]_{x=0}^{x=-\frac{1}{2}y+1}dy=$$

$$=\int_0^2\left[\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}y+1\right)^{3/2}+\left(-\frac{1}{2}y+1\right)^2y\right]dy=$$

$$=\left[\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}y+1\right)^{3/2+1}\cdot(-2)}{5/2}\right]_0^2+\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{y^4}{4}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=\frac{2}{3}(0)-\frac{2}{3}\cdot1\cdot\frac{2}{5}\cdot(-2)+\frac{1}{16}\cdot16-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}=\frac{8}{15}+1-\frac{8}{3}+2=\frac{8+15-40+30}{15}=\frac{13}{15}$$

REGOLA 2: sia B, come prima, una regione orizzontalmente convessa simmetrica rispetto all'asse x_2, e sia:

$$B_1 = B \cap \{(x_1,x_2) : x_1 \geq 0\}$$

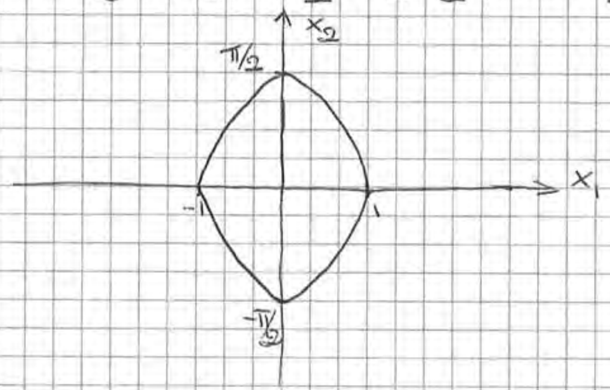
la parte di B giacente a destra dell'asse x_2. Sia adesso $f(x_1,x_2)$ una funzione pari rispetto ad x_1, tale cioè che $f(x_1,x_2) = f(-x_1,x_2)$, per ogni $(x_1,x_2) \in B$.

Allora: $$\iint_B f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\iint_{B_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

Ovviamente, regole analoghe valgono per regioni verticalmente convesse, a patto che la funzione integranda sia dispari o pari rispetto ad x_2.

ESEMPIO:

1) $B = \{(x_1,x_2) : -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2},\ -\cos x_2 \leq x_1 \leq \cos x_2\}$



$f(x_1,x_2) = 1 + x_2$

$f(-x_1,x_2) = 1 + x_2$ pari rispetto ad x_1

$B^+ = \{(x_1,x_2) : -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x_1 \leq \cos x_2\}$

$$\iint_B f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\iint_{B^+} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x_2}(1+x_2)\,dx_1\right)dx_2 = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[x_1 + x_1x_2\right]_{x_1=0}^{x_1=\cos x_2} dx_2 =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\cos x_2 + \underbrace{\cancel{x_2\cos x_2}}_{\text{dispari}}]\,dx_2 = 2\cdot 2\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos x_2}_{\text{pari}}\,dx_2 = 4\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] =$$

$$= 4\cdot[1-0] = 4$$

$\cancel{\int e^x(1-x^2)} =$

$\int_{-1}^{1}\left[e^x - e^x x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2\right]dx$

$\left[\int e^x x^2 = e^x x^2 - \int e^x 2x = e^x x^2 - \left(e^x 2x - 2\int e^x\right) = e^x x^2 - e^x 2x + 2e^x\right.$

$g = x^2 \quad g' = 2x$
$f' = e^x \quad f = e^x$

$g = 2x \quad g' = 2$
$\left. f' = e^x \quad f = e^x \right]$

$= \left[e^x - e^x x^2 + e^x 2x - 2e^x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} =$

$= \cancel{e^1} - \cancel{e^1} + \cancel{2e^1} - \cancel{2e} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10} - 1 - \left(\cancel{e^{-1}} - \cancel{e^{-1}} - 2e^{-1} - 2e^{-1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{10} + 1\right) =$

$= \cancel{2e} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10} - 1 + 4e^{-1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10} - 1 = 4e^{-1} + 1 + \frac{6}{10} = 4e^{-1} + \frac{16}{10} =$

$= \frac{8}{5} + 4e^{-1}$

3) $\int_A e^{x+y}\,dx\,dy$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

bordi: $|x| + |y| = 1$

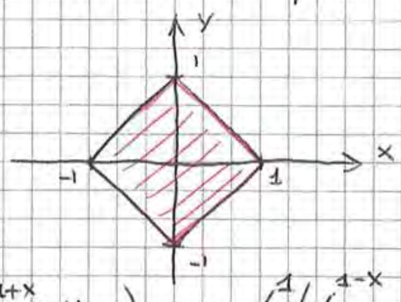
Studio cosa succede nei vari quadranti:

I^ quadrante: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$ é una retta
$y \leq 1 - x$ guardo sotto la retta

II^ quadrante: $-x + y = 1 \Rightarrow y = 1 + x \Rightarrow y \leq 1 + x$

III^ quadrante: $-x - y = 1 \Rightarrow -y = 1 + x \Rightarrow y \geq -1 - x$ guardo sopra la retta

IV^ quadrante: $x - y = 1 \Rightarrow -y = 1 - x \Rightarrow y \geq -1 + x$



convesso rispetto ad entrambi gli assi

$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}\,dy\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{-1+x}^{1-x} e^{x+y}\,dy\right)dx$

IP dominio é simmetrico ma non é detto che la funzione sia indifferente per tutti i quadranti. La funzione esponenziale non

Regola: sia A una regione del piano $x_1 x_2$, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su A.
Consideriamo un cambiamento di coordinate $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

dove φ_1 e φ_2 sono funzioni differenziabili, e sia

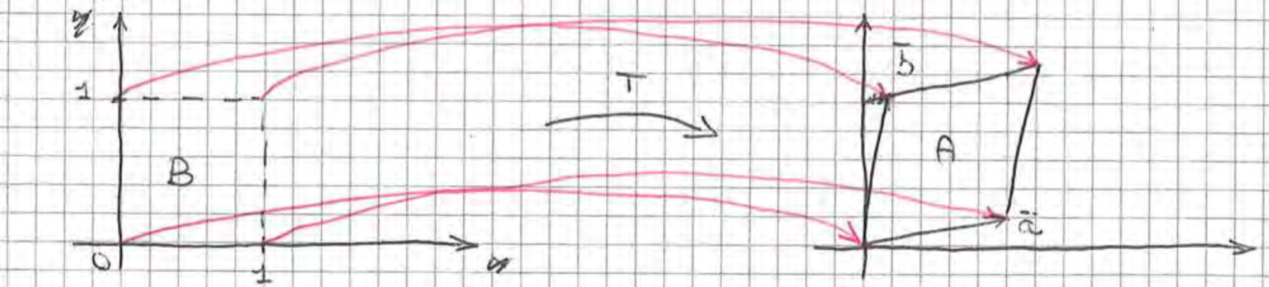
$$JT(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1,u_2) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u_1,u_2) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) \end{vmatrix} \qquad J = \text{jacobiana}$$

Sia infine B la regione descritta dai parametri u_1 e u_2 quando x_1 e x_2 descrivono la regione A.
Allora:

$$\iint_A f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_B f(\varphi_1(u_1,u_2), \varphi_2(u_1,u_2)) \cdot |\det JT(u_1,u_2)|\, du_1\, du_2$$

Il det J ci dice come cambia l'area nel passaggio da coordinate ad altre coordinate. Sarà $\neq 0$ $\forall\, u_1, u_2 \in B$ nell'integrale doppio.

Esempio:



Scrivo la trasformazione in forma vettoriale.

$T : \bar{x} = \bar{a}\, u_1 + \bar{b}\, u_2 \qquad (u_1,u_2) \in B$

$\bar{a} = (a_1, a_2)^T$

$\bar{b} = (b_1, b_2)^T$

$$T : \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1,u_2) = a_1 u_1 + b_1 u_2 \\ x_2 = \varphi_2(u_1,u_2) = a_2 u_1 + b_2 u_2 \end{cases}$$

$$T(0,0)^T = \begin{pmatrix} a_1(0) + b_1(0) \\ a_2(0) + b_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1)^T = \begin{pmatrix} a_1(0) + b_1(1) \\ a_2(0) + b_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$|\det JT(\rho,\theta)| = \rho$

$$I = \iint_B \rho^2 \cos^2\theta \cdot \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, \rho \cdot d\rho\, d\theta = \iint_B \rho^4 \cos^2\theta\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\right) =$$

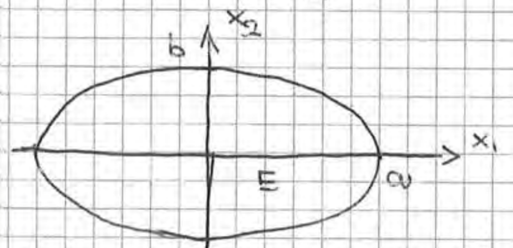
N.B formule di bisezione

$\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

$$= \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{32}{5}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{32}{5}(\pi + 0) = \frac{32}{5}\pi$$

2) calcola l'area della regione delimitata dall'ellisse di equazione:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$



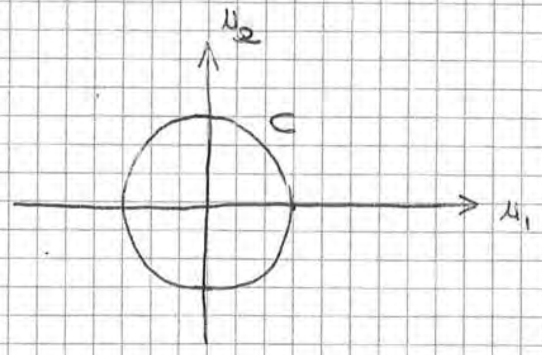
$$\iint_E dx_1\, dx_2$$

Si può fare un cambio lineare, Trasformo l'ellisse in un cerchio.

$$\underbrace{\frac{x_1^2}{a^2}}_{u_1^2} + \underbrace{\frac{x_2^2}{b^2}}_{u_2^2} \leq 1$$

$u_1 = \frac{x_1}{a}$, $u_2 = \frac{x_2}{b}$

$u_1^2 + u_2^2 = 1$



$$\begin{cases} x_1 = a\, u_1 = \varphi_1(u_1, u_2) \\ x_2 = b\, u_2 = \varphi_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

$$JT = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$|\det JT(u_1, u_2)| = |a b|$

$$\iint_E dx_1\, dx_2 = \iint_C |\det(JT)|\, du_1\, du_2 = \iint_C |ab|\, du_1\, du_2 = |ab| \iint_C 1\, du_1\, du_2 =$$

$= \pi\, |a \cdot b|$

Potevo risolvere l'esercizio passando dalle coordinate ellittiche.

$$\iiint_Q f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = m\left(\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : (x_1,x_2,x_3)\in Q,\ 0\leq x_4\leq f(x_1,x_2,x_3)\}\right)$$

misura in $\mathbb{R}^4$ — stanno nel parallelepipedo

Per le funzioni non positive ho che: $f<0 \Rightarrow -f\geq 0$.

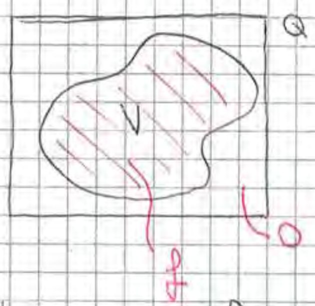
In generale per funzioni che cambiano segno in maniera arbitraria:

$$f = f^+ - f^-$$

Definiamo ora l'integrale esteso a un sottoinsieme misurabile V di $\mathbb{R}^3$:
se $V\subseteq\mathbb{R}^3$ misurabile e limitato, $V\subseteq Q$, con Q = parallelepipedo,

$$\iiint_V f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iiint_Q f(x_1,x_2,x_3)\cdot h_V\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iiint_Q \tilde{f}(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3)\cdot h_V = \tilde{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) & \text{se } (x_1,x_2,x_3)\in V \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2,x_3)\in Q\setminus V\end{cases}$$



In particolare, se $f(x_1,x_2,x_3)=1$ allora l'integrale triplo esteso a V restituisce il volume di V.

$$\iiint_V 1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = m(V)$$

Proposizione: V misurabile se la sua frontiera ha misura nulla.

Le proprietà di additività dell'integrale rispetto al dominio d'integrazione e rispetto alla funzione integranda, le proprietà di omogeneità e quella di monotonicità continuano a valere per gli integrali tripli.

A causa della maggior varietà e complessità della forma geometrica dei possibili domini d'integrazione, che sono adesso ~~domini~~ insiemi tridimensionali bisogna stabilire delle tecniche di riduzione.

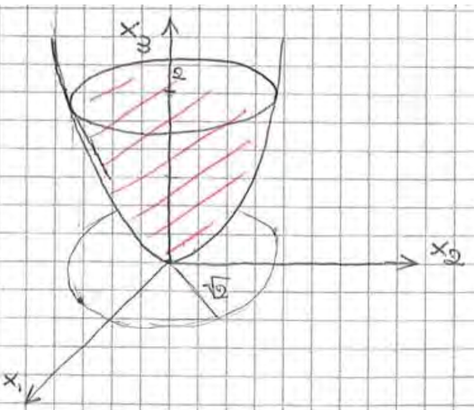
L'integrale triplo si riduce sotto condizioni opportune al calcolo di tre integrali semplici.

Formule di riduzione sul parallelepipedo

$Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$

$f: Q\Rightarrow\mathbb{R}$ continua

$$\iiint_Q f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\right)dx_2\right)dx_3$$



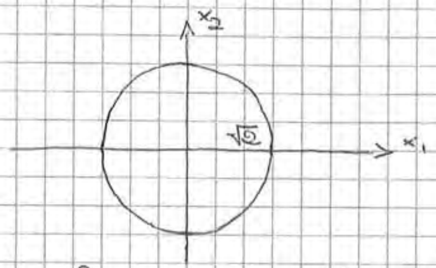
N.B. Si integra sempre su insiemi limitati

$x_3 = x_1^2 + x_2^2$

$x_3 = 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \cancel{3}2$

I fili variano tra: $\iint_C \left[\int_{x_1^2+x_2^2}^{2} (x_1^2+x_2^2)\, dx_3 \right] dx_1\, dx_2 =$

$C = \{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \}$



$$\iint_C (x_1^2+x_2^2)\left(\int_{x_1^2+x_2^2}^{2} dx_3\right) dx_1\, dx_2 = \iint_C (x_1^2+x_2^2)\,[x_3]_{x_1^2+x_2^2}^{2}\, dx_1\, dx_2 = \iint_C (x_1^2+x_2^2)\,[2-(x_1^2+x_2^2)]\, dx_1\, dx_2$$

Lo riscriviamo in coordinate polari:

$\theta \in [0, 2\pi]$

$0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta \\ x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$x_1^2 + x_2^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta = \rho^2$

$\det J(T(\rho,\theta)) = \rho$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\,[2-\rho^2]\,\rho\, d\rho\right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^3 - \rho^5\, d\rho =$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(2 - \frac{8}{6}\right) = 2\pi\,\frac{4}{\cancel{6}\,3} = \frac{4}{3}\pi$$

Per l'integrazione per fili ~~ho~~ risolto quindi prima l'integrale semplice, poi l'integrale doppio.

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 = \varphi_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

$T : U \to V$

$(u_1, u_2, u_3) \quad (x_1, x_2, x_3)$

U é l'insieme dello spazio $u_1 u_2 u_3$ che viene trasformato nell' insieme V dello spazio $x_1 x_2 x_3$.

$$J(T(u_1,u_2,u_3)) = \text{matrice jacobiana della trasformazione} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

$\det J(T(u_1,u_2,u_3)) \neq 0 \quad \forall u_1, u_2, u_3 \in U$

Ho corrispondenza biunivoca.

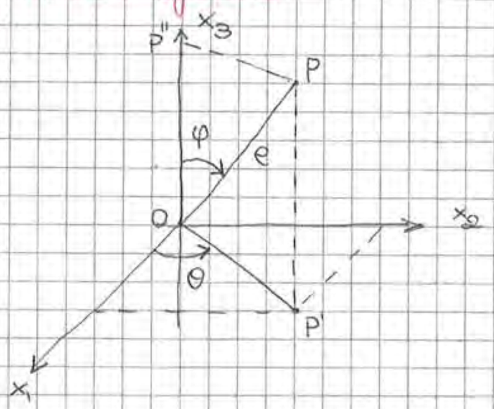
In definitiva si ha la seguente formula:

$$\iiint_V f(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_U f(\varphi_1(u_1,u_2,u_3), \varphi_2(u_1,u_2,u_3), \varphi_3(u_1,u_2,u_3)) \cdot |\det JT(u_1,u_2,u_3)|\, du_1\, du_2\, du_3$$

$\downarrow$

definisce come cambiano i volumi da u_1, u_2, u_3 a x_1, x_2, x_3

Coordinate sferiche



$\rho \geq 0$

$\varphi \in [0, \pi]$

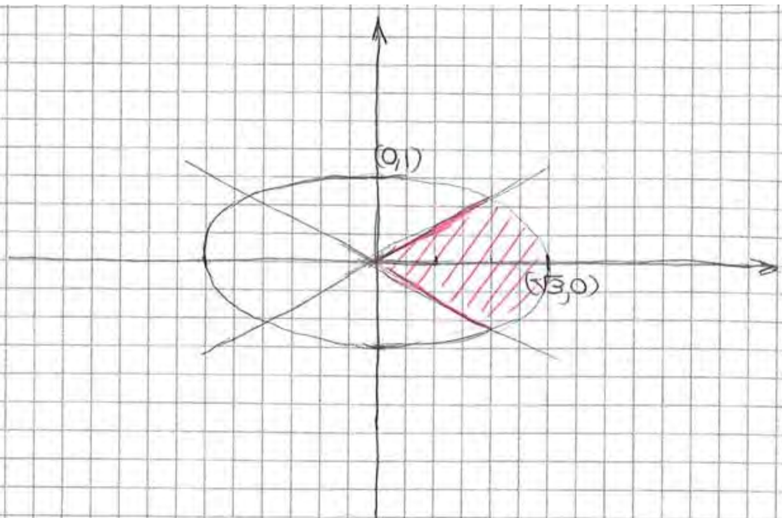
$\theta \in [0, 2\pi]$

$OP' = PP' = OP \sin\varphi$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$J(T(x_1,x_2,x_3)) = \begin{vmatrix} \cos\theta \sin\varphi & -\rho \sin\theta \sin\varphi & \rho \cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \rho \cos\theta \sin\varphi & \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho \sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$|\det J(T(x_1,x_2,x_3))| = \cos\theta \sin\varphi \left[-\rho^2 \sin^2\varphi \cos\theta \right] + \rho \sin\theta \sin\varphi \left[-\rho \sin^2\varphi \sin\theta + - \rho \sin\theta \cos^2\varphi \right] + \rho \cos\theta \cos\varphi \left[0 - \rho \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \right] =$$



La retta sarebbe inclinata de $\pi/4$ ma passando a coordinate ellittiche ⇒ schiaccio l'ellisse per farla diventare un cerchio quindi anche la retta si altera e cambia il suo angolo.

Coordinate ellittiche:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}\rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

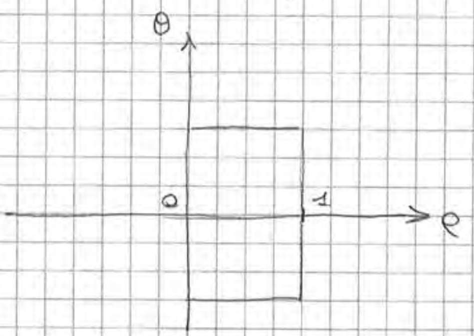
$\rho \in [0,1]$

Devo calcolare come varia θ.

$y = x \Rightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta = \sqrt{3}\rho\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

per la retta $-x = y$ si ottiene $-\pi/3$.



$|J| = ab\rho = \sqrt{3}\rho$

$$\text{Area}(A) = \int_A 1\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 1\,|J|\,d\theta\right)d\rho = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\rho\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{3}\rho\theta\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} d\rho = \int_0^1 \sqrt{3}\rho\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\rho\frac{\pi}{3}\,d\rho = \int_0^1 \sqrt{3}\rho\frac{2\pi}{3}\,d\rho =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{2\pi}{3}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{3}\,\frac{\cancel{2}\pi}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$$

Altro modo al posto delle coordinate ellittiche:

$\frac{x^2}{3} + y^2 \le 1$

$X = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = X^2$

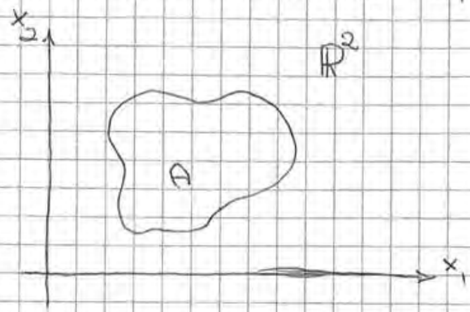
Grandezze fisiche che si calcolano con integrali multipli

24/09/14

A parte le misure di aree e volumi vengono ~~???~~ calcolate altre grandezze.

INTEGRALI DOPPI:

- calcolo di una massa con superficie non costante



A la consideriamo come una lamina di materiale non omogeneo.

Definiamo la grandezza densità $\rho(x_1,x_2)$

$$M(A) = \text{massa della lamina } A = \iint_A \rho(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

- calcolo delle coordinate del baricentro

Sia A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$.

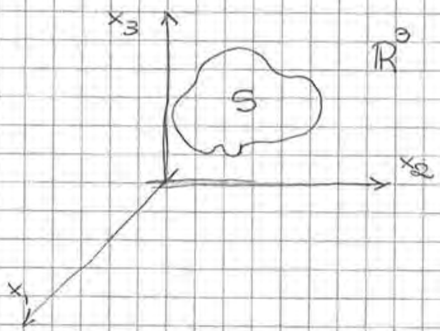
$$(x_1)_G = \frac{1}{M(A)} \iint_A x_1\, \rho(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$(x_2)_G = \frac{1}{M(A)} \iint_A x_2\, \rho(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

Se $\rho(x_1,x_2)=1$, il punto di coordinate $((x_1)_G, (x_2)_G)$ rappresenta il baricentro geometrico di A.

INTEGRALI TRIPLI:

- calcolo di una massa



S è un solido di materiale non omogeneo

$\rho(x_1,x_2,x_3)$ è la funzione densità, è una funzione del punto

$$M(S) = \iiint_S \rho(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

dove $M(S)$ è la massa del solido S.

- calcolo delle coordinate del baricentro

Sia S un insieme misurabile di $\mathbb{R}^3$, sul quale si assume una distribuzione uniforme di massa con densità costante. Il baricentro di A è dato dal punto di coordinate

$$(x_i)_G = \frac{1}{M(S)} \iiint_S x_i\, \rho(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \quad , \quad i = 1,2,3$$

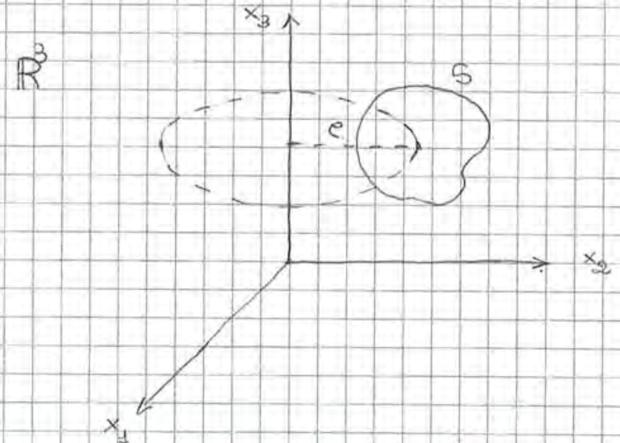
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \rho^5 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

utilizzando la formula di bisezione

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\pi + \frac{\cancel{\operatorname{sen} 4\theta}}{\cancel{4}}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Solidi di rotazione

Consideriamo una figura bidimensionale S, contenuta nel semipiano $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$, nello spazio tridimensionale riferito alle coordinate $x_1 x_2 x_3$.
Facendo ruotare tale semipiano attorno all'asse x_3, la figura S genera un solido V, a cui si dà il nome di solido di rotazione.
La figura S si dice anche sezione meridiana, in quanto intersecando V con un qualunque semipiano uscente dall'asse x_3, la sezione ottenuta risulta sempre uguale a S.
Ovviamente, si possono considerare solidi di rotazione a partire da una sezione meridiana disposta in un semipiano qualunque, assumendo come asse di rotazione la retta che lo delimita.
I coni, i cilindri, le sfere, gli "anelli" (che in geometria si chiamano tori) sono figure di questo tipo.



Teorema di Guldino per i solidi: se V è un solido di rotazione e S la corrispondente sezione meridiana giacente, come sopra convenuto, nel semipiano $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$, vale la seguente formula che consente di ridurre il calcolo del volume del solido di rotazione V al calcolo di un integrale doppio:

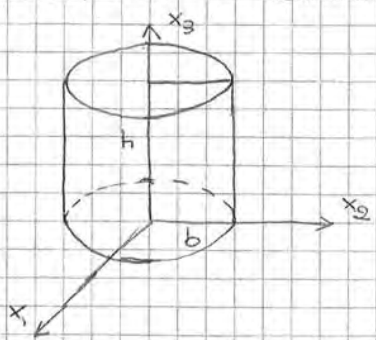
$$\iiint_V dx_1\, dx_2\, dx_3 = 2\pi \iint_S x_2 \, dx_2\, dx_3$$

Dimostrazione: calcolo l'integrale al primo membro passando a coordinate cilindriche. Il solido V si trasforma in un cilindro:

$$V' = \{(\theta, \rho, x_3) : (\rho, x_3) \in S,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

e l'integrale diventa:

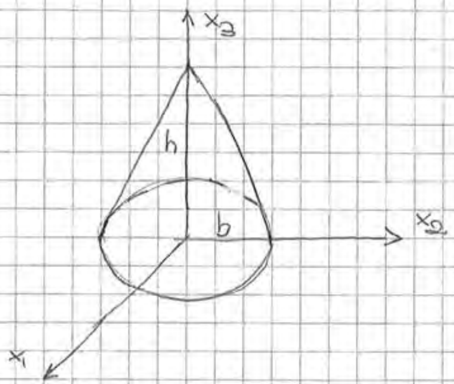
2) consideriamo il cilindro:



Si fa ruotare un rettangolo attorno all'asse ad x_3

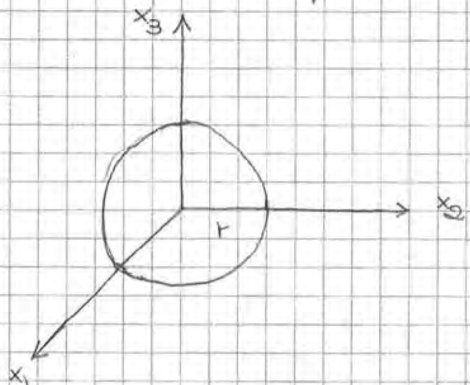
$vol\, C = area(R) \cdot \cancel{b} \neq 2\pi b = 2\pi b^2 h$

3) consideriamo il cono:



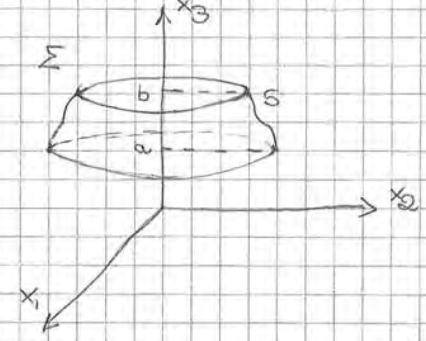
$$\iiint_V dx_1\, dx_2\, dx_3 = \cancel{\pi b^2 \, 2\pi} \frac{bh}{\cancel{2}} \cancel{2\pi} \frac{b}{3} = \frac{\pi b^2 h}{3}$$

4) consideriamo la sfera:



$$vol(S) = 2\pi r \cdot \frac{2}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi^2 r^3$$

5)



$x_2 = f(x_3)$

$f(x_3) \geq 0$

$\forall x_3 \in [a,b]$

Sovrapponiamo cerchi di x_3 sull'intervallo a,b e otteniamo il solido e il suo volume.

Sia Σ il solido ~~f~~ ottenuto facendo ruotare intorno all'asse x_3:

$$S = \{ (x_2, x_3) : a \leq x_3 \leq b \,,\, 0 \leq x_2 \leq f(x_3) \}$$

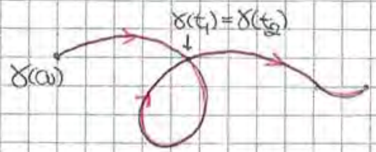
Applichiamo direttamente il teorema di Guldino:

$$vol\, \Sigma = 2\pi \iint_S x_2 \, dx_2\, dx_3 = 2\pi \int_a^b \left(\int_0^{f(x_3)} x_2 \, dx_2 \right) dx_3 = \cancel{2}\pi \int_a^b \left[\frac{x_2^2}{\cancel{2}} \right]_0^{f(x_3)} dx_3 = \pi \int_a^b (f(x_3))^2 d$$

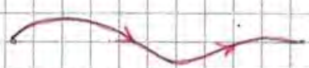
- γ regolare: $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$
- γ semplice: $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in (a,b)$

$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)\right)$

Vettore Tangente a γ

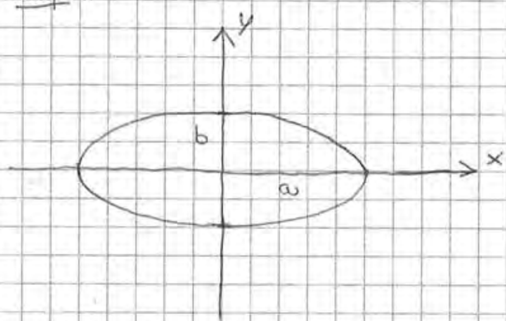


questa curva NON é semplice



Si percorre solo in una direzione, é una curva semplice.

Esempio:



$$\gamma: \begin{cases} x_1(t) = a \cos t \\ x_2(t) = b \sin t \end{cases}$$

se $t \in [0, 2\pi]$, allora la curva é semplice
se $t \in [0, 6\pi]$, faccio 3 giri e non é più semplice perché passo dallo stesso punto 3 volte.

Se la curva é semplice dipende anche dall' intervallo di variazione.

- γ chiusa: $\gamma(a) = \gamma(b)$

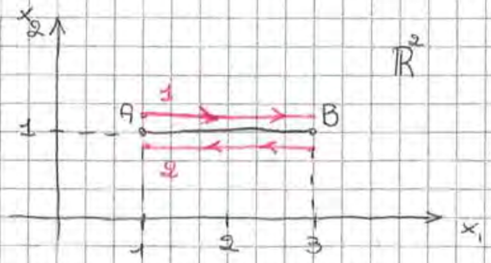
L'ellisse appena disegnato é una curva chiusa.

Lunghezza di una curva

Definizione: sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva semplice e regolare.
Si dice lunghezza della curva il numero reale positivo

$$\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

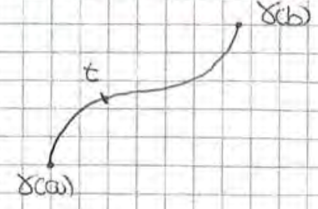
Esempio:



1 e 2 sono due curve diverse ma la lunghezza di AB é la stessa.

La lunghezza di una curva semplice e regolare dipende dal sostegno, non dalla parametrizzazione.

Parametro lunghezza ad arco



Sia t un punto qualunque dell'intervallo $[a,b]$.
L'espressione: $s(t) = \int_a^t \sqrt{(\gamma_1'(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'(\tau))^2}\, d\tau$
rappresenta la distanza percorsa muovendosi lungo la curva a partire dall'estremo iniziale fino al momento in cui il parametro raggiunge il valore t.

Poiché la curva è regolare, si ha:

$$s'(t) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} > 0 \quad \text{per } \forall t \in [a,b]$$

→ di conseguenza la funzione $s(t)$ è invertibile.

Possiamo allora definire una nuova parametrizzazione della curva data ponendo

$$\delta(\sigma) = (\gamma \circ s^{-1})(\sigma) : [0, e_\gamma] \to \mathbb{R}^n$$

Per le note regole del calcolo differenziale, si ottiene $\|\delta'(\sigma)\| = 1 \quad \forall \sigma \in [0, e_\gamma]$
Il parametro σ prende il nome di parametro lunghezza d'arco, e vuol dire percorrere la curva a velocità 1.
Ogni curva ha un proprio parametro lunghezza d'arco.

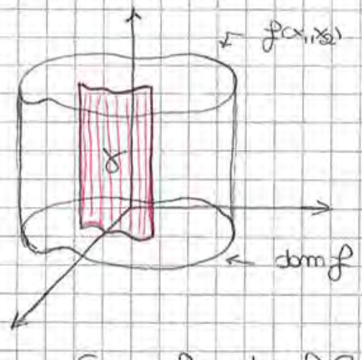
Integrali curvilinei

Sia $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo, e cioè una funzione continua $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il cui dominio contenga il sostegno di γ.
L'integrale curvilineo di f esteso alla curva γ si definisce come:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \underbrace{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}}_{\|\gamma'(t)\|}\, dt$$

$\|\gamma'(t)\|$ vettore tangente in ogni punto alla curva data.

L'integrale curvilineo può essere pensato come:



$f : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$
$(\mathrm{Im}\,\gamma) \subseteq \mathbb{R}^2$

Proposizione: Sia $f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e siano γ, δ due curve regolari semplici con lo stesso sostegno, allora

$$\int_\gamma f\, ds = \int_\delta f\, ds$$

L'integrale quindi non dipende dalla parametrizzazione.

Curva regolare a tratti

γ é una curva regolare a tratti se é continua con derivata prima continua tranne che in un numero finito di punti.

$\gamma \notin C^1$

Posso però pensarla come la somma di 3 curve regolari γ_1, γ_2 e γ_3.

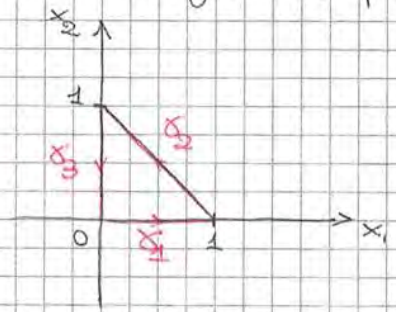
$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds + \int_{\gamma_3} f \, ds$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ curve regolari

Esempio: calcolare $I = \int_\gamma f \, ds$

$f(x_1, x_2) = e^{x_1 + 2x_2}$

T é il triangolo di punti $(0,1), (1,0), \cancel{(1,1)}\ (0,0)$



É quindi dato il sostegno della curva

$$I = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds + \int_{\gamma_3} f \, ds$$

γ_3: possiamo scegliere diverse parametrizzazioni di γ_3,

1) $\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = t \end{cases}$ $\quad t \in [0,1]$

2) $\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -t \end{cases}$ $\quad t \in [-1,0]$

3) $\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 1-t \end{cases}$ $\quad t \in [0,1]$

Scelgo la 1).

$$\int_{\gamma_3} f \, ds = \int_0^1 e^{0+2t} \cdot \sqrt{0^2+1^2} \, dt = \int_0^1 e^{2t} \, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t} dt = \frac{1}{2}[e^{2t}]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

γ_1: $\begin{cases} x_1(t) = t \\ x_2(t) = 0 \end{cases}$ $\quad t \in [0,1]$

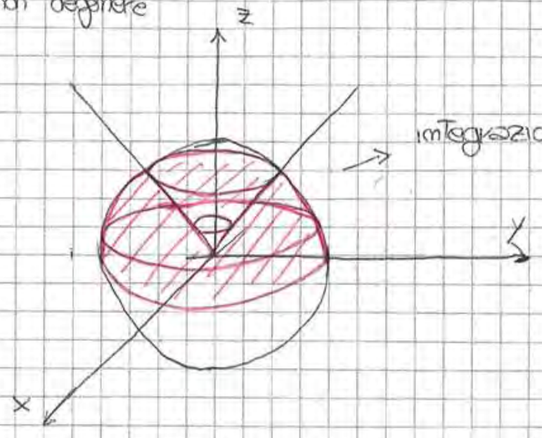
$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_0^1 e^t \sqrt{1+0} \, dt = \int_0^1 e^t \, dt = [e^t]_0^1 = e - 1$$

2) $\int_\Omega z \, dx\, dy\, dz$ $\quad \Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , \; x^2+y^2+z^2 < 4 , \; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \}$

$x^2+y^2+z^2 = 4 \Rightarrow$ sfera di raggio 2

$x^2+y^2-z^2 = 0 \Rightarrow$ cono

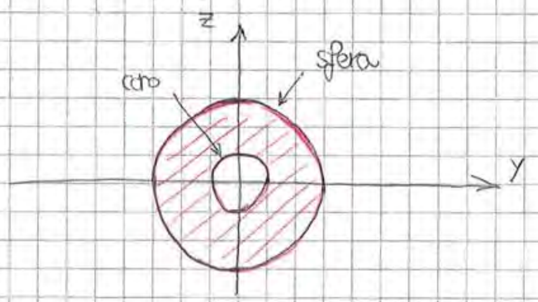
non degenere



Trovo gli estremi per z: $z=0$ e dove c'è la circonferenza sfera $\cap$ cono

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x^2+y^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2}x^2+\cancel{2}y^2=\cancel{4}2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$

$z \in [0, \sqrt{2}]$



$\begin{cases} z=z_0 & \leftarrow \text{piano dello strato} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} & \leftarrow \text{cono} \end{cases}$

$z_0=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z_0^2 = x^2+y^2$

$\Rightarrow$ circonferenza di raggio z_0

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & \Leftarrow \text{sfera} \\ z=z_0 & \Leftarrow \text{piano dello strato} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 4-z_0^2$, circonferenza di raggio $\sqrt{4-z_0^2}$

lo strato allora è: $\{ (x,y) : z^2 \leq x^2+y^2 \leq 4-z^2 \}$

$\int_{strato} z \, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_z^{\sqrt{4-z^2}} z \, \rho \, d\rho \, d\theta$

Integro per strati

$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_D z \, dx\, dy \right) dz = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_z^{\sqrt{4-z^2}} z \, \rho \, d\rho \right) d\theta \right) dz = \int_0^{\sqrt{2}} z \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=z}^{\rho=\sqrt{4-z^2}} d\theta \right) dz =$

$= \int_0^{\sqrt{2}} z \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{4-z^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) d\theta \right) dz = \int_0^{\sqrt{2}} z \, (2-z^2) dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} (2z - z^3) dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta =$

$= 2\pi \cdot \left[z^2 - \frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi (2-1) = 2\pi$

integrali di linea di secondo tipo:

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

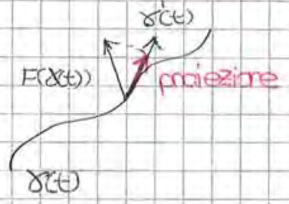
$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$

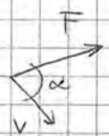
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}$

Posso allora riscrivere l'integrale di linea come:

$$\int_a^b \underbrace{F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}} \cdot \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\ell(\gamma(t))} \, dt$$

integrale curvilineo di prima specie





$F \cdot v = |F| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$

$\|v\| = 1$

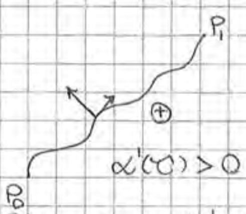
Se pensiamo al campo vettoriale come ad una forza e integro lungo la proiezione della forza lungo quel percorso, ottengo il lavoro necessario per passare da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Osservazione: si può dimostrare che il valore dell'integrale di linea non dipende dalla particolare parametrizzazione adottata per rappresentare la curva, purché la sostituzione del parametro $t = \alpha(\tau)$ sia tale che $\alpha'(\tau) > 0$ (nel caso che $\alpha'(\tau) < 0$, il valore assoluto dell'integrale resta invariato, ma cambia il segno). A questo proposito, si noti la differenza di comportamento rispetto agli integrali curvilinei che invece sono "insensibili" anche al cambiamento del senso di percorrenza.

$\gamma(t) = \gamma(\alpha(\tau))$

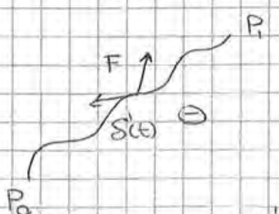
$\uparrow$

$t = \alpha(\tau)$



$\alpha'(\tau) > 0$

il valore non cambia



$\alpha'(\tau) < 0$

l'integrale cambia segno

$g(x,y) = y \log x$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} = f_1$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \log x = f_2$ $\Rightarrow F = \nabla g \quad \forall x \in \text{dom} f$

Abbiamo dimostrato quindi che g é un potenziale di F, ma non é l'un

$\tilde{g}(x,y) = y \log x + K \quad , K \in \mathbb{R}$

$\tilde{g}$ é un altro potenziale del campo vettoriale F.

Teorema: se $F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é conservativo su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$, e $g(x)$ é un suo potenziale su A, allora anche la funzione $\varphi(x) = g(x) + K$ é un potenziale di $F(x)$ su A, per ogni scelta della costante reale K.

Si dimostra semplicemente tenendo conto che la derivata di una costante é nulla.

Teorema: sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : A \to$ un campo conservativo di classe C^1. Allora: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, per ogni x e per ogni coppia di indici $(i,j) \in \{1, \dots, n\}$ tali che $i \neq j$.

Dimostrazione: F conservativo allora $\exists g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla g(x) = F(x)$ $\forall x \in A$.

F é C^1, quindi $\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i \in C^1 \quad \forall i \Rightarrow g \in C^2$

se g é C^2 vuol dire che ~~tre~~ é derivabile con derivate seconde continue.

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot f_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$$

Per il teorema di Schwarz, se $g \in C^2$, allora:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$$

cioé: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ su A

In $\mathbb{R}^2$: se $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad F = (f_1, f_2)$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$

In $\mathbb{R}^3$: se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad F = (f_1, f_2, f_3)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$$

e $\gamma(b) = P_1$, si ha: $\int_\gamma F \cdot t = g(P_1) - g(P_0)$

N.B. il lavoro dipende da posizione iniziale e posizione finale.

Dimostrazione: ci si limita, per semplicità, al caso di $\mathbb{R}^2$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $g(\gamma(\cdot)): [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione di una variabile

$$\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) = \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

→ sarebbe la formula di derivazione composta

$$\int_\gamma F \cdot \bar{t} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t))\, dt =$$

$$= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = g(P_1) - g(P_0)$$

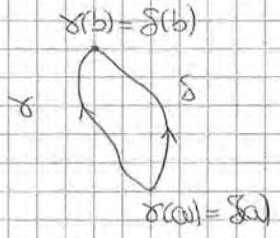
$\int_\gamma F \cdot t = g(P_1) - g(P_0)$ → la formula generalizza la formula di Torricelli Barrow.

Da questo teorema si deducono 2 importanti corollari.

1° Corollario: se F è un campo conservativo di $\mathbb{R}^n$, e se γ, δ sono delle curve regolari, aventi entrambe P_0 come primo estremo e P_1 come secondo estremo (nell'ordine), allora $\int_\gamma F \cdot t = \int_\delta F \cdot t$

Si può dire quindi che in un campo di forze conservativo, il lavoro compiuto per trasferire una massa dalla posizione P_0 alla posizione P_1 non dipende dal percorso seguito.

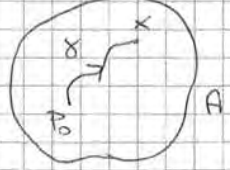
2° Corollario



2° Corollario: sia F un campo conservativo di $\mathbb{R}^n$, e sia γ una qualunque curva regolare chiusa. Allora: $\oint_\gamma F t = 0$

L'integrale di linea esteso ad una curva chiusa prende anche il nome di circuitazione.

Dimostrazione:



Dato che A è connesso, $\exists\ \gamma$ con punto iniziale P_0 e punto finale x.

Allora: $\int_\gamma F\bar{t} = f(x) - f(P_0) = g(x) - g(P_0)$

Ricavo: $f(x) = g(x) + \underbrace{f(P_0) + g(P_0)}_{K \in \mathbb{R}}$

In $\int_\gamma F\bar{t}$, $\bar{t}$ non è variabile d'integrazione ma la direzione tangente

Condizioni per cui il campo è conservativo

Teorema: sia A un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$. Sia $F(x): A \to \mathbb{R}$ un campo vettoriale continuo. Supponiamo che per ogni coppia di punti $P_0, P_1 \in A$, e per ogni coppia di curve regolari a tratti γ, δ aventi entrambe P_0 come primo estremo e P_1 come secondo estremo (nell'ordine), si abbia $\int_\gamma F\bar{t} = \int_\delta F \cdot t$

L'ipotesi del teorema può anche essere espressa dicendo che $\int_\gamma F \cdot t = 0$ lungo qualunque curva γ chiusa e regolare il cui sostegno sia contenuto in A.

1. Ipotesi: 1. F conservativo in A

2. $\forall\ \gamma, \delta$ curve regolari con gli stessi estremi tali che $\operatorname{Im}\gamma \subseteq A$, $\operatorname{Im}\delta \subseteq A$

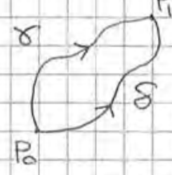
$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot \bar{t} = \int_\delta F \cdot \bar{t}$$

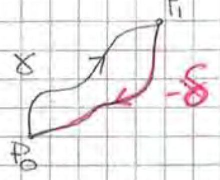
3. per ogni curva chiusa γ, $\operatorname{Im}\gamma \subseteq A$

$$\Rightarrow \oint_\gamma F \cdot \bar{t} = 0$$

Dimostrazione: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$

$3 \Rightarrow 2$





$\gamma \cup (-\delta) \Rightarrow$ curva chiusa, regolare a tratti

$$\oint_{\gamma \cup (-\delta)} F\bar{t} = 0 \Rightarrow = \int_\gamma F\bar{t} + \int_{-\delta} F\bar{t} = \int_\gamma F \cdot \bar{t} - \int_\delta F\bar{t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F\bar{t} = \int_\delta F\bar{t}$$

$\gamma_2: \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = t\bar{y} \end{cases}$ $\quad t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_2} \underbrace{(2\bar{x}t^2\bar{y}^2 - t^3\bar{y}^3,\ 2\bar{x}^2 t\bar{y} - 3\bar{x}t^2\bar{y}^2)}_{F(\gamma_2(t))} \cdot \underbrace{(0, \bar{y})}_{\gamma_2'(t)} = \int_{\gamma_2} [2\bar{x}^2 t\bar{y}^2 - 3\bar{x}t^2\bar{y}^3]\, dt =$$

$$= \left[\cancel{2}\bar{x}^2\bar{y}^2\frac{t^2}{\cancel{2}} - \cancel{3}\bar{x}\bar{y}^3\frac{t^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 = \bar{x}^2\bar{y}^2 - \bar{x}\bar{y}^3$$

$g(x,y) = x^2y^2 - xy^3$

Verifico sia davvero un potenziale.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy^2 - y^3 = f_1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2y - 3xy^2 = f_2$

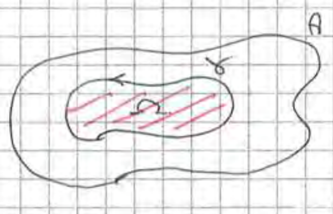
Teorema di Green

Def Teorema: F conservativo di classe $C^2 \Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Vale il viceversa?

Consideriamo $\mathbb{R}^2$.

Definizione: $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$ (considerato) aperto e connesso; si dice semplicemente connesso se per ogni curva γ semplice, regolare e chiusa con $\underbrace{Im}_{\text{sostegno } \Gamma}\gamma \subseteq A$, e' insieme Ω circoscritto da γ è tale che $\Omega \subseteq A$



$\Omega \subseteq A$

$P \notin A$

La corona circolare non è semplicemente connessa.

Teorema di Green: sia $\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare, semplice e chiusa; sia Ω la regione aperta del piano delimitata da γ e sia Γ il suo sostegno. Supponiamo che γ sia parametrizzata in modo che il senso di percorrenza sia quello antiorario. Sia inoltre $F(x_1,x_2) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$ un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ di classe C^1, definito su un aperto A tale che $K = \Omega \cup \Gamma \subset A$.

Vale la formula:

$$\iint_K 1 \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial K} F \cdot \bar{t}$$

∂K = bordo di K $\Rightarrow$ (somma de γ e C)

$$C = \begin{cases} c_1(\theta) = \theta \cos\theta \\ c_2(\theta) = \theta \,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \rho = \theta$$

$C = (c_1, c_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

Im C è la spirale di Archimede.

$$\int_C F \cdot \bar{t} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\theta \,\text{sen}\,\theta, \frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)}_{F(\rho,\theta) \;\; \gamma(t)} \cdot \underbrace{(\cos\theta - \theta \sin\theta, \,\text{sen}\,\theta + \theta\cos\theta)}_{\gamma'(t)} \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cancel{-\frac{1}{2}\theta \,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \frac{1}{2}\theta^2 \sin^2\theta + \cancel{\frac{1}{2}\theta\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \frac{1}{2}\theta^2\cos^2\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\theta^2 \, d\theta = \left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8\pi^3}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}\pi^3$$

Segmento γ: $\begin{cases} \gamma_1(t) = -t \\ \gamma_2(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [-2\pi, 0]$

$$\int_{-2\pi\,\gamma}^{0} F\bar{t} = \int_{-2\pi}^{0} \left(+\cancel{\frac{1}{2}\theta}\,0, \cancel{-\frac{1}{2}t}\,0\right)(-1, 0) = \cancel{\int_{-2\pi}^{0} -\frac{1}{2}t \, dt = -\left[t^2\right]_{-2\pi}^{0} = -\left[0 - (4\pi^2)\right] = 4\pi^2} \; 0$$

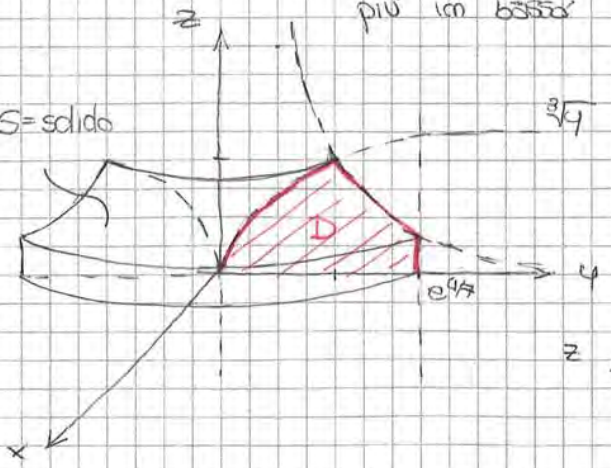
$$\int_{\partial K} F\bar{t} = \frac{4}{3}\pi^3$$

ESERCITAZIONE 31/10/14

1) Volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse z di:

$$D = \left\{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \cancel{\min}\; z \le \min\left\{\sqrt[3]{y}, \frac{1}{y^2}\right\}, \; 0 \le y \le e^{4/7} \right\}$$

$\downarrow$ rappresento entrambe le funzioni e scelgo quella che sta più in basso

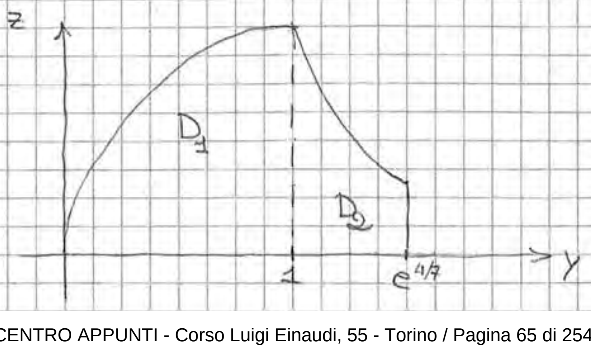


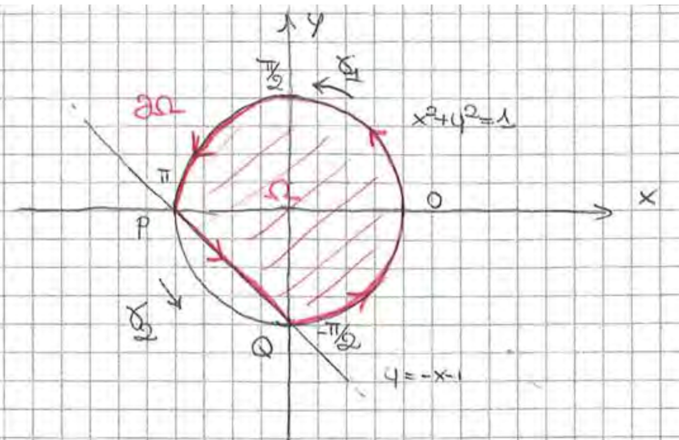
$V = \int_S dx\,dy\,dz =$

$=$ applico il teorema di Guldino $=$

$= 2\pi \int_D y \, dy\,dz$

Spezzo per verticale il dominio D:





$$\int_{t_1}^{t_2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$\gamma(t)$ é composto da 2 spezzate, quindi

$$= \int_{\gamma_1} F\,d\vec{P} + \int_{\gamma_2} F\,d\vec{P}$$

Parametrizzo singolarmente γ_1 e γ_2.

Devo percorrere la curva in senso antiorario perché se cambio il verso cambia il segno dell'integrale.

$$\gamma_1: \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$r = 1$

γ_1 é un pezzo di circonferenza

$$\int_{\gamma_1} F\,dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (5\cos t,\ 8\sin^2 t + 2)(-\sin t, \cos t)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi} (-5\sin t\cos t + 8\sin^3 t\cos t + 2\cos t)\, dt =$$

$$= \left[+5\frac{\cos^2 t}{2} + 8\frac{\sin^4 t}{4} + 2\sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{2} \cancel{+(2-2)} = \frac{5}{2}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = -1 + t(+1) = -1 + t \\ y = 0 + t(-1) = -t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

γ_2 é un segmento.

La parametrizzazione di un segmento é data da: $PQ = \overset{\text{partenza}}{P} + t(Q-P)$ $t \in [0,$

P $(-1,0)$

Q $(0,-1)$

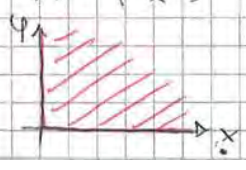
$$\int_{\gamma_2} F\,dP = \int_0^1 (-5+5t,\ -8t^3+2)\cdot(+1,-1) = \int_0^1 (-5+5t+8t^3-2)\,dt = \int_0^1 (8t^3+5t-7)\,dt =$$

$$= \left[8\frac{t^4}{4} + 5\frac{t^2}{2} - 7t \right]_0^1 = 2 + \frac{5}{2} - 7 = \frac{5}{2} - 5$$

$$\int_{\partial\Omega} F\,dP = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5 = \frac{10}{2} - 5 = 0$$

b) Calcolo di potenziale

$$F(x,y) = \left(\frac{2y}{x},\ 2\log(xy) \mp 1\right) \quad \text{su} \quad \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}}_{\text{insieme in cui sto considerando la funzio}}$$



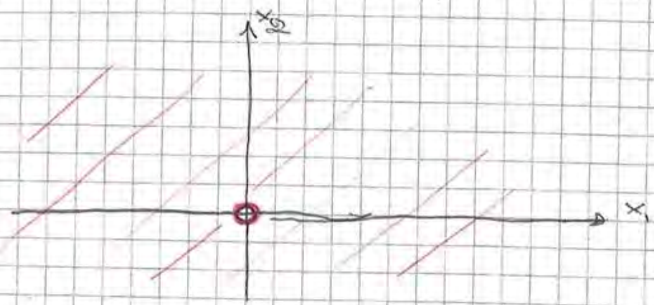
L'insieme rappresenta tutto il 1° quadrante, é semplicemente connesso.

Osservazione: il fatto che A è semplicemente connesso non è condizione necessaria
ci sono campi conservativi che hanno dominio non semplicemente connesso.

Esempio: 1) $F(x_1,x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2} , \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2} \right)$

$$\text{dom}F = \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$$

il dominio non è semplicemente connesso



$g(x_1,x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2)$

$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}$, $\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}$

g è un potenziale di F anche se l'insieme non è semplicemente connesso

2) esempio di un campo vettoriale tale che $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$, ma che non è conservativo

$F(x_1,x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} , +\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \right)$

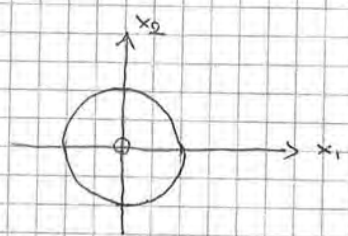
$\text{dom}F = \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{-(x_1^2+x_2^2) - (-x_2)2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{-x_1^2 - x_2^2 + 2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{+(x_1^2+x_2^2) - x_1(2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{+x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

La condizione sulle derivate è soddisfatta. Per mostrare che F non è conservativo vedo che: $\exists \gamma : \oint F t \neq 0$.

$\gamma : \begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$



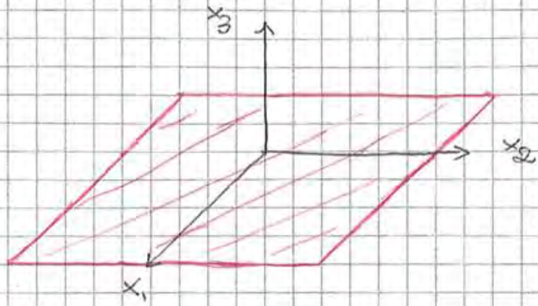
Ho preso una curva che contiene lo zero.

$$\int_\gamma F t = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{1} , \frac{\cos t}{1} \right) (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} +\sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi \neq 0$$

Questo ci mostra che il campo non è conservativo sul dominio di F.
Il campo non è semplicemente connesso, e non si trova un potenziale che soddisfi tutto il dominio.

La superficie non presenta punti di autointersezione.

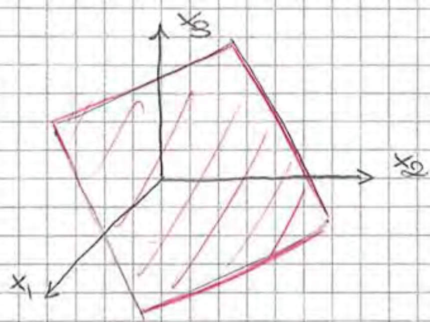
Esempi: 1) $\sigma(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$



$x_3 = 0 \quad \forall x_1, x_2$

La superficie è allora il piano $x_1 x_2$.

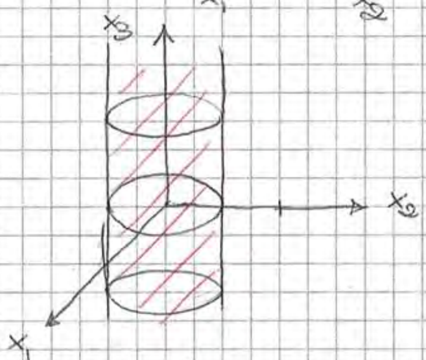
2) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$



$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}(3 - u_1 - u_2) \end{cases}$$

3) $\sigma : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(u_1, u_2) = (\underbrace{2\cos u_1}_{x_1}, \underbrace{2 \operatorname{sen} u_1}_{x_2}, u_2)$



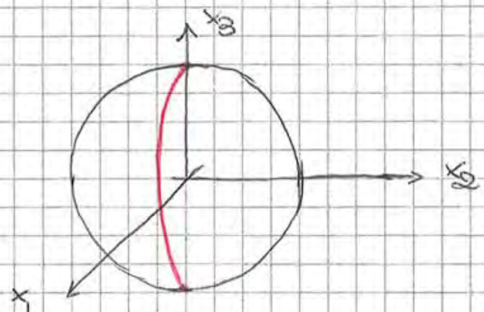
$x_1^2 + x_2^2 = 4$ in $\mathbb{R}^3$

È l'equazione parametrica di un cilindro.

4) $\sigma(\varphi, \vartheta) = (\sin\varphi \cos\vartheta, \sin\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \cos\varphi)$

$\varphi \in [0, \pi]$

$\vartheta \in (0, 2\pi)$



Avendo preso l'intervallo aperto, la superficie è tutta la sfera tranne un meridiano.

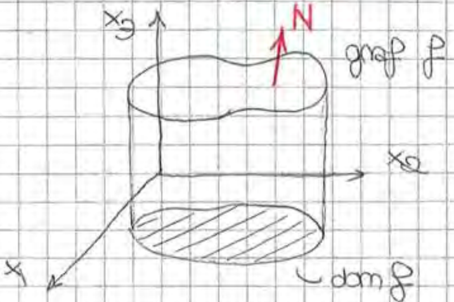
La superficie definita da:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 = \sigma_1(x_1, x_2) \\ x_2 = u_2 = \sigma_2(x_1, x_2) \\ x_3 = f(u_1, u_2) = \sigma_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

con $(u_1, u_2) \in A$ é regolare. Il suo sostegno coincide con la f il grafico della funzione f. Coincidono anche, in ogni punto, il piano tangente al grafico di f, e il piano tangente alla superficie.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_3 = f(x_1, x_2)$



Se dom f é aperto, σ é una superficie.

Verifichiamo la regolarità:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

f deve essere derivabile e il rango della matrice deve essere di ordine 2 $\Rightarrow \sigma$ é regolare.

Vogliamo ora trovare il vettore normale:

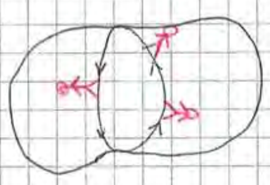
$$N(\sigma(u_1, u_2)) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & \partial f/\partial u_1 \\ 0 & 1 & \partial f/\partial u_2 \end{vmatrix}$$

Trovo il determinante; sarà un determinante formale.

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}, -\frac{\partial f}{\partial u_2}, 1 \right)$$

N sarà allora orientato verso le x_3 positive.

Il verso del vettore normale determina l'orientamento della superfici



Orientabilità, prendo sull'insieme un qualsiasi cammino chiuso. Parto da un punto e lo percorro interamente. Tornato al punto di partenza devo essere nella stessa posizione.

Esempio di una superficie non orientabile é il nastro di Moebius.

Le superfici regolari sono sempre orientabili, cioé sono sempre per

θ, x_3 sono i parametri che descrivono la superficie.

$A = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$(\sigma \cdot \gamma) \Rightarrow$ curva in $\mathbb{R}^3$ semplice, chiusa e regolare a tratti.

Per indicare una calotta useremo una notazione semplificata $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$, e per indicare il suo bordo scriveremo $(\partial\sigma)(t)$.

$\Omega \cup (\partial\Omega) = \text{Im}\,\gamma$

Definizione: l'integrale superficiale di f esteso alla calotta $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ si definisce come l'integrale doppio:

$$\int_\sigma f \, dS = \iint_K f(\sigma_1(u_1,u_2), \sigma_2(u_1,u_2), \sigma_3(u_1,u_2)) \cdot \| N(\sigma(u_1,u_2)) \| \, du_1 \, du_2$$

descrive la forma della superficie

Esempio:

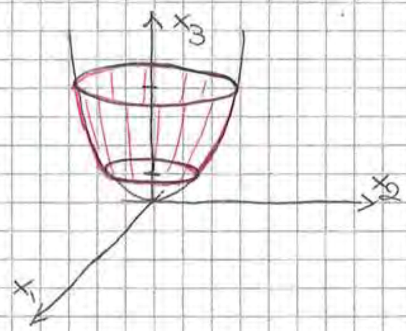
1) Lamina

$\rho(x_1, x_2, x_3)$

$M(\sigma) = \iint_S \rho \, dS$

2) Σ (sigma) $= \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / \ x_3 \leq x_1^2 + x_2^2, \ x_3 \in [1,4] \}$

$\iint_\Sigma 1 \, dS$, con questo particolare integrale ottengo l'area della calotta



$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \qquad 1 \leq x_3 \leq 4$$

É un paraboloide.

$$N(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1 & 2x_2 \end{vmatrix} = (-2x_1, -2x_2, 1)$$

$$\| N(\sigma(u_1,u_2,u_3)) \| = \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2 + 1}$$

L'area $\Sigma = \iint_C \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \, dx_1 \, dx_2$

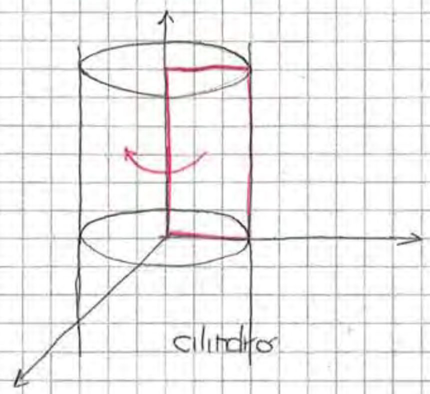
C sarà l'insieme dove andiamo a prendere x_1, x_2.

$(x_1, x_2) \in C$

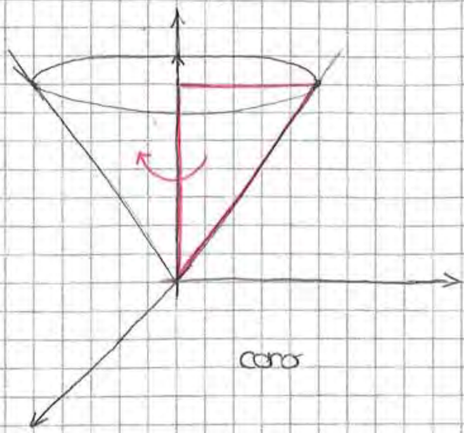
Superfici di rotazione

Esempi:

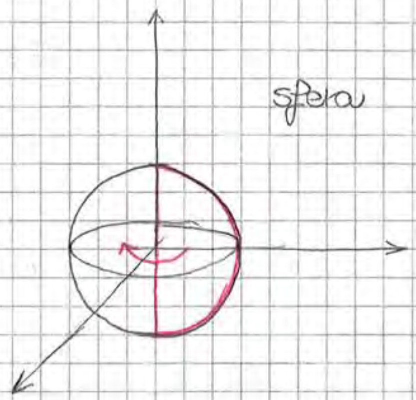
1)



2)

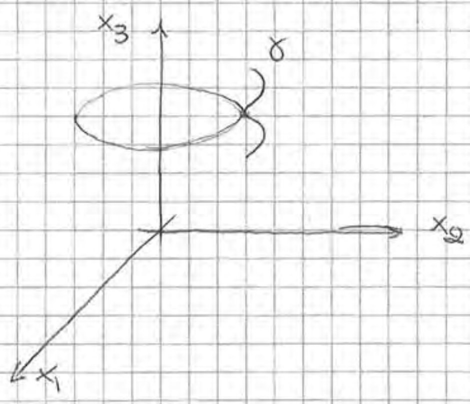


3)



Possono essere tutte superfici di rotazione.

Sia $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare.



$\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$

$$\sigma : \begin{cases} x_1(t) = \gamma_2(t) \cos\theta \\ x_2(t) = \gamma_2(t) \operatorname{sen}\theta \\ x_3(t) = \gamma_3(t) \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$
$t \in [a,b]$

Definiamo baricentro di γ il punto di coordinate:

$$(x_G)_i = \frac{1}{\ell_\gamma} \int_\gamma x_i \, ds$$

$i = 1,2,3$

La superficie che si ottiene facendo ruotare il sostegno di γ attorno all'asse x_3 di un giro completo si dice superficie di rotazione.
La curva $\gamma(t)$ si dice anche la sezione meridiana della superficie.

Teorema di Guldino per le superfici: l'area S della superficie di rotazione generata da $\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ è data da:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 254

ESERCITAZIONE

07/11/14

1) $F(x,y) = (5x + Ky^4, 8xy^3 + 2)$

Determinare il K reale tale che il campo sia conservativo nel proprio dominio e per tale K calcolare il potenziale $g(x,y)$ tale che $g(0,0) = 3$.

Se F è irrotazionale su un insieme semplicemente connesso, allora F è conservativo.

Irrotazionale vuol dire che il $\text{rot} F = 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$

$f_2(x,y) = 8xy^3 + 2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = 8y^3$

$f_1(x,y) = 5x + Ky^4 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4Ky^3$

$8y^3 - 4Ky^3 = 0 \Rightarrow 8 - 4K = 0 \Rightarrow K = 2$

$\tilde{F}(x,y) = (5x + 2y^4, 8xy^3 + 2)$ è conservativo perché irrotazionale su $\mathbb{R}^2$, e $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso (non ha buchi).

La definizione di conservabilità è data da: $\exists g \,/\, \nabla g = \tilde{F}(x,y)$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 5x + 2y^4$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 8xy^3 + 2$

$g(x,y) = \int 5x + 2y^4 \, dx = 5\frac{x^2}{2} + 2xy^4 + \varphi(y)$

Da questo potenziale ottenuto calcolo: $\frac{\partial g}{\partial y} = 8xy^3 + \varphi'(y)$

Ma sappiamo dall'ipotesi di conservabilità che: $\frac{\partial g}{\partial y} = 8xy^3 + 2$

$\Rightarrow 8xy^3 + \varphi'(y) = 8xy^3 + 2 \Rightarrow \varphi'(y) = 2 \Rightarrow \varphi(y) = \int 2 \, dy = 2y + C$

Sostituisco nel potenziale:

$g(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy^4 + 2y + C$

Ora cerco la $g(x,y) \,/\, g(0,0) = 3$

$\begin{cases} g(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy^4 + 2y + C \\ g(0,0) = 3 \end{cases} \Rightarrow C = 3$

$\tilde{g}(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy^4 + 2y + 3$

2) $F(x,y) = (5x + 2y^4, 8xy^3 + 2)$

Cerco un potenziale.

Prendo due punti P_0 (dove F è conservativo) e P_1.

$P_0 = (0,0)$

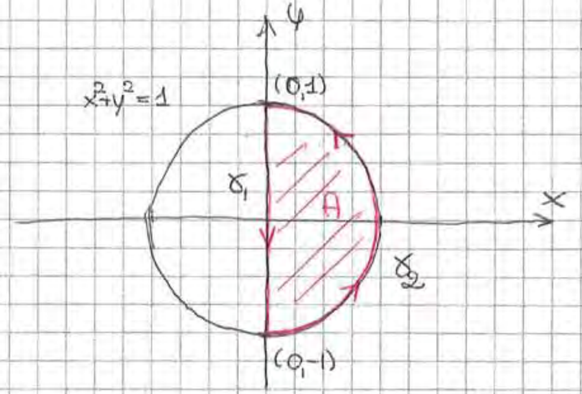
$P_1 = (x,y)$

3) Teorema di Green

Calcolare $\int_\gamma F\,dP$.

$F = (xy,\ xy^2)$

γ é la frontiera di $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2+y^2<1,\ x>0\}$ percorsa in senso antiorario.



Con il metodo classico dovrei applicare:

$\int_\gamma F\,dP = \int_{\gamma_1} F\,dP_1 + \int_{\gamma_2} F\,dP_2$, γ é l' unione di 2 spezzate.

Oppure posso applicare il Teorema di Green:

$$\int_\gamma F\,dP = \iint_A \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{\text{rot } F} dx\,dy$$

Applico il teorema se la curva ha troppi tratti oppure se il campo é complicato.

$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = y^2 - x$

Scrivo l'integrale in coordinate polari:

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$\rho \in [0,1]$

$\theta \in \cancel{[0,2\pi]}\ [-\pi/2, \pi/2]$

$$\int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta - \rho\cos\theta)\,\rho\,d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\rho^3\,\mathrm{sen}^2\theta - \rho^2\cos\theta)\,d\theta \right) d\rho =$$

N.B. $\int \mathrm{sen}^2\theta = \int (1-\cos^2\theta)\,d\theta = \theta - \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\theta) =$

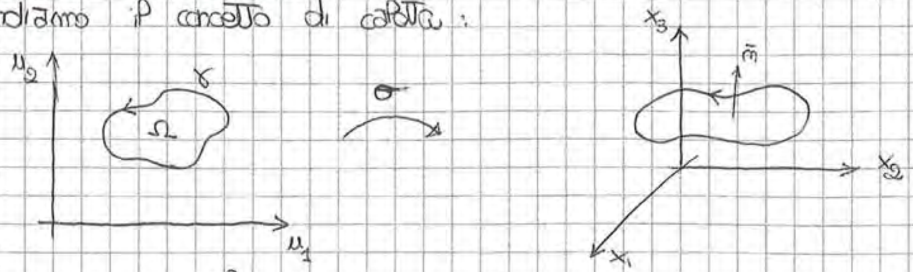
$= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\theta)$

$$= \int_0^1 \left[\rho^3\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\theta)\right) - \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\rho = \int_0^1 \rho^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \rho^2 - \left[\rho^3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \rho^2(+1)\right] d\rho =$$

INTEGRALE DI FLUSSO

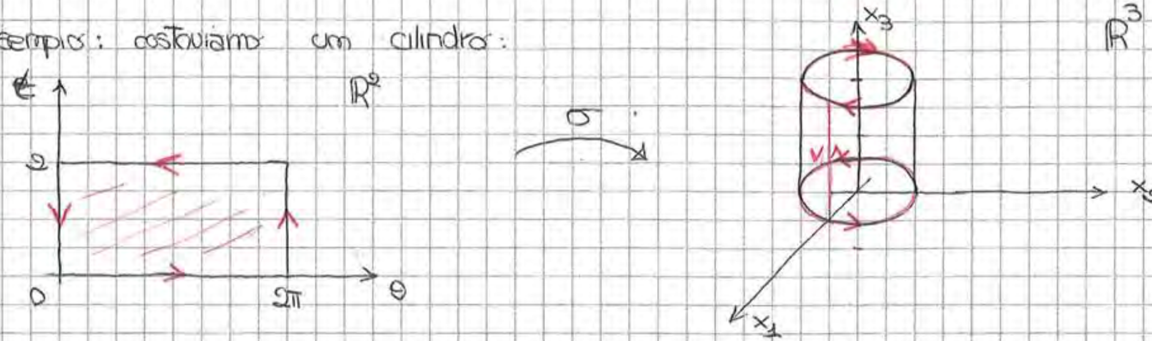
13/11/14

Riprendiamo il concetto di calotta:



$\sigma : \Omega \cup \gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$

Esempio: costruiamo un cilindro:



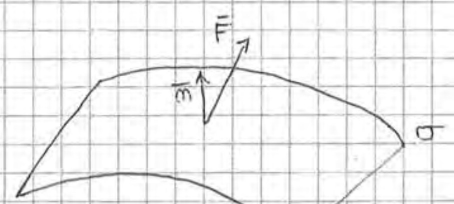
$$\sigma : \begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ x_2 = \operatorname{sen}\theta \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ t \in [0, 2] \end{array}$$

N.B. La sfera sarà una superficie che non ha bordo.

Definizione: si definisce integrale di flusso del campo vettoriale continuo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ attraverso la calotta $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'integrale:

$$\iint_\sigma F \bar{m} = \iint_K F(\sigma(u_1, u_2)) \cdot N(\sigma(u_1, u_2)) \, du_1 \, du_2 =$$

$$= \iint_K F(\sigma(u_1, u_2)) \cdot \underbrace{\frac{N(\sigma(u_1, u_2))}{\| N(\sigma(u_1, u_2)) \|}}_{\bar{m}} \| N(\sigma(u_1, u_2)) \| \, du_1 \, du_2$$



flusso di F attraverso la calotta σ

Cambiando la parametrizzazione può cambiare il segno dell'integrale.

Definendo T = cambio di parametro, se:

- $\det(JT) > 0 \Rightarrow$ il segno dell'integrale non cambia
- $\det(JT) < 0 \Rightarrow \iint_K F \bar{m} = -\iint_K F \bar{m}$

$K = T\check{K}$

Teorema di Stokes

Teorema: Sia V un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$, e sia $F: V \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Sia σ una calotta di $\mathbb{R}^3$, con sostegno contenuto in V. Allora:

$$\int_{\partial\sigma} F\,\bar{t} = \int_{\sigma} \mathrm{rot}\, F\, \bar{n}$$

No dimostrazione.

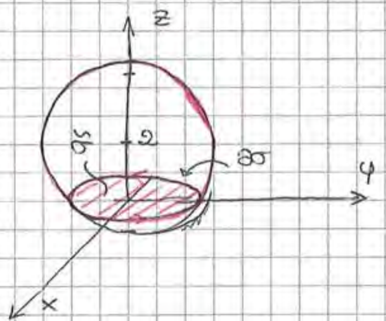
Se $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale continuo, e se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1 tale che $G = \mathrm{rot}\, F$, si dice che F è un potenziale - vettore di G. Un'implicazione del Teorema di Stokes è che se G ammette un potenziale - vettore, allora gli integrali di flusso di G non dipendono dalla forma della calotta sulla quale vengono calcolati, ma solo dalla forma del suo bordo.

Esempio:

1) $I = \int_{\sigma} \mathrm{rot}\, F \cdot \bar{n}$

$F = (y^2 \cos xz,\ x^3 e^{yz},\ e^{-xyz})$

$\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-2)^2 = 8,\ z \geq 0\}$



$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2 = 8 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4 = 8 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z=0 \end{cases}$$

$\tilde{\sigma} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4,\ z=0\}$

$I = \int_{\partial\sigma} F\,\bar{t} = \int_{\tilde{\sigma}} \mathrm{rot}\, F\, \bar{n}$

$\bar{n}$ = versore normale $= (0,0,1)$

$$\mathrm{rot}\, F = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2\cos xz & x^3 e^{yz} & e^{-xyz} \end{vmatrix} = \left(e^{-xyz}(-xz) - x^3 y\, e^{yz},\ +yz\, e^{-xyz} \mp xy^2 \sin xz,\ 3x^2 e^{yz} - 2y\cos xz \right)$$

$$I = \iint_{\tilde{\sigma}} (3x^2 e^{yz} - 2y\cos xz)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\tilde{\sigma}} (3x^2 - 2y)\, dx\, dy$$

$\mathrm{rot}\, F \cdot \bar{n}\Big|_{\tilde{\sigma}} = 3x^2 - 2y$

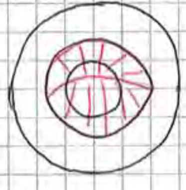
$\tilde{\sigma}: z=0$.

Campi conservativi in $\mathbb{R}^3$

Un sottoinsieme V di $\mathbb{R}^3$ aperto e connesso, si dice semplicemente connesso se data una qualunque curva δ chiusa, semplice e regolare il cui sostegno sia contenuto in V, esiste una calotta regolare il cui bordo coincide con δ e il cui sostegno sia tutto contenuto in V.

Esempi:

1) la sfera é semplicemente connessa
2) la corona circolare é semplicemente connessa.



3) $\mathbb{R}^3 / \{\overset{\text{retta}}{(0,0)}\}$ non é semplicemente connesso

4) il toro non é semplicemente connesso

Teorema: sia $F(x) = (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))$ un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$, definito su un insieme semplicemente connesso V, e di classe C^1. Se $\text{rot}\,F = 0$, cioé se F é irrotazionale su V, allora F é conservativo.

Dimostrazione: calcoliamo per ogni γ semplice, regolare e chiusa $\oint_\gamma F\bar{t}$.

$$\oint_\gamma F\bar{t} \;\; \underset{\downarrow}{=} \;\; \int_\sigma \text{rot}\,F\,\bar{n} = 0$$

V semplicemente connesso, $\exists\, \sigma$ t.c. $\partial\sigma = \gamma$

σ sarà la calotta con bordo γ.

Se questo vale per tutte le curve, allora F é conservativo.

La condizione $\text{rot}\,F = 0$ diventa sufficiente in caso il dominio sia semplicemente connesso.

Esercizio

1) $F(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2}, e^z, ye^z\right)$

$\gamma(t) = (3+\cos t, \sin t, 3t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\int_\gamma F\bar{t}$

Esempio:

1) $F(x_1,x_2,x_3) = (x_2, x_1x_2 \cos x_3, x_3)$

$\operatorname{div} F = \{0 + x_1 \cos x_3 + 1\}$

Teorema di Gauss (o della divergenza)

Teorema: sia V una regione di $\mathbb{R}^3$ delimitata dall'unione di un numero finito di calotte σ_i $(i=1,\dots,N)$ i cui sostegni siano sovrapposti al più per parti dei loro bordi, e che siano tutte parametrizzate in modo che i loro vettori normali siano orientati verso l'esterno di V. Sia F un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito su un aperto contenente V e di classe C^1.

Vale allora la seguente formula:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} F\,\bar{n} = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx_1 dx_2 dx_3$$

Il teorema di Gauss riduce il calcolo di un integrale di flusso al calcolo di un integrale triplo.

L'integrale a primo membro può essere interpretato come una misura del flusso del campo vettoriale F "uscente" dalla regione A.

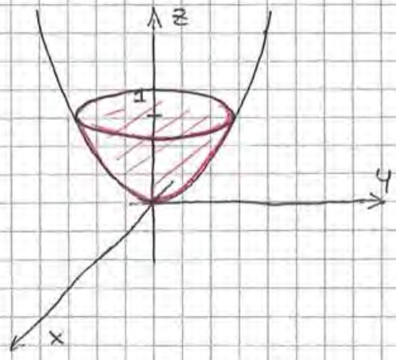
Se il campo F é solenoidale (cioé a divergenza nulla) su V, allora il Teorema di Gauss afferma che il flusso complessivamente uscente é nullo.

Esempio:

$F(x,y,z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z < 1\}$

Calcolare il flusso di F uscente da V.



$$\int_{\partial V} F\,\bar{n} = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$$

$$\operatorname{div} F = y^2 + z^2 + x^2$$

$$\iiint_V (y^2+z^2+x^2)\, dx\, dy\, dz$$

Passo a coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ t \in [\rho^2, 1] \end{matrix} \qquad \det(JT) = \rho$$

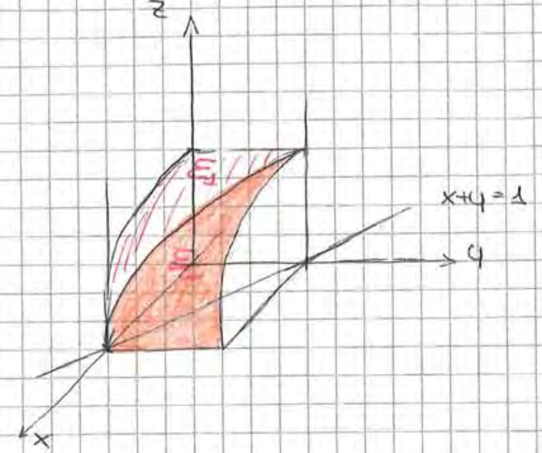
$\hookrightarrow$ $\cancel{x^2+y^2}$ $= x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta = \rho^2$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^1 (\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + t^2 + \rho^2\cos^2\theta)\rho\, dt\right) d\rho\right) d\theta =$$

ESERCITAZIONE

14/11/14

1) Considero la calotta definita da: $\Sigma = \{ x^2+z^2 = +1 ,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1 \}$
calcolare ~~come~~ l'area delle 2 parti di calotta in cui viene divisa dal piano $x+y = 1$



/// A_1

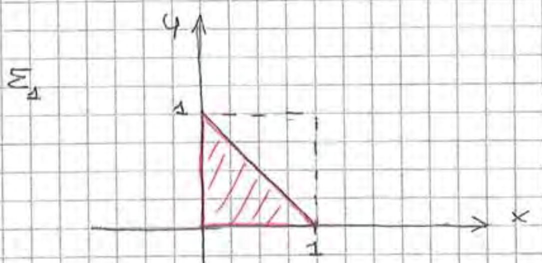
A_2

$$A_1 = \int_{\Sigma_1} 1 \, d\sigma = \int_D \cancel{1} \cdot \|\bar{N}\| \, du \, dv$$

$y = 1-x$

La superficie della calotta è data da: $z = \sqrt{1-x^2}$
Prendo la radice positiva perché $z \geq 0$.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad \text{per} \quad \begin{aligned} &0 \leq y \leq +1-x \\ &0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$



$$\int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^{+1-x} \| N(x,y) \| \, dx \, dy \right.$$

$\| N(x,y) \|$:

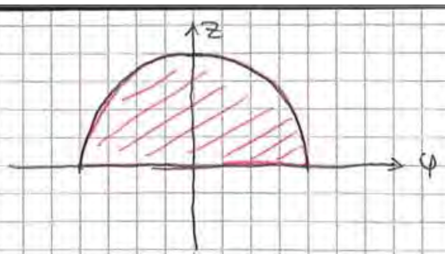
$$\frac{d\sigma}{dx} = \left(1, 0, \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = (0, 1, 0)$$

$$N(x,y) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0, 1 \right)$$

$$\| N(x,y) \| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} + 1} = \sqrt{\frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^{-x+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot [y]_{y=0}^{y=-x+1} \, dx = \int_0^1 \frac{-x+1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad |\det(J_T)| = \rho$$

$\rho \in [0,1]$

$\theta \in [0,\pi]$

$$\int_D \left(\int_{x^2+z^2}^{1} (y^2+z^2)\,dx \right) dy\,dz = \int_D [x]_{y^2+z^2}^{1} \cdot (y^2+z^2)\,dy\,dz = \int_D (1-y^2-z^2)(y^2+z^2)\,dy\,dz =$$

$$= \int_D (y^2 - y^4 - y^2z^2 + z^2 - y^2z^2 - z^4)\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^\pi (\rho^2\cos^2\theta - \rho^4\cos^4\theta - \rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta +$$

$$+ \rho^2\mathrm{sen}^2\theta - \rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta - \rho^4\mathrm{sen}^4\theta)\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^\pi \left(\rho^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) - \rho^4(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\theta) - 2\rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^\pi (1-\rho^2)\rho^3\,d\theta\right)d\rho = \pi\int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho = \pi\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\pi$$

20/11/11

SUCCESSIONI

Sia $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Una successione é una funzione che prende valori in $\mathbb{R}$, e il cui dominio é $\mathbb{N}$ o un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. Per le successioni, é comune utilizzare la notazione

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{R}} \quad \text{, o semplicemente} \quad \{a_n\}$$

Esempio: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{R}/\{0\}}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to f(n)$

La variabile indipendente si interpreta cioé come un indice che contrassegna i valori corrispondentemente assunti dalla variabile dipendente.

Il comportamento tendenziale di una successione può essere caratterizzato mediante un'appropriata nozione di limite.

1) Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ converge a ℓ (o anche che ammette limite finito uguale ad ℓ) se per ogni ~~$\varepsilon\in\mathbb{R}$~~ $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ciascun $n > N$ per cui a_n é definito si ha: $|a_n - \ell| < \varepsilon$. ($\Leftrightarrow \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon$)

Si scrive in tal caso $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

Limiti notevoli:

- $\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |a|<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per $\forall a>0$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a \leq 1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$ per $\forall k>0$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \geq 0$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0 \quad \forall a \geq 0$

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^k}{n!} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$

Proposizione: una certa proprietà vale "definitivamente" se vale da un certo n in poi cioè se $\exists n_0$ t.c. la proprietà vale per $n > n_0$.

Esempio: $a_n = n^2 - 10$

a_n è definitivamente positiva

$n=1 \quad a_1 = -9$

$n>4 \quad a_n > 16-10 > 0$ la proprietà di essere positiva vale da un certo n in poi

Teoremi sui limiti di successioni

1) unicità del limite
2) permanenza del segno
3) limitatezza "locale": se ammette limite finito da un certo punto in poi
4) teoremi del confronto
5) algebra dei limiti
6) teorema sui limiti di successioni monotone

una successione $\{a_n\}$ si dice monotona crescente se

$n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 254

Esempio: $\sum_{n=100}^{+\infty} a_n$ è ancora una successione

$$= a_{100} + a_{101} + a_{102} + \dots$$

Definizione:

1) si dice che la serie converge ed ha per somma s se il limite esiste finito ed è uguale ad s.

2) si dice che la serie diverge (positivamente o negativamente) se il limite diverge (positivamente o negativamente).

3) si dice che la serie è indeterminata se il limite non esiste.

Esempio: 1) Serie di Mengoli

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

$S_2 = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$, $S_3 = \frac{1}{3(3-1)} \neq \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

$S_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4(4-1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Riscrivo il termine generale della serie:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n} - \cancel{n} + 1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, $S_4 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

... $S_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ converge

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+2$

$S_3 = 1+2+3$

$\vdots$

$S_n = 1+2+3+ \dots + \cancel{S_n}\, n \geq n$

La serie diverge

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + (-1) = 0$

$S_2 = 0 + 1 = 1$.

$S_3 = \log(3) + \log(4) - \log(3) = \log(4)$

$S_n = \log(n+1) \to +\infty$ la serie diverge positivamente

$a_n = b_{n+1} - b_n$

$S_n = \underbrace{b_{n+1}}_{} - b_0$

converge se converge questo termine

Questa serie e quella di Mengoli si dicono serie telescopiche.

Somma di serie

Date 2 serie di termine generale rispettivamente $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si chiama serie somma la serie il cui termine generale è $\{a_n + b_n\}$, ovvero la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$

Il comportamento della serie somma si deduce facilmente applicando le regole dell'algebra dei limiti alle successioni delle somme parziali delle 2 serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

In particolare, se le serie date convergono anche la serie somma converge e la sua somma ~~converge~~ sarà uguale alla somma delle somme delle serie date.

Bisogna fare attenzione ai casi in cui si presentano forme indeterminate.

$$\sum_n (a_n + b_n) = S_a + S_b$$

Dimostrazione:

$$S_0 = a_0 + b_0$$

$$S_1 = a_0 + b_0 + a_1 + b_1 = [a_0 + a_1] + [b_0 + b_1]$$

$$S_2 = S_1 + (a_2 + b_2) = [a_0 + a_1] + [b_0 + b_1] + a_2 + b_2 =$$

$$= \underbrace{[a_0 + a_1 + a_2]}_{S_2^a} + \underbrace{[b_0 + b_1 + b_2]}_{S_2^b}$$

Se indico le somme parziali di $\sum a_n$ con S_n^a e le somme parziali $\sum b_n$ con S_n^b:

$$S_n = S_n^a + S_n^b \to S_\infty^a + S^b$$

$\sum a_n$	$\sum b_n$	$\sum (a_n + b_n)$
converge a S^a	converge a S_b	converge a $S^a + S^b$
converge a S^a	diverge ~~conv~~ a $\pm\infty$	diverge a $\pm\infty$
diverge a $+\infty$	diverge a $+\infty$	diverge a $+\infty$
diverge a $-\infty$	diverge a $-\infty$	diverge a $+\infty$
diverge a $+\infty$	diverge a $-\infty$	??
indeterminata	indeterminata	??

La successione delle S_n è una successione crescente $\Rightarrow$ o $S_n \to S \in \mathbb{R}$ o $S_n \to +\infty$ (uso il teorema sui limiti delle successioni monotone).

La proposizione vale anche per le serie a termini definitivamente positivi

$$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots}_{\text{possono essere positivi oppure negativi}} + a_m + \underbrace{a_{m+1} + \dots}_{\geq 0}$$

$\hookrightarrow$ la sono come serie a termini positivi

Spezzo in somma finita e somma infinita.

Esempio: $\underbrace{1-5+17-20-27}+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots}_{\text{serie a termini positivi}}$

Mi interessa il comportamento degli infiniti termini.

Il criterio fondamentale per lo studio del comportamento di una serie a termini positivi è il cosiddetto criterio del confronto.

Criterio del confronto

Siano date 2 serie a termini positivi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Se $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, diremo che la serie di termine generale $\{a_n\}$ è una minorante della serie di termine generale $\{b_n\}$, ovvero che la serie di termine generale $\{b_n\}$ è una maggiorante della serie di termine generale $\{a_n\}$.

1) se la serie maggiorante converge, allora converge anche la minorante;
2) se la serie minorante diverge, allora diverge anche la maggiorante

Dimostrazione: $0 \leq S_0^a = a_0 \leq b_0 = S_0^b$

$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n^b$

se $\sum_n b_n = S^b$ $\quad \forall n \quad 0 \leq S_n^a \leq S_n^b$, S_n^a è monotona crescente limitata $\Rightarrow$ converge a $S^a \leq S^b$

se $S^a \to +\infty$ (cioè $\sum_n a_n$ diverge) per il teorema del confronto sui limiti delle successioni anche $S_n^b \to +\infty$.

Esempi:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente perché $\frac{1}{n} \geq \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ e abbiamo già visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente

$\frac{1}{n} \geq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ = numeri naturali

$\forall x \in (-1,+\infty) \quad \log(1+x) \leq x$

ESERCITAZIONE

21/11/14

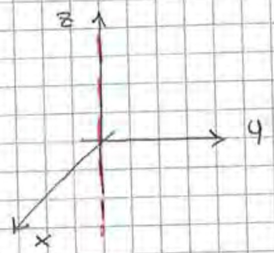
1) $F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2z , \frac{2y}{x^2+y^2} , 2x - 6z \right)$

- dire se F è conservativo
- trovare (se ce l'ha) il potenziale in un insieme in cui sia conservativo

1°: Trovo il dominio

$x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$

Sono 2 piani perché siamo in $\mathbb{R}^3$; e l'intersezione è una retta.



$\text{dom}F = \mathbb{R}^3 / \{\text{asse } z\}$

Non è semplicemente connesso.

Restringo il dominio, considero un sottoinsieme del dominio che sia semplicemente connesso.

Ad esempio considero $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ (si è scelto arbitrariamente)

Calcolo il rotore di F per vedere se F ammette potenziale su Ω.

$$\text{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F(x) & F(y) & F(z) \end{vmatrix} = \left(0-0, -2+2, \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \right) = (0,0,0)$$

$\text{rot} F = 0$ e insieme semplicemente connesso $\Rightarrow$ F è conservativo su Ω

Se è conservativo posso cercarne il potenziale.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 2z$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2x - 6z$$

$$g(x,y,z) = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2z \right) dx = \log(x^2+y^2) + 2zx + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \cancel{\frac{2y}{x^2+y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cancel{\frac{2y}{x^2+y^2}} \Rightarrow \varphi(y) = \text{costante}$$

$$g(x,y,z) = \log(x^2+y^2) + 2xz + \varphi(z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \cancel{2x} + \varphi'(z) = \cancel{2x} - 6z$$

$$\varphi(z) = \int -6z \, dz = -6\frac{z^2}{2} = -3z^2 + K$$

$$g(x,y,z) = \log(x^2+y^2) + 2xz - 3z^2 + K$$

SERIE A TERMINI POSITIVI

28/11/14

Criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi

Siano date 2 serie a termini positivi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, con termine generale $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ definitivamente.

Consideriamo che $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$

Se: 1) $\ell > 0$ se $\sum_n a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum_n b_n$ converge

2) $\ell = 0$ se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

Dimostrazione: $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell$ $\forall \varepsilon$ $\exists n_0$ t.c. $n > n_0$

$\left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \varepsilon$ cioè $\ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$

$b_n > 0 \Rightarrow b_n(\ell - \varepsilon) < a_n < b_n(\ell + \varepsilon)$

prendo la disuguaglianza: $a_n < b_n(\ell + \varepsilon)$

se $\ell > 0 \Rightarrow \ell + \varepsilon > 0$

se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge (per il criterio del confronto)

prendo la disuguaglianza: $b_n(\ell - \varepsilon) < a_n$

se $\ell > 0$ e ε sufficientemente piccolo (es. $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$)

$\Rightarrow \ell - \varepsilon > 0$ definitivamente per $n > n_0$

$0 < b_n(\ell - \varepsilon) < a_n$

se $\sum_n a_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ converge (per il criterio del confronto)

Se $\ell = 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n > n_0$ e $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < +\varepsilon$, con $b_n > 0$

Ottengo $\underbrace{-\varepsilon b_n < a_n}$ $< +\varepsilon b_n$

a questa disuguaglianza non si può applicare il teorema del confronto poiché vale solo per serie a termini positivi

Se ~~$\varepsilon \sum b_n$ ecc~~ prendendo in considerazione: $a_n < \varepsilon b_n$,

se $\varepsilon \sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \varepsilon \sum b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

N.B. se $A \Leftrightarrow B$ $\not\Rightarrow$ vale anche la scrittura $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ ($\neg$ = non)

Cioè: 1) se $\sum_n a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_n b_n$ converge

posso scriverlo come:

se $\sum_n a_n$ diverge $\Leftrightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

Criterio della radice per serie a termini positivi

Se $a_n \geq 0 \quad \forall n$ e se:

1) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge

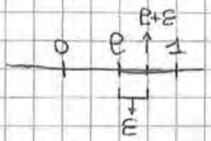
2) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

N.B. Se $\ell = 1$ non si sa concludere nulla

Dimostrazione: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. per $n > n_0$, $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

1) $\ell < 1$, $\exists \varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo t.c. $\ell + \varepsilon < 1$



$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon < 1$

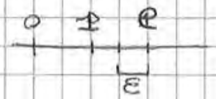
$a_n < (\ell + \varepsilon)^n$

$\sum_n (\ell + \varepsilon)^n$ è una serie geometrica di ragione $(\ell + \varepsilon)$

Se $(\ell + \varepsilon) < 1$ la serie geometrica converge;

per il criterio del confronto $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente

2) $\ell > 1$



$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \geq 1$

$(\ell - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n}$

$(\ell - \varepsilon)^n < a_n$

$\sum_n (\ell - \varepsilon)^n$ è la serie geometrica con ragione $\ell - \varepsilon > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

Per il criterio del confronto $\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

Esempi:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n+1}}{2}$

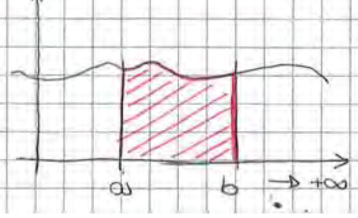
$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ per il criterio della radice $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$ converge

N.B. Limite notevole: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} n^{1/n} =$

$= \lim_{n \to +\infty} e^{\log n^{1/n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = 1$

Integrale improprio

$\int_a^b f(x)\, dx \qquad f$ limitata $[a,b] \qquad f(x) \geq 0$



$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^n f(x)\, dx \qquad n \in \mathbb{N}$

Esempi:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è la serie armonica generalizzata

per $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ la serie diverge

per $\alpha = 2 \Rightarrow$ la serie converge

per $\alpha > 2 \Rightarrow$ la serie converge

per $1 < \alpha < 2 \Rightarrow$ studio il comportamento con il criterio di McLaurin

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

Calcolo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{H \to +\infty} \int_1^H x^{-\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^H = \frac{1}{-\alpha+1} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{H^{\alpha-1}}}_{\frac{1}{+\infty}=0} - 1 \right] =$

$= \lim_{H \to +\infty} = \frac{1}{+\alpha-1}$ l'integrale è convergente

La serie converge per il criterio di McLaurin

Secondo criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi

Sia data la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$:

1) se la successione $\{a_n\}$ è di ordine minore o uguale a quello della successione $\{\frac{1}{n}\}$, la serie data diverge;

2) se esiste un numero $\alpha > 1$ tale che la successione $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine maggiore o uguale a quello della successione $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$, la serie data converge.

Esempi:

1) $\frac{1}{n^2 \log n}$ infinitesimo di ordine $> \frac{1}{n^2}$

$$\frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 \log n} = 1 \not\Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^2 \log n}$

2) $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ infinitesimo di ordine $> \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n \log n}$ $\qquad \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$

Dal confronto non deduco nulla.

Devo usare il criterio di McLaurin e studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, \frac{1}{x \log x}\, dx = \lim_{H \to +\infty} \int_1^H \frac{\frac{1}{x}}{\log x} = \left[\log(\log x) \right]_1^H = \lim_{H \to +\infty} \log(\log H) = +\infty$$

L'integrale diverge $\Leftrightarrow$ La serie $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ diverge.

$\lim_{N\to+\infty} |\sum_{n=1}^{N} a_n| = |a_0 + a_1 + \dots + a_N| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_N|$

disuguaglianza triangolare

Passando al limite:

$$|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n| \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Questo passaggio ha senso se la serie converge.

Esempi:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ $\qquad |a_n| = \frac{1}{n^2}$

$\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

$$\left|\frac{\sin n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

$\sum_n \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\sum_n \left|\frac{\sin n}{n^3}\right|$ converge

$\Rightarrow$ per il criterio della convergenza assoluta $\sum_n \frac{\sin n}{n^3}$ converge

Attenzione al Teorema del confronto: da usare con serie a termini positivi!

SERIE DI POTENZE

Serie di potenze: serie di funzioni il cui termine generale si presenta sotto forma di potenza.

Esempio tipico di serie di potenze è la serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{converge} & |q|<1 \quad \frac{1}{1-q} \\ \text{diverge} & q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & q \leq -1 \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$ (x sarà una variabile)

Se $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Se penso a x come variabile, la somma è una funzione.

Generalizzando la serie geometrica:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, x_0 fissato $\in \mathbb{R}$

a_n = successione dei coefficienti, x_0 = centro della serie

Per concludere, é sufficiente definire ϱ come l'estremo superiore dei valori x per cui la serie converge. Se tale estremo superiore risulta finito, siamo nel caso 2), altrimenti siamo nel caso 3).
Se si verifica il caso 1), diremo che il raggio di convergenza della serie é uguale a zero; se si verifica il caso 2) diremo che il raggio di convergenza della serie é uguale a ϱ; se si verifica il caso 3) diremo che il raggio di convergenza della serie é infinito.

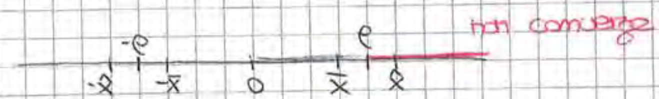
Se la serie converge, non sempre converge assolutamente.
Ad esempio: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma non converge assolutamente

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_n \frac{1}{n}$$, che non converge

Osservazione: (domanda tipica d'esame)
Se per un $\hat{x}$ la serie non converge, allora per $\forall x$ t.c. $|x| > |\hat{x}|$ la serie non converge

all'interno non so cosa succede

Dimostrazione: in $\hat{x}$ la serie non converge (é l'ipotesi).
Se in $\hat{x}$ non converge, se fisso x allora non converge neanche lì (non é scontato, é da dimostrare).
Si fa un ragionamento per assurdo: se convergesse dovrebbe convergere anche prima di x e quindi anche in $\hat{x}$.



ϱ é il raggio di convergenza della serie di potenze.

$$\varrho = \sup\left\{ |\bar{x}| : \sum_n a_n \bar{x}^n \text{ convergente} \right\}$$

Il teorema non dice cosa capita in ϱ e $-\varrho$.
ϱ per la serie geometrica vale 1.

Non è esattamente una serie geometrica perché n parte da 2 e non da 0.

Studiamo la serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^0 - \left(\frac{3}{5}\right)^1\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}-1-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{25-10-6}{10}\right) = \frac{9}{50}$$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ discutere la convergenza e calcolare la somma.

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

$\sum_n \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_n \frac{1}{n^2}$ convergente perché $\sum_n \frac{1}{n^2}$ è la serie armonica con $\alpha=2$ ed è convergente.

Non esistono formule per la somma di serie armoniche.

Per il confronto asintotico converge anche la serie di partenza.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$

Scompongo in fratti semplici.

$$\frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{4n^2-1} = \frac{A2n+A+B2n-B}{4n^2-1} \Rightarrow \begin{cases} 2A+2B = 0 & \text{coeff. di } n \\ A-B = +1 & \text{termine noto}\end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A \\ 2A = +1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$ → assomiglia ad una serie telescopica

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Provo a calcolare le ridotte:

$$S_1 = \frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1} = 1-\frac{1}{3}$$

$$S_2 = 1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{5} = 1-\frac{1}{5}$$

$$S_3 = 1-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{7} = 1-\frac{1}{7}$$

$$S_n = 1-\frac{1}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calcolo il limite delle ridotte per trovare la somma.

3) $\log n = o(n^{1/4})$ $\quad \alpha = 1/4$

~~Devo~~ Devo mettere un numero più piccolo ancora.

$$b_n = \frac{\log n}{n^{3/2}} = o\left(\frac{1}{n^{3/2 - 1/4}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$$

$\sum_n \frac{1}{n^{5/4}}$ converge (serie armonica con $\alpha > 1$)

Per il confronto: $\frac{\log n}{n^{3/2}} < \frac{1}{n^{5/4}} \Rightarrow \sum_n \frac{\log n}{n^{3/2}}$ converge

perché $\log n = o(n^{\alpha})$

È assolutamente convergente e quindi è convergente la serie di partenza $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^{3/2}}$.

04/12/14

Teorema: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è tale che:

1) se $\bar{x}$ è tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ converge $\Rightarrow \forall x \; |\hat{x}| < |\bar{x}| \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$ converge

2) se in $\bar{x}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ diverge $\Rightarrow \forall x \; |\hat{x}| > |\bar{x}| \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$ diverge

Ricordiamo ρ = raggio di convergenza = $\sup \{ |\bar{x}| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ convergente $\}$

Dato ρ la serie converge nell'intervallo $(-\rho, \rho)$.

Il teorema non dà nessuna informazione sugli estremi dell'intervallo di convergenza: bisogna studiare singolarmente.

Il teorema assicura l'esistenza del raggio di convergenza, ma non dà nessuna indicazione su come lo si possa calcolare. A questo proposito, possono tornare utili i 2 seguenti criteri, che discendono direttamente dai corrispondenti criteri di convergenza per le serie a termini positivi.

Criterio del rapporto per le serie di potenze

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, supponiamo che $a_n \neq 0 \; \forall n$ e che esista il limite (finito o infinito):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora si ha che:
1) se $\ell = +\infty \Rightarrow \rho = 0$ la serie converge solo per $x = 0$
2) se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\ell}$
3) se $\ell = 0 \Rightarrow \rho = +\infty$ la serie converge per $\forall x$

Dimostrazione: data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, per poter applicare il criterio del confronto per serie numeriche a termini positivi devo studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |x|^n$$

A priori non so se la serie converge o no negli estremi dell'intervallo di convergenza: questi punti devono essere studiati singolarmente.

Riscriviamo la serie in $x=3$ e $x=-3$:

- $x=+3$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} 3^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n$ diverge, perché non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza $b_n \to 0$.

$$n \overset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$

- $x=-3$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} (-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n$

$(-1)^n n$:
$n=0 \quad (-1)^0 0 = 0$
$n=1 \quad (-1)^1 1 + 0 = -1$
$n=2 \quad (-1)^2 2 + -1 = 1$
$n=3 \quad (-1)^3 3 + 1 = -2$
⋮

La serie sarà indeterminata.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \ell \Rightarrow \rho = \frac{1}{\ell} = 1$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge in $(-1,1)$

$x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ serie armonica $\Rightarrow$ diverge

$x=-1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ serie armonica a segni alterni $\Rightarrow$ converge

$[-1,1)$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1 = \ell \Rightarrow \rho = 1$$

N.B. limite notevole $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$ $\quad \left(\frac{1}{n}\log n \overset{n\to+\infty}{\to} 0\right)$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ converge in $(-1,1)$.

$x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie armonica con $\alpha > 1$)

$x=-1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_n \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge

$[-1,1]$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge in $[-1,1)$

$-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ ha lo stesso insieme di convergenza

Ho: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n$

$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = l \Rightarrow \rho = +\infty$ la serie somma converge per $\forall x$

Da un intervallo limitato si passa alla convergenza su tutto $\mathbb{R}$. Non dare nulla per scontato.

• Prodotto di serie di potenze

Date le 2 serie: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Analizziamo le ridotte:

$S_0^a = a_0$ | $S_0^b = b_0$

$S_1^a = a_0 + a_1 x$ | $S_1^b = b_0 + b_1 x$

$S_2^a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ | $S_2^b = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$\vdots$

$S_2^a \cdot S_2^b = a_0b_0 + a_1b_0 x + a_2b_0 x^2 + a_0b_1 x + a_1b_1 x^2 + a_2b_1 x^3 + a_0b_2 x^2 + a_1b_2 x^3 + a_2b_2 x^4$

$S_3^a \cdot S_3^b$

rimarranno costanti man mano che aumentano le ridotte

Raccolgo: $S_2^a \cdot S_2^b = \underbrace{a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) x^2}$ $+ (a_2b_1 + a_1b_2) x^3 + a_2b_2 x^4$

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) x^2 + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$

Teorema: se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge in C_a e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ converge in C_b allora il prodotto di queste 2 serie converge in $C_a \cap C_b$ e $S(x) = S_a(x) \cdot S_b(x)$

Esempio:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ $\quad |x|<1$, la serie converge in $(-1,1)$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\quad \left|\frac{x}{2}\right|<1 \Rightarrow |x|<2$, la serie converge in $(-2,2)$

Il prodotto converge in $(-1,1)$.

$(1 + x + x^2 + \dots)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots\right) = 1 + x\left(1 + \frac{1}{2}\right) + x^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \dots =$

Serie di Taylor

formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n \qquad x \to x_0$$

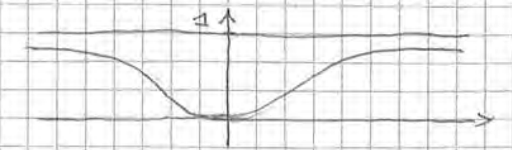
È una formula finita; voglio trasformarla in una somma infinita

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad f \in C^\infty \text{ su un certo intervallo } I \text{ t.c. } x_0 \in I.$$

se $x_0 = 0 \Rightarrow$ serie di McLaurin

Esempi

1) $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ la funzione è continua

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot -(-2)\frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \to 0} 0$ (Teorema tappabuchi $\exists f'(0) = 0$)

Vedo che tutte le derivate in 0 valgono 0.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

Definizione: se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza non nullo, e se esiste un numero $\delta > 0$ tale che la somma della serie coincide con la funzione generatrice almeno per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, allora si dice che la funzione $f(x)$ è analitica nel punto x_0.

Se la funzione $f(x)$ è definita in un insieme aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, e se risulta analitica in ogni punto $x_0 \in I$, allora si dice che $f(x)$ è analitica su I.

Teorema: sia $f(x) \in C^\infty(I)$, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I. Supponiamo che esistano $\delta > 0$ e $H > 0$ tali che $|f^{(n)}(x)| < H$ $\forall n$ e ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Allora, $f(x)$ è analitica in x_0

Dimostrazione: indichiamo con $S_n(x)$ la somma parziale n-esima della serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = S_n(x)$.

Per ogni n, $S_n(x)$ coincide con il polinomio di Taylor di grado n della funzione $f(x)$ riferito al punto x_0. La differenza tra $f(x)$ e $S_n(x)$, per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, può essere rappresentata mediante il resto scritto nella forma di Lagrange:

$$f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad t \in (x_0, x)$$

Tenuto conto dell'ipotesi, se $|x - x_0| < \delta$ si ha:

5) $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è analitica?

Riscrivo come serie di Taylor e faccio vedere che gli a_n sono i coefficienti dello sviluppo di Taylor.

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Uso il Teorema di derivazione termine a termine:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x_0 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \qquad s'(0) = a_1$$

$$s''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots \qquad s''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{s''(0)}{2}$$

Ottengo che $a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$ $\Rightarrow$ $s(x)$ è analitica

Lo stesso vale se fosse scritta come $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = s(x)$

Tutte le serie che tratto serie di funzioni sono analitiche

Valgono le seguenti ulteriori proprietà:

1) Sia $s(x)$ la somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, con $\rho > 0$. Se $s(x)$ è identicamente nulla, allora $a_n = 0$ $\forall n$;

2) (Principio d'identità della serie di potenze). Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-x_0)^n$ due serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza $\rho > 0$. Siano $s_a(x)$ e $s_b(x)$ le somme delle 2 serie. Se si ha $s_a(x) = s_b(x)$ identicamente nell'intervallo $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, allora $a_n = b_n$ $\forall n$.

ESERCITAZIONE - Serie numeriche

05/12/2011

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n^2}$, discutere la convergenza

N.B. Se ho delle potenze, meglio il criterio della radice; se ho dei fattoriali, meglio il criterio del rapporto.

Uso il criterio della radice:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n} = e^{-6}$$

N.B. Limite notevole $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{+ab}$

Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow$ serie convergente

$e^{-6} \overset{?}{<} 1 \Rightarrow \frac{1}{e^6} < 1$ ok!

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n^2}$ converge.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, discutere la convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n!}(n+1)}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$x = -3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n^2+2)$

non converge assolutamente e non vale il criterio di Leibnitz;

la serie oscilla.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2}{3^n} x^n$ converge in $(-3,3)$ intervallo aperto.

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n6^n} x^n$

$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n6^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,6} = \frac{1}{6} \Rightarrow \rho = 6$

$x=6 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n6^n} 6^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$x=-6 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ non è assolutamente convergente

1) $b_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$ ok!

2) $b_{n+1} < b_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow n+1 > n$ ok!

La serie converge per il criterio di Leibnitz.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n6^n} x^n$ converge nell'intervallo $[-6,6)$

7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n (3x+1)^n$ non è centrata nell'origine

Sostituisco $z = 3x+1 \Rightarrow \sum_{n=\emptyset}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n z^n$

$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n} = 3 \Rightarrow \rho = \frac{1}{3}$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n z^n$ converge in $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$-\frac{1}{3} < z < \frac{1}{3} \Rightarrow -1-\frac{1}{3} < 3x+\cancel{1} < \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow -\frac{4}{3} < 3x < -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{4}{9} < x < -\frac{2}{9}$

$x = -\frac{4}{9} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n \left(\cancel{3}\left(-\frac{4}{\cancel{9}_3}\right)+1\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{3n} = 1$

Ipotesi Criterio di Leibnitz non sono verificate ($b_n \not\xrightarrow{+\infty} 0$) $\Rightarrow$ la serie non converge

$x = -\frac{2}{9} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n \left(3\left(-\frac{2}{9_3}\right)+1\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n$

$a_n = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n \not\xrightarrow{+\infty} 0$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n (3x+1)^n$ converge in $\left(-\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$

Un polinomio trigonometrico è una funzione del tipo:

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x))$$

dove: m = ordine del polinomio trigonometrico

$a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$P_m(x)$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Proposizione: combinazioni lineari di polinomi trigonometrici di periodo minimo $\frac{2\pi}{\omega}$ sono ancora polinomi trigonometrici.

N.B.
$\cos x$ $\quad 2\pi$
$\cos 2x$ $\quad \pi$ $\Rightarrow \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ avrà periodo 2π, cioè il massimo dei
$\cos 3x$ $\quad \frac{2\pi}{3}$ 3 (che li contiene tutti)

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x))$$

$$Q_M(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{M} (c_n \cos(n\omega x) + d_n \operatorname{sen}(n\omega x))$$

$$P_m(x) + Q_M(x) = a_0 + c_0 + (a_1 + c_1)\cos(\omega x) + (a_2 + c_2)\cos(2\omega x) + \dots + (b_1 + d_1)\operatorname{sen}(\omega x) + (b_2 + d_2)\operatorname{sen}(2\omega x) + \dots$$

$m < M$, mi fermo all'ordine maggiore dei 2 polinomi.

Proposizione: il prodotto di polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico.

$$P_m(x) \cdot Q_M(x) = (a_0 + a_1 \cos(\omega x) + b_1 \operatorname{sen}(\omega x) + \dots + b_m \operatorname{sen}(m\omega x)) \cdot (c_0 + c_1 \cos(\omega x) + d_1 \operatorname{sen}(\omega x) + \dots + d_M \operatorname{sen}(M\omega x)) = a_0 c_0 + c_0 a_1 \cos(\omega x) + \dots + a_0 c_1 \cos(\omega x) + a_1 c_1 \cos^2(\omega x) + \dots =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega x) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \alpha_k (\cos(m\omega x)\cos(n\omega x)) + \alpha_k (\operatorname{sen}(m\omega x) \cdot \cos(n\omega x)) + \alpha_k (\operatorname{sen}(m\omega x) \cdot \operatorname{sen}(n\omega x))$$

Devo dimostrare che questi termini con α_k si possono scrivere come polinomi trigonometrici.

Prendo ad esempio: $\cos(m\omega x) \cdot \cos(n\omega x)$

Per dimostrare questo prendo le formule di addizione, da cui ricavo le formule di Werner.

$$\cos[(n+m)\omega x] + \cos[(n-m)\omega x] = \cos[n\omega x + m\omega x] + \cos[n\omega x - m\omega x] =$$

$$= \cos(n\omega x) \cdot \cos(m\omega x) - \operatorname{sen}(n\omega x) \cdot \operatorname{sen}(m\omega x) +$$

$$+ \cos(n\omega x) \cdot \cos(m\omega x) + \operatorname{sen}(n\omega x) \cdot \operatorname{sen}(m\omega x) = 2\cos(n\omega x) \cdot \cos(m\omega x)$$

$$\Rightarrow \cos(n\omega x) \cdot \cos(m\omega x) = \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\omega x + \cos(n-m)\omega x\right]$$

Se $n \neq m$

$$= \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\omega x + \cos(n-m)\omega x\right] dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(n+m)\omega x \frac{1}{(n+m)\omega} + \operatorname{sen}(n-m)\omega x \frac{1}{(n-m)\omega}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\operatorname{sen}(n+m)}_{0}\omega\frac{\pi}{\omega}\frac{1}{(n+m)\omega} + \underbrace{\operatorname{sen}(n-m)}_{0}\omega\frac{\pi}{\omega}\frac{1}{(n-m)\omega} + \dots\right) = 0$$

Se $n = m$

$$= \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\left[\cos(2n)\omega x + \underbrace{\cos(0)}_{1}\omega x\right] dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2n)\omega x \frac{1}{(2n)\omega} + x\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\operatorname{sen}(2n)}_{0}\omega\frac{\pi}{\omega}\frac{1}{2n\omega} + \frac{\pi}{\omega} - \underbrace{\operatorname{sen}(2n)}_{0}\omega\left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\frac{1}{(2n)\omega} + \frac{\pi}{\omega}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

2) $$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cdot \operatorname{sen}(m\omega x)\, dx = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(n+m)\omega x + \operatorname{sen}(n-m)\omega x\right] dx =$$

se $n \neq m$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos(n+m)\omega x \frac{1}{(n+m)\omega} - \cos(n-m)\omega x \frac{1}{(n-m)\omega}\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = 0 \qquad \left([\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 0\right)$$

se $n = m$

$$= \frac{1}{2}\left[-\underbrace{\cos(2n)}_{0}\omega x \frac{1}{2n\omega} + 0\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = 0$$

3) $$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \operatorname{sen}(n\omega x)\cdot \operatorname{sen}(m\omega x)\, dx = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\left[\cos(n-m)\omega x - \cos(n+m)\omega x\right] dx =$$

se $n \neq m$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(n-m)\omega x \frac{1}{(n-m)\omega} - \operatorname{sen}(n+m)\omega x \frac{1}{(n+m)\omega}\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = 0 \qquad (\operatorname{sen} \pi = 0)$$

se $n = m$

$$= \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2n)\omega x\right] dx = \frac{1}{2}\left[x - \underbrace{\operatorname{sen}(2n)}_{0}\omega x \frac{1}{2n\omega}\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

Supponiamo ora che nel punto x valga:

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos m\omega x + b_m \operatorname{sen} m\omega x\right)$$

Calcoliamo a_0, a_m, b_m come "funzioni" di f.

a_0) Integriamo ambo i membri su $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\, dx = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \left\{a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega x) + b_m \operatorname{sen}(m\omega x)\right\} dx =$$

= "scambiamo" le operazioni di integrazione e "somma infinita" =

$$= \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} a_0\, dx + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \left\{ a_n \right.$$

$P_0(x) = \frac{1}{2}$

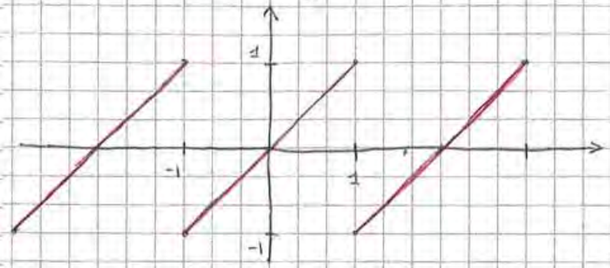
$P_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\,\text{sen}x \qquad K=0$

$P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\,\text{sen}x + \frac{2}{3\pi}\,\text{sen}3x \qquad K=1$

$P_5(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\,\text{sen}x + \frac{2}{3\pi}\,\text{sen}3x + \frac{2}{5\pi}\,\text{sen}5x \qquad K=2$

↳ dà l'ordine al polinomio

2) Calcolo coefficienti di Fourier per $\mathbb{P}$ "dente di sega":



$f(x)\Big|_{(-1,1)} = x$

$a_0 = 0$

$a_m = 0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \pi$$

$$b_m = \frac{\pi}{\pi}\int_{-1}^{1} x\,\text{sen}(m\pi x)\,dx = \left[-x\cos(m\pi x)\frac{1}{m\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\cos(m\pi x)\frac{1}{m\pi}\,dx =$$

$$= \frac{-\cos(m\pi) - \cos(-m\pi)}{m\pi} + \frac{1}{m\pi}\Big[\underbrace{\text{sen}(m\pi x)}_{0}\frac{1}{m\pi}\Big]_{-1}^{1} = \frac{-(-1)^m - (-1)^m}{m\pi} =$$

$$= \frac{2(-1)^{m+1}}{m\pi}$$

La serie di Fourier sarà allora: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m\pi}\,\text{sen}(m\pi x)$

$P_1(x) = \frac{2}{\pi}\,\text{sen}(\pi x)$

$P_2(x) = \frac{2}{\pi}\,\text{sen}(\pi x) - \frac{2}{2\pi}\,\text{sen}(2\pi x)$

$P_3(x) = \frac{2}{\pi}\,\text{sen}(\pi x) - \frac{2}{2\pi}\,\text{sen}(2\pi x) + \frac{2}{3\pi}\,\text{sen}(3\pi x)$

Osservazione:

- f dispari

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\,dx = 0$$

$$a_m = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\cos(m\omega x) = 0$$

$f(x)$ dispari
$\cos(m\omega x)$ pari $\Rightarrow$ prodotto f dispari

La serie sarà allora data: $\sum_{m=1}^{\infty} b_m\,\text{sen}(m\omega x)$

- f pari

$$b_m = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\,\text{sen}(m\omega x)\,dx = 0$$

pari · dispari = dispari

$a_0, a_m \neq 0 \Rightarrow$ serie di Fourier: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_m\cos(m\omega x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 254

$$= -\frac{2}{(m\pi)^2}\left[(-1)^m - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ pari} \\ \frac{4}{(m\pi)^2} & \text{se } m \text{ dispari} \end{cases}$$

La serie di Fourier è data da: $\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \cos((2k+1)\pi x)$

ESERCITAZIONE

12/12/11

1) $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} (2\cos(3x))^m$

Non è una serie di potenze ma la studio come quella.
Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie.

La scriviamo come: $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} z^m$, con $z = 2\cos(3x)$

Calcolo raggio di convergenza:

$$\lambda = \lim_{m\to+\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1}} = \lim_{m\to+\infty} \frac{(\sqrt{3})^{m+1}}{(\sqrt{3})^{m+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{3}$$

$$z = \sqrt{3} \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} (\sqrt{3})^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{(\sqrt{3})^m}\sqrt{3}} \cdot \cancel{(\sqrt{3})^m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La serie diverge perché non soddisfa la condizione necessaria.

$$z = -\sqrt{3} \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Non converge assolutamente e non valgono le ipotesi di Leibnitz, quindi la serie diverge.

L'insieme di convergenza è dato quindi da: $z \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$$z = \sqrt{3} \Rightarrow 2\cos(3x) = \sqrt{3}$$

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k$$

$$z = -\sqrt{3} \Rightarrow 2\cos(3x) = \sqrt{3}$$

$$\cos(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{6} + 2k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k$$

L'insieme di convergenza finale sarà:

$$C: \quad x \in \left(-\frac{\pi}{18} + 2k/3 \,;\, \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\right) \quad k \in \mathbb{R}$$

Calcolo della somma; riscrivo la serie come:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\cos(3x)}{\sqrt{3}}\right)^m \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\cos(3x)}{\sqrt{3}}\right)^m$$

Calcolo la somma quindi della serie geometrica:

1) Calcolare: $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$

Calcolare la somma della serie di potenze e calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$.

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\, x^{2(n+1)+1}}{n\, x^{2n+1}} = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

Valuto negli estremi:

$x=1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n$ diverge

$x=-1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot \underbrace{(-1)^{2n}}_{1}\cdot(-1) = -\sum_{n=0}^{\infty} n$ diverge

La serie converge in $(-1,1)$

Cerco di ricomporre l'esponente e farlo passare davanti:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2n\, x^{2n+1}$$

$D(x^{2n+2}) = (2n+2)\, x^{2n+1}$ devo cercare di ricostruirmi questo

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+2)\, x^{2n+1} - 2x^{2n+1}\right] = \text{(questa volta aggiungo e tolgo)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)\, x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

Teorema di derivazione termine a termine

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)\, x^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} D(x^{2n+1}) = \frac{1}{2} D\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}\right) = \frac{1}{2} D\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2} D\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x(1-x^2) - 2x(-x^2)}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = x\cdot\frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

La serie diventa: $\quad f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{1-x^2}$

18/12/14

Convergenza in media quadratica della serie di Fourier

Teorema: considero $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ con al più un numero finito di discontinuità di tipo "salto" in $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ e

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

sia il polinomio di Fourier di f di ordine m.

1) il polinomio $P_m(x)$ rende minima la quantità $\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |f(x) - P_m(x)|^2\, dx$

dove: $P_m(x)$ = polinomi trigonometrici di ordine m

Cioè per ogni polinomio trigonometrico di ordine m si ha:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |f(x) - P_m(x)|^2\, dx \le \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |f(x) - Q_m(x)|^2\, dx$$

$$+\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} a_0 a_1 \underbrace{\cos \omega x}_{0} \, dx + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} a_1 \cos \omega x \, a_1 \cos \omega x \, dx + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{a_1 \cos \omega x \cdot a_2 \cos 2\omega x}_{0} \, dx + \dots +$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} a_2 a_0 \underbrace{\cos 2\omega x}_{0} \, dx + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} a_2 a_1 \underbrace{\cos \omega x \cdot \cos 2\omega x}_{0} \, dx + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} a_2 \cos 2\omega x \cdot \cos 2\omega x \, dx + \dots +$$

formule di ortogonalità: $m \neq n \Rightarrow 0$

$+ \dots +$ stessa cosa per moltiplicazione di b_n $=$

$$= a_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + a_1^2 \frac{\pi}{\omega} + a_2^2 \frac{\pi}{\omega} + \dots + b_1^2 \frac{\pi}{\omega} + b_2^2 \frac{\pi}{\omega} + \dots = \frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n^2 + b_n^2) \frac{\pi}{\omega} \right]$$

I due integrali appena calcolati quindi si elidono.

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \cdot Q_m(x) \, dx = \int_{-\pi/\omega} f(x) \cdot \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\omega x + d_n \operatorname{sen} n\omega x \right) dx = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} c_0 f(x) \, dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} c_n f(x) \cos n\omega x \, dx + \int_{-\pi/\omega} d_n \operatorname{sen} n\omega x \, f(x) \, dx = c_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^2 \frac{\pi}{\omega} + d_n^2 \frac{\pi}{\omega} \right) = c_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n^2 + d_n^2) \dots \right. \right.$$

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} P_m(x) \cdot Q_m(x) \, dx = \int_{-\pi/\omega} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x) \right) \cdot \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\omega x + d_n \operatorname{sen} n\omega x) \right) dx =$$

$$= c_0 a_0 \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} dx + a_n c_0 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\cos n\omega x}_{0} \, dx + c_0 b_n \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\operatorname{sen} n\omega x}_{0} \, dx + c_1 a_0 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\cos \omega x}_{0} \, dx + c_1 a_1 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos \omega x \cdot \cos \omega x$$

$$+ c_1 a_2 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\cos \omega x \cdot \cos 2\omega x}_{0} + \dots + c_1 b_1 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\cos \omega x \operatorname{sen} \omega x}_{0} \, dx + \dots + d_1 a_0 \int_{-\pi/\omega} \underbrace{\operatorname{sen} \omega x}_{0} \, dx + d_1 a_1 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\operatorname{sen} \dots}_{0}$$

$$+ d_1 a_2 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{\cos \omega x \cdot \operatorname{sen} 2\omega x}_{0} \, dx + \dots + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} d_1 b_1 \operatorname{sen} \omega x \cdot \operatorname{sen} \omega x \, dx + \dots =$$

$$= c_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + c_1^2 \frac{\pi}{\omega} + \dots + d_1^2 \frac{\pi}{\omega} + \dots = c_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n^2 + d_n^2) \frac{\pi}{\omega} \right]$$

~~Le~~ Anche le altre 2 quantità si elidono.

Perciò abbiamo dimostrato che:

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} | f(x) - Q_m(x) |^2 \, dx = \underbrace{\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} | f(x) - P_m(x) |^2 \, dx}_{\text{quantità fissa che non dipende da } Q_m(x)} + \underbrace{\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} | P_m(x) - Q_m(x) |^2 \, dx}_{\text{è una quantità positiva o nulla}}$$

dove: $Q_m(x)$ = qualsiasi polinomio trigonometrico

$P_m(x)$ = quantità che rende minima il primo membro

N.B. $\int g^2(x) \, dx = 0$ se $g(x) = 0$ $\Rightarrow$ se la funzione integranda è nulla, ~~è nulla~~ è il minimo.

L'obiettivo è cercare il polinomio trigonometrico che rende minima la quantità $\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} | f(x) - Q_m(x) |^2 \, dx$

N.B. Il minimo di una quantità positiva è 0.

dove: $c_0 = 0$

$c_m = m\omega b_m$ — coeff. di Fourier

$d_m = -m\omega a_m$

cioè la $f'(x)$ si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier

Teorema di integrazione termine a termine: considero $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, f continua tranne che in un numero finito di punti (discontinuità di prima specie).

$x_0 \in \left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ fissato

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = a_0(x - x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x)\, dx$$

Altre forme di scrittura per la serie di Fourier

1) $a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x = e_m \left[\frac{a_m}{e_m} \cos m\omega x + \frac{b_m}{e_m} \sin m\omega x \right]$

$e_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$

$\frac{a_m}{e_m}, \frac{b_m}{e_m} \in [-1, 1]$

$\frac{a_m^2}{e_m^2} + \frac{b_m^2}{e_m^2} = 1$

θ_m, angolo t.c. $\sin \theta_m = \frac{a_m}{e_m}$, $\cos \theta_m = \frac{b_m}{e_m}$

$\Rightarrow e_m [\sin \theta_m \cos m\omega x + \cos\theta_m \sin m\omega x] = e_m \sin(\theta_m + m\omega x)$

formula di addizione

dove e_m = ampiezza armonica

θ_m = fase dell'armonica

È una diversa rappresentazione.

2) forma esponenziale o complessa della serie di Fourier

Ricordando le formule di Eulero:

esponenziale immaginario: $e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad x \in \mathbb{R}$

$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

formule di Eulero

Risolvo allora:

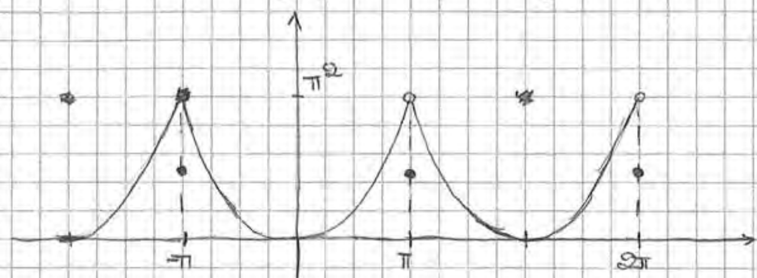
$$= \log\left(\frac{3}{5}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n5^n} - \frac{1}{n3^n}\right) t^n = \log\left(\frac{3}{5}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n5^n} - \frac{1}{n3^n}\right)(x+3)^n$$

Ho ottenuto lo sviluppo in serie della funzione di partenza.

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & x = \pi \end{cases}$ prolungata per periodicità

Rappresentare il grafico della funzione.



Se f é continua a tratti, allora la serie di Fourier di f converge quadraticamente (in norma quadratica) ad f.

Negli intervalli in cui f é continua la serie di Fourier converge puntualmente a f.

La serie di Fourier converge a f in $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$.

Nei punti di discontinuità $(x = \pi + 2k\pi)$ la serie di Fourier di f converge a $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

$x_0 = \pi + 2k\pi$

$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi^2$

$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \pi^2$

La serie di Fourier di f in $x = \pi + 2k\pi$ converge a:

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2$$

La serie converge puntualmente a: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \pi + 2k\pi \\ \pi^2 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$

f e $\tilde{f}$ hanno la stessa serie di Fourier.

Ho discusso così la convergenza della serie di Fourier.

Calcolo i coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2 \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{0}\frac{1}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\frac{1}{n}2\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\pi^2 \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}_{0}\frac{1}{n} - \pi^2 \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}_{0}\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\left[-\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = -\frac{2}{\pi n^2}\left(\pi \cos(n\pi) \ldots\right)$$

08/01/15

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Un'equazione differenziale è un'equazione che ha come incognita una funzione $x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(0) $\dot{x} = ax \qquad x \in \mathbb{R}$

La soluzione su $\mathbb{R}$ è una funzione derivabile che soddisfa l'equazione per ogni $t \in \mathbb{R}$.

La soluzione dell'equazione sopra è della forma:

(1) $x(t) = Ke^{at} \qquad K \in \mathbb{R}$

Verifichiamo: $\dot{x}(t) = Ka\, e^{at}$ derivando (1)

$\dot{x}(t) = aK\, e^{at}$ sostituendo (1) in (0) $\Rightarrow$ VERIFICATO

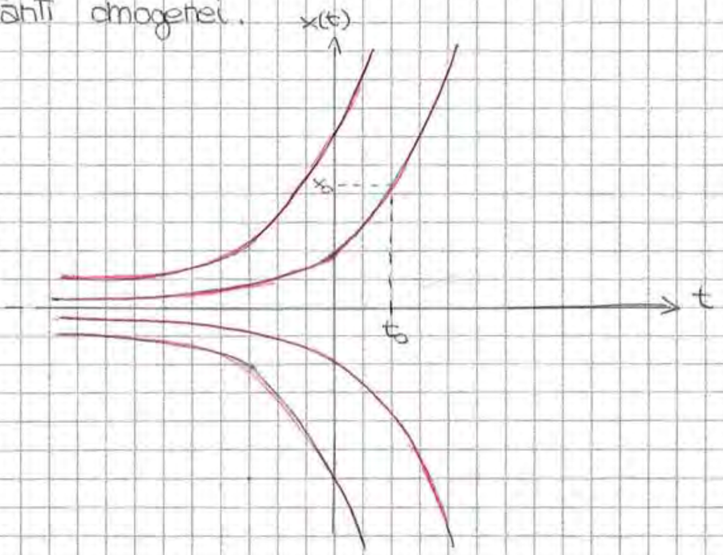
In generale la soluzione di un'equazione differenziale non è unica, ma le soluzioni sono infinite.

Sotto determinate condizioni si può trovare una soluzione unica: si parla così del problema di Cauchy o problema ai valori iniziali.

Il problema di Cauchy viene scritto come:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $\dot{x} = ax$ è un'equazione differenziale di 1° ordine lineare a coefficienti costanti omogenea.



$x(t) = K e^{at}$

$x(t_0) = x_0 = K e^{at_0}$

$K = x_0 e^{-at_0}$

$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$

È detta omogenea l'equazione del tipo:

$\dot{x} - ax = 0$

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$

È detta completa l'equazione del tipo: $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$

Ricordiamo alcune proprietà delle equazioni differenziali:

- le combinazioni lineari di soluzioni sono ancora soluzioni
- le insieme delle soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2
- principio di sovrapposizione

Proposizione: l'integrale generale del sistema $\dot{x} = Ax + b(t)$ si scrive nella forma: $\underbrace{c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)}_{\text{integrale generale del sistema omogeneo}} + \psi(t)$

$\psi(t)$ = soluzione particolare del sistema completo

Dim: se $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ sono soluzioni del sistema completo, allora $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$ è soluzione del sistema omogeneo.

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) = [A\psi_1(t) + \cancel{b(t)}] - [A\psi_2(t) + \cancel{b(t)}] = A[\psi_1(t) - \psi_2(t)] = A\varphi(t)$$

Principio di sovrapposizione: consideriamo un sistema completo $\dot{x} = Ax + b_1(t) + b_2(t)$

Se: ψ_1 è soluzione di $\dot{x} = Ax + b_1(t)$

ψ_2 è soluzione di $\dot{x} = Ax + b_2(t)$,

allora $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ è soluzione di $\dot{x} = Ax + b_1(t) + b_2(t)$

Dim: $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t) = A\psi_1(t) + b_1(t) + A\psi_2(t) + b_2(t) =$$
$$= A[\psi_1(t) + \psi_2(t)] + b_1(t) + b_2(t) = A\psi(t) + b_1(t) + b_2(t)$$

e $\psi(t)$ è soluzione del sistema completo

Queste considerazioni valgono in generale: concentriamoci sul caso $n=2$.

$n=2$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax \quad (0)$ $\quad x(t) \in \mathbb{R}^2$, $A \in M(2,2)$

Problema: trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti del sistema $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Cerco se ci sono soluzioni della forma: $x(t) = u\, e^{\lambda t}$ (1), u = vettore costante.

Verifica la candidata soluzione:

$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} u$ derivando (1)

$\dot{x}(t) = A u\, e^{\lambda t}$ sostituendo (1) in (0)

$= \underbrace{e^{\lambda t}}_{\text{numero}} A u$

Imponiamo: $\dot{x} = Ax$

$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} u = A \cancel{e^{\lambda t}} u$ $\qquad e^{\lambda t} \neq 0$ (è un numero diverso da 0)

$Au = \lambda u$

Abbiamo trovato che data A = matrice del sistema, se:

- λ è un autovalore di A
- u è un autovettore di A corrispondente a λ,

la funzione $\varphi(t) = e^{\lambda t} u$ è soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$.

In generale interessa trovare autovalori e autovettori di A.

Gli autovalori si trovano studiando il polinomio caratteristico di A

Posso allora scrivere: $\varphi_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = e^{-8t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ } sono fra loro linearmente indipendenti

L'integrale generale sarà: $c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + c_2 e^{-8t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ho ottenuto un insieme di ~~2~~ funzioni che dipendono da 2 parametri.

Il problema di Cauchy per $n=2$ si scrive:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x_1(t_0) = x_{1,0} \\ x_2(t_0) = x_{2,0} \end{cases}$$

Per l'esempio: $\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$

Sostituisco nell'integrale generale: $c_1 \cancel{e^0}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + c_2 \cancel{e^0}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ 3c_1 + 2c_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

in questo modo la soluzione è unica, ed è scritta:

$$\frac{1}{5}e^{2t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{5}e^{-8t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

2) A ha un unico autovalore reale: 2A) a λ corrispondono 2 autovettori u_1, u_2

2B) a λ corrisponde un unico autovettore u.

2A) $\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u_1$
$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} u_2$

Se u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti, $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono linearmente indipendenti. In questo caso l'integrale generale è dato da:

$$c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda t} u_2$$

2B) cerco una soluzione linearmente indipendente della forma:

$\varphi(t) = e^{\lambda t}(vt + w)$, dove v e w sono vettori costanti.

$v = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

Verifico la possibile soluzione:

$\dot{\varphi}(t) = \lambda e^{\lambda t}(vt + w) + e^{\lambda t} v$

$\dot{\varphi}(t) = A\,(e^{\lambda t}(vt + w))$

$$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} v t + \lambda \cancel{e^{\lambda t}} w + \cancel{e^{\lambda t}} v = A \cancel{e^{\lambda t}} v t + A \cancel{e^{\lambda t}} w$$

$$\lambda v t + \lambda w + v = A v t + A w$$

Posso vederla come un'uguaglianza tra polinomi: due polinomi sono uguali se e soltanto se hanno gli stessi coefficienti.

Esempio: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2}\, i$$

$$(A - (1+i)I)\, u = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 2-1-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1-i)u_1 - 2u_2 = 0 \\ u_1 + (1-i)u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = (-1+i)\, u_2$$

$$u = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = e^{(1+i)t}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t)\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \underbrace{e^t\left[\cos t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]}_{\mathrm{Re}\,\varphi_1(t)} + i\, \underbrace{e^t\left[\operatorname{sen} t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]}_{\mathrm{Im}\,\varphi_1(t)}$$

L'integrale generale sarà allora:

$$c_1 e^t\left[\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + c_2 e^t\left[\operatorname{sen} t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Abbiamo quindi esaurito i 3 casi.
Finora abbiamo trattato equazioni differenziali omogenee, vediamo ora le un sistema di equazioni differenziali complete.

N.B. Dall'analisi I : $y'' + ay' + by = f(t)$,

dove $f(t)$ può essere: $\begin{cases} \text{polinomio} \\ e^t \cdot \text{polinomio} \\ e^t \cdot \text{polinomio} \cdot \text{comb. lineari di fz. trigonometriche} \end{cases}$

Si usa il principio di somiglianza: si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa della stessa forma del termine forzante $f(t)$.

Se $f(t) = e^{\gamma t} P_m(t)$, si cerca la soluzione particolare della forma:
$\Psi(t) = e^{\gamma t} Q_m(t)$, dove $Q_m(t)$ è un polinomio (con coefficienti vettoriali) dello stesso grado di $P_m(t)$

Questo può non funzionare se γ è autovalore della matrice A; in questo caso si cerca una soluzione particolare della forma:

$$\Psi(t) = e^{\gamma t}\, \tilde{Q}_{m+\mu-1}(t)$$

dove: μ = molteplicità algebrica di γ come autovalore di A.

ESERCITAZIONE

09/01/15

1) Serie di Fourier - tema d'esame

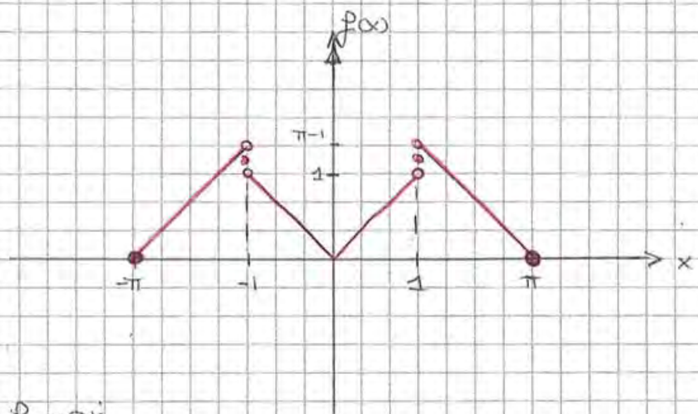
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ \pi - x & \text{se } 1 < x < \pi \\ x + \pi & \text{se } -\pi < x < -1 \end{cases}$$

regolarizzata e prolungata per ~~continuità~~ periodicità, e sia

$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$ la sua serie di Fourier.

1) disegnare il grafico di f in $[-\pi, \pi]$
2) calcolare a_0 e b_1
3) calcolare la somma della serie in $x=1$ e $x=\pi$
4) calcolare $\|f\|_2^2$

1)



f pari

2) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} 2\left[\int_0^1 x\, dx + \int_1^{\pi} \pi - x\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \pi + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{\pi^2}{2} - \pi\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{2} - 1$$

$b_1 = 0 \Leftarrow f$ pari, $b_n = 0 \ \forall n$

Per regolarizzare la funzione:

$$f(1) = \frac{f^+(1) + f^-(1)}{2} = \frac{\pi - 1 + 1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\lim_{x \to 1^+} \pi - x = \pi - 1$, $\lim_{x \to 1^-} |x| = 1$

La funzione è pari, quindi in -1 succederà la stessa cosa.

$$f(\pi) = \frac{f^+(\pi) + f^-(\pi)}{2} = \frac{0 + (\pi - \pi)}{2} = 0$$

3) Se non dice di calcolare la serie, non devo calcolarla.

- Teorema: se f è regolarizzata, la serie converge puntualmente a $f(x)$
- Teorema: se f non è regolarizzata, allora la serie di Fourier di $f(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ regolarizzata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 254

Calcolo E_{-2} associato a $\lambda_2 = -2$

$(A + 2I)\,\overline{v} = 0$

$$\left|\begin{array}{cc|c} 3+2 & -5 & 0 \\ 1 & -3+2 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow v = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

L'insieme delle soluzione é allora dato da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determino la soluzione particolare:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \cancel{e^0}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cancel{e^0}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -5c_1 \\ c_1 - 5c_1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -\frac{5}{4} \\ c_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + -\frac{5}{4} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \det A = -3 + 4 = 1 \\ \operatorname{tr} A = 3 - 1 = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} \lambda_1 = 2 - \lambda_2 \\ 2 - \lambda_2 \cdot \lambda_2 = 1 - 2 \end{cases}} \; \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4 =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Calcolo E_1 associato a $\lambda_1 = 1$ $\quad m(1) = 2$

$$(A - I)\,\overline{u} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow u_1 - 2u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 2u_2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimensione dell'autospazio é $\neq m(1) = 2 \Rightarrow A$ non é diagonalizzabile

$(A - I)\,\overline{v} = \overline{u}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow v_1 - 2v_2 = 1 \Rightarrow v_1 = 1 + 2v_2 \Rightarrow v = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La soluzione sarà:

$$\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\dot{\varphi}(t) = A\,\varphi(t)$

$\Rightarrow \lambda_2 \cancel{e^{\lambda_2 t}} w + \lambda_2 \cancel{e^{\lambda_2 t}} t \tilde{v} + \cancel{e^{\lambda_2 t}} \tilde{v} = A\left[e^{\lambda_2 t}(w + t\tilde{v})\right] = \cancel{e^{\lambda_2 t}} A w + \cancel{e^{\lambda_2 t}} t A \tilde{v}$

$e^{\lambda_2 t} \neq 0$ (costante $\neq 0$, si può elidere)

Eguaglio i termini dei 2 polinomi (principio d'identità dei polinomi):

$$\begin{cases} \lambda_2 w + \tilde{v} = A w \\ \lambda_2 \tilde{v} = A \tilde{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_2 I) w = \tilde{v} \\ (A - \lambda_2 I)\tilde{v} = 0 \end{cases}$$

w = autovettore generalizzato

L'integrale generale diventa: $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v + c_3 e^{\lambda_2 t}(\tilde{v} t + w)$

4) unico autovalore reale λ con molteplicità 3

4A) 3 autovettori distinti $\Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda t} u_2 + c_3 e^{\lambda t} u_3$

4B) λ ha 2 autovettori distinti linearmente indipendenti u_1, u_2

- $\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u_1$

  $\varphi_2(t) = e^{\lambda t} u_2$

Cerco una terza soluzione del tipo: $\varphi_3(t) = e^{\lambda t}(vt + w)$

Ripetendo le stesse operazioni di prima ottengo le condizioni:

$$\begin{cases} (A - \lambda I) v = 0 \\ (A - \lambda I) w = v \end{cases}$$

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow v$ potrebbe non essere uguale ad u_1 o u_2

L'integrale generale sarà: $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda t} u_2 + c_3 e^{\lambda t}(tv + w)$

4C) λ ha un unico autovettore linearmente indipendente u

$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u$

$\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(tv + w)$

$\varphi_3(t) = e^{\lambda t}(t^2 \tilde{u} + t\tilde{v} + \tilde{w})$

Derivo $\varphi_3(t)$: $\dot{\varphi}_3(t) = \lambda e^{\lambda t}(t^2 \tilde{u} + t\tilde{v} + \tilde{w}) + e^{\lambda t}(2t\tilde{u} + \tilde{v})$

$\dot{\varphi}_3(t) = A\,\varphi_3(t)$

$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} t^2 \tilde{u} + \lambda \cancel{e^{\lambda t}} t \tilde{v} + \lambda \cancel{e^{\lambda t}} \tilde{w} + \cancel{e^{\lambda t}} 2t\tilde{u} + \cancel{e^{\lambda t}} \tilde{v} = A\left[\cancel{e^{\lambda t}}(t^2 \tilde{u} + t\tilde{v} + \tilde{w})\right]$

$e^{\lambda t} \neq 0$

$\lambda t^2 \tilde{u} + \lambda t \tilde{v} + \lambda \tilde{w} + 2t\tilde{u} + \tilde{v} = A t^2 \tilde{u} + A t \tilde{v} + A \tilde{w}$

$$\begin{cases} \lambda \tilde{u} = A \tilde{u} \\ \lambda \tilde{v} + 2\tilde{u} = A \tilde{v} \\ \lambda \tilde{w} + \tilde{v} = A \tilde{w} \end{cases} \qquad \begin{cases} (A - \lambda I)\tilde{u} = 0 \\ (A - \lambda I)\tilde{v} = \tilde{u}\,2 \\ (A - \lambda I)\tilde{w} = \tilde{v} \end{cases}$$

Si forma una catena di autovalori generalizzati.

L'integrale generale sarà: $\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + c_3 \varphi_3(t)$

In dimensione n il procedimento sarà lo stesso.

$$\tilde{u} = -2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 + \tilde{v}_3 = -1 \Rightarrow \tilde{v}_3 = 1 - \tilde{v}_2 \Rightarrow \tilde{v} = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\varphi_3(t) = e^t\left(t\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\0\\-1\end{vmatrix}\right)$$

2)

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

Comportamento asintotico delle funzioni

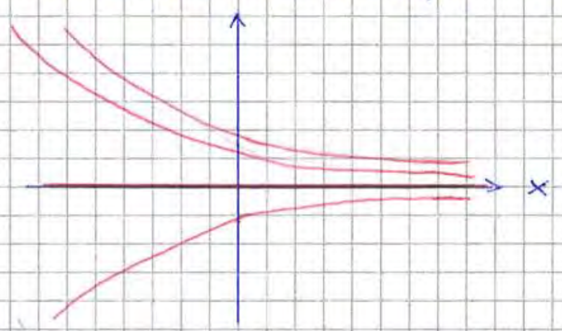
$n = 1$

$\dot{x} = ax$

$x(t) = K e^{at}$

Comportamento asintotico significa: $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases} 0 & \forall K \text{ se } a<0 \\ +\infty & a>0 \quad K>0 \\ -\infty & a>0 \quad K<0 \\ K & a=0 \end{cases}$

$\forall a$ il sistema ha sempre la soluzione costante del sistema. $\Rightarrow x=0$



Esempio: molla con smorzamento

$\ddot{x} = -Kx \qquad K>0 \quad \Rightarrow x(t) = c_1 \cos\sqrt{K}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{K}\,t$

$\ddot{x} = -Kx - \mu\dot{x} \quad \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\alpha t}\cos\sqrt{K}t + c_2 e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\sqrt{K}\,t$

Potrebbe avere un'equazione come: $\ddot{x} = -4x - \dot{x}$

$x = x_1$

$\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2 \qquad \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2\end{cases} \qquad \Rightarrow A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}$

$\ddot{x} = \dot{x}_2$

$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ -4 & -1-\lambda\end{bmatrix} = -\lambda(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{\cancel{+}1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{-\cancel{1} \pm \sqrt{15}i}{2} \Rightarrow$ trovo 2 autovalori complessi coniugati

La soluzione sarà allora:

$\begin{vmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{vmatrix} = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot$ (combinazione lineare di $\operatorname{sen}\sqrt{15}\,t$ e $\cos\sqrt{15}t$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 159 di 254

Sostituisco nella prima equazione:

$$x_1 = c_1\left(\frac{x_2}{c_2}\right)^{1/2} - 2\cancel{x_2}\frac{x_2}{\cancel{x_2}} = \frac{c_1}{\sqrt{c_2}}\sqrt{x_2} - 2x_2 = K\sqrt{x_2} - 2x_2$$

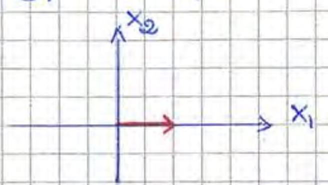
Potrei tracciare il grafico: $(2x_2 + x_1)^2 = (K\sqrt{x_2})^2$

$$4x_2^2 + x_1^2 + 4x_1x_2 = K^2x_2$$

Ho ottenuto l'equazione di una quadrica (ellisse, iperbole, parabola)

Tutte queste curve passano per l'origine.

$u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ corrisponde ad un'autodirezione.

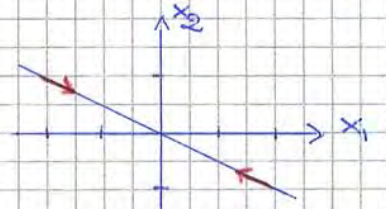


$\left\{\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\right\}$ = asse x_1

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}\Bigg|_{\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-s + 2\cdot0\\-2\cdot0\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ sostituisco $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ iniziale

$v = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$



$\left\{\begin{pmatrix}-2s\\s\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\right\}$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}\Bigg|_{\begin{pmatrix}-2s\\s\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2s + 2s\\-2s\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Gli autovettori identificano sottospazi di $\mathbb{R}^2$ invarianti per il sistema

$\Rightarrow$ significato geometrico.

16/01/15

Esercitazione

1) $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 3x - y - 2 \end{cases}$

- Risolvo il sistema omogeneo e cerco poi una soluzione particolare.

$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = -2 + \lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ho autovalori complessi coniugati, in cui: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(A - \lambda I)\bar{w} = \bar{0}$, $\bar{w} = \bar{u} + i\bar{v}$

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 \\ 3 & -1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

$$= (-3-\lambda)\left[\cancel{1}+\lambda^2+2\lambda-\cancel{1}\right] = (-3-\lambda)(\lambda+2)\lambda = 0$$

$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_3 = -3$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow (A+0I)\,\bar{u}_1 = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{6}\ 2 & \cancel{0} & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right| \qquad \begin{cases} -x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=x \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow (A+2I)\,\bar{u}_2 = 0$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right| \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -3 \Rightarrow (A+3I)\,\bar{u}_3 = \bar{0}$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 10 & 3 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 0 \end{array}\right|$$

$10y + 3z = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{10}z$

$2x + 2\,\frac{3}{\cancel{10}\,5}z + z = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{10}z$

$$\Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = \underbrace{c_1 e^{0t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{soluzione costante}} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

INTEGRALI

- linearità dell'integrale: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$
- integrazione per parti: $\int f(x) g'(x) = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$
- integrazione per sostituzione: $\int f(\varphi(x))\, \cancel{dx}\, \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy$
- regola pratica: $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \log|\varphi(x)|$
- integrazione di funzioni razionali: $\int \frac{1}{x-\alpha}\, dx = \log|x-\alpha|$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^m}\, dx = \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2px+q}\, dx = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{s} \qquad s = \sqrt{q-p^2}$$

- integrazione per sostituzione per integrali definiti: $\int_a^b f(y)\, dy = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$

TAVOLA DELLE PRIMITIVE

- $\int \frac{1}{a+x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x|$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int e^x\, dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4}$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4}$$

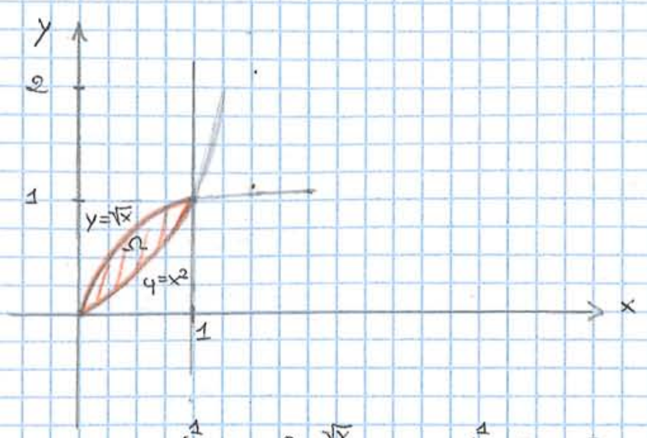
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{sett\,sinh} x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \operatorname{ctg} x$$

$$\int tg^2\theta = \tan\theta - \theta$$

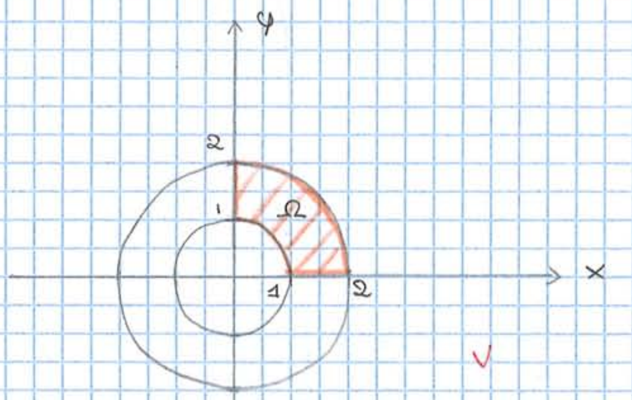
c) $\int_\Omega xy \, dx \, dy$, $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , 0 < x < 1 , x^2 < y < \sqrt{x} \}$



$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{x^6}{6} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2-1}{12} = \frac{1}{12}$$

d) $\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx \, dy$, $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4 , x > 0 , y > 0 \}$

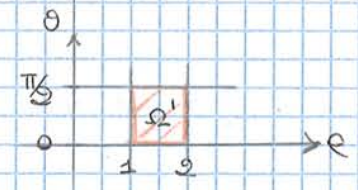


$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\det(J(T)) = \rho$

$\rho \in [1,2]$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$\cancel{4}$ $\cancel{2}$ $\cancel{\rho}$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta} \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \frac{\cancel{\rho^2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\cancel{\rho^2}} \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

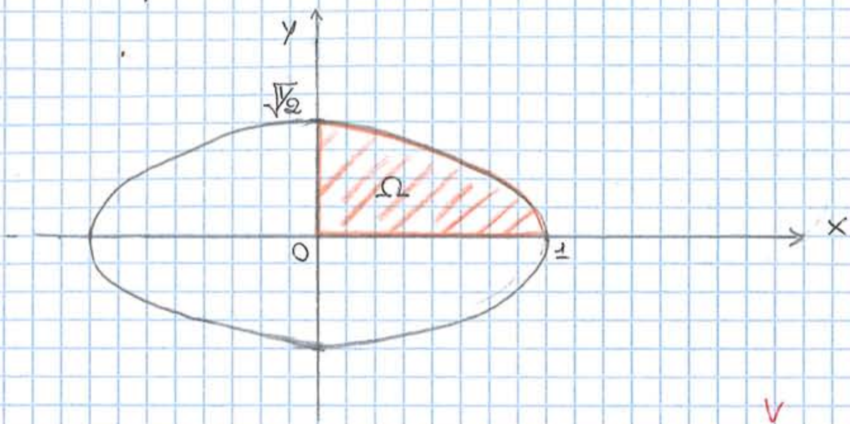
f) $\int_\Omega xy \, dx \, dy$, $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1 , x>0, y>0 \}$

$x^2 + 2y^2 = 1$

$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ eq. di un'ellisse reale

$a = 1$

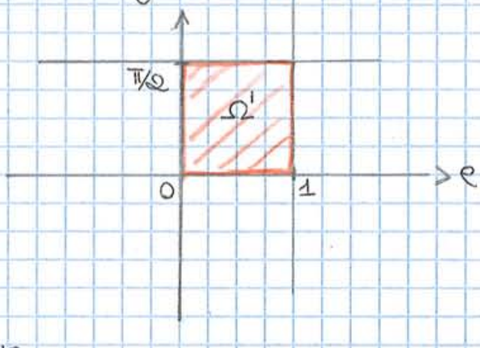
$b = \sqrt{\frac{1}{2}}$



V

$$\begin{cases} x = a\rho \cos\theta = \rho \cos\theta \\ y = b\rho \cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}\rho \cos\theta \, sen\theta \end{cases}$$

$\det(J_T) = ab\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}\rho$



$\rho \in [0,1]$

$\theta \in [0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (\rho \cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \, sen\theta \, \cancel{\rho \, d\theta} \, \frac{1}{\sqrt{2}} \rho) \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho^3 \frac{1}{2} sen\theta \cos\theta \, d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{sen^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$ V

g) $\int_\Omega x(1-y) \, dx \, dy$, $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2} , y < x < \sqrt{1-y^2} \}$

dominio uguale ad g)

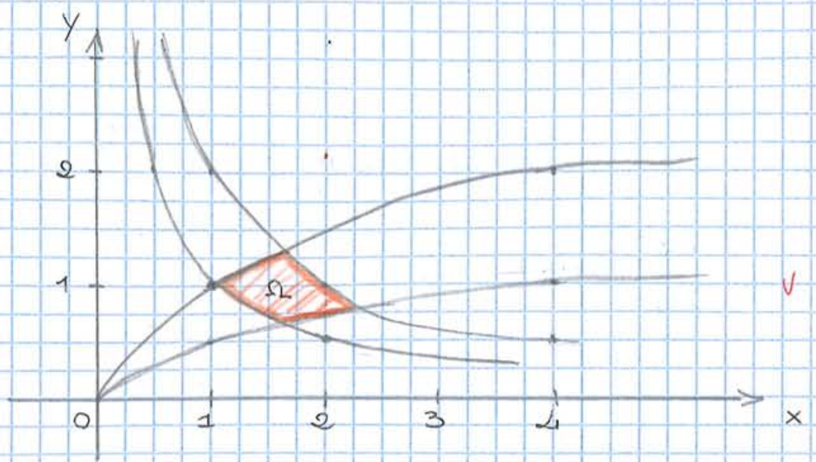
$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} x(1-y) \, dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[(1-y) \frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} (1-y)\frac{1-y^2}{2} - (1-y)\frac{y^2}{2} \, dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2\cancel{3}} \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} - y^2 + y^3 \right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2} y - \frac{1}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{24} + \frac{4}{4 \cdot 2^4} =$$

$$= \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{24} + \frac{-2+1}{16} = \frac{4\sqrt{2}}{24} - \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{16}$$ V

d) $\int_\Omega \log \frac{x}{y^2}\, dx\, dy \quad , \quad \Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x < y^2 < x \ , \ 1 \leq xy < 2 \}$



$\sqrt{\frac{x}{4}} < y < \sqrt{x}$

$\frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}$

$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in [1,2] \\ v \in [1,4] \end{matrix}$

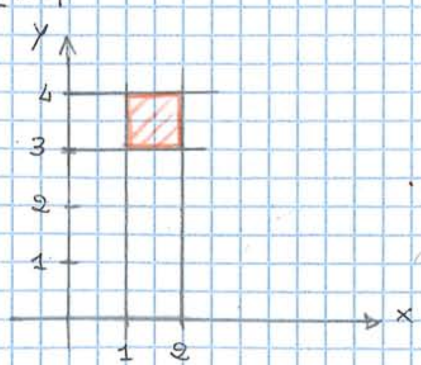
$\begin{cases} x = \frac{u}{y} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[3]{u}}\, u = \cancel{\frac{\sqrt[3]{v}}{u}} \sqrt[3]{v} \cdot \sqrt[3]{u^2} \\ v = \frac{u}{y^3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{v}} \end{cases}$

$|\det(JT)| = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y^2} & -2\frac{x}{y^3} \end{vmatrix} = -2\frac{xy}{y^3} - \frac{x}{y^2} = -3\frac{x}{y^2} = \frac{1}{3v}$

$\int_\Omega \log \frac{x}{y^2}\, dx\, dy = \int_{\Omega'} \frac{\log v}{3v}\, du\, dv = \int_1^2 \left(\int_1^4 \frac{\log v}{3v}\, dv \right) du = \frac{1}{3} \int_1^2 \left[\frac{\log^2 v}{2} \right]_1^4 du =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\log^2 4 - \underbrace{\log^2 1}_{0} \right) (2-1) = \frac{1}{6} \log^2 4$

e) $\int_\Omega \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy \quad , \quad \Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \ , \ 3 \leq y \leq 4 \}$



$\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_{y=3}^{y=4} dx =$

$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3} \right) dx =$

$= \left[-\log|x+4| + \log|x+3| \right]_1^2 =$

$= -\log 6 + \log 5 + \log 5 \cancel{+} - \log 4 =$

$= \cancel{2} \log 5^2 - \log 24 =$

$= \log 25 - \log 24$

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta = \rho\cos\theta \\ y = b\rho\cos\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$|\det J(T)| = ab\rho = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\rho$

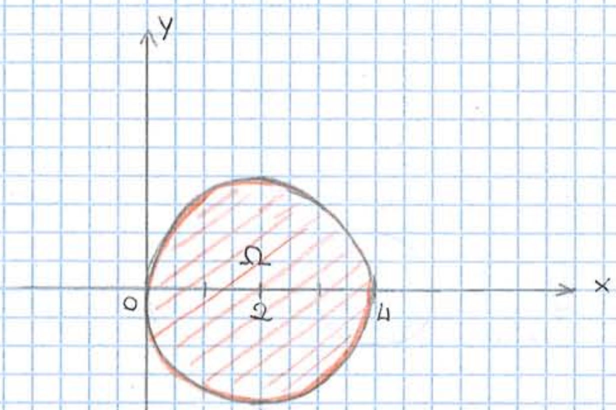
$\rho \in [0,1]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\rho^2\,\text{sen}\theta\cos\theta\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\rho\,d\theta\right)d\rho = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\rho^3\,\text{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}\rho^3\left[\frac{\text{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} d\rho = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\rho^3\,d\rho \cdot 0 = 0$$ V

D) $\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4x<0\}$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$|\det(JT)| = \rho$

$\rho \in [0,\cancel{2}]\ [0, 4\cos\theta]$

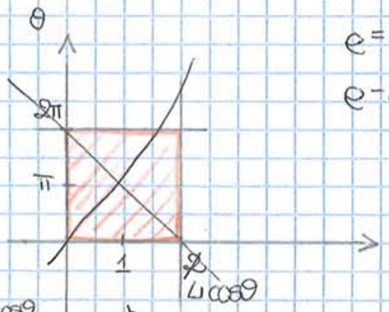
$\theta \in [0,\cancel{2\pi}]\ [-\pi,\pi]\ [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$

V

$\rho^2 - 4(\rho\cos\theta) < 0$

$\rho = 0$

$\rho - 4\cos\theta = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos\theta$



$\{\ x^2+y^2-4x = 0$

$C(2,0)$

$r = \sqrt{4} = 2$

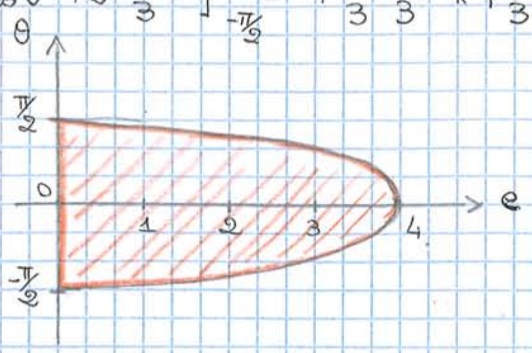
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{4\cos\theta}\sqrt{\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{4\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4^3}{3}\cos^3\theta\,d\theta =$$

N.B. $\int \cos\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta = \text{sen}\theta\cos^2\theta + \int 2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta = \text{sen}\theta\cos^2\theta + 2\,\dfrac{\text{sen}^3\theta}{3}$

$g'(x) = \cos\theta \qquad g(x) = \text{sen}\theta$

$f(x) = \cos^2\theta \qquad f'(x) = -2\cos\theta\,\text{sen}\theta$

$$= \frac{4^3}{3}\left[\text{sen}\theta\cos^2\theta + 2\frac{\text{sen}^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4^3}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4^3}{3} = \frac{256}{9}$$



V

5) $\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy \quad , \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 < 4,\ x>0,\ y>0\}$

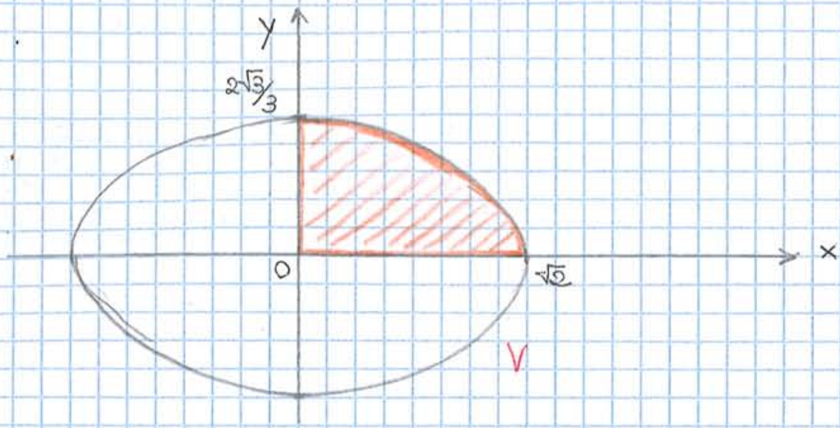
$2x^2 + 3y^2 = 4$

$\frac{2}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$

$a = \sqrt{2}$

$b = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



Senza passaggio a coordinate polari:

$2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$

$y = \frac{\sqrt{4-2x^2}}{\sqrt{3}}$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{4-2x^2}}{\sqrt{3}}} (x+y)\,dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{4-2x^2}}{\sqrt{3}}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x \frac{\sqrt{4-2x^2}}{\sqrt{3}} + \frac{4-2x^2}{6} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x \frac{\sqrt{4-2x^2}}{\sqrt{3}}\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{4-2x^2}{6}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 4} \int_0^{\sqrt{2}} -4x\sqrt{4-2x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}} 2 - x^2\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\frac{(4-2x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{2}{12\sqrt{3}} \left(-4^{3/2} \right) + \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) =$$

$$= +\frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot 2^{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{18} + \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{4}{9}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$ V

Con passaggio a coordinate polari:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta = \sqrt{2}\rho\cos\theta \\ y = b\rho\,\text{sen}\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$|\det(JT)| = ab\rho = \sqrt{2}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\rho = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\rho$

$2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$

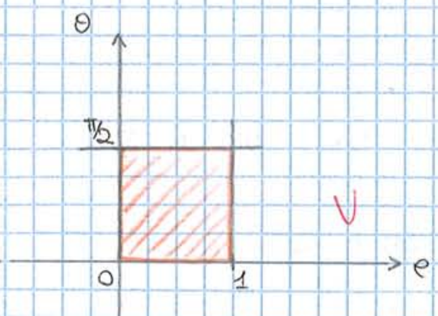
$2\rho^2\cos^2\theta \cdot a^2 + 3b^2\rho^2\,\text{sen}^2\theta - 4 = 0$

$4\rho^2\cos^2\theta + 3\,\frac{4\cdot 3}{9}\rho^2\,\text{sen}^2\theta - 4 = 0$

$4\rho^2 - 4 = 0$

$\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho \in [0,1]$

$\qquad\qquad\quad \theta \in [0, \pi/2]$



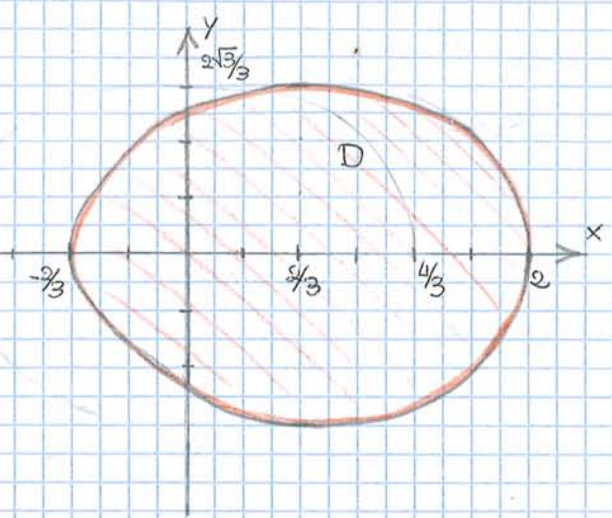
$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \left(\sqrt{2}\rho\cos\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho\,\text{sen}\theta\right)\frac{2\sqrt{6}}{3}\rho\,d\rho\right)d\theta = \frac{2}{3}\sqrt{6}\int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{2}\frac{\rho^3}{3}\cos\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\rho^3}{3}\,\text{sen}\theta\right]_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{2}\cos\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{3}\left[\sqrt{2}\,\text{sen}\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\,\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{12}}{9} + \frac{4\sqrt{18}}{27} = \frac{4\sqrt{3\cdot 2^2}}{9} + \frac{4\sqrt{2\cdot 3^2}}{27} =$$

$$= \frac{4}{9}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$ V

$$a^2 = \frac{\frac{16}{3}}{3} = \frac{16}{9} \qquad b^2 = \frac{\frac{16}{3}}{4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \leq 1$$



$$a = \frac{4}{3}$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

V

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\rho\cos\theta \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

$$|\det(JT)| = \frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\rho = \frac{8\sqrt{3}}{9}\rho$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\rho\cos\theta-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\rho\,\mathrm{sen}\theta\right)^2}{\frac{4}{3}} < 1 \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{16}{9}}\rho^2\cos^2\theta}{\cancel{\frac{16}{9}}} + \frac{\cancel{\frac{12}{9}}^{\frac{4}{3}}\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cancel{\frac{4}{3}}} < 1 \Rightarrow \rho < 1$$

$\rho \in [0,1]$

$\theta \in [0,2\pi]$

$$\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} \cancel{(-3\rho^2\cos^2\theta - 4\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + 4\rho\cos\theta + 4)\rho}\ \frac{8\sqrt{3}}{9}\rho\left[-3\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\rho\cos\theta\right)^2 - 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\rho\,\mathrm{sen}\theta\right)^2 + 4\right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\rho\cos\theta\right) + 4\right]d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{8\sqrt{3}}{9}\rho\left[-3\left(\frac{4}{9}+\frac{16}{9}\rho^2\cos^2\theta+\frac{16}{9}\rho\cos\theta\right) - 4\,\frac{4}{3}\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{8}{3} + \frac{16}{3}\rho\cos\theta + 4\right]d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{8\sqrt{3}}{9}\rho\left[-\frac{4}{3} - \frac{16}{3}\rho^2\cos^2\theta - \cancel{\frac{16}{3}\rho\cos\theta} - \frac{16}{3}\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \cancel{\frac{16}{3}\rho\cos\theta} + \cancel{4}^{\frac{8}{3}}\right]d\theta\right)d\rho$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{8\sqrt{3}}{9}\rho\left(-\frac{16}{3}\rho^2 + \frac{16}{3}\right)d\theta\right)d\rho = 2\pi\cancel{\int_0^1\left(-\frac{16\cdot8\sqrt{3}}{27}\rho^3 + \frac{64\sqrt{3}}{27}\rho\right)d\rho} =$$

$$= \cancel{2\pi\left[-\frac{16\cdot8\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{\rho^4}{4} + \frac{64\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1} = \cancel{2\pi\left(-\frac{32\sqrt{3}}{27}\right.} +$$

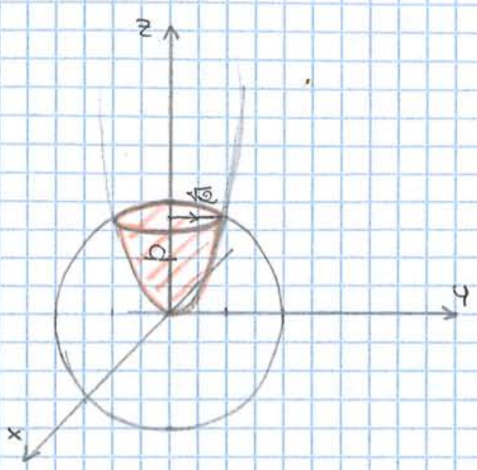
$$= 2\pi\frac{8\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{16}{3}\int_0^1(\rho-\rho^3)\,d\rho = \frac{256}{27}\sqrt{3}\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{256}{27}\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{64}{27}\sqrt{3}\pi$$

V

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 177 di 254

$= \frac{\pi}{6}(-4+\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{2}-6)$

d) $\int_\Omega (x^2+y^2+z^2-1)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<2 \ , \ x^2+y^2<z\}$



$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=z \end{cases}$$

$\det(JT)=\rho$

$x^2+y^2+z^2<2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta+z^2<2 \Rightarrow \rho^2+z^2<2 \Rightarrow z<\sqrt{2-\rho^2}$

$x^2+y^2<z \Rightarrow \rho^2<z$

$$\begin{cases} \rho^2<z<\sqrt{2-\rho^2} \\ 0<\rho<\cancel{\sqrt{2}}\ 1 \\ 0<\theta<2\pi \end{cases}$$

$\int_0^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}(\rho^2+z^2-1)\rho\,dz\right)d\theta\right)d\rho = \int_0^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left[\rho^2 z+\frac{z^3}{3}-z\right]_{z=\rho^2}^{z=\sqrt{2-\rho^2}}d\theta\right)d\rho =$

$=\int_0^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left(\rho^2\sqrt{2-\rho^2}+\frac{(2-\rho^2)\sqrt{2-\rho^2}}{3}-\sqrt{2-\rho^2}-\rho^4-\frac{\rho^5}{3}+\rho^2\right)d\theta\right)d\rho=$

$=2\pi\int_0^{1}\left(\frac{3\rho^2\sqrt{2-\rho^2}+(2-\rho^2)\sqrt{2-\rho^2}-3\sqrt{2-\rho^2}}{3}-\rho^4-\frac{\rho^5}{3}+\rho^2\right)d\rho=$

$=2\pi\int_0^{1}\left(\frac{(3\rho^2+2-\rho^2-3)\sqrt{2-\rho^2}}{3}-\rho^4-\frac{\rho^5}{3}+\rho^2\right)d\rho = 2\pi\int_0^{1}\left(\frac{(2\rho^2-1)\sqrt{2-\rho^2}}{3}-\rho^4-\frac{\rho^5}{3}+\rho^2\right)d\rho=$

$=2\pi$

$=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}(\rho^3+z^2\rho-\rho)\,dz\right)d\theta\right)d\rho=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\rho^3 z+\rho\frac{z^3}{3}-\rho z\right]_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}d\theta\right)d\rho=$

$=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\rho^3\sqrt{2-\rho^2}+\rho\frac{(2-\rho^2)\sqrt{2-\rho^2}}{3}-\rho\sqrt{2-\rho^2}-\rho^5-\frac{\rho^7}{3}+\rho^3\right)d\theta\right)d\rho=$

$=2\pi\int_0^1\left(\frac{(3\rho^3+\rho(2-\rho^2)-3\rho)\sqrt{2-\rho^2}}{3}-\rho^5-\frac{\rho^7}{3}+\rho^3\right)d\theta)\,d\rho=$

$=2\pi\int_0^1\frac{3\rho^3+2\rho-\rho^3-3\rho}{3}\sqrt{2-\rho^2}-\rho^5-\frac{\rho^7}{3}+\rho^3)\,d\theta)\,d\rho=$

$=2\pi\int_0^1\left(\frac{2\rho^3-\rho}{3}\right)\sqrt{2-\rho^2}-\rho^5-\frac{\rho^7}{3}+\rho^3\,d\rho=2\pi\int_0^1\left(\frac{2}{3}\rho^3\sqrt{2-\rho^2}-\frac{1}{3}\rho\sqrt{2-\rho^2}-\rho^5-\frac{\rho^7}{3}+\rho^3\right)d\rho=$

N.B. $\frac{2}{3}\int\rho^3\sqrt{2-\rho^2}=\frac{2}{3}\left[\frac{\rho^2}{-2}\cdot\frac{2}{3}(2-\rho^2)^{3/2}-\int\frac{2\rho}{-2}\cdot\frac{2}{3}(2-\rho^2)^{3/2}d\rho\right]=\frac{2}{3}\left[-\frac{\rho^2}{3}(2-\rho^2)^{3/2}-\frac{1}{2}\int-2\rho(2-\rho^2)^{3/2}\right]=$

$f=\rho^3 \qquad f'=3\rho^2$

$g=\sqrt{2-\rho^2} \qquad G=\frac{1}{-2\rho}\cdot\frac{2}{3}(2-\rho^2)^{3/2}$

$=\frac{2}{3}\left[-\frac{\rho^2}{3}(2-\rho^2)^{3/2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(2-\rho^2)^{5/2}\right]=-\frac{2}{9}\rho^2(2-\rho^2)^{3/2}-\frac{2}{15}(2-\rho^2)^{5/2}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left(-x^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right)dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (2x^3-3x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1-3+2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left(-x^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}x^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3-2x+\frac{1}{3}+x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}-2\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)(-2x^2-5x+1)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (-2x^2+2x^3-5x+5x^2+1-x)\,dx =$$

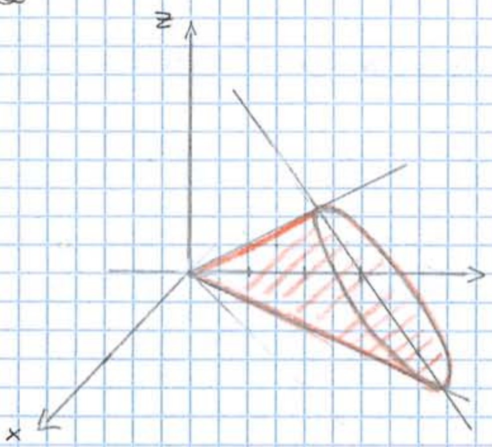
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (3x^2+2x^3-6x+1)\,dx = \frac{1}{6}\left[3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^4}{4}-6\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}\left[1+\frac{1}{2}-3+1\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{2+1-6+2}{2} = \frac{1}{12}$$

f) $\int_\Omega x|z|\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+z^2} < y < \frac{1}{2}x+3\}$

$x^2+z^2 = y^2 \Rightarrow x^2-y^2+z^2=0$ cono

$y = \frac{1}{2}x+3$ retta



x	y
0	3
2	4

$$\int_D\left(\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\frac{1}{2}x+3} x|z|\,dy\right)dx\,dz =$$

$$= \int_D \left[x|z|\,y\right]_{y=\sqrt{x^2+z^2}}^{y=\frac{1}{2}x+3} dx\,dz =$$

$$= \int_D \left(x|z|\left(\frac{1}{2}x+3\right) - x|z|\sqrt{x^2+z^2}\right)dx\,dz$$

$\sqrt{x^2+z^2} < \frac{1}{2}x+3 \Rightarrow x^2+z^2 = \frac{1}{4}x^2+9+3x \Rightarrow \frac{3}{4}x^2+z^2-3x-9=0$

$A=\frac{3}{4}$ $\quad Q = \left(+\frac{+3}{2\cdot\frac{3}{4}},0\right) = (2,0)$

$B=1$

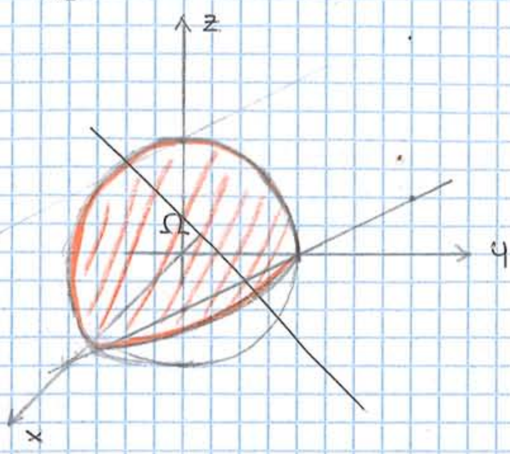
$C=-3$ $\quad S = \frac{9}{\frac{3}{4}} + 0 + 9 = 3+9 = 12$

$D=0$ $\quad a^2 = \frac{S}{A} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16 \qquad b^2 = \frac{12}{1} = 12$

$E=-9$

$$D: \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{z^2}{12} = 1$$

8) $\int_\Omega 2x \, dx\, dy\, dz$, $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ 0 < y < 2z+1,\ x^2 + y^2 + 4z^2 < 1 \}$



$$\int_D \left(\int_0^{2z+1} 2x \, dy \right) dx\, dz = \int_D \left[2xy \right]_{y=0}^{y=2z+1} dx\, dz =$$

$$= \int_D 2x(2z+1)\, dx\, dz = \int_D (4xz + 2x)\, dx\, dz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \\ y = 2z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (2z+1)^2 + 4z^2 = 1 \\ y = 2z+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4z^2 + \cancel{1} + 4z + 4z^2 = \cancel{1} \\ y = 2z+1 \end{cases}$$

$x^2 + 8z^2 + 4z = 0$

A = 1

B = 8

C = 0

D = 4

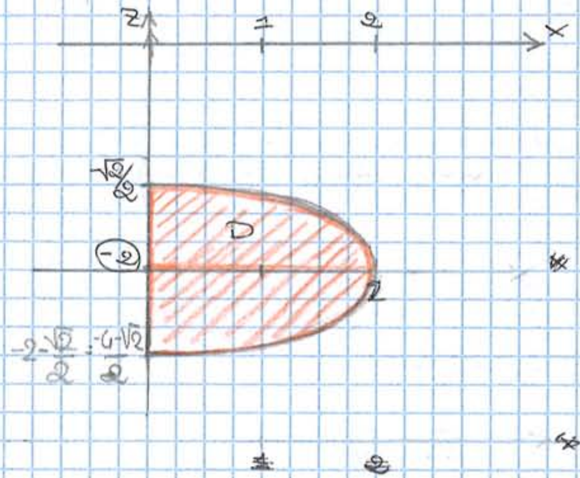
E = 0

$Q = \left(0, \frac{4}{2}\right) = (0, 2)$

$S = 0 + \frac{16}{4} - 0 = 4$

$a^2 = \frac{4}{1} = 4$ $\quad b^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{\frac{1}{2}} = 1$



$$\begin{cases} x = 2\varrho \cos\theta + 2 \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta + 2 - 2 \end{cases}$$

$|\det(\partial T)| = \frac{2}{\sqrt{2}}\varrho = \sqrt{2}\varrho$

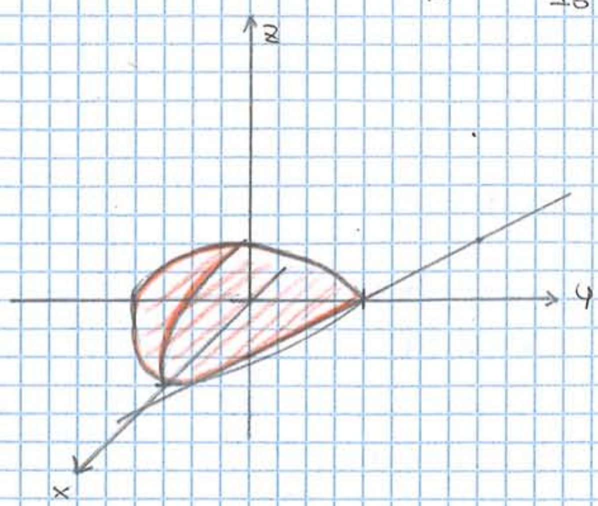
$4\varrho^2 \cos^2\theta + 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta - 2\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta - 2\right) = 0$

$4\varrho^2 \cos^2\theta + 8\left(\frac{1}{2}\varrho^2 \sin^2\theta + 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta\right) + \frac{4}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta - 8 = 0$

$4\varrho^2 \cos^2\theta + 4\varrho^2 \sin^2\theta + 32 - \frac{32}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta + \frac{4}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta - 8 = 0$

$4\varrho^2 + 24 - \frac{28}{\sqrt{2}}\varrho \sin\theta = 0$

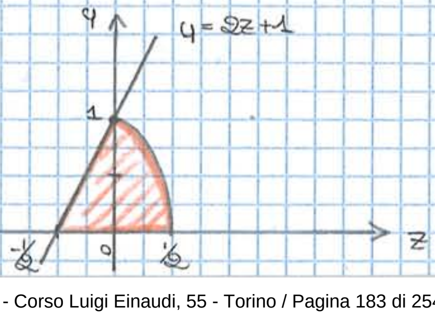
$8z^2 + 4z + x^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32x^2}}{16} = \nearrow$



$x = \sqrt{1 - 4z^2 - y^2}$

$$\int_D \left(\int_0^{\sqrt{1-4z^2-y^2}} 2x \, dx \right) dy\, dz = \int_D \left[x^2 \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-4z^2-y^2}} dy\, dz =$$

$$= \int_D (1 - 4z^2 - y^2)\, dy\, dz$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

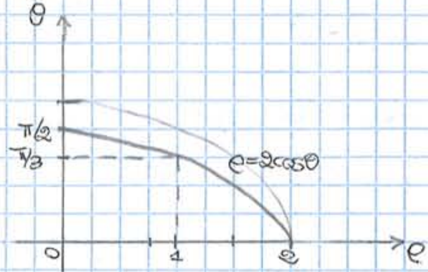
$$\begin{cases} x^2+y^2-2x<0 \\ 0<z<x \\ x^2+y^2<1 \\ y>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2-2\rho\cos\theta<0 & \rho(\rho-2\cos\theta)<0 \quad \rho<2\cos\theta \\ 0<z<\rho\cos\theta \\ \rho^2<1 & 0<\rho<1 \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta>0 & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_D\left(\int_0^{\rho\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,dz\right)d\rho\,d\theta = \int_D\left(\left[\rho^2\sin\theta\, z\right]_0^{\rho\cos\theta}\right)d\rho\,d\theta = \int_D \rho^2\sin\theta\,\rho\cos\theta\,d\theta\,d\rho = \int_D \rho^3\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\rho$$

$D = D_1 \cup D_2$

$D_1 = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^3 : 0<\rho<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3}\}$

$D_2 = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0<\rho<2\cos\theta\}$



$$\Rightarrow \int_{D_1}\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta + \int_{D_2}\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta$$

$$\int_0^1\left(\int_0^{\pi/3}\rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)d\rho = \int_0^1\rho^3\,d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{32}$$

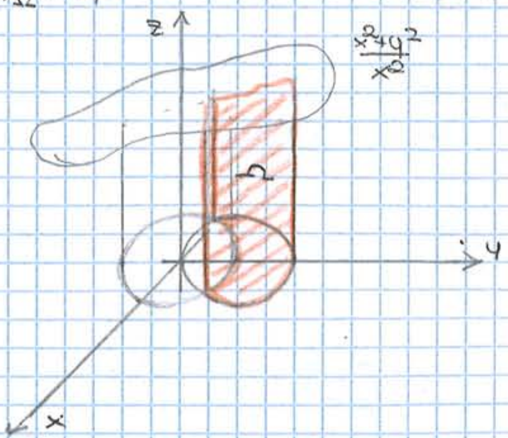
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\rho\right)d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{16\cos^4\theta}{4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -4\int_{\pi/3}^{\pi/2}-\sin\theta\cos^5\theta\,d\theta = -4\left[\frac{\cos^6\theta}{6}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{4}{6}\left(0-\frac{1}{64}\right) = +\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{6\cdot 16} = \frac{1}{96}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{32}+\frac{1}{96} = \frac{9+1}{96} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$$

i) $\displaystyle\int_\Omega\frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1<x^2+y^2<2x,\ 0<z<\frac{x^2+y^2}{x^2}\}$

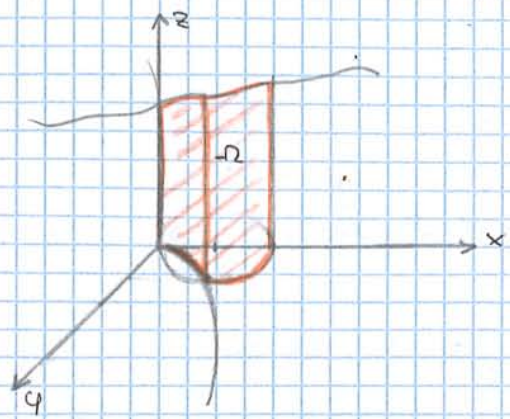


$$\int_D\left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\frac{y^2}{x^2+y^2}\,dz\right)dx\,dy = \int_D\left[\frac{y^2}{x^2+y^2}z\right]_{z=0}^{z=\frac{x^2+y^2}{x^2}}dx\,dy =$$

$$= \int_D\frac{y^2}{\cancel{x^2+y^2}}\cdot\frac{\cancel{x^2+y^2}}{x^2}\,dx\,dy = \int_D\frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy$$

D non è centrato nell'origine.

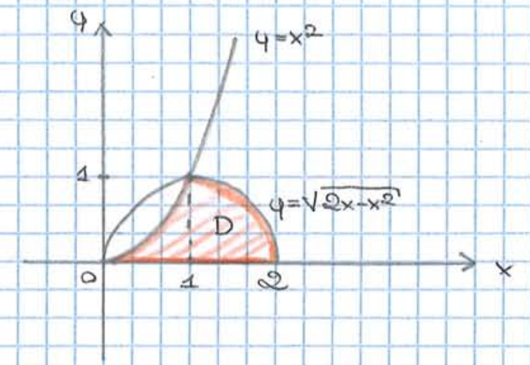
l) $\int_\Omega 2z \, dx\, dy\, dz$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x^2,\ x^2 - 2x + y^2 < 0,\ 0 < z < \sqrt{xy}\}$



$$\int_D \left(\int_0^{\sqrt{xy}} 2z \, dz \right) dx\, dy = \int_D [z^2]_0^{\sqrt{xy}} dx\, dy =$$

$$= \int_D xy \, dx\, dy$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{2x - x^2}$$



$$\int_D xy \, dx\, dy = \overbrace{\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx}^{1°} + \overbrace{\int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy \right) dx}^{2°} =$$

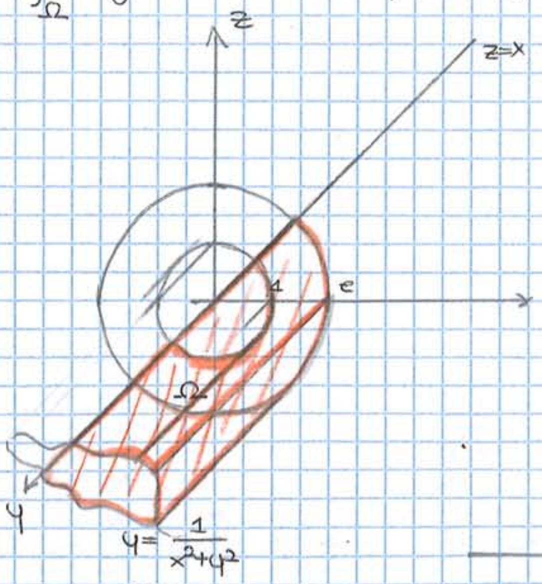
$$1°) \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2=y} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^5 \, dx = \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$2°) \int_1^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2x-x^2} dx = \int_1^2 x \frac{2x - x^2}{2} \, dx = \int_1^2 x^2 - \frac{x^3}{2} \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{64 - 48 - 8 + 3}{24} = \frac{11}{24}$$

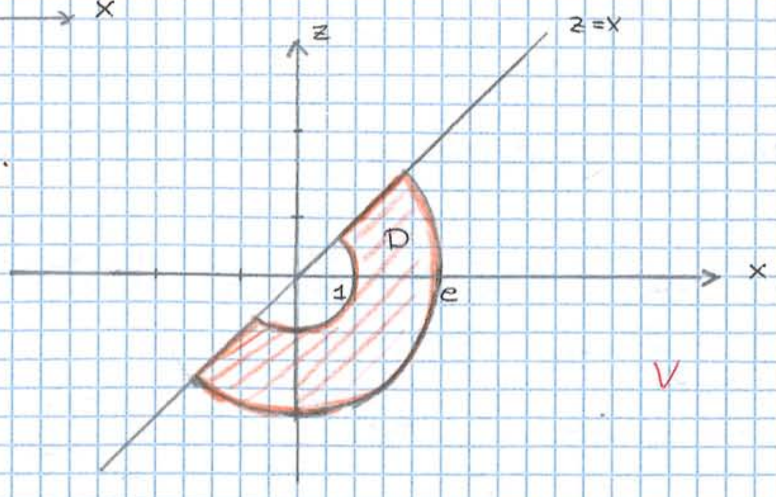
$$\Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{11}{24} = \frac{2 + 11}{24} = \frac{13}{24}$$

m) $\int_\Omega \log \sqrt{x^2 + z^2} \, dx\, dy\, dz$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + z^2 < e^2,\ z < x,\ 0 < y < \frac{1}{x^2 + y^2}\}$



$$\int_D \left(\int_0^{\frac{1}{x^2+z^2}} \log \sqrt{x^2 + z^2} \, dy \right) dx\, dz =$$

$$= \int_D \log \sqrt{x^2 + z^2} \, \frac{1}{x^2 + z^2} \, dx\, dz$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + \pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$-\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

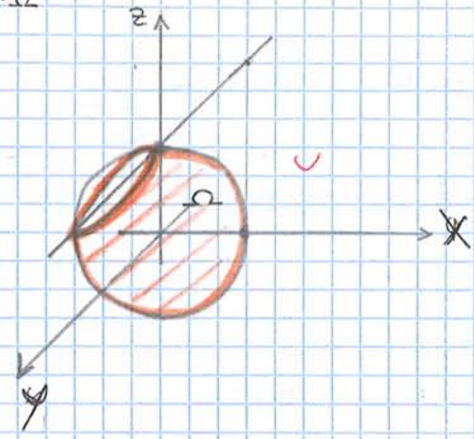
$$1 \le \rho \le e$$

c) $\int_\Omega |z| \, dx\, dy\, dz \quad , \quad \Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z^2-1 \, , \, 2x^2+y^2+z^2 < 2 \}$

$x^2+y^2-z^2 < -1 \Rightarrow -x^2-y^2+z^2 < 1$

$2x^2+y^2+z^2 < 2 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} < 1$

D) $\int_\Omega x^2|y| \qquad \Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1 \, , \, 0 < z < x+1 \}$



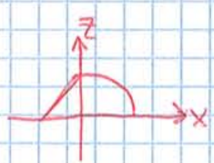
$\int_D \left(\int_0^{x+1} x^2|y| \, dz \right) dx\, dy = \int_D \left[x^2|y|z \right]_0^{x+1} dx\, dy =$

$= \int_D x^2(x+1)|y| \, dx\, dy$

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 < 1 \\ z = x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2+x^2+\cancel{1}+2x < \cancel{1} \\ z = x+1 \end{cases}$

Dominio da fare su piano XZ



$2x^2+y^2+2x = 0$

$A=2$

$B=1$

$C=2$

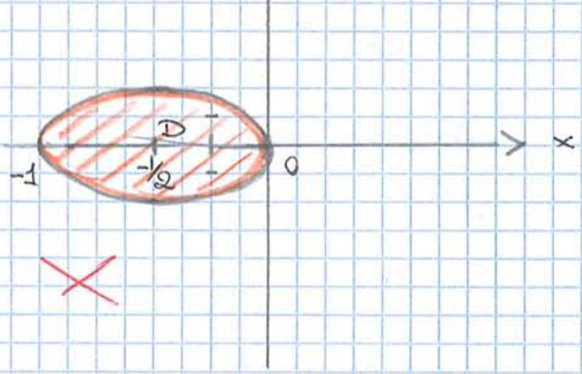
$D=0$

$E=0$

$Q\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$S = \frac{4}{8} + 0 + 0 = \frac{1}{2}$

$a^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \qquad b^2 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$



$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$y>0 \Rightarrow y = +\sqrt{-2x-2x^2}$

$y<0 \Rightarrow y = -\sqrt{-2x-2x^2}$

$\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{-2x-2x^2}}^0 -x^2(x+1)\, y \, dy \right) dx + \int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{-2x-2x^2}} +x^2(x+1)\, y \, dy \right) dx =$

1°) $\int_{-1}^0 \left[-x^2(x+1)\frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{-2x-2x^2}}^0 dx = \int_{-1}^0 -x^2(x+1)\frac{-\cancel{2}x-\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} dx = \int_{-1}^0 -x^2(x+1)(-x-x^2) \, dx =$

$= \int_{-1}^0 -x^2(-x^2-x-x^3-x^2) \, dx = \int_{-1}^0 x^4+x^3+x^5+x^4 \, dx = \left[2\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 =$

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{24+15+10}{60} = \frac{49}{60}$

N.B. $\int y^2 \cos y = y^2 \operatorname{sen} y - \int 2y \operatorname{sen} y = y^2 \operatorname{sen} y - \left(-2y\cos y + \int +2\cos y\right) =$

$g' = \cos y \quad g = \operatorname{sen} y \quad | \quad g' = \operatorname{sen} y \quad g = -\cos y$

$f = y^2 \quad f' = 2y \quad | \quad f = 2y \quad f' = 2$

$= y^2 \operatorname{sen} y + 2y \cos y - 2\operatorname{sen} y$

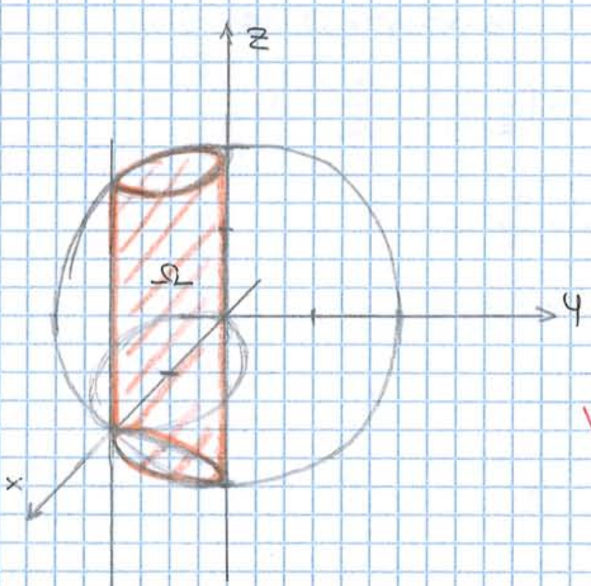
$= \left[\frac{3}{8}\pi^2 \operatorname{sen} y - \frac{3}{2}\left(y^2 \operatorname{sen} y + 2y\cos y - 2\operatorname{sen} y\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[\frac{3}{8}\pi^2 \operatorname{sen} y - \frac{3}{2}y^2 \operatorname{sen} y - 3y\underbrace{\cancel{\cos y}}_{0} + 3\operatorname{sen} y\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$= \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{4} + 3 = 6$ V

c) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z < 3x^2+5y^2,\ z < 8-x^2-3y^2\}$ X

d) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 3|z|,\ x^2+z^2 > 1,\ z^2-2 < x < 1+\frac{1}{2}|x|\}$ X

e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4,\ x^2+y^2-2x < 0\}$ X

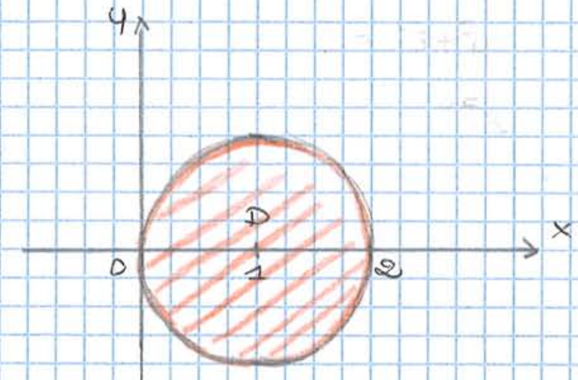


$z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2}$

$\iint_D \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{+\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy = \int_D \sqrt{4-x^2-y^2} + \sqrt{4-x^2-y^2}\ dx\,dy$

$= \int_D 2\sqrt{4-x^2-y^2}\ dx\,dy$

V



~~$\rho^2\cos^2\theta +$~~ $\begin{cases} x = \cancel{1} + \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$\cancel{1} + \rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 2(1+\rho\cos\theta) \le 0$

~~$1 + \rho^2 + 2\rho\cos\theta - 2 - 2\rho\cos\theta \le 0$~~ $\quad \rho^2 + 2\rho\cos\theta \le 0$

~~$\rho^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 < \rho < 1$~~ $\quad \rho(\rho - 2\cos\theta) \le 0$

$0 \le \rho \le 2\cos\theta$

~~$0 \le \theta \le 2\pi$~~ $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} 2\sqrt{4 - \rho^2}\ \rho\ d\rho\right) d\theta = \pi\left[\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]_0$

~~$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2\sqrt{4-1-\rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta - \rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\ \rho\ d\rho\right) d\theta =$~~

~~$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2\sqrt{3-\rho^2-2\rho\cos\theta}\ \rho\ d\rho\right) d\theta$~~ $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\left[\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{2\cos\theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{8}{3}\ldots$

X

CAPITOLO 4 - Integrali curvilinei e di superficie

2.1) Integrali curvilinei di I^ specie

a) $\int_\gamma x \qquad \gamma(t) = (t, t^2) \qquad t \in [0, a] \qquad a > 0$

$\int_\gamma f \, ds = \int_\gamma f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$

$\gamma'(t) = (1, 2t)$ V

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

$\int_0^a t\sqrt{1+4t^2} \, dt = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left[(1+4t^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{1}{12}\left[(1+4a^2)^{3/2} - 1\right]$

b) $\int_\gamma \sqrt{1-y^2} \quad , \gamma(t) = (\sin t, \cos t) \qquad t \in [0, \pi]$

$\gamma'(t) = (\cos t, -\sin t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ V

$\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2 t} \, dt = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \theta} \, dt = \left[-\cos t\right]_0^\pi = 1+1 = 2$

c) $\int_\gamma \frac{x}{1+y^2} \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \pi/2]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = 1$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} \, dt = \cancel{\left[\log(1+\sin^2 t)\right]_0^{\pi/2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \left[\operatorname{arctg} y\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ V

$\sin t = y$

$dt \cos t = dy$

$y(0) = 0$

$y(\pi/2) = 1$

d) $\int_\gamma y^2 \qquad \gamma(t) = (t, e^t) \qquad t \in [0, \log 2]$

$\begin{cases} \gamma'(t) = (1, e^t) \\ \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}} \end{cases}$

$\int_0^{\log 2} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left[(1+e^{2t})^{3/2}\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+e^{\log 4})^{3/2} - \frac{2}{3}2^{3/2}\right] \cancel{= \frac{2}{3}(1+(4-1)) - \frac{8}{3}}$

$= \frac{1}{3}\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right)$ V

1) $\int_\gamma (x^2+y^2+z)$ $\quad \gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, t) \quad t \in [0,2\pi]$

$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$

$$\int_0^{2\pi} (4+t)\sqrt{5}\, dt = \left[4\sqrt{5}\, t + \sqrt{5}\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 8\sqrt{5}\pi + \sqrt{5}\frac{\cancel{4}^{2}\pi^2}{\cancel{2}} = 8\sqrt{5}\pi + 2\sqrt{5}\pi^2 =$$
$$= 2\sqrt{5}\pi(4+\pi) \quad ✓$$

1) $\int_\gamma \sqrt{12+9x-12\sqrt{z}}$ $\quad \gamma(t) = (t^2, t^3-t^2, t^2) \quad t \in [1,2]$

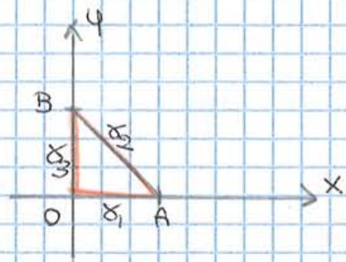
$\gamma'(t) = (2t, 3t^2-2t, 2t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 4t^2 + 4t^2 - 12t^3} = \sqrt{12t^2 + 9t^4 - 12t^3}$

$$\int_1^2 \sqrt{12+9t^2-12t}\cdot\sqrt{12t^2+9t^4-12t^3}\, dt = \int_1^2 \sqrt{12+9t^2-12t}\cdot t\sqrt{\cancel{t^2}(12+9t^2-12t)}\, dt =$$
$$= \int_1^2 t(12+9t^2-12t)\, dt = \int_1^2 (12t + 9t^3 - 12t^2)\, dt =$$
$$= \left[\cancel{12}^{6}\frac{t^2}{\cancel{2}} + 9\frac{t^4}{4} - \cancel{12}^{4}\frac{t^3}{\cancel{3}} \right]_1^2 = \cancel{8}\,24 + \frac{9}{4}16 - 32 - 6 - \frac{9}{4} + 4 = 24+36-32-6-\frac{9}{4}-4 =$$
$$= \cancel{18}^{26} - \frac{9}{4} = \frac{95}{4} \quad ✓$$

2.2) a) $f(x,y) = x+y$

γ bordo triangolo $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$



$\gamma_1: \begin{cases} x = 0+t = t \\ y = 0+0 = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} f\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1}\, dt = \frac{1}{2}$$

$\gamma_2: \begin{cases} x = 1+(-t) = 1-t \\ y = 0+t = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_2} f\, ds = \int_0^1 (1-\cancel{t}+\cancel{t})\sqrt{(-1)^2+(1)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$$

$\gamma_3: \begin{cases} x = 0+0 = 0 \\ y = 0+t = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

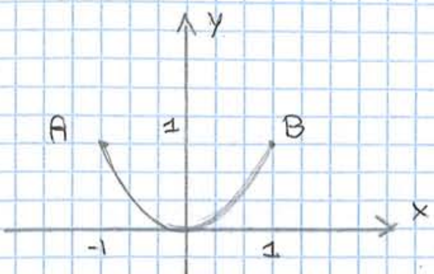
$$\int_{\gamma_3} f\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1}\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\, ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1+\sqrt{2} \quad ✓$$

$$\int_0^{2\pi} 2\cdot 4\cos^2 t\,|2\,\text{sen}^2 t|\,dt = \int_0^{2\pi} 16\cos^2\theta\,|\text{sen}\,t| = 32\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\text{sen}\,t\,dt =$$

$$= -32\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = +\frac{32}{3}+\frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

e) $f(x,y)=\sqrt{1+4x^2}$



$$\gamma(t):\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t\in[-1,1]$$

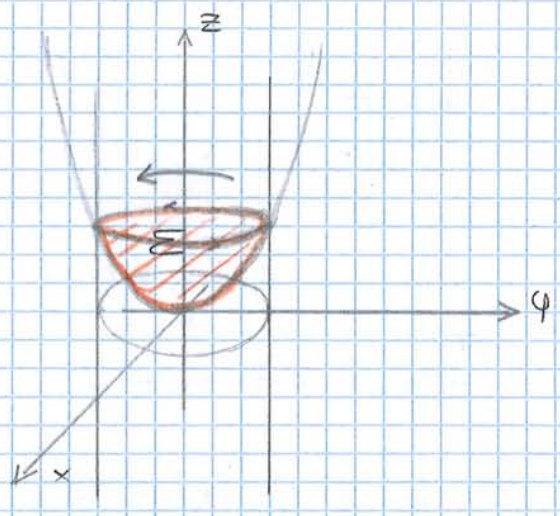
$y=x^2 \Rightarrow \gamma(t)=(t,t^2)$ si trova dall'equazione

$\gamma'(t) = (1, 2t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4t^2}\cdot\sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} 1+4t^2\,dt = \left[t+4\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1+\frac{4}{3}+1+\frac{4}{3} = 2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$$

f) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+2y^2}{z}$, $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1\}$



$\gamma(t) : (\cos t, \text{sen}\,t, 1)$

$\gamma'(t) : (-\text{sen}\,t, \cos t, 0)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\text{sen}^2 t+\cos^2 t} = 1$

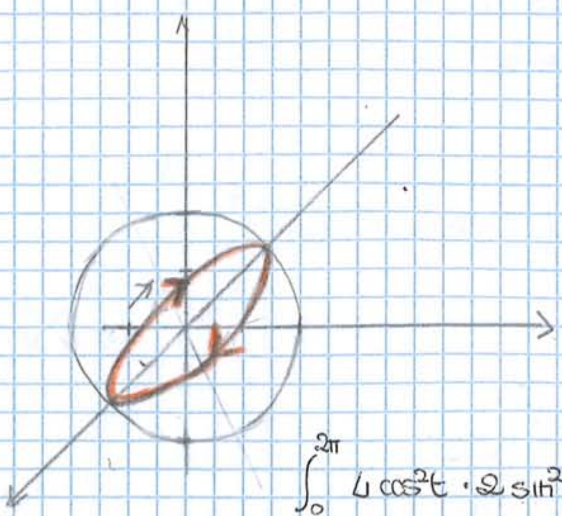
$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t+2\,\text{sen}^2 t}{1}\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t+2\,\text{sen}^2 t\,dt =$$

$$= \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\text{sen}(2\theta)}{4}+\frac{2\theta}{2}-2\,\frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\,2\pi =$$

$$= 3\pi$$

g) $f(x,y,z) = x^2y^2$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & \text{sfera di raggio } 2 \\ z=y & \text{piano}\end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2+y^2+y^2=4 \\ x^2+2y^2=4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$$

$\gamma : [0,2\pi]$

$\gamma(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\,\text{sin}\,t, \sqrt{2}\,\text{sin}\,t)$

$\gamma'(t) = (-2\,\text{sen}\,t, \sqrt{2}\cos t, +\sqrt{2}\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\,\text{sen}^2 t+2\cos^2 t+2\cos^2 t} =$

$= \sqrt{4} = 2$

$$\int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\cdot 2\sin^2 t\, 2\,dt = \cancel{16\int_0^{2\pi}\cos^2 t(1-\cos^2 t)\,dt} = \cancel{\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \cos^4 t)\,dt} =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\,\text{sen}^2 t\,dt = 8\int_0^{2\pi}\text{sen}^2(2t)\,dt = 8\left[\frac{2t}{2}-\frac{\text{sen}(4t)}{8}\right]_0^{2\pi} = 8\pi$$