NUMERO: 1518A - ANNO: 2015

A P P U N T I

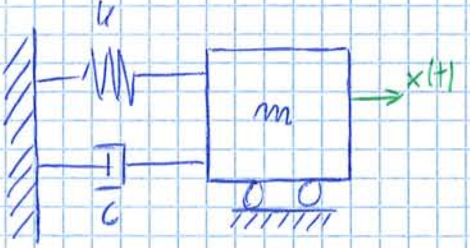
STUDENTE: Di Tullio

MATERIA: Dinamica dei Sistemi Meccanici. Prof.Marchesiello

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI (Teoria) (Parte 1.)

Dinamica: studia la traiettoria del moto del corpo in relazione alle cause che lo producono. Esempi possono essere il transitorio di frenata di un veicolo o un problema di urti.

- La risposta libera è l'andamento del moto nel tempo di una massa m a partire da generiche condizioni iniziali, la risposta forzata è il comportamento del sistema soggetto a un'azione esterna.

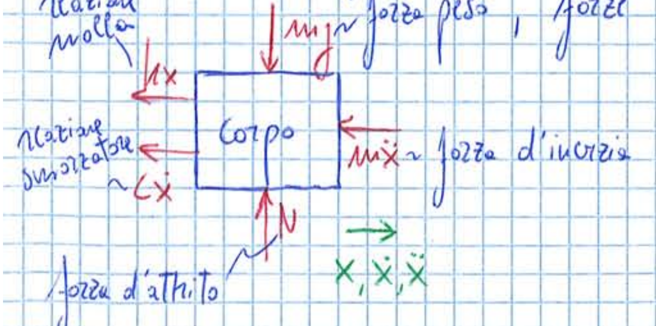


Si considera un sistema a un grado di libertà (SDOF), la massa m è vincolata a traslare orizzontalmente e sono ad essa collegate una molla di rigidezza k e uno smorzatore viscoso con costante c.

Il sistema è considerato discreto: è costituito da elementi isolati, non contigui tra loro. In assenza di fenomeni dissipativi, le oscillazioni della massa tendono all'infinito; nella realtà a c si associa una capacità dissipativa e per mantenere il moto è necessaria l'introduzione di una forzante.

Per 1 DOF basta un'unica coordinata per descrivere il sistema, che è lineare cioè governato da un'eq. lineare invariante (SDOF LI).

- Diagramma di corpo libero: rappresentazione grafica F e M agenti (comprese le forze peso, forze d'inerzia (approccio D'Alembert)



Equilibrio dinamico per $\Sigma F_i = 0$

$\uparrow \quad N - mg = 0$

$\leftarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

L'espressione di equilibrio è un'equazione lineare tempo invariata (LTI), cioè un'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti. Nel campo lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

$$(LTI): \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$$

Soluzione cercata: $x(t) = A \cdot e^{st}$

La parte reale delle sol. sempre negativa indica un andamento decrescente dell'ampiezza nel tempo. Tale caratteristica è tipica di un sistema stabile.

Si prosegue trovando le risposte del sistema: * coeff. derivata seconda

$$* \; m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\cdot\dot{x} + \frac{k}{m}\cdot x = 0$$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n \quad , \quad \frac{k}{m} = \omega_n^2 \Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_n\cdot\dot{x} + \omega_n^2\cdot x = 0$$

ω_n: pulsazione naturale, indica che in assenza di smorzamento, il sistema oscilla liberamente con questa pulsazione.

• sistema sovrasmorzato $(\xi > 1)$: A_1, A_2 si determinano con le condizioni iniziali, che normalmente sono la posizione e la velocità all'istante iniziale $\boxed{x(0) \; , \; \dot{x}(0)}$ problema di Cauchy

$$x(t) = A_1\cdot e^{s_1 t} + A_2\cdot e^{s_2 t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = A_1\cdot e^{t\cdot(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1})} + A_2\cdot e^{t\cdot(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1})}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

• sistema critico $(\xi = 1)$: gli zeri sono coincidenti e non è presente instabilità.

$$x(t) = e^{st}\cdot(A_1 + A_2) \quad \Rightarrow \quad x(t) = (A_1 + A_2)\cdot e^{-\omega_n t}$$

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

• sistema sottosmorzato $(\xi < 1)$: caso più frequente in pratica. Essendo $\Delta < 0$, gli zeri del polinomio sono

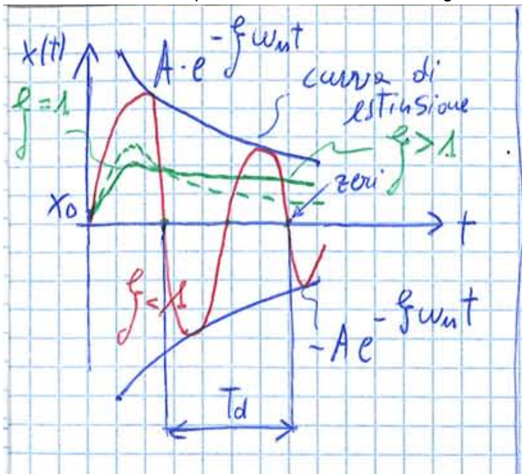
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad i = \sqrt{-1}$$

Pulsazione delle oscillazioni libere smorzate (pulsazione smorzata): $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\,\omega_d \quad \Rightarrow \quad x(t) = A_1\cdot e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t} + A_2\cdot e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t}$$

$$x(t) = (A_1\cdot e^{-i\omega_d t} + A_2\cdot e^{i\omega_d t})\, e^{-\xi\omega_n t}$$

Applicando la forma trigonometrica dei numeri complessi (formule di Eulero):



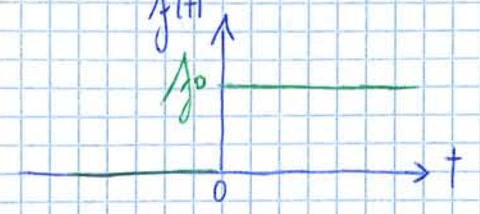
- **Forzanti** → si studia la risposta al gradino.

Considerando il sistema precedente soggetto a una forzante, si vuole determinare la risposta del sistema.

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ forzante

$f(t) = f_0 \cdot \underbrace{u(t)}_{\text{gradino unitario x } t \text{ positivo}}$

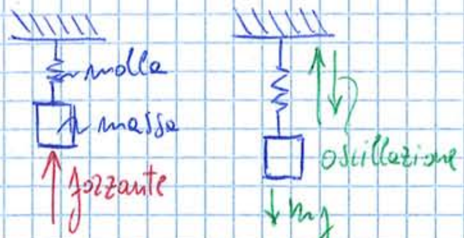
$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} = 0 & , t < 0 \\ = f_0 & , t \geq 0 \end{cases}$$



un gradino è una sollecitazione che vale zero fin quando il tempo è zero, assume valori costanti per tempi positivi.

per $t \geq 0$: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cdot 1$

si ipotizzano le seguenti cond. iniziali $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$, la soluzione dell'eq. è data dalla risposta a regime (soluzione particolare x_p) e dall'integrale generale dell'omogenea associata (soluzione generale x_g):



la forza peso permette lo spostamento, ma non influenza ω_d

$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

- Integrale generale: $x_g(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t}$

$$\lim_{t \to \infty} x_g(t) = 0$$

- Integrale particolare: A regime la forza dello smorzamento viene contrastata dalla forza elastica della molla.

$$\lim_{t \to \infty} x_g(t) + x_p(t) = x_p = \frac{f_0}{k}$$

Le cond. iniziali s'impongono sulla sol. completa

$$x(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t} + \frac{f_0}{k}$$

$$\dot{x}(t) = \omega_d \cdot (-a \sin \omega_d t + b \cos \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t} - \xi \omega_n (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t}$$

Imponendo le cond. iniziali:
$$\begin{cases} x(0) = a + \frac{f_0}{k} = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega_d \cdot b - \xi \omega_n \cdot a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{f_0}{k} \\ b = \frac{\xi \omega_n a}{\omega_d} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 132

$$f(t) = F_0 \cdot \cos\omega t + F_0 \sin\omega t = \mathrm{Re}\left[F_0 \cdot e^{i\omega t}\right] + \mathrm{Im}\left[F_0 \cdot e^{i\omega t}\right]$$

Eulero: $F_0 \cdot e^{i\omega t} = F_0 \cdot \cos\omega t + F_0 \sin\omega t$

$$F_0 \cdot \cos\omega t = \mathrm{Re}\left(F_0 \cdot e^{i\omega t}\right) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + kx = F_0 \cdot e^{i\omega t}$$, eq. complessa SDOF

$F_0 \in \mathbb{R}$ è un'ampiezza, la soluzione cercata è la parte reale della risultante in campo complesso, quindi la soluzione a regime con $X_0 \in \mathbb{C}$ è:

$$x(t) = x_p(t) = X_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = i\omega \cdot e^{i\omega t} X_0$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot X_0$$

$$\Rightarrow \left|-m \cdot \omega^2 e^{i\omega t} + c \cdot i\omega e^{i\omega t} + k \cdot e^{i\omega t}\right| X_0 = F_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$-m X_0 \omega^2 \cancel{e^{i\omega t}} + c i X_0 \omega \cancel{e^{i\omega t}} + k X_0 \cancel{e^{i\omega t}} = F_0 \cdot \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\left|k + c \cdot i\omega - m\omega^2\right| X_0 = F_0$$

Dividendo per la massa m:

$$\left|\frac{k}{m} + i\frac{\omega c}{m} - \omega^2\right| X_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\left|\omega_n^2 + i\, 2\xi\omega\omega_n - \omega^2\right| X_0 = \frac{F_0}{m}$$

$X_{statico}$: spostamento statico, spost. che avrebbe il sistema se $\omega \to 0$ e la cosinusoide diventasse uno scalino $\left|\frac{F_0}{k}\right|$

Si adimensionalizza il tutto dividendo per ω_n^2:

$$\left[1 + i \cdot 2\xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n} - \left|\frac{\omega}{\omega_n}\right|^2\right] X_0 = \frac{F_0}{m \cdot \omega_n^2} = \frac{F_0}{k} = X_{statico}$$

$$Q = \frac{X_0}{X_{ST}} = \frac{1}{1 - \left|\frac{\omega}{\omega_n}\right|^2 + i \cdot 2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$, Q: fattore di amplificazione (o guadagno dinamico) $Q = Q(i\omega)$, con $Q \in \mathbb{C}$

È possibile trovare il guadagno Q espresso come:

$$Q(s) = \frac{X(s)}{\frac{F(s)}{k}}$$, con $s = i\omega$ → approccio utilizzato nei controlli

$X(s)$: spost. in uscita

$\frac{F(s)}{k}$: spost. in ingresso

s: variabile di Laplace, Q ottenuto dalla trasformata di Laplace.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 132

In presenza di carichi molto piccoli è possibile ottenere risposte molto grandi nell'intorno di $r = 1$. Inoltre i sistemi hanno più frequenze proprie.

$\lim_{r \to 0} \tan\varphi = 0^+$, per $\varphi \to 0$

$\lim_{r \to \infty} \tan\varphi = 0^-$, per $\varphi \to \pi$

per $\xi = 0$ e $r \to 1$ si ha una forma indeterminata $0/0$.

denominatore di $|Q|$

Si vuole trovare il massimo dell'ampiezza Q : $\frac{d}{dr}\left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2\right] = 0$

$$\frac{d}{dr}(1 + r^4 - 2r^2 + 4\xi^2 r^2) = 4r^3 - 4r + 8\xi^2 r = 2(1-r^2)(-2r) + 4\xi^2 \cdot 2r = 0$$

$r\left[4r^2 + (8\xi^2 - 4)\right] = 0$, sol. $r = 0$, soluzione non interessante

$$r = \pm\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Le freq. hanno senso solo se sono positive: $r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, Risonanza

Si definisce la pulsazione di risonanza, quella che rende l'ampiezza massima

$$\omega_r \overset{def.}{=} \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Con smorzamenti bassi si hanno risposte più elevate. Per avere il fenomeno di amplificazione dinamica il valore di ξ deve essere:

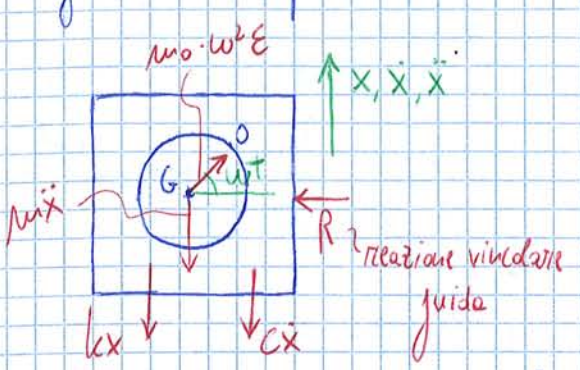
$\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 70,7\ \%$, per valori minori di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha assonanza e l'andamento in Bode è monotono decrescente.

sol. particolare $x_p(t) = \mathrm{Re}\left[x_0 \cdot e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[|x_0| \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t}\right] = |x_0| \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

Si arriva allo stesso risultato applicando il metodo dei vettori rotanti $\ldots = |x_0| \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

ω_n e ω_d descrivono il comportamento libero del sistema, mentre ω ($\circ\ \Omega$) e ω_r il comportamento forzato.

Diagramma di corpo libero.



$R = 0$: con vincolo nullo la lavatrice si sposta anche nella direzione perp. a x, la risultante si converte tutta in forze d'inerzia.
($m\ddot{x}$ include il contributo di m_0)

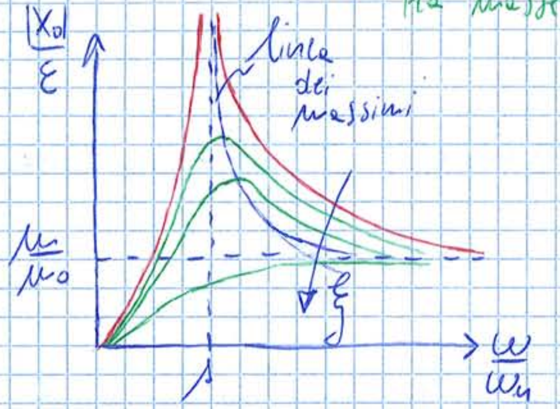
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 \omega^2 \varepsilon \sin \omega t = \ldots$$
$$\ldots = \mathrm{Im}\left[m_0 \omega^2 \varepsilon e^{i\omega t}\right] = m_0 \omega^2 \varepsilon e^{i\omega t}$$

Risposta del sistema: $x(t) = X_0 \cdot e^{i\omega t}$, $\dot{x}(t) = i\omega X_0 e^{i\omega t}$, $\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow (-m\omega^2 + i\omega c + k) \cdot X_0 \cdot \cancel{e^{i\omega t}} = m_0 \omega^2 \varepsilon \cancel{e^{i\omega t}}$$, si procede adimensionalizzando

$$\frac{X_0}{\varepsilon} = \frac{m_0 \omega^2}{k - m\omega^2 + i\omega c} = \frac{m_0}{m} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i 2 \xi \frac{\omega}{\omega_n}} = \underbrace{\frac{m_0}{m}}_{\text{si introduce il rapporto tra masse}} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot Q(i\omega)$$

Vale:
$$\begin{cases} \frac{X_0}{\varepsilon} = \frac{m_0}{m} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot Q(i\omega) \\ \tan \varphi = \frac{2 \xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{cases}$$



Essendo presente ω^2, si considera anche la risonanza: $\omega_{ris} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}}$, non richiesta

Nella progettazione di una lavatrice si considera la mobilità della carcassa e l'interfaccia col mondo esterno, che arrecano un disturbo (rumore prodotto), per valutare ciò occorre calcolare la forza trasmessa a terra, trovare il vincolo F_v e la forza applicata F_0, detta forza di riferimento, si parla di trasmissibilità.

Trasmissibilità: ciò che viene trasmesso tra ingresso e uscita (funzione di trasferimento).
Interazione con i vicini.

Definizione classica: trasmissibilità $T = \frac{f_v(t)}{f_0(t)} = \frac{F_v}{F_0}$, con $F_0 =$ costante

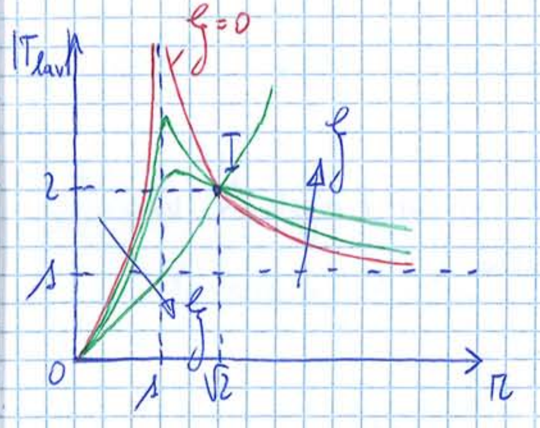
Da notare che: $|T_{lav}(\sqrt{2})| = 2 \quad \forall \xi$, è indipendente dallo smorzamento, quindi si definisce "punto d'invarianza", il punto attraverso cui passano tutte le curve per $r = \sqrt{2}$ ($I = (\sqrt{2}, 2)$ nel grafico).

Per costruire il grafico $T_{lav} = T_{lav}(r)$ bisogna cominciare da alcuni punti notevoli:

$|T_{lav}(0)| = 0$, punto di partenza delle curve

$\lim\limits_{r \to \infty} |T_{lav}| = \infty$, per smorzamento $\xi > 0$ le curve crescono fino ad infinito.

$r \to \infty \Leftrightarrow \omega \to \infty$ $\quad \lim\limits_{r \to \infty} |T_{lav}| = 1$ e $\lim\limits_{\omega \to \omega_n} |T| = \infty$, per smorzamento nullo $\xi = 0$



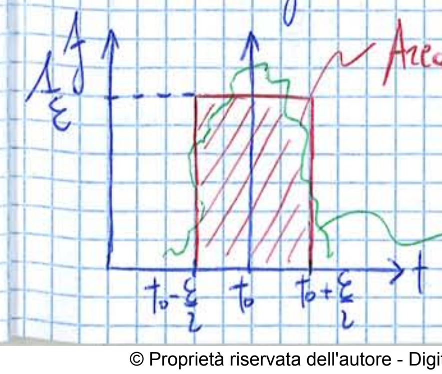
Se $\xi = 0$ la forza tende a una costante, quindi non è sempre conveniente aumentare lo smorzamento, $|T_{lav}|$ aumenta all'aumentare di r. Per ottenere grandi vel. angolari si fa in modo che r sia grande e si modifica $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ riducendola, nella pratica si aumenta la massa della carcassa con un blocco di cemento.

Tuttavia lo smorzamento ξ non deve essere troppo piccolo, altrimenti in risonanza si hanno grandi spostamenti del blocco. Nel grafico le curve descrivono il comportamento a regime e quindi si presentano inadatte per gestire il transitorio.

- Risposta all'impulso (alla forzante generica)

Per calcolare la forzante generica è necessario ricavare la risposta all'impulso (IRF: impulse response function, $h(t)$) in modo da poter poi calcolare l'integrale di convoluzione e, quindi, la forzante generica.

Impulso: forzante che dura un lasso di tempo breve rispetto al periodo di oscillazione, con una grandezza che, in un istante infinitesimo, assume un valore tendente a infinito



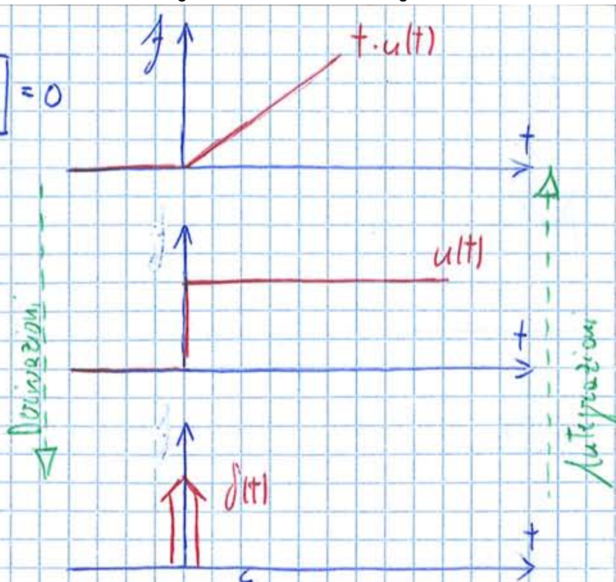
$\text{Area} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left[\left(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(t_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] = 1 \Rightarrow$ impulso unitario

per un impulso $\varepsilon \to 0 \Rightarrow f \to \infty$

martellata (caso reale) $\to$ il comportamento si avvicina all'impulso considerato.

$$m\,[x(0^+) - \underbrace{\cancel{x(0^-)}}_{\text{per ipotesi } =0}] + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\underbrace{\cancel{\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} c\, x(t)\, dt}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} x(t)\, dt\, d\tau}}_{=0} \right] = 0$$

Ipotizzando $x(t)$ limitata, integrandola su un intervallo infinitesimo, questa restituisce il valore nullo. Di conseguenza si ha:



$\Rightarrow x(0^+) = 0$, I^a condizione iniziale

Si vuole ottenere la seconda condizione

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \delta(t)\, dt}_{=1} = m\,[\dot{x}(0^+) - \underbrace{\cancel{\dot{x}(0^-)}}_{=0 \text{ per ipotesi}}] + c\,[\underbrace{\cancel{x(0^+)}}_{=0} - \underbrace{\cancel{x(0^-)}}_{=0}] + \lim_{\varepsilon \to 0} k \underbrace{\cancel{\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} x(\tau)\, d\tau}}_{=0} = 1$$

$\Rightarrow \dot{x}(0^+) = \dfrac{1}{m}$, II^a condizione iniziale

Si cerca la risposta del sistema $\quad x(t) = e^{-\xi \omega_n t}(a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)$,

$$\dot{x}(t) = -\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t}(a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) + e^{-\xi \omega_n t}(-\omega_d a \sin \omega_d t + \omega_d b \cos \omega_d t)$$

Si applicano le cond. iniziali
$$\begin{cases} x(0) = a = 0 \\ \dot{x}(0) = -\xi \omega_n a + \omega_d b = \dfrac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{1}{m \omega_d} \end{cases}$$

(IRF)

Risposta all'impulso unitario per un sistema sottosmorzato vale:

$$x(t) = h(t) = \frac{1}{m\omega_d} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin \omega_d t \cdot u(t)$$

, per $t<0$ la risposta è nulla

$h(t)$ è una funzione pseudo-periodica, s'immagina di dare una martellata e ciò equivale a pensare a un sistema fermo a cui s'impone una certa velocità.

Per calcolare la risposta alla forzante generica bisogna prima conoscere questa appena determinata.

Le situazioni viste finora sono casi particolari della risposta di un sistema meccanico sollecitato da una forzante generica.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$, "Integrale di convoluzione" (o di Duhamel)

Per calcolare la risposta in qualunque istante di tempo t per una forzante generica, questo è lo strumento da utilizzare, purché siano nulle le condizioni iniziali e sia nota la risposta all'impulso $h(t)$.

τ è una variabile muta, si procede con un cambio di variabili: $t-\tau = \lambda$
$d\tau = -d\lambda$

Estremi d'integrazione $\tau = 0 \Rightarrow \lambda = t$
$\tau = t \Rightarrow \lambda = 0$

$$\Rightarrow x(t) = -\int_t^0 f(t-\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot d\lambda$$

$x(t) = f(t) * h(t)$ simbolo di convoluzione

Int. di convoluzione con intervallo d'integrazione tra $(-\infty, +\infty)$

Altra forma: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$, non imp. nel corso

$x(\omega) = F(\omega)\cdot H(\omega)$, Trasformate di Fourier

Si confronta con l'integrale generale ottenendo la seguente proprietà: $\lambda \to \tau \Rightarrow x(t) = \int_0^t f(t-\lambda)\cdot h(\lambda)\, d\lambda = \int_0^t f(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$

Viene verificata l'uguaglianza spezzando l'intervallo di integrazione in tre contributi:

$$x(t) = \int_0^t f(t)\cdot h(t-\tau)\, d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(\tau)\, \cancel{h(t-\tau)\, d\tau}}_{=0\text{ , per }\tau<0} + \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + \underbrace{\int_t^{+\infty} f(\tau)\, \cancel{h(t-\tau)\, d\tau}}_{=0\text{ , per }\tau>t}$$

(proprietà additiva del dominio)

$\int_{-\infty}^0 f(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau = 0 \Rightarrow \tau < 0,\ f(\tau) = 0$ la forzante è nulla prima di un certo istante

$\int_t^{+\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau = 0 \Rightarrow h(t-\tau) = 0$ perché $\tau > t$, il sistema è casuale e non può rispondere prima che emerga la forzante quindi l'integrale risulta nullo.

2 L'ipotesi fondamentale non può essere rimossa, al contrario la seconda ipotesi può essere eliminata: $x(0) \neq \dot{x}(0) \neq 0$, ottenendo una risposta pari a:

Per comodità di estrapolazione si riscrive in forma matriciale: vettore colonna $\{\dots\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[m]}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}}_{[c]}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}_{[k]}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}_{\text{termine noto}}$$

matrice $[\dots]$

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\} \quad , \text{MDoF}$$

proprietà necessarie

$[m]$ matrice delle masse (reale, simmetrica, definita positiva)

$[c]$ matrice di smorzamento viscoso (reale, simmetrica, definita/semidefinita positiva)

$[k]$ matrice di rigidezze (reale, simmetrica, definita/semidefinita positiva)

vettore delle coordinate generalizzate $\{x\} = [x_1 \ \ x_2]^T$

vettore delle forzanti $\{f\} = [f_1 \ \ f_2]^T$

Criterio di Sylvester: una matrice reale e simmetrica è definita positiva se, e solo se, tutti i determinanti dei minori principali siano maggiori di 0.

Considerando una matrice $A_{m\times m}$, essa è: definita positiva se $\forall \{x\} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\{x\}^T [A] \cdot \{x\} > 0$$

semidefinita positiva se $\forall \{x\} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\{x\}^T \cdot [A] \cdot \{x\} \geq 0$$

minore di ordine 1 — minore di ordine 2 — minore di ordine 3

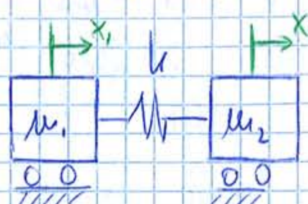
$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$d_1 = 2 > 0$

$d_2 = 2\cdot 5 - 2\cdot 2 = 6 > 0$

Le matrici studiate sono sempre reali, simmetriche (utilizzando le eq. di Lagrange), definite positive nel corso.

Es.



sistema a 2 DoF, la matrice di rigidezza è:

$$[k] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad , \det[k] = 0 \Rightarrow \text{è semidefinita positiva}$$

Lo spostamento non porta a una variazione di energia potenziale elastica. L'autovalore (pulsazione propria) è nullo $\omega_1^2 = 0$

Energia potenziale $\quad U = \frac{1}{2}\{x\}^T [k] \{x\} = 0$

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = -\frac{\{x_0\}^T [k] \{x_0\}}{\{x_0\}^T [m] \{x_0\}} = -\omega^2 \leq 0$$

, si ricava la pulsazione propria $-\omega^2 \leq 0 \Rightarrow \omega^2 \geq 0$

$\Rightarrow \ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$, sol. sincrona $g(t) = \cos(\omega t + \theta)$ può essere espressa come $\{x(t)\} = \{x_0\} \cos(\omega t + \theta)$

2) Si sostituisce la sol. sincrona nell'eq. del moto

$$[m]\{x_0\} \cdot (-\omega^2) \cdot \cancel{\cos(\omega t + \theta)} + [k] \cdot \{x_0\} \cancel{\cos(\omega t + \theta)} = \{0\} \quad , \forall t$$

$$([k] - \omega^2 \cdot [m]) \{x_0\} = \{0\}$$

, problema agli autovalori EVP (autoproblema) — Eigen Value Problem

- Si procede al calcolo degli autovalori ω_r^2: $\det([k] - \omega^2 [m]) = 0$, con $\{x_0\} \neq 0$

$$a_n \omega^{2n} + a_{n-1} \omega^{2n-2} + \ldots + a_1 \omega^2 + a_0 = 0$$

, polinomio caratteristico le cui soluzioni sono

$\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots \omega_n^2$ Autovalori (zeri) sempre ≥ 0

$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ Pulsazioni proprie del sistema

Si hanno le stesse soluzioni dei sistemi SDOF, solo che si ha la presenza di molteplici pulsazioni proprie.

- Si calcolano gli autovettori: ottenuti sostituendo un autovalore per volta e ricavando gli $\{x_0\}$.

$$([k] - \omega^2 [m]) \{x_0\} = \{0\} \longrightarrow ([k] - \omega_r^2 [m]) \{\Psi_r\} = 0$$

, soluzione:

$\{\Psi_1\}, \{\Psi_2\}, \ldots, \{\Psi_n\}$ … Autovettori delle ampiezze

L'insieme di tutti gli autovettori del sistema si definisce "forma modale", forma con cui si può muovere il sistema, in cui gli autovettori sono inseriti a meno di una costante moltiplicativa.

Modo proprio r-esimo: ω_r^2, $\{\Psi_r\}$ (ξ_r) → parametri modali

Es. $\{\Psi_1\} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ $\qquad \{\Psi_1'\} = [-10 \ -20 \ -30 \ -40]^T$

Ψ_1, Ψ_1' rappresentano spostamenti identici.

Risolto l'autoproblema, si ottengono le seguenti matrici:

$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \cdot \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$, ① − ②^T eq. fondamentale

Tale eq. ha due possibili soluzioni:

- Se $\omega_r \neq \omega_s$, si hanno due modi con autovalori diversi gli autovettori sono m-ortogonali $\Rightarrow \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$ (m-1) m-ortogonalità
- Se $\omega_r = \omega_s$, gli autovalori si suppongono distinti non coincidenti con molteplicità 1 $r = s$ $\Rightarrow \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\} = \underline{m_r} > 0$ massa modale r-esima definita positiva

Analogamente per la parte riservata a $[k]$ $\left(\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = 0 \right)$:

- Se $\omega_r \neq \omega_s$, allora $\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = 0$ (k-1) k-ortogonalità
- Se $\omega_r = \omega_s$, allora $\{\psi_r\}^T [k] \{\psi_r\} = k_r = m_r \omega_r^2 \geq 0$

La massa modale è la massa che ingloba in sé l'insieme degli effetti dell'intero sistema meccanico, la rigidezza globale ingloba invece l'intero fenomeno elastico.

Attraverso la matrice modale si può riassumere:

$$[\psi]^T [m] [\psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(m_r)$$ "Matrice delle masse modali"

$$[\psi]^T [k] [\psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(k_r)$$ "Matrice delle rigidezze modali"

- Teorema di Espansione → gli autovettori sono linearmente indipendenti L.I., dunque formano una base di $\mathbb{R}^n$ (Enunciato)

È possibile esprimere una qualsiasi configurazione assunta da un sistema MDOF come combinazione lineare degli autovettori. Si procede con una dimostrazione per assurdo supponendo che l'enunciato sia falso e gli autovettori sono linearmente dipendenti, considerando una combinazione lineare di autovettori nulla:

$$c_1 \{\psi_1\} + c_2 \{\psi_2\} + \ldots + c_n \{\psi_n\} = \{0\} = \sum_{r=1}^{n} c_r \{\psi_r\}$$

Per avere la dipendenza lineare i c_r non sono tutti nulli, quindi si procede premoltiplicando il vettore riga $\{\psi_s\}^T [m]$:

$$\{\psi_s\}^T [m] \sum_{r=1}^{n} c_r \{\psi_r\} = \{0\}$$

"ammazza-autovettori"

$$[\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\psi]^T[m][\psi] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

i primi due autovettori non sono m-ortogonali tra loro $\Rightarrow$ non si ha matrice diagon.

Modificando il secondo autovalore:

$$[\tilde{\psi}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\tilde{\psi}]^T[m][\tilde{\psi}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ il teorema dell'espansione è scomodo da utilizzare per autovalori ripetuti, mentre per un sistema "degenere" (caso $[\tilde{\psi}]$) risulta ancora valido.

- Disaccoppiamento delle equazioni.

Si parte dall'eq. del moto di un sistema vibrante non smorzato e non forzato (libero)

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

Analisi modale $\qquad \omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$

Risolvendo l'EVP si ottiene $[\psi]$, $[m]$, $[m_r]$, $[k_r]$, $[\omega_r^2]$, $[\omega_r^2]$ e si applica la trasformazione modale diretta (TMD), cioè una trasformazione di coordinate:

$$\{x(t)\} = [\psi]\{\eta(t)\} \quad , \text{con } [\psi] \in \mathbb{R}^{n,n}$$

non dipendente da t — vettore coordinate modali

$$\{\ddot{x}(t)\} = [\psi]\{\ddot{\eta}(t)\}$$

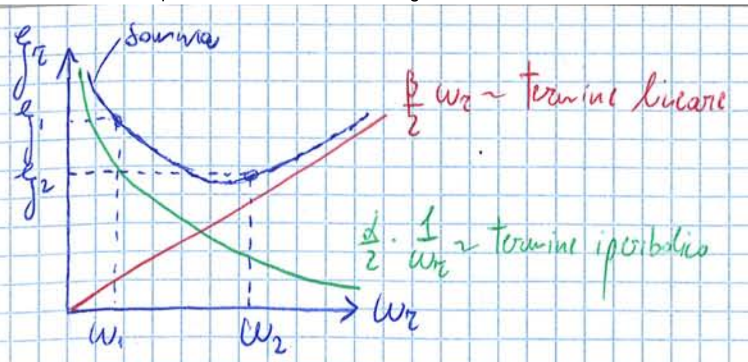
$$\Rightarrow [m][\psi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [k][\psi]\{\eta(t)\} = \{0\}$$

$$\underbrace{[\psi]^T[m][\psi]}_{\text{matrice delle masse}}\{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\psi]^T[k][\psi]}_{\text{matrice di rigidezza}}\{\eta(t)\} = \{0\}$$

$$[\,^\backslash m_r\,]\{\ddot{\eta}\} + [\,^\backslash k_r\,]\{\eta\} = \{0\}$$, si ottengono n eq. SDOF disaccoppiate

$$\Rightarrow m_r\,\ddot{\eta}_r(t) + k_r\,\eta_r(t) = 0 \quad , r = 1, 2, \dots, n$$

η_r sono le coordinate modali dette anche principali o normali, con indice r che indica i vari modi possibili.



Siccome i sistemi considerati sono discreti è sufficiente la determinazione solamente di alcuni punti.

(Le ipotesi di $\xi_r = \text{cost.}$ non sono le stesse)

- Risposta libera smorzata → si scrive l'eq. del moto nelle coordinate modali r-esime, supponendo che ciascun modo sia sottosmorzato $\xi_r < 1$

$$\eta_r(t) = (A_r \cos\omega_{d_r} t + B_r \sin\omega_{d_r} t)\cdot e^{-\xi_r\omega_r t}, \quad \text{con} \quad \omega_{d_r} = \omega_r \cdot \sqrt{1-\xi_r^2}$$

Si hanno a disposizione le condizioni iniziali $\{x(0)\} = X_0 \qquad \{\dot{x}(0)\} = v_0$

$$X_0, v_0 \in \mathbb{R}$$

Per il calcolo delle costanti A_r, B_r si può procedere in due modi differenti

I^a strada: $[\Psi]^{-1}$, $\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\} \quad \forall t$ TMD → si vuole sfruttare la m-1

$$\{\dot{x}(t)\} = [\Psi]\{\dot{\eta}(t)\}$$

$$\Rightarrow \{x(0)\} = [\Psi]\{\eta(0)\} = \{X_0\}, \quad \{\dot{x}(0)\} = [\Psi]\{\dot{\eta}(0)\} = \{v_0\}$$

$$\{\eta(0)\} = [\Psi]^{-1}\{X_0\} \qquad \{\dot{\eta}(0)\} = [\Psi]^{-1}\{v_0\}$$

Per la validità dell'operazione gli autovalori devono essere L.I., non c'è bisogno di ipotizzare $\det[\Psi] \neq 0$. Il problema principale è il calcolo di $[\Psi]^{-1}$ che diventa complicato con più DOF e bisogna calcolare tutti i modi.

II^a strada: "ammazza-autovettori" ~ $\{\Psi_s\}^T[M]\cdot\ldots$

$$\{x(t)\} = \underbrace{[\Psi]\cdot\{\eta(t)\}}_{\text{TMD}} = \underbrace{\sum_{r=1}^{n}\{\Psi_r\}\cdot\eta_r(t)}_{\text{Teorema dell'espansione}}$$

$$\dot{\eta}_r = \omega_{d_r}(-A_r\sin\omega_{d_r}t + B_r\cos\omega_{d_r}t)e^{-\xi_r\omega_r t} - \xi_r\omega_r e^{-\xi_r\omega_r t}(A_r\cos\omega_{d_r}t + B_r\sin\omega_{d_r}t)$$

Per $t=0$: $\quad \eta_r(0) = A_r \quad , \quad \dot{\eta}_r(0) = B_r\,\omega_{d_r} - \xi_r\,\omega_r\,A_r$

Ciascuna delle eq. con $r = 1, 2, .., n$ può essere risolta utilizzando l'integrale di convoluzione, dopo averle ridotte si fa la sintesi modale TMD e si applica il Teo. d'espans.

$$\eta_r(t) = \int_0^t Q_r\, h_r(t-\tau)\, d\tau + \underbrace{R.C.I.}_{\text{risposta alle condizioni iniziali}}$$

$$\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^{n} \{\Psi_r\}\,\eta_r(t)$$

- Risposta alla forzante armonica → sistema MDOF (smorzato) soggetto a forzante armonica

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F_0\}e^{i\omega t} \quad \text{con } \{F_0\} \in \mathbb{R}^n \quad \text{, eq del moto}$$

La notazione in forma complessa della forzante comprende sia i seni, sia i coseni. L'operazione si può fare in ambito lineare, il battimento si suppone estinto e quindi si considera nullo.

$$\{x(t)\} = \{x_0\}e^{i\omega t} \quad , \quad \{\dot{x}\} = i\omega\{x_0\}e^{i\omega t} \quad , \quad \{\ddot{x}\} = -\omega^2\{x_0\}e^{i\omega t}$$

con $\{x_0\} \in \mathbb{C}^n$ — le singole masse vengono agitate alla stessa frequenza, ma con un certo sfasamento

$$\Rightarrow \left([k] - \omega^2[m] + i\omega[c]\right)\{x_0\}\cancel{e^{i\omega t}} = \{F_0\}\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\left([k] - \omega^2[m] + i\omega[c]\right)\{x_0\} = \{F_0\}$$

, la variabile indipendente diventa la freq. d'eccitazione ω.

Esistono due strade per il calcolo della risposta alla forzante armonica, escludendo l'integrale di convoluzione (soluzione scomoda):

I° strada → Inversione della matrice di rigidezza dinamica. $[k_{din}(\omega)]^{-1}$

$$[k_{din}(\omega)] = [k] - \omega^2[m] + i\omega[c]$$

$$\{x_0\} = [k_{din}(\omega)]^{-1}\{F_0\} \quad \text{, con } X_0 = X_0(\omega) \text{ vettore delle ampiezze di oscillazioni a regime}$$

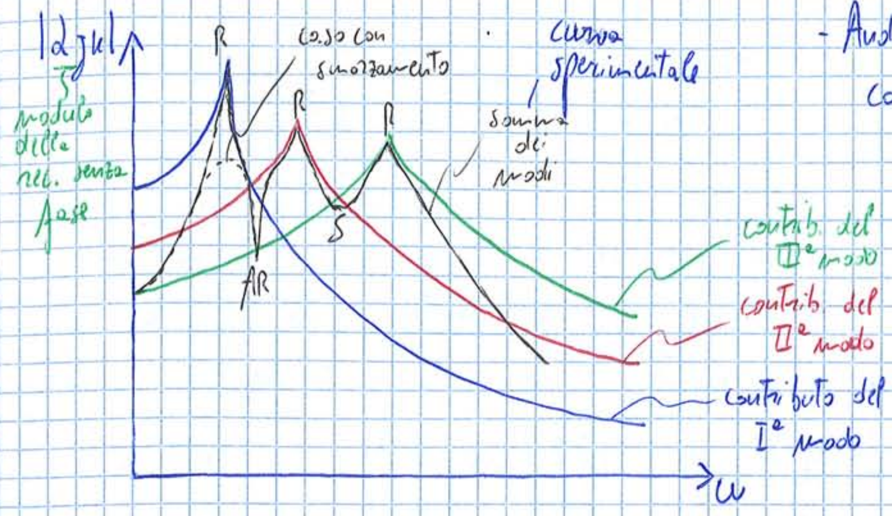
$$[k_{din}(\omega)]^{-1} = [\alpha(\omega)] \quad \text{"Matrice di recettanza"}$$

$$[\alpha(\omega)] = \frac{\{x_0\}}{\{F_0\}} \quad \text{significato fisico}$$

$$\Rightarrow \{x_0\} = [\alpha(\omega)]\{F_0\}$$

La matrice di recettanza in alcuni punti può essere singolare a causa delle risonanze. Se k semi-definita positiva, allora k_{din} non è invertibile.

Se ciò non è valido, allora il sistema risulta non lineare.



- Andamento qualitativo della recettanza con FRF (funzione di risposta in freq.)

Nella combinazione dei 3 modi si possono ottenere diversi fenomeni. Si vuole ottenere il modulo generico della recettanza.

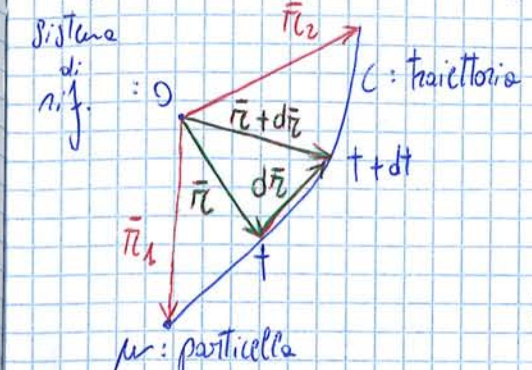
I punti di massimo R nella somma dei modi rappresentano i punti di risonanza, si possono avere delle regioni sovra-smorzate in cui non si raggiunge il picco R ma si ha una zona di raccordo.
Nel caso di picchi minimi invertiti, si ha AR anti-risonanza, accade quando i modi sono molto vicini con segno opposto e la loro somma è circa nulla, il contributo di pari entità fa nascere il picco minimo e si va alla freq. circa nulla nel grafico, in realtà in presenza di smorzamento esso è maggiore di zero con raccordo. Fisicamente si ha una situazione di AR quando si applica una forza in m_1 e la massa m_2 rimane ferma, quindi si ha una freq. in cui 1 DOF si annulla in assenza di smorzamento.
Se con la somma dei modi si trova un punto di minimo con freq. maggiore di zero, si ha un punto di sella S e la massa m_2 si muove poco, rispetto alla massa m_1, la distinzione tra AR e S si accentua aumentando lo smorzamento.

Il numero di DOF è pari al numero di freq. di risonanza R. Il modo è una quantità stabilita dal sistema e non dalle forzanti.

Shaker (eccitatore elettrodinamico) / Stinger → pezzo d'acciaio sottile che sollecita il pezzo in 1 DOF trazione o compressione.

- MECCANICA ANALITICA : al contrario della meccanica vettoriale basata sull'utilizzo di forze e momenti sul diagramma di corpo libero, essa si basa su quantità scalari (lavoro, energia) introdotte da Leibniz.

- Definizione di lavoro e di energia : • "Lavoro"



Si considera lo spostamento infinitesimo $d\bar{r}$, da t a t+dt, e si vuole calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\bar{F}$:

$$\bar{d}W = \bar{F}\cdot d\bar{r}$$, lavoro infinitesimo

correzione del differenziale, che non è esatto, solamente infinitesimo.

$$\bar{F} = m\cdot \bar{a} = m\cdot \ddot{\bar{r}}$$

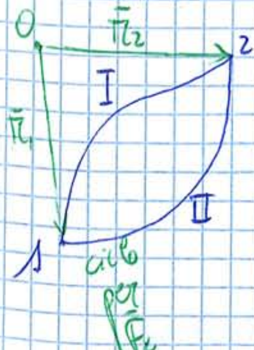
$\bar{F}$ è la risultante delle forze applicate alla massa, il lavoro si può calcolare come

$$\bar{d}W = \bar{F}\cdot d\bar{r} = m\cdot\frac{d\dot{\bar{r}}}{dt}\,d\bar{r} = m\cdot\frac{d\dot{\bar{r}}}{\cancel{dt}}\cdot\dot{\bar{r}}\,\cancel{dt} = d\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}m\,\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}}}_{T\text{: en. cinetica del corpo } m}\Big) = dT$$

Il lavoro della risultante delle forze è pari alla variazione di energia cinetica, ciò è il teorema dell'energia cinetica, o forza viva.

$$\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{d}W = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T$$

In generale il lavoro dipende dal percorso, se non dipende si hanno forze conservative $\bar{F}_c$, e il lavoro compiuto da $\bar{F}_c$ su un ciclo chiuso è nullo.



I, II percorsi

$$\left(\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{F}_c\,d\bar{r}\right)_I = \left(\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{F}_c\,d\bar{r}\right)_{II}$$, valido se $\bar{F}$ conservativa

$$\left(\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{F}_c\,d\bar{r}\right)_I - \left(\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{F}_c\,d\bar{r}\right)_{II} = 0 \Rightarrow \left(\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{F}_c\,d\bar{r}\right)_I + \left(\int_{\bar{r}_2}^{\bar{r}_1}\bar{F}_c\,d\bar{r}\right)_{II} = 0$$

$$\oint \bar{F}_c\,d\bar{r} = 0$$, $\bar{F}_c$ forza conservativa

$\bar{r}$ è definito dal fatto che si vogliono calcolare gli spostamenti dalla configurazione indeformata. La forza esercitata dalla molla $\bar{F}_m$ si oppone a quella esterna.

$F_m = -k \cdot x$ $\qquad \bar{F}_m = -k \cdot x \cdot \hat{i}$

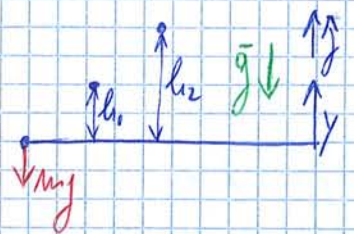
Si vuole calcolare il lavoro della forza conservativa:

$$\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F}_m \, d\bar{r} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} (-kx)\, dx = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_{rif}} (-kx)\, dx - \int_{\bar{r}_2}^{\bar{r}_{rif}} (-kx)\, dx = \int_{\delta_1}^{0} (-kx)\, dx - \int_{\delta_2}^{0} (-kx)\, dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{\delta_1}^{\delta_2} =$$

$$= -\frac{1}{2}k\delta_2^2 + \frac{1}{2}k\delta_1^2 = -\Delta V$$

, variazione dell'en. pot. elastica della molla non dipendente dalla x_{rif} ma dalle posizioni δ_1 e δ_2.

Esempio 2 - Forza peso $mg = F_p$, forza conservativa che può essere accumulata per ottenere lavoro



$\bar{r} = y \cdot \hat{j}$ $\qquad \bar{F}_p = -m \cdot g \cdot \hat{j}$

$$\int_{h_1}^{h_2} \bar{F}_p \cdot d\bar{r} = \int_{h_1}^{h_2} (-mg\hat{j})\, dy = \int_{h_1}^{0} (-mg\hat{j})\, dy + \int_{0}^{h_2} (-mg\hat{j})\, dy =$$

$$= \int_{h_1}^{0} (-mg\hat{j})\, dy - \int_{h_2}^{0} (-mg\hat{j})\, dy = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

$-\Delta V = mgh_1 - mgh_2$, variazione di en. pot. gravitazionale, con livello 0 arbitrario

Bisogna porre attenzione ai segni:

$V = mgh$ $\quad \downarrow \bar{g} \quad \uparrow \hat{j} \ \uparrow y$

$V = -mgh$ $\quad \downarrow \bar{g} \quad \uparrow \hat{j} \ \downarrow y$

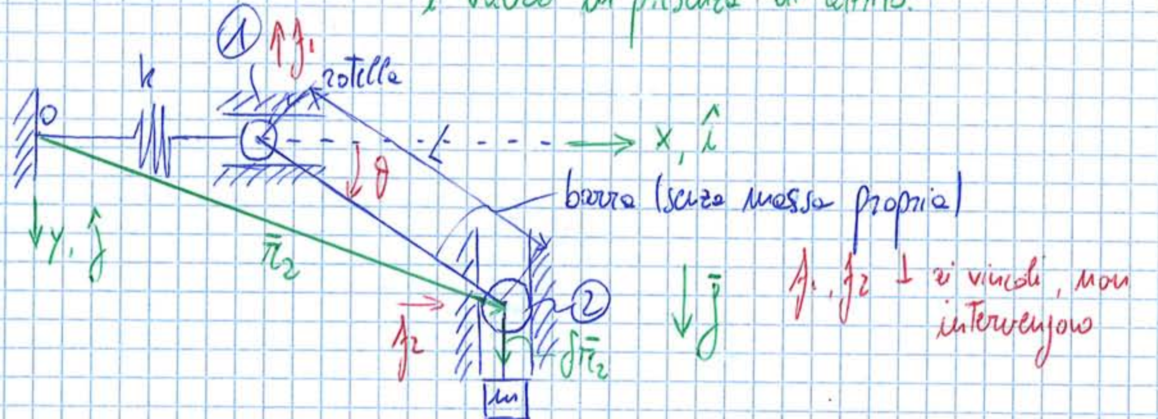
In statica non c'è un moto effettivo, il sistema è in equilibrio e non si tiene conto delle forze d'inerzia. Si assume il lavoro virtuale come:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \, \delta\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i \, \delta\bar{r}_i = 0$$

Gli spostamenti virtuali sono detti reversibili, ciò significa che in presenza di vincoli lisci (senza attrito) le reaz. vincolari sono ortogonali agli spostamenti virtuali e quindi rispettano le condizioni di vincolo, con lavoro virtuale nullo di tutte le forze attive (interne + esterne) per ogni spostamento virtuale, è una condizione necessaria e sufficiente.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \, \delta\bar{r}_i = 0$$ PLV (statica), non c'è necessità di calcolare $\bar{f}_i$ ma ciò non è valido in presenza di attrito.

Esempio 2.



Due rotelle ① ② scorrono in due guide prive di attrito con l'accelerazione di gravità $\bar{g}$. Si vogliono determinare le posizioni di equilibrio con PLV.

Se $\theta = 0$ allora la molla k è indeformata. Si calcolano spostamenti e forze.

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = x \cdot \hat{i} \\ \bar{r}_2 = y \cdot \hat{j} + \cancel{L \hat{i}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{F}_1 = -k \cdot x \, \hat{i} \\ \bar{F}_2 = mg \, \hat{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\bar{r}_1 = \delta x \, \hat{i} \\ \delta\bar{r}_2 = \delta y \, \hat{j} \end{cases}$$

termine costante si può eliminare in $\delta\bar{r}_2$

PLV: $$\sum_{i=1}^{2} \bar{F}_i \, \delta\bar{r}_i = 0$$

$$\bar{F}_1 \delta\bar{r}_1 + \bar{F}_2 \delta\bar{r}_2 = (-kx \, \hat{i}) \cdot \delta x \, \hat{i} + (mg \, \hat{j}) \cdot \delta y \, \hat{j} = 0$$

$$-kx \, \delta x + mg \, \delta y = 0$$

x, y sono coordinate dipendenti, si sceglie una coordinata indipendente lagrangiana θ

$$x = L - L\cos\theta \qquad y = L \sin\theta$$

$\bar{R} + \bar{F}' = 0$, principio di D'Alembert

Il PLV in dinamica assume l'espressione detta "principio generalizzato":

$$\sum_{i=1}^{N} (\underbrace{\bar{F}_i}_{\text{forze attive}} \underbrace{- m_i \ddot{\bar{r}}_i}_{\text{forze d'inerzia}}) \delta \bar{r}_i = 0 \quad \forall i$$

, si ha l'equilibrio dinamico del sistema

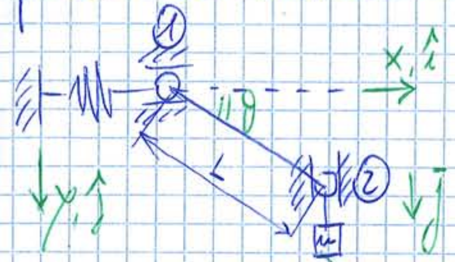
$$\ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} (\bar{F}_i + \bar{F}_i') \delta \bar{r}_i = 0$$

Terminologia: $\bar{R}$ = forza risultante $\quad \bar{J}$ = reaz. vincolare

$\bar{F}$ = forza attiva (esterna o interna) $\quad \bar{F}'$ = forze d'inerzia

$\bar{R} + \bar{F}'$ = forza effettiva.

Esempio 2. Caso dinamico → la differenza con il caso statico è il calcolo delle $\bar{F}'$



Unica massa non trascurabile

$\bar{r}_2 = y \hat{j} \qquad \ddot{\bar{r}}_2 = \ddot{y} \hat{j}$

$\bar{F}_1 \delta \bar{r}_1 + (\bar{F}_2 - m \ddot{\bar{r}}_2) \delta \bar{r}_2 = 0 \qquad$ (PLV)

$\delta \bar{r}_1 = \delta x \cdot \hat{i}$

$\delta \bar{r}_2 = \delta y \cdot \hat{j}$

$x = L - L\cos\theta \qquad \delta x = L \sin\theta \, \delta\theta$

$y = L \sin\theta \qquad \delta y = L \cos\theta \, \delta\theta$

$\dot{y} = L \cos\theta \cdot \dot{\theta}$

$\ddot{y} = -L \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L\cos\theta \cdot \ddot{\theta}$, similmente a prima

Sostituendo tali valori nel PLV si ottiene: (con $\bar{F}_1 = -kx\,\hat{i}$, $\bar{F}_2 = mg\,\hat{j}$)

$$[-kL(1-\cos\theta) L\sin\theta + mgL\cos\theta - mL(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) L\cos\theta] \delta\theta = 0 \quad , \forall \delta\theta$$

$$mL(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) + kL(1-\cos\theta)\tan\theta - mg = 0$$

, eq. del moto → trascendente

Il sistema deve valere per ogni valore di $\delta\theta$, quindi il termine tra le parentesi quadre deve essere nullo. Per determinare i punti d'equilibrio si pone:

$$\dot{\theta}_{eq} = \ddot{\theta}_{eq} = 0$$

, vale l'equilibrio statico

L'esercizio può essere risolto anche con la meccanica vettoriale, l'eq. deve valere per ogni angolo θ.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{L} + \delta \overline{W}_{nc})\, dt = 0$$, Principio di Hamilton esteso

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\, dt = 0$$ per forze conservative $W_{nc} = 0$

è valido per l'ipotesi fondamentale $\delta \overline{r}_i(t_1) = \delta \overline{r}_i(t_2) = 0 \quad \forall i$

Esempio 2. Bisogna assemblare la lagrangiana $\mathcal{L}$ (si ha bisogno di quantità scalari)

(si spinge verso l'alto)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \qquad V = \frac{1}{2} k x^2 - m g y$$, con $\begin{cases} x = L - L\cos\theta \\ y = L \sin\theta \\ \dot{y} = L\cos\theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m L^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k L^2 (1-\cos\theta)^2 + m g L \sin\theta$$

bisogna successivamente effettuare dei calcoli variazionali un termine alla volta, ciò include δT e δV, equivale a calcolare $\frac{dT}{dt}$ e $\frac{dV}{dt}$, per calcolare $\delta \mathcal{L}$:

$$\delta \mathcal{L} = \delta T - \delta V = \left[- m L^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + (-kL(1-\cos\theta)\sin\theta) + m g L \cos\theta \right] \delta\theta + \dots$$

$$\dots + \underline{m L^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}\, \delta\dot{\theta}}$$ $\Rightarrow$ due variabili: $\theta, \dot{\theta}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\, dt = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} m L^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}\, \delta\dot{\theta}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{m L^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}}_{f}\, \underbrace{\frac{d}{dt}(\delta\theta)}_{g'}\, dt = \dots$$

si procede integrando per parti $\left(\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx \right)$ ~ Richiamo

$$= \left[m L^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}\, \delta\theta \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m L^2 (-2\sin\theta\cos\theta\, \dot{\theta} + \cos^2\theta\, \ddot{\theta})\, \delta\theta\, dt$$

$= 0$ con $\delta\theta(t_1) = \delta\theta(t_2)$

Risolvendo si ottiene: $$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\, \delta\theta\, dt = 0 \qquad \forall \delta\theta$$

Da ciò si deduce che $f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = 0$ è l'equazione del moto

(Hamilton fornisce già le condizioni al contorno rispetto a Lagrange, tuttavia quest ultimo è preferibile)

Applicando il principio di Hamilton esteso: $\int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} + \delta \overline{W}_{nc})\, dt = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} Q_k\, \delta q_k\, dt = 0$$

con l'ipotesi $\delta \overline{r}_i(t_1) = \delta \overline{r}_i(t_2) = \overline{0} \Rightarrow \delta q_1(t_1) = \dots = \delta q_n(t_1) = \delta q_1(t_2) = \dots = \delta q_n(t_2) = 0$

Imponendo la stazionarietà dell'integrale si ottengono le "Equazioni di Lagrange"

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k \qquad \text{con } k = 1, \dots, n$$

una eq. per ogni DOF

Il vantaggio rispetto a Hamilton è che non si tratta di una formulazione integrale e non è richiesto il calcolo di reazioni vincolari e ciò implica gli stessi pregi e gli stessi difetti

Esempio 2.
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\theta}}}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$
con $q_1 = \theta$ (rotazione)
$Q_k = 0$ (solo forze conserv.)
$\mathcal{L} = T - V$

$\boxed{\frac{\partial V}{\partial \dot{\theta}} = 0 \text{ in meccanica!}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

, formulazione di Lagrange nel caso specifico (nell'approccio lagrangiano θ e $\dot{\theta}$ è come se fossero due variabili indipendenti!)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m L^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k L^2 (1 - \cos\theta)^2 - mgL \sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = - m L^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k L^2 (1 - \cos\theta) \sin\theta - mgL\cos\theta$$

Si ottiene:

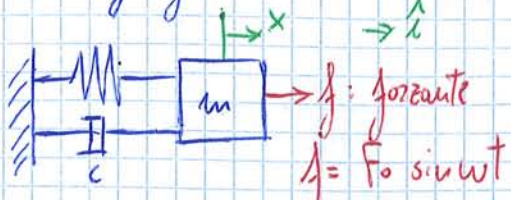
$$\underbrace{(m L^2 \cos^2\theta \cdot \ddot{\theta} - 2 m L^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}^2)}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}} - (- m L^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2) + (k L^2 (1 - \cos\theta)\sin\theta - mgL\cos\theta) = 0$$

, $Q_k = 0$ se non ci sono forze non conservative!

- Applicazioni Eq. di Lagrange

$q_1 = x$: coordinata lagrangiana

· Esempio 1 (SDOF)



Calcolo T e V:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\mathcal{D}^{(c)} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

, si sostituisce all'en. potenziale $k \to c$, $x \to \dot{x}$ perché il dissipatore viene trattato come una molla (vale sempre)

NB La velocità dipende dalla posizione dello smorzatore (se esso è tra due masse si sostituisce la velocità relativa)

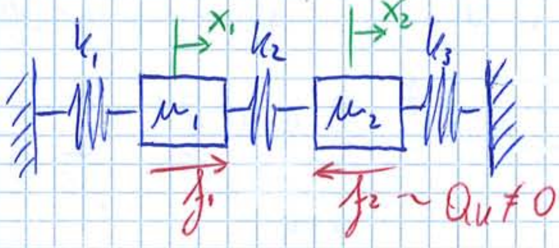
(vettore posizione: $\bar{r}_i = x \cdot \hat{i}$)

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_{i,nc} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x} = F_0 \sin\omega t \cdot \hat{i} \cdot \frac{\partial (x \cdot \hat{i})}{\partial x} = \underbrace{F_0 \sin\omega t}_{\text{forza n.c.}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

Risultato: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$

· Esempio 2.



Si assumono coordinate lagrangiane inusuali:

$$\begin{cases} q_1 = x_1 \sim \text{spostamento relativo} \\ q_2 = \Delta = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = \Delta + x_1 \\ \qquad \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\Delta} + \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \underbrace{(\dot{\Delta} + \dot{x}_1)^2}$$

non è necessario svolgere il quadrato.

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \underbrace{(x_2 - x_1)^2}_{x_2 - x_1 \equiv x_1 - x_2} + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta^2 + \frac{1}{2} k_3 (\Delta + x_1)^2$$

$\Rightarrow$ il risultato con Lagrange non cambia

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k \quad , Q_k \neq 0 \text{ con le forzanti } f_1 \text{ e } f_2$$

$q_1 = x_1$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{\Delta} + \dot{x}_1), \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_3 (\Delta + x_1)$$

$\Delta + x_1 \Rightarrow x_2$ è dipendente da x_1 e Δ

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{2} \bar{F}_{i,nc} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x_1} = f_1 \hat{i} \underbrace{\frac{\partial (x_1 \hat{i})}{\partial x_1}}_{=1} - f_2 \cdot \hat{i} \cdot \underbrace{\frac{\partial (x_2 \cdot \hat{i})}{\partial x_1}}_{=1} = f_1 - f_2$$

Si definisce: "Sistema naturale" → sistema con $T_2 \neq 0$, $T_1 = T_0 = 0$, $\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$

$$\Rightarrow T_2 = T = \frac{1}{2}\{\dot q\}^T[m]\{\dot q\} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} M_{jk}\,\dot q_k \dot q_j \cdot \frac{1}{2} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2}[\dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n]\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot q_1 \\ \vdots \\ \dot q_n\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left[m_1 \dot q_1^2 + \dots + m_k \dot q_k \dot q_1 + \dots\right]$$

in cui $\{\dot q\} = [\dot q_1, \dots, \dot q_n]^T$, vettore colonna delle velocità generalizzate

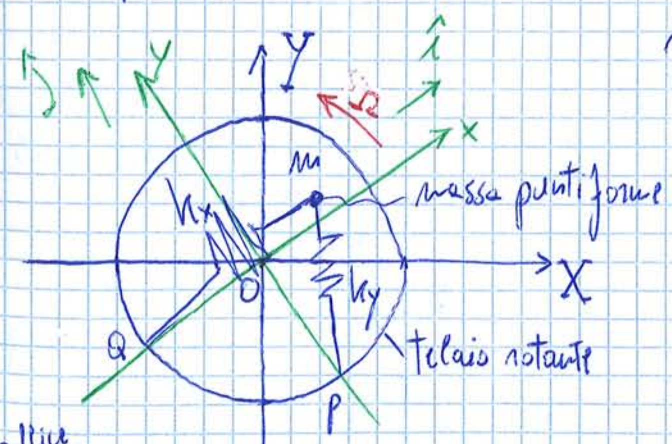
M_{jk} è la matrice di massa $[m]$ nei sistemi naturali, ed è simmetrica.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}}_{\text{eq. di Lagrange k-esima}} = m_{1k}\dot q_1 + \dots + m_{nk}\dot q_n = \underbrace{[m_{1k} \dots m_{nk}]}_{\text{matrice di massa}}\begin{Bmatrix}\dot q_1 \\ \vdots \\ \dot q_n\end{Bmatrix}, \quad \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0}_{\text{sempre}}, \quad \dots \text{ altri termini di Lagrange}$$

La matrice di massa è definita positiva: $T = \{\dot q\}^T[m]\{\dot q\} > 0$, $\{\dot q\} \neq 0$

Un ragionamento analogo può essere fatto per dimostrare le caratteristiche della matrice di rigidezza $[k]$.

- Esempio di sistema non naturale: Anello rotante (caso generale)

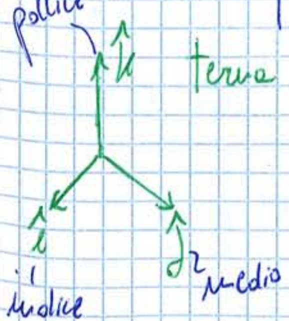


m è collegata al telaio tramite due molle, si considerano i sistemi di riferimento:

XOY : Sist. di rif. fisso

xoy : mobile, solidale all'anello

L'obiettivo è scrivere l'eq. del moto, si utilizza Lagrange. (Newton → complicato per Coriolis)

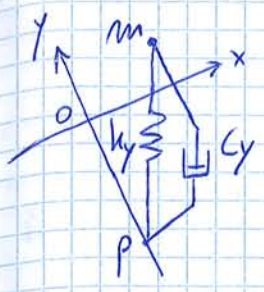


terna destrorsa ⇒ (regola della mano destra), si vuole calcolare $\bar r$:

$$\bar r = x\hat i + y\hat j, \quad \bar\Omega = \Omega \hat k$$

$$\dot{\bar r} = \dot x \hat i + \dot y \hat j + x\frac{d\hat i}{dt} + y\frac{d\hat j}{dt}$$

$\hat i, \hat j$ non sono fissi, cambiano col t quindi per calcolarli si utilizzano le formule di Poisson:



Aggiungendo gli smorzatori C_x, C_y si studia il caso più generale

Vale $\quad \dot{\Delta y} \simeq \dot{y} \quad , \quad \dot{\Delta x} \simeq \dot{x}$

Funzione dissipativa $\quad \mathcal{F}' = \frac{1}{2} C_x \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_y \cdot \dot{y}^2$, smorzamento interno :

=> Gli smorzatori sono interni all'anello, lo smorzamento è espresso in coordinate relative

Si introduce anche lo smorzamento esterno (esterno al telaio) espresso in coordinate assolute tramite la funzione dissipativa $\mathcal{F}''$

$\mathcal{F}'' = \frac{1}{2} h \dot{X}^2 + \frac{1}{2} h \dot{Y}^2$, con h coeff. di smorzamento esterno che caratterizza l'effetto ventilante agente anche con $\mathcal{F}' = 0$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' + \mathcal{F}'' = \frac{1}{2} C_x \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_y \cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2} h \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k = 0 \qquad \underline{q} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

espressioni di Lagrange

Per $q_1 = x$: $\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\Omega y \; , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - m\Omega \dot{y} \; , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = k_x \cdot x$

$\quad \frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{y}\Omega + m\Omega^2 x \; , \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = C_x \cdot \dot{x} + h\dot{x} - h\Omega y \; , \quad Q_x = 0$

Per $q_2 = y$: $\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\Omega x \; , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} + m\Omega \dot{x} \; , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = k_y \cdot y$

$\quad \frac{\partial T}{\partial y} = -m\Omega \dot{x} + m\Omega^2 y \; , \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = C_y \cdot \dot{y} + h\dot{y} + h\Omega x$

eq. del moto: $\quad x \quad m\ddot{x} - m\Omega\dot{y} - m\dot{y}\Omega - m\Omega^2 x + k_x \cdot x + C_x \cdot \dot{x} + h(\dot{x} - \Omega y) = 0$

$\quad y \quad m\ddot{y} + m\Omega\dot{x} + m\Omega\dot{x} - m\Omega^2 y + k_y y + C_y \cdot \dot{y} + h(\dot{y} + \Omega x) = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}}_{[A]} \right) \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \left(\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{bmatrix}}_{[B]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix}}_{[C]} \right) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

, [A], [B], [C] sono matrici particolari

Forma compatta $\quad [m]\{\ddot{q}\} + ([C^*] + [G])\{\dot{q}\} + ([k^*] + [H])\{q\} = \{0\}$

DOF:

1) Traslazione assiale u
2) Trasl. trasversale v
3) Trasl. trasversale w
4) Rotazione torsionale θ_x
5) Rot. flessionale θ_y
6) Rot. flessionale θ_z

$\Rightarrow$

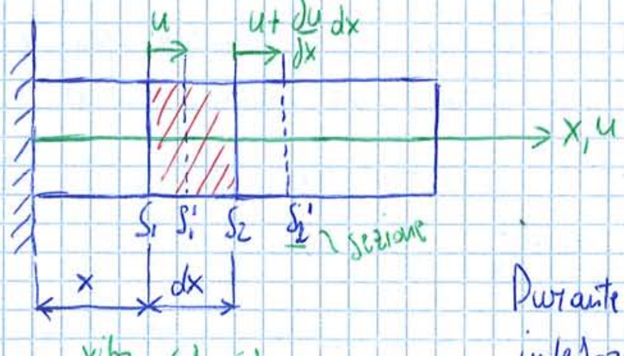
Forze generalizzate:

1) Forza assiale N
2) Forza di taglio T_y
3) Forza di taglio T_z
4) Momento torcente M_x
5) Momento flettente M_y
6) Momento flettente M_z

Si tiene conto delle seguenti ipotesi semplificative:

- Le travi hanno asse rettilineo, quindi la traslazione assiale è disaccoppiata dagli altri DOF.
- Hanno due di simmetria mutuamente ortogonali che mantengono la stessa inclinazione lungo la trave (trave prismatica, una trave svergolata non rispetta tale condizione. Ciò porta a un disaccoppiamento del DOF torsionale e del comportamento flessionale del piano xy da quello nel piano Xz.

- Vibrazioni libere assiali delle aste. $\Rightarrow$ (solo comportamento assiale)

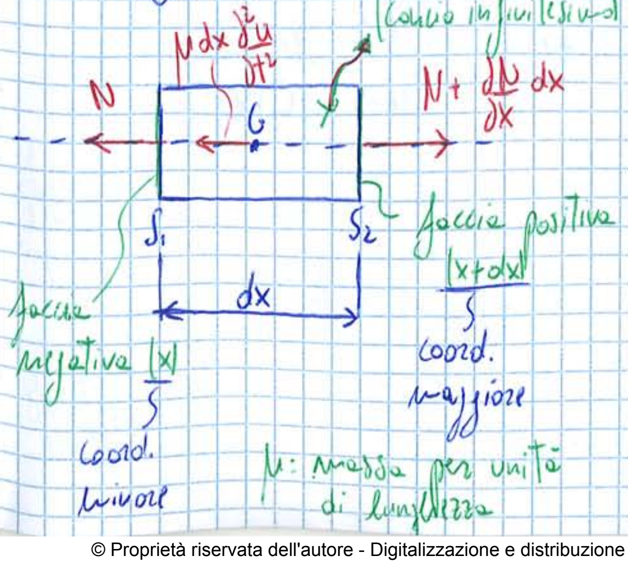


$S_1, S_2 \xrightarrow{vibr.} S_1', S_2'$

Si ipotizzi un'asta con:
- comportamento elastico-lineare
- esclusione di strizione (contrazione trasversale), ciascuna sezione si comporta come un corpo rigido.

Durante le vibrazioni si passa dalla configurazione indeformata (S_1, S_2) alla nuova posizione (S_1', S_2'). Lo stato di deformazione dell'asta è individuato dalla funzione $u(x,t)$.

(Forze agenti su elemento dx)



Convenzione di segno: le caratteristiche della sollecitazione sono concordi con gli assi di riferimento sulla faccia positiva e discordi su quella negativa.

Forze in gioco:

forze assiali N, $N+\frac{\partial N}{\partial x}dx$

forze di massa su G $\mu\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

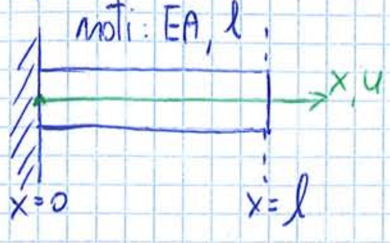
$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t\right)\left(C_r \cos \frac{\omega}{c} x + D_r \sin \frac{\omega}{c} x\right)$$

A_r, B_r dipendono dalle condizioni iniziali $u(x,0) = f(x)$ $\dot{u}(x,0) = g(x)$

C_r, D_r, ω_r dipendono dalle condizioni al bordo (o al contorno)

ω_r ↳ pulsazioni proprie dell'asta

- Caso particolare: trave incastrata - libera



La scelta di x è arbitraria, vale $c = \sqrt{\frac{AE}{\mu}}$

$$\phi(x) = C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x$$

Si impongono le condizioni al contorno: $1^\circ)$ $u(0,t) = 0$, $\forall t$

$$\Rightarrow \phi(0) \cdot \eta(t) = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0 \quad , \quad C = 0$$

$2^\circ)$ Estremo libero ($x = l$) presenta forze nulle $N(l,t) = 0$, $\forall t$

$$\Rightarrow N(x,t) = AE \frac{du}{dx}(x,t) \quad , \quad N(l,t) = AE \frac{du}{dx}(l,t) = 0$$

$$AE\, \phi'(l)\, \eta(t) = 0 \Rightarrow \phi'(l) = 0$$

$$\phi'(x) = \frac{\omega}{c}\left(\underbrace{\cancel{-C \sin \frac{\omega}{c} x}}_{=0} + D \cos \frac{\omega}{c} x\right) \quad \text{con } C = 0$$

$\phi'(l) = \frac{\omega}{c} D \cos \frac{\omega}{c} \cdot l = 0$, dall'espressione emergono le possibili soluzioni:

- $\omega = 0$, non è una sol. perché corrisponde a un moto rigido senza oscillazioni e ciò non è possibile con le condizioni vincolari in esame
- $D = 0$, è una soluzione banale corrisponde a $u = 0$, cioè sistema in quiete immobile
- $\cos\left(\frac{\omega}{c} l\right) = 0$, soluzione accettabile che soddisfa la seconda equazione.

$$\Rightarrow \frac{\omega_r}{c} \cdot l = r \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \quad r = 1, 3, 5 \ldots \text{ valori dispari} \Rightarrow \omega_r = r \cdot \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{AE}{\mu}}$$

Autofunzioni $\phi_r(x) = D_r \sin\left(r \frac{\pi}{2l} \cancel{\sqrt{\frac{AE}{\mu}}}\, \cancel{c} \cdot x\right) = 1 \cdot \sin\left(r \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot x\right)$ con $C_r = 0$

si suppone D_r unitario $(D_r = 1)$

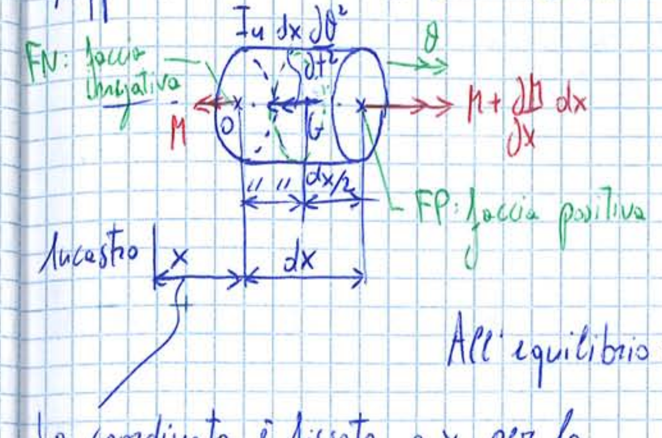
Lunghezza d'onda $\lambda_r = \dfrac{2\pi}{r \frac{\pi}{2l}} = \dfrac{4}{r} \cdot l \Rightarrow$

MODO 1	$r = 1$	$\lambda_r = 4l$
MODO 2	$r = 3$	$\lambda_r = \frac{4}{3} l$
MODO 3	$r = 5$	$\lambda_r = \frac{4}{5} l$

- Vibrazioni libere torsionali delle travi

Nel caso di oscillazioni torsionali le travi prendono il nome di Barre. Si ipotizza le barre come rettilinee e il DOF torsionale disaccoppiato dagli altri.

Approccio alla D'Alembert: (DCL)



M è il momento agente di tipo torcente

$I_u\, dx\, \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ è il momento risultante delle forze d'inerzia con I_u momento d'inerzia di massa per unità di lunghezza

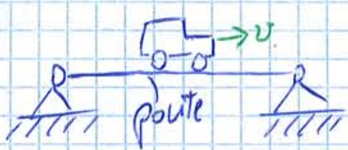
$I_u\ [kg \cdot m]$

All'equilibrio: $\circlearrowleft$ $\cancel{M} + \frac{\partial M}{\partial x} dx - \cancel{M} - I_u\, dx \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$

La coordinata è fissata a x per la parte di sinistra del concio

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = I_u \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$, non è l'eq. del moto

$x = cost. \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$, la derivata totale $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\underbrace{\cancel{\frac{dx}{dt}}}_{=0} + \frac{\partial\theta}{\partial t} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$



Nell'esempio del passaggio di un camion a v costante su un ponte cambiano le caratteristiche di sollecitazione e quindi derivata parziale ≠ derivata totale $\left(\frac{dx}{dt} > 0\right)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\theta\left(x + \frac{dx}{2}, t\right)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\theta(x,t) + \underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{2}}\right] = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + O(dx^2)$$

infinitesimo di ordine superiore: è trascurabile

Richiamo

Sviluppo: $M(x+dx) = M(x) + \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx^2$, si ottiene $\frac{\partial M}{\partial x} = I_u \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$

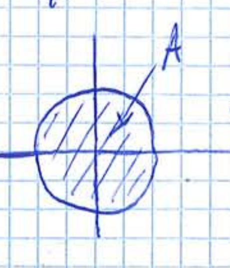
Dalla teoria dell'elasticità: $M = G \cdot J_p \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x}$, valido per sezioni circolari o anulari

G: modulo di elasticità tangenziale

J_p: momento d'inerzia di area polare (da distinguere da quelli di massa)

Hp $G \cdot J_p$ = costante ottenendo l'eq. del moto:

$$G \cdot J_p \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = I_u \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

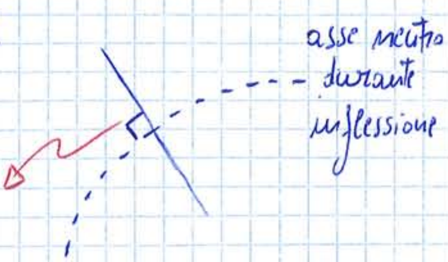


$J_p = \int_A r^2\, dA\ [m^4]$

Dalla relazione tra T e M si ottiene: $T = -\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$

Sostituendola in rel. ↑, supposto EI = costante si ricava l'eq. del moto:

$$\underbrace{-EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \mu}_{\text{parametri fisici}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \underbrace{f(x,t)}_{\text{forzante da specificare}} = 0 \quad , \text{con } EI = \text{cost.}$$



si immagina che le sezioni si mantengano ortogonali alla linea d'asse senza def. a taglio.

Se $f(x,t) = 0 \Rightarrow EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$, si ottiene l'eq. di Eulero-Bernoulli per vibrazioni libere flessionali

Al solito si cerca la soluzione nella forma: $v(x,t) = \phi(x)\,\eta(t)$, sol. stazionaria

$\eta(t) = \eta_0 \sin(\omega t + \alpha)$, per le oscillazioni libere la dipendenza dal tempo è armonica quindi si può eliminare

$$EI\, \phi^{IV}(x) \cdot \cancel{\eta_0 \sin(\omega t + \alpha)} \underbrace{- \omega^2 \mu\, \phi(x)\, \cancel{\eta_0 \sin(\omega t + \alpha)}}_{\mu \ddot{\eta}(t)\phi(x)} = 0 \quad , \forall t$$

$$EI\, \phi^{IV}(x) - \mu \omega^2 \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi^{IV} - \frac{\mu \omega^2}{EI} \phi = 0$$ è un autoproblema differenziale

$\beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$ per comodità di scrittura, sol. cercata $\phi = \phi_0 e^{\lambda x}$

$$(\lambda^4 - \beta^4) \cdot \phi \cdot e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^4 = \beta^4 \text{, quattro soluzioni } \lambda_{1,2} = \pm\beta,\ \lambda_{3,4} = \pm i\beta$$

Combinando le soluzioni si ottiene l'"autofunzione" o "funzione modale":

$$\phi(x) = A \cos\beta x + B \sin\beta x + C \cosh\beta x + D \sinh\beta x$$

Imponendo le condizioni al bordo si ottengono infiniti valori di β e ω.

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \left(F_r \cos\omega_r t + H_r \sin\omega_r t\right)$$ sol. dinamica della trave con ∞ contributi modali.

H_r, F_r: dipendono dalle condizioni iniziali

A_r, B_r, C_r, D_r: dipendono dalle condizioni al contorno, le pulsazioni proprie ω_r sono le incognite primarie.

Le condizioni di bordo o al contorno tipiche di una trave sono 3: trave libera, appoggiata o incastrata.

(Viene esclusa la soluzione banale che implica la trave ferma $A = B = C = D = 0$)

$\det[\text{matrice dei coefficienti}] = 0$ per ricavare l'equazione caratteristica

$$\begin{cases} (\cosh \beta l - \cos \beta l)^2 - (\sinh^2 \beta l - \sin^2 \beta l) = 0 \\ \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l = 1 \\ \cosh^2 \beta l - \sinh^2 \beta l = 1 \end{cases}$$

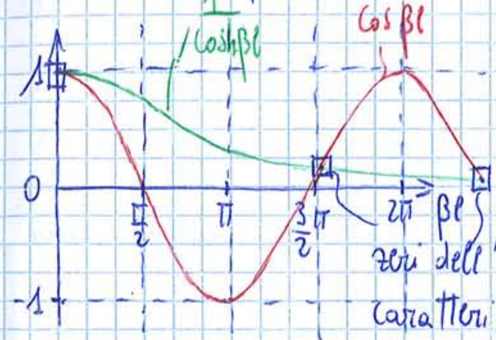
Soluzione sistema:

$$\Rightarrow \underbrace{1 - \cosh \beta l \cos \beta l = 0}, \quad \text{con } \beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$$

permette di ricavare le pulsazioni proprie

La eq. caratteristica ha forma trascendente con ∞ soluzioni, per scrivere le sol. in forma chiusa si ricorre a una "soluzione numerica":

$$\cos \beta l = \frac{1}{\cosh \beta l} = \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} \rightarrow 0 \quad \text{per } \beta \rightarrow \infty$$



Il picco massimo per entrambe le funzioni si ha per $\beta l = 0$ (primo zero calcolabile)

Dall' eq. di partenza

$$\phi^{IV} - \beta^4 \phi = 0 \Rightarrow \phi^{IV} = 0$$

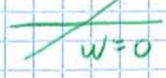
$$\phi = A + Bx + \cancel{Cx^2} + \cancel{Dx^3} = 0$$

Dalle cond. al contorno: $\phi''(0) = 0$ $\phi'''(0) = 0$ $\Rightarrow C = D = 0$

La sol. è una retta $\phi = A + Bx$, che si ha nel caso di moto rigido (traslazione pura) + (rotazione), ci sono due moti rigidi indipendenti:

$r = 0 \Rightarrow$ trasl. pura

rot. pura



Numericamente vengono individuati gli altri β:

$r = 1 \quad \beta_r l = \frac{3}{2}\pi = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\pi$

$r = 2 \quad \beta_r l = \frac{5}{2}\pi = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\pi$

$r = 3 \quad \beta_r l = \frac{7}{2}\pi = \left(3 + \frac{1}{2}\right)\pi$

$\Rightarrow$ Sol generica $\beta_r l \simeq \left(r + \frac{1}{2}\right)\pi$

$$\omega_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

($\frac{A_2}{A_0}$ è circa un undicesimo)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 132

Bisogna calcolare ω^2, $\phi(x)$ (nei discreti l'EVP è di tipo algebrico)

- Operatori differenziali autoaggiunti

Occorre verificare che $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$ siano autoaggiunti. Dato un operatore differenziale $\mathcal{L}$ ($\mathcal{M}$ o $\mathcal{K}$) sul dominio D e assegnate due funzioni qualunque o forme di oscillazione $u(x)$, $v(x)$ che soddisfano le condizioni al bordo si definisce:

Prodotto interno $(u, \mathcal{L}[v]) \overset{def}{=} \int_D u\, \mathcal{L}[v]\, dD$

$\mathcal{L}$ è autoaggiunto se il prodotto interno è simmetrico: $(u, \mathcal{L}[v]) = (v, \mathcal{L}[u])$

Si dimostra che "$\mathcal{M}$" e "$\mathcal{K}$" sono operatori autoaggiunti

$\mathcal{M}$: $\int_0^l u(x)\, m(x)\, v(x)\, dx = \int_0^l v(x)\, m(x)\, u(x)\, dx$

(Int. per parti)

$\mathcal{K}$: per trave E-B $\int_0^l u(x) \cdot EI \frac{d^4 v}{dx^4} dx = \underbrace{EI}_{cost.} \int_0^l \underset{f}{u(x)} \cdot \underset{g'}{v^{IV}} dx = \underbrace{[\cancel{u \cdot v'''}]_0^l}_{=0} - \int_0^l \underset{f'}{u'} \underset{g}{v'''} dx =$

è sempre nullo per ogni condizione al bordo (da tab. dei vincoli)

$= \underbrace{-[\cancel{u' v''}]_0^l}_{=0} + \int_0^l u'' v'' dx$

$\forall$ cond. al bordo

$\int_0^l v(x)\, EI \frac{d^4 u}{dx^4} dx = \int_0^l u'' v'' dx$, si ottiene lo stesso risultato ciò dimostra che $\mathcal{K}$ è autoaggiunto

$(u, \mathcal{K}[u]) = \int_0^l u \cdot EI \cdot u^{IV} dx = \int_0^l \left[EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^2 \right] dx \geq 0$, il termine elevato al quadrato è sempre positivo, al più 0.

Quindi:

L'operatore di rigidezza è definito positivo e quindi tutti gli autovalori sono $\omega^2 > 0$.

Nel caso di $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad \forall x$ si ha il moto rigido ($\omega^2 = 0$) di pura traslazione o di pura rotazione.

$\frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx = V(t)$, en. potenziale nulla in presenza di moti rigidi.

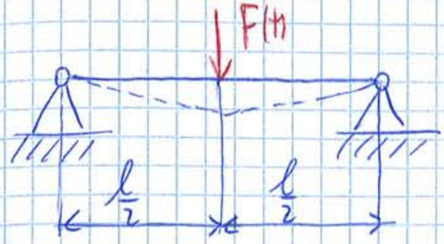
$\mathcal{K}$ è auto-aggiunto e semi-definito positivo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 132

$$\eta_r(t) = \int_0^t N_r(\tau)\, h_r(t-\tau)\, d\tau$$

$$w(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)\, \eta_r(t)$$

- Applicazione: Trave S.S. (simply-supported) → semplicemente appoggiata con carico in mezzeria.



nella statica si ha la deflessione della trave

$$\delta_{st}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_0}{48} \cdot \frac{l^3}{EI}$$, spostamento statico

Si inizia studiando il comportamento libero, per un corpo libero l'eq. del moto è:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Le cond. al contorno sono (riferite alle proprietà della trave appoggiata):

$v(0,t) = v(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(0) = \phi(l) = 0$, I^a C.C. da spostamento

$M(0,t) = M(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi''(0) = \phi''(l) = 0$, II^a C.C. da momento

sol. cercata $\quad \phi(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x$

Nella risoluzione si ricava per $\beta^4 = \frac{\mu\, \omega^2}{EI}$ si ha $\beta_r = r \cdot \frac{\pi}{l}$, $\omega_r^2 = \frac{\pi^4 r^4}{l^4} \frac{EI}{\mu}$

$\phi_r = \sin\left(r \frac{\pi}{l} x\right)$, $r = 1, 2, \ldots$ le autofunzioni o forme modali sono delle sinusoidi

$$m_r = \int_0^l \phi_r\, \mu\, \phi_r\, dx = \mu \int_0^l \sin^2\left(r \frac{\pi}{l} x\right) dx$$, massa modale

Per comodità di scrittura s'impone: $r \cdot \frac{\pi}{l} \cdot x = y$, $r \cdot \frac{\pi}{l} \cdot dx = dy \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = l & y = r\pi \end{cases}$

$$m_r = \mu \int_0^{r\pi} \sin^2 y \cdot \frac{l}{r\pi} \cdot dy = \frac{\mu \cdot l}{r\pi} \int_0^{r\pi} \frac{1-\cos 2y}{2}\, dy = \frac{\mu \cdot l}{\cancel{r\pi}} \cdot \frac{\cancel{r\pi}}{2} = \frac{\mu l}{2} = \frac{m_T}{2} \quad \forall r$$

μl : massa totale $m_T \quad \Rightarrow \quad m_r = \frac{m_T}{2}$

Per la trave S.S. con carico in mezzeria tutte le masse modali m_r sono uguali e sono uguali a metà della massa totale.

- Quoziente di Rayleigh: consente di trovare la prima frequenza propria (frequenza fondamentale) per i sistemi continui utilizzando metodi approssimati.

Ci si riferisce a un sistema discreto di $n°$ DOF conservativo per semplicità e successivamente l'applicazione va fatta sui sistemi continui:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

$$\{\psi_r\}^T \omega_r^2 [m]\{\psi_r\} = \{\psi_r\}^T [k]\{\psi_r\}$$, si premoltiplica l'EVP per $\{\psi_r\}^T$

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [k]\{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [m]\{\psi_r\}}$$, è la relazione o equazione "esatta"

Energie: $V = \frac{1}{2}\{x\}^T[k]\{x\}$ $\quad T = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\}$

Quindi l'autovalore ω^2 è legato al rapporto tra le due energie, sostituendo un vettore generico $\{u\} \in \mathbb{R}^n$ all'autovettore si ottiene

$$\omega^2 = R(\{u\}) \overset{def}{=} \frac{\{u\}^T[k]\{u\}}{\{u\}^T[m]\{u\}}$$, Quoziente di Rayleigh

In generale R non coincide con un autovalore, a meno che $\{u\}$ non sia autovettore. Applicando il teorema di espansione si esprime $\{u\}$ come combinazione lineare di autovettori:

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\} c_r \qquad , \{u\} \in \mathbb{R}^n$$

concetto di vicinanza $\rightarrow$ se $c_r >> c_s \Rightarrow c_r = c_s +$ perturbazione

Quando $\{u\}$ è simile all'autovettore $\{\psi_r\}$ si può affermare che

$$c_i = \varepsilon_i \cdot c_r \qquad , \text{con } \varepsilon_i << 1 \, , \, i \neq r$$

$$\Rightarrow R(\{u\}) \cong \omega_r^2 + \sum_{i\neq r} \varepsilon_i^2 (\omega_i^2 - \omega_r^2)$$

Il quoziente di Rayleigh è stazionario nell'intorno dell'autovettore (nell'autovettore il gradiente è nullo) $\rightarrow$ enunciato della stazionarietà di R

La funzione che rappresenta la soluzione sincrona è:

$$\eta(t) = \sin(\omega t + \alpha) \qquad \dot{\eta}(t) = \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

Per un sistema conservativo l'energia totale si conserva: $E = \text{costante}$

$$E = \underbrace{T_{MAX}}_{\cos^2(\omega t+\alpha)=1} + \underbrace{0}_{\sin^2(\omega t+\alpha)=0} = \underbrace{0}_{\cos^2(\omega t+\alpha)=0} + \underbrace{V_{MAX}}_{\sin^2(\omega t+\alpha)=1}$$

C'è un "palleggio" di energia tra l'energia cinetica e quella potenziale che porta ad avere:

$$T_{MAX} = V_{MAX} = \omega^2 \cdot \tilde{T}$$

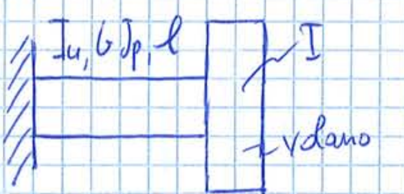
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{V_{MAX}}{\tilde{T}} = \frac{\{X_0\}^T [k] \{X_0\}}{\{\dot{X}_0\}^T [m] \{\dot{X}_0\}} = R(\{X_0\})$$

, quoziente di Rayleigh: maniera alternativa per stimare le pulsazioni proprie

$\{X_0\}$: vettore tentativo, deve essere simile al primo autovettore.

Ciò è valido anche per i sistemi continui, se conservano l'energia totale.

- Applicazione: barra di torsione con volano all'estremità

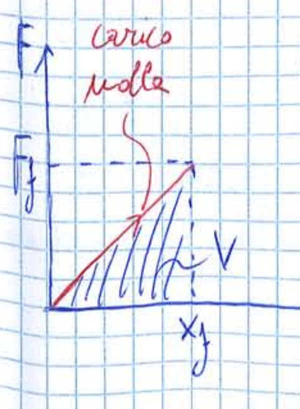


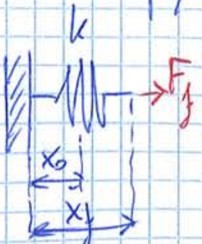
$$\theta(x,t) = u(x) \cdot \eta(t) = u(x) \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

$u(x)$: trial function (funzione di tentativo)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = u(x) \cdot \omega \cos(\omega t + \alpha), \quad V_{MAX} = T_{MAX} = \omega^2 \cdot \tilde{T}$$

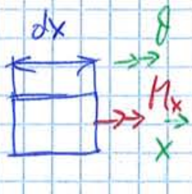
Richiamo: Teorema di Clapeyron → nel caso di corpo elastico lineare l'energia pot. immagazzinata è metà del lavoro compiuto dalla sollecitazione se questa avesse già la deformazione finale.





$$V = \frac{1}{2} F_f \cdot x_f = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_f^2$$

Stessa cosa vale in caso di torsione



$$M_T = G \cdot J_p \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$dV = \left(G \cdot J_p \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \cdot d\theta \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot G J_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 132

$$\Rightarrow R(x) = \omega^2 = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\int_0^l G \cdot J_p \cdot 1^2 \cdot dx}{\cancel{\frac{1}{2}}\int_0^l I_u \cdot x^2 \cdot dx + \cancel{\frac{1}{2}} I l} = \frac{G J_p \cdot l}{I_u \frac{l^3}{3} + I l^2} = \frac{\frac{G \cdot J_p}{l}}{I_u \frac{l}{3} + I} \quad [s^{-2}]$$

Il risultato è la stima della prima frequenza propria ω^2, si effettua un'ulteriore verifica con analisi parametrica per stabilire l'esattezza del risultato:

$$I_u \to 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{G J_p}{I l}$$, risultato esatto

II^a scelta: $u(x) = C =$ costante , $u'(x) = 0$ non rispetta le C.B. geometriche

$\Rightarrow \omega^2 = 0$, si avrebbe un moto rigido, ma l'assenza di deformazione è un compromesso inaccettabile per una trave incastrata soggetta a torsione (è incompatibile con i vincoli)

La stima della prima freq. propria deve essere sempre per eccesso: $\omega^2 > \omega^2_{1vero} > 0$

III^a scelta: $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ ammissibile per le C.B. geom. rispettate.

$$\omega^2 = \frac{4}{3} \frac{\frac{G J_p}{l}}{I_u \frac{l}{5} + I}$$

Confrontando la I^a con la III^a scelta si ha che la prima è migliore perché

$$\omega^2(u = x^2) > \underbrace{\omega^2(u = x) > \omega^2_{vera}}_{\text{si avvicina di più al valore reale della prima frequenza propria.}}$$

Capisaldi del procedimento: se sistema conservativo calcolo T_{max}, V_{max}, $\tilde{T}$

$\downarrow$

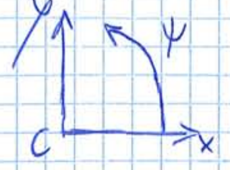
calcolo ω^2

$\downarrow$

Scelgo $u(x)$ che rispetti CB geometriche

$\delta = \overline{OC}$: è la freccia elastica dell'albero che esprime l'inflessione. Il modello viscoso traduce l'effetto ventilante, anche se il modello non combacia perfettamente con la realtà

Si impongono gli equilibri con sistema di riferimento :



(3 DOF) $\{ x, y, \psi$

$(\leftarrow)\quad m\ddot{x}_G + kx + c\dot{x} = 0$

$(\downarrow)\quad m\ddot{y}_G + ky + c\dot{y} = 0$

$G\curvearrowleft\quad M - I\ddot{\psi} + (ky + c\dot{y})\,\varepsilon\cos\psi - (kx + c\dot{x})\cdot\varepsilon\sin\psi = 0$ → esclusa per la semplificazione

Ipotesi semplificativa : $\dot{\psi} = \omega =$ costante ⟹ Si rende il sistema a due DOF: x, y, $\cancel{\psi}$ → eq. del momento non si considera

$\psi = \omega t$

Si vuole definire la coppia motrice $M(t)$ necessaria per mantenere ω costante.

$$\begin{cases} x_G = x + \varepsilon\cos\omega t \\ y_G = y + \varepsilon\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} - \varepsilon\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y}_G = \ddot{y} - \varepsilon\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2\varepsilon\cos\omega t \quad (1) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\omega^2\varepsilon\sin\omega t \quad (2) \end{cases}$$

, il sistema è disaccoppiato con coeff. uguali → si tratta di un problema di masse eccentriche con $m\omega^2\varepsilon$ forza centrifuga

Si definisce coordinata complessa: $z = x + iy$

Serve a gestire 2 eq. con un'unica equazione ottenendo un sistema SDOF nella variabile complessa.

$(1) + i(2)$: $\quad m(\ddot{x} + i\ddot{y}) + c(\dot{x} + i\dot{y}) + k(x + iy) = m\omega^2\varepsilon(\cos\omega t + i\sin\omega t)$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2\varepsilon\, e^{i\omega t} \qquad (SDOF)$$

La soluzione cercata a regime è nella forma : $z = z_0\, e^{i\omega t}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

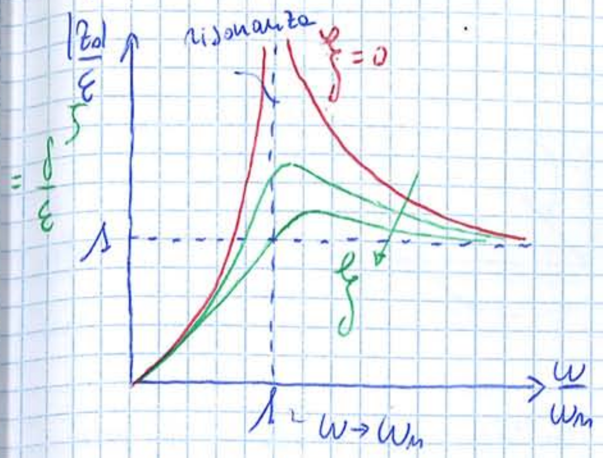
non è presente il fenomeno del battimento.

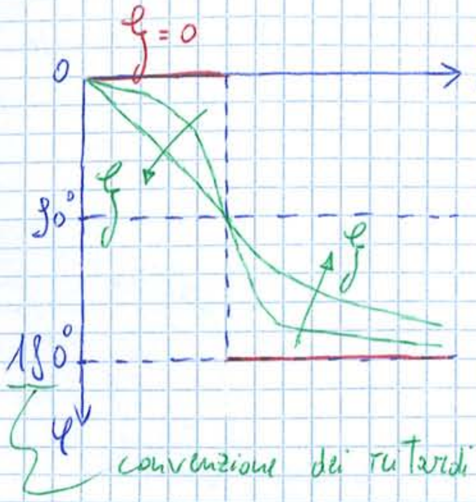
$\Rightarrow (k - m\omega^2 + i\omega c)\, z_0 = m\omega^2\varepsilon$

$$z_0 = \frac{m\omega^2\varepsilon}{k - m\omega^2 + i\omega c} = \frac{\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}_{r\text{ : rapp. di frequenze}}^2 + i2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}, \quad \text{con } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{m} = \frac{c}{c_{cr}}$$

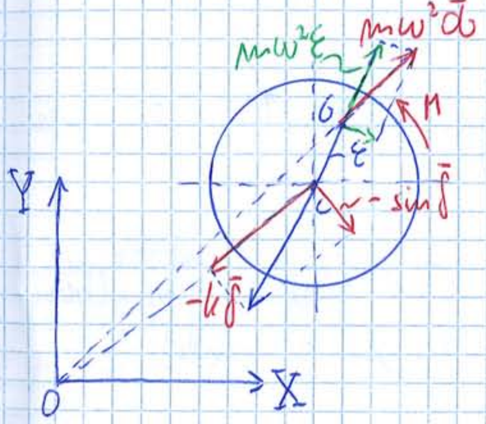
Diagrammi di Bode (FRF):





Da notare che $m\omega^2\bar{\varepsilon}$ è solo una componente della forza centrifuga. La forza centrifuga totale è data da $m\omega^2\overline{OG}$

(DCL)



La soluzione del corpo libero è un'identità e si ottengono gli stessi risultati già visti.
Assegnato ξ, l'angolo di fase φ cresce al crescere di ω ottenendo tre situazioni:

- $\omega < \omega_n \Rightarrow \varphi < 90°$, G esterno a C
- $\omega > \omega_n \Rightarrow \varphi > 90°$, G interno a C
- $\omega = \omega_n \Rightarrow \overline{CG} \perp \overline{OC}$

Nel caso ideale $\xi = 0$, e si ha:

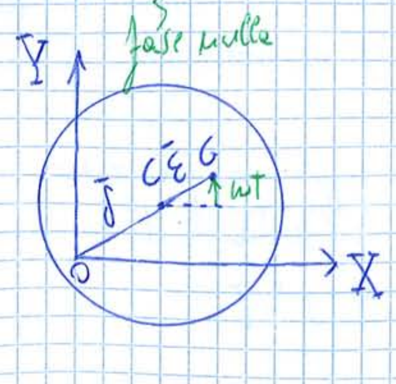
- $\omega < \omega_n \Rightarrow \tan\varphi = 0$
- $\omega > \omega_n \Rightarrow \tan\varphi = 180°$

} O C G allineati

- $\omega = \omega_n \Rightarrow \varphi$ indeterminato

Per esprimere il significato di fase si analizzano le tre situazioni estreme:

1) $\omega << \omega_n$, $\underbrace{\varphi \cong 0}_{\text{fase nulla}}$ $\Rightarrow$ $\bar{\delta}$ e $\bar{\varepsilon}$ sono circa allineati



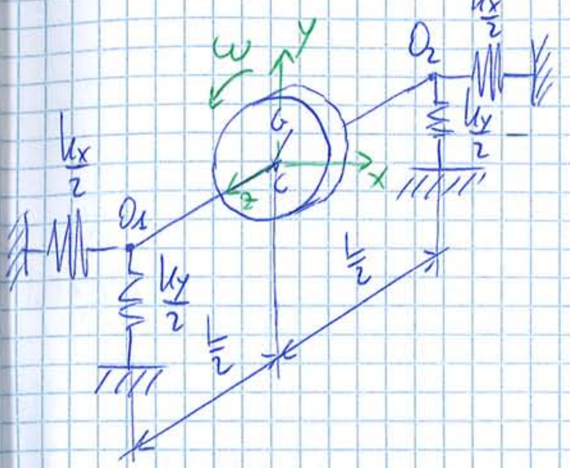
$\frac{\delta}{\varepsilon} << 1$, freccia piccola

$\omega t = \psi$: posizione angolare del rotore

ω: velocità a cui ruota tutto

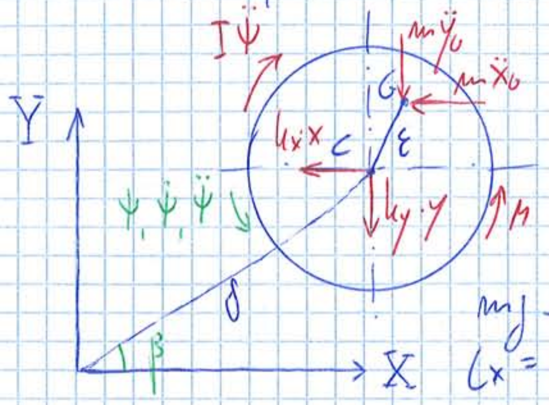
- Influenze dei supporti elastici: si consideri un albero infinitamente rigido con due supporti volventi alle estremità, cedevoli e anisotropi. Inoltre un disco è posto in mezzeria.

Si studia il moto di un albero rigido sostenuto da supporti elastici, con costanti di elasticità differenti sui due piani $k_x \neq k_y$ (rigidezze differenti a seconda delle direzioni x, y => anisotropia), i due cuscinetti sono uguali ma ortotropi, cioè le loro caratteristiche di elasticità dipendono dalle direzioni considerate.



Anche in questo caso si immagina una situazione di equilibrio statico con $\bar{\varepsilon} = \overline{CG}$

(DCL)



$C(x, y)$

$mg \perp$ a C

$c_x = c_y = 0 \simeq$ trasc.

L'anisotropia può essere tipica dei cuscinetti magnetici in cui è possibile controllare la rigidezza nelle due direzioni o i cuscinetti lubrificati in cui diverse rigidezze possono essere ottenute modificando le caratteristiche del lubrificante.

Equilibri: $(\leftarrow)$ $m\ddot{x}_G + k_x x = 0$, $k_x \neq k_y$, cuscinetti ortotropi

$(\downarrow)$ $m\ddot{y}_G + k_y \cdot y = 0$

$M(t)$ è tale che $\dot{\psi} = \omega = \text{costante} \Rightarrow \psi = \omega t$, l'eq. di equilibrio del momento motore non si considera.

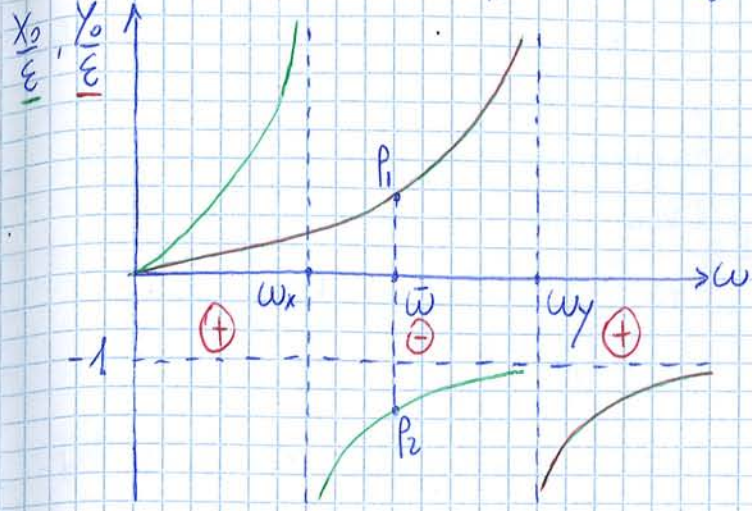
$$\begin{cases} x_G = x + \varepsilon \cos\omega t \\ y_G = y + \varepsilon \sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} - \varepsilon\omega^2 \cos\omega t \\ \ddot{y}_G = \ddot{y} - \varepsilon\omega^2 \sin\omega t \end{cases}$$, posizione di G

Si possono scrivere l'eq. del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_x x = m\omega^2 \varepsilon \cos\omega t \\ m\ddot{y} + k_y \cdot y = m\omega^2 \varepsilon \sin\omega t \end{cases}$$

, con $k_x \neq k_y$ non si ricorre alle coordinate complesse z, ma si effettua una separazione di variabili

Supponendo $\omega_y > \omega_x$ si rappresenta la funzione di trasferimento (FRF):



Se X_0, Y_0 sono positivi la fase è nulla, altrimenti si ha una fase di 180° nella parte inferiore del grafico.

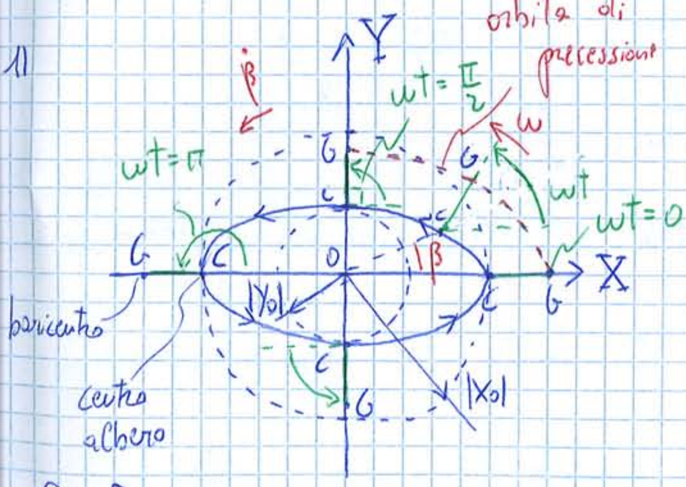
Per la freq. $\bar{\omega}$ i punti rappresentativi del sistema sono P_1 e P_2.

Esempio: $X_0 < 0$, $Y_0 > 0$, $|X_0| > |Y_0|$
$\Rightarrow \ominus$

$$\begin{cases} X_C = X_0 \cos\omega t \\ Y_C = Y_0 \sin\omega t \end{cases} \quad X_0, Y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} X_C = |X_0 + \varepsilon| \cos\omega t \\ Y_C = |Y_0 + \varepsilon| \sin\omega t \end{cases}$$

Orbita di C attorno a O: ellittica. Si distinguono tre casi particolari:

1)

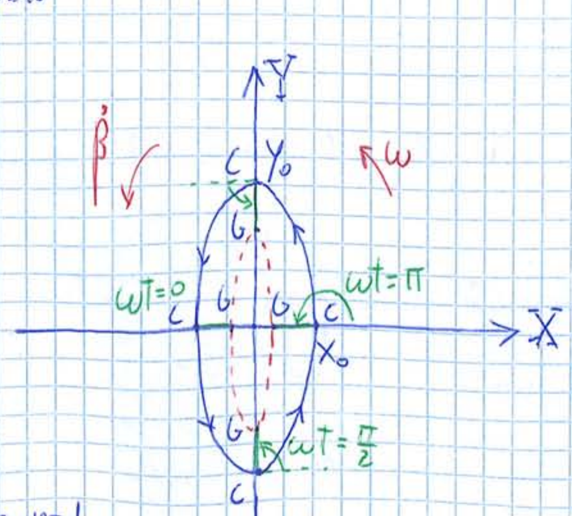


⊕ : Forward

$\omega < \omega_x < \omega_y \Rightarrow |X_0| > |Y_0| > 0$

La vel. angolare dell'albero è inferiore a entrambe le velocità critiche che coincidono con le pulsazioni proprie ω_x e ω_y. G è all'esterno dell'asse dell'albero, che ruota in senso antiorario assieme alla posizione di C.

2)



⊕ : Forward

Autocentramento

$\omega > \omega_y > \omega_x \Rightarrow |X_0| < |Y_0| < 0$

L'albero ruota con vel angolare superiore a quelle critiche ω_x e ω_y, il baricentro G è all'interno della traiettoria ellittica di C (fenomeno di autocentramento). Analogamente a prima ruota e traiettoria hanno lo stesso verso di rotazione antiorario.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

, matrice o tensore d'inerzia, in cui i termini:

$$A = I_{xx} = \int_V \rho \, dV \, (y^2 + z^2)$$
$$B = I_{yy} = \int_V \rho \, dV \, (x^2 + z^2)$$
$$C = I_{zz} = \int_V \rho \, dV \, (x^2 + y^2)$$

sono i prodotti d'inerzia

la matrice $[I]$ è simmetrica

$$\Downarrow$$

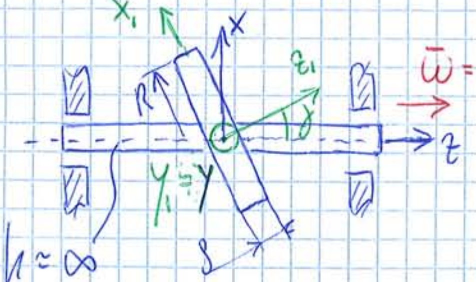
$$[I] = [I]^T$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int \rho \, xy \, dV$$
$$I_{xz} = I_{zx} = -\int \rho \, xz \, dV$$
$$I_{yz} = I_{zy} = -\int \rho \, yz \, dV$$

sono i momenti centrifughi

Se la terna è centrale, è semplice da individuare per un corpo simmetrico o per un corpo a simmetria di rivoluzione, basta determinare gli autovalori.

- Esempio 1. Rotore con albero infinitamente rigido e disallineato, cioè il disco non ruota attorno ad un asse principale d'inerzia



$\bar{\omega} = \omega \hat{k}$

x, y, z : terna baricentrica e fissa

x_1, y_1, z_1 : terna centrale e solidale al disco che ruota alla velocità ω

Si calcola il momento d'inerzia in base alla terna mobile x_1, y_1, z_1:

Momento polare $(I_{z_1 z_1})$ $\quad C = I_p = \frac{1}{2} m R^2$

Momento diametrale $(I_{x_1 x_1})$ $\quad A = I_d = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m \delta^2$

m : massa disco, R : raggio disco, δ : spessore disco

La velocità ω deve essere riferita a $\underline{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1}$: porta a maggiori semplificazioni

$$\bar{\omega} = \omega \hat{k} = \underbrace{(\omega \cdot \hat{i}_1)}_{p} \hat{i}_1 + \underbrace{(\omega \hat{j}_1)}_{q} \hat{j}_1 + \underbrace{(\omega \hat{k}_1)}_{r} \hat{k}_1 \quad \text{con} \quad \begin{cases} p = \omega \sin\gamma \\ q = 0 \\ r = \omega \cos\gamma \end{cases}$$

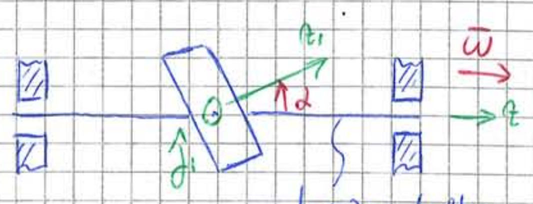
$$\Rightarrow \bar{M}_o' = -(I_p - I_d)\, \omega^2 \sin\gamma \cos\gamma \; \hat{k}_1$$

$\bar{\gamma}$: vettore squilibrio

$$\bar{M}_o' = -(I_p - I_d)\, \omega^2 \cdot \bar{\gamma} \quad , \text{per } \gamma \ll 1 \Rightarrow \sin\gamma \simeq \gamma \; , \cos\gamma \simeq 1$$

- Riassunto momento risultante delle forze d'inerzia (Parte 2.)

Es. 1

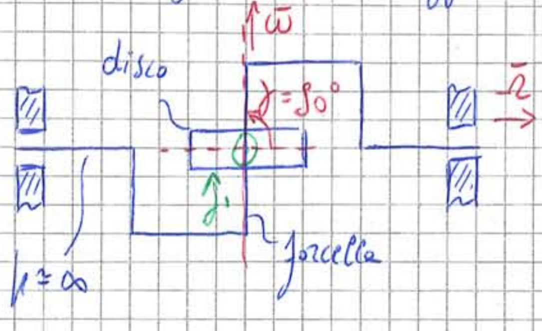


$$\bar{M}' = -(I_p - I_d)\,\omega^2\,\bar{\alpha}$$

$k \approx \infty$ (albero rotante infinitamente rigido)

$\bar{\alpha}$: errore angolare di montaggio che fa nascere $\underline{M}'$ { raddrizzante $I_p > I_d$; ribaltante $I_p < I_d$ }

Es. 2

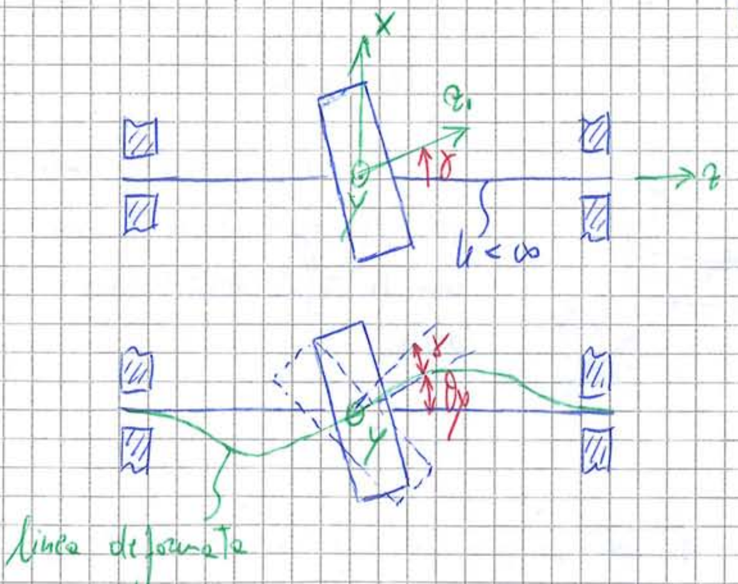


$$\bar{M}' = -I_p\,\omega\,\Omega\,\hat{i}_1$$

$\bar{M}'$ è un momento giroscopico che tende a riportare ω su Ω. In genere $\omega < \Omega$.

Solido giroscopico: solido caratterizzato dal fatto che tende a mantenere il suo asse di rotazione orientato in una direzione fissa, la coppia di assi ortogonali agli assi polari è una coppia principale (è un solido di rivoluzione). I fenomeni a esso collegati si chiamano fenomeni giroscopici.

- ROTORE CON SQUILIBRIO DINAMICO: il modello proposto definisce una situazione più realistica con albero flessibile k = costante $< \infty$



Nascono azioni d'inerzia e l'albero inizia a inflettersi, ciò implica una rotazione ϑ_y della linea elastica.

Componenti di rotazione della linea ϑ_x, ϑ_y. Alla rotazione si aggiunge l'effetto dello squilibrio dinamico γ.

Lo squilibrio dinamico γ impedisce al disco di ruotare attorno al suo asse polare.

Equilibrio alla rotazione: $(\nearrow)$ $I_d \cdot \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y + k\theta_x = 0$

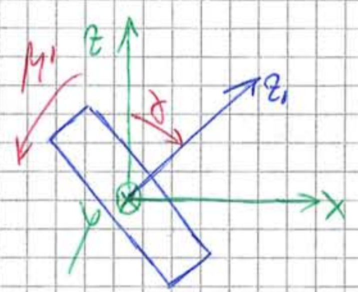
$(\nwarrow)$ $I_d \cdot \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x + k\theta_y = 0$

Si ha una condizione di "moto libero" che avviene in presenza di una $\omega \neq 0$, mentre θ_x individua la precessione, cioè l'anticipazione della linea elastica, l'asse del disco descrive un moto regolato dall'omogenea associata con traiettoria che forma un cono.

- Si applica la forzante con squilibrio dinamico $\gamma \neq 0$ e quindi la sovrapposizione degli effetti:

Risposta totale = Risposta libera + Risposta forzata

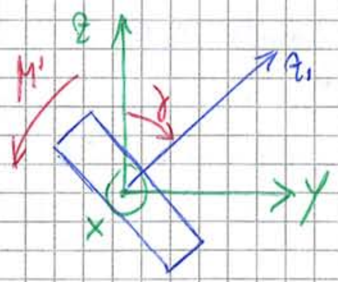
Effetto di γ in $\omega t = 0$ con $\theta_x = \theta_y = 0$



$M' = (I_p - I_d)\,\omega^2 \gamma$, momento raddrizzante che tende a diminuire γ.

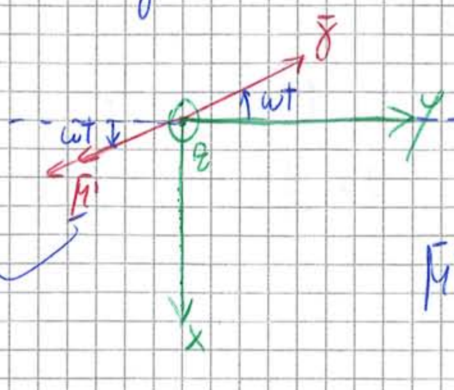
$\bar{\gamma}$ ha lo stesso verso di y con la regola della mano destra. L'albero è indeformato.

Effetto di γ in $\omega t = \frac{\pi}{2}$ con $\theta_x = \theta_y = 0$



$\bar{\gamma}$ ha lo stesso verso di $-x$ con la regola della mano destra. Lo squilibrio dinamico è un vettore rotante e per un disco sottile si ha M' raddrizzante.

Effetto di γ in un caso intermedio (generale) $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$



istante 0 che fissa il sistema

(è opposto a $\bar{\gamma}$, si vede dall'Esempio 1.)

$\bar{M}' = -(I_p - I_d)\,\omega^2 \bar{\gamma}$

In presenza di smorzamento il moto di precessione decade nel tempo, quindi senza smorzamento ($\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$) e il sistema è conservativo, si tratta di sistemi giroscopici conservativi senza dissipazioni

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{i\lambda t} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \ \omega = \text{costante} \rightsquigarrow \text{velocità di rotazione del rotore.}$$

(non è detto che $\lambda \equiv \omega$)

sostituendo θ nell'omogenea associata si ha

$$(-\lambda^2 I_d - i\, I_p \omega\, i \lambda + k) \cdot \theta_0\, e^{i\lambda t} = 0$$

$$I_d \cdot \lambda^2 - I_p \omega \lambda - k = 0$$

$$\lambda = \frac{I_p \cdot \omega \pm \sqrt{(I_p\omega)^2 + (4 k I_d)}}{2 I_d} \rightsquigarrow \Delta > 0$$

sempre positivo, quindi il sistema è conservativo.

$$\theta = \theta_{10} \cdot e^{i\lambda_1 t} + \theta_{20}\, e^{i\lambda_2 t}$$

il sistema è stabile con soluzioni reali λ_1, λ_2 una positiva e l'altra negativa per cui si avranno due moti liberi di precessione, uno in avanti e l'altro all'indietro.

$$\lambda_1 = \frac{I_p\omega + \sqrt{(I_p\omega)^2 + 4 I_d k}}{2 I_d} > 0 \qquad \text{Forward} \quad \frac{\lambda}{\omega} > 0$$

↗ moto di precessione in avanti concorde

$$\lambda_2 = \frac{I_p\omega - \sqrt{(I_p\omega)^2 + 4 I_d k}}{2 I_d} < 0 \qquad \text{Backward} \quad \frac{\lambda}{\omega} < 0$$

↗ moto di precessione retrogrado all'indietro discorde

Traiettoria descritta dall'asse del disco: • il baricentro resta fisso

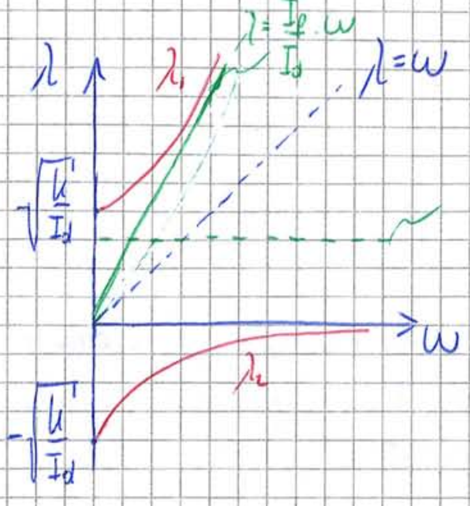
- l'asse del disco descrive un cono a due falde concorde o discorde con ω
- le pulsazioni proprie λ_1, λ_2 sono funzioni dipendenti da ω ($\lambda = \lambda(\omega)$)
- comportamento asintotico per $\omega \to \infty$

$$\lambda_1 \simeq \frac{I_p\omega + I_p\omega}{2 I_d} = \frac{I_p}{2 I_d} \cdot \omega \qquad \text{(Asintoto obliquo)}$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{I_p\omega - I_p\omega}{2 I_d} = 0 \qquad \text{(Asintoto orizzontale e nullo)}$$

Autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

- Diagrammi di Campbell: rappresentazioni grafiche in cui sono racchiuse tutte le informazioni sul rotore. Sono rappresentati gli autovalori λ in funzione della velocità di rotazione.



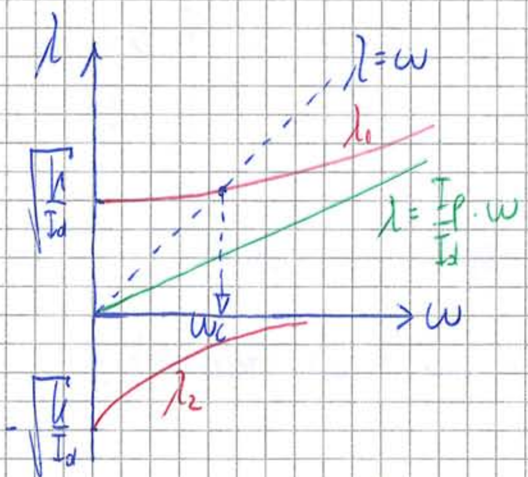
• Campbell con $\frac{I_p}{I_d} > 1$ (disco)

$\lambda = cost.$ per rotore di Jeffcott, rappresenta lo squilibrio statico

Autovalori: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

Quando il motore è fermo $\underset{\Downarrow}{\omega = 0}$: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{I_d}}$

può accadere nel caso di una martellata che colpisce il rotore (caso vibrazionale)



• Campbell con $\frac{I_p}{I_d} < 1$ (rotore lungo)

L'eccitazione provoca lo squilibrio dinamico, il fenomeno giroscopico è fondamentale (matrice antisimmetrica).

ω_c: vel critica, una delle freq. proprie coincide con una delle pulsazioni proprie

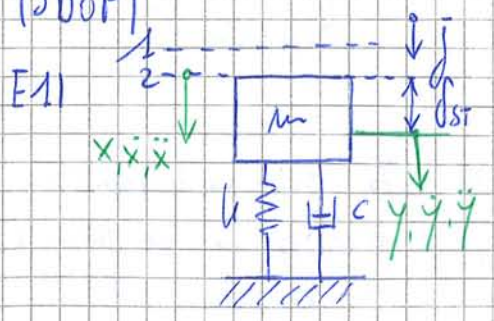
$\lambda = \omega$: eccitazione sincrona, la forzante viaggia con la stessa pulsazione dell'eccitazione.

λ_1, λ_2 rappresentano il comportamento libero e non sono rettilinee a causa degli effetti giroscopici.

ESERCIZI

(SDOF)

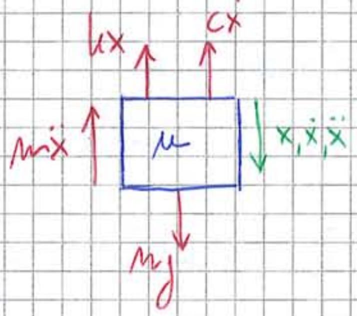
E1



1: senza forza peso
2: equilibrio statico

Massa m soggetta a forza peso vincolata al terreno tramite molla elastica k e smorzatore c. Si vuole ricavare l'eq. del moto.

(DCL)



$$\sum_i \bar{F}_i - m\bar{a}_G = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg$$

termine forzante = costante

La forza peso nel dubbio viene sempre messa, al massimo è ininfluente annullandosi successivamente

(Soluzione a regime + transitorio): $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

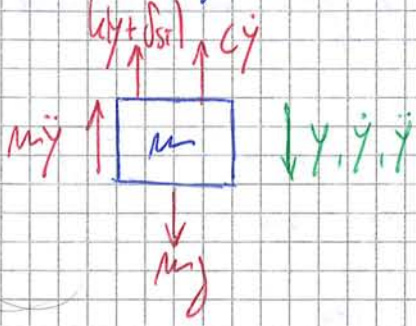
$$x(t) = (a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)\, e^{-\xi\omega_n t} + \frac{mg}{k}$$

$\delta_{ST} \overset{def}{=} \frac{mg}{k}$, spostamento statico

Si considera il caso sottosmorzato $\xi < 1$: $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$

Si sottopone il sistema a uno spostamento immaginario dall'equilibrio statico pari a y:

(DCL)



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \cancel{k\delta_{ST}} = \cancel{mg}$$

In tal caso la forza peso è ininfluente.

Soluzione al transitorio: $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$ *

(* Eq. del moto) $y(t) = (a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)\, e^{-\xi\omega_n t}$

legge oraria

Linearizzazione

Per $\underbrace{\theta_{eq_1}}_{=0}$: $f(\theta, \dot\theta) \approx -\underbrace{\cancel{\frac{mgL}{I_0} \cdot \sin\theta_{eq_1}}}_{=0} - \frac{mgL}{I_0} \cos\theta_{eq_1}(\theta - \theta_{eq_1}) \approx -\frac{mgL}{I_0}\theta$

$$\ddot\theta = -\frac{mgL}{I_0} \cdot \theta$$

$$I_0 \ddot\theta + mgL \cdot \theta = 0$$

Soluzione: $\theta = (a \cos\omega_n t + b \sin\omega_n t)$, con $g = 0$

$$\omega_n^2 = \frac{mgL}{I_0} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{mgL}{I_0}}$$

Per $\underbrace{\theta_{eq_2}}_{=\pi}$: $f(\theta, \dot\theta) \approx -\underbrace{\cancel{\frac{mgL}{I_0} \sin\theta_{eq_2}}}_{=0} - \frac{mgL}{I_0} \cos\theta_{eq_2}(\theta - \theta_{eq_2}) \approx \frac{mgL}{I_0}(\theta - \pi)$

$$\ddot\theta = \frac{mgL}{I_0}(\theta - \pi)$$

$$I_0 \ddot\theta - mgL\,\theta = -mg\frac{L}{I_0} \cdot \pi \quad \text{(non omogenea)}$$

Soluzione: $\cancel{\theta = (a \cos\omega_n t + b \sin\omega_n t) + \ldots} \rightarrow$ non adatta

$$I_0 \ddot\theta - mgL(\theta - \pi) = 0 \Rightarrow (\theta - \pi, \dot\theta, \ddot\theta)$$

$$\omega_n^2 = \ldots$$

$$I_0 \ddot\theta - mgL\theta = 0 \quad \text{, omogenea associata}$$

$$\theta = A e^{st} \Rightarrow I_0 s^2 - mgL = 0$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{mgL}{I_0}}$$

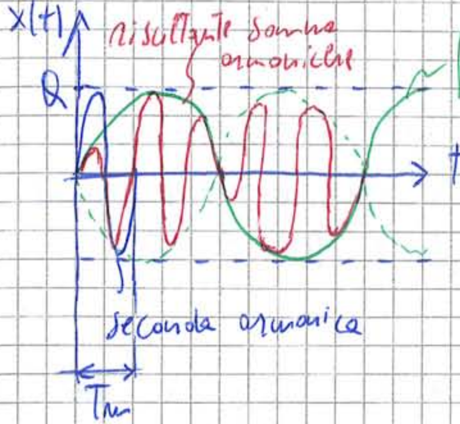
$$\theta = A_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{mgL}{I_0}}\, t} + A_2 \cdot e^{\sqrt{\frac{mgL}{I_0}}\, t} + \pi$$

Il sistema è instabile, cioè al crescere del tempo cresce θ. Le soluzioni valgono nell'ipotesi di piccole oscillazioni, cioè θ non andrà all'infinito per t grandi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 132

$\Omega \approx \omega_n$ è vicino allo smorzamento: ε diventa piccola e siccome $\varepsilon = \frac{2\pi}{T_\varepsilon}$ il suo periodo T_ε diventa grande rispetto al periodo associato $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$.

Si sommano 2 armoniche con periodo molto differente tra loro:



Ampiezza max: $\frac{f_0}{2m\varepsilon\omega_n} = Q$

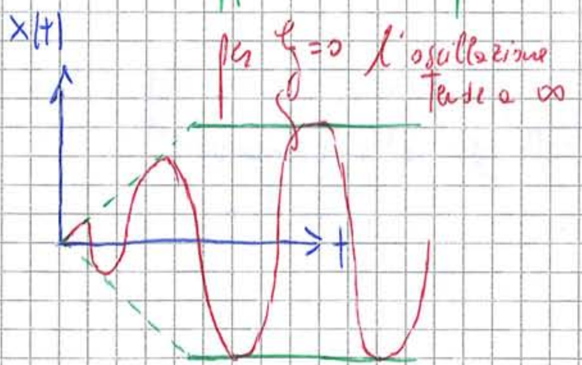
Nella risultante l'ampiezza non è costante, ma varia continuamente, essa è detta "Battimento", e aumenta al diminuire di ε

Il battimento esiste quando due armoniche di frequenze simile si sommano (onda con freq. elevata la cui ampiezza varia regolarmente nel tempo.

Se $\Omega \to \omega_n$ si ha risonanza ∞ ($\varepsilon \to 0$ e ampiezza $\to \infty$, anche $T_\varepsilon \to \infty$)

$$\lim_{\Omega \to \omega_n} x(t) = \lim_{\Omega \to \omega_n} \frac{f_0(-t \sin \Omega t)}{-2m\Omega} = \frac{f_0}{2m\omega_n} t \sin \omega_n t$$

Si applica De Hospital $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$



In risonanza l'ampiezza tende a diventare grande, ma non aumenta istantaneamente.

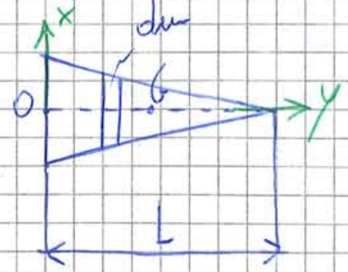
Per il battimento con smorzamento l'ampiezza, finito il transitorio si stabilisce ad ampiezza:

$A <$ ampiezza max battimento

Con smorzamento $\xi \neq 0$ dopo il transitorio l'ampiezza non cresce più ma si assesta a un valore:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

, nel transitorio il comportamento è simile a $\xi = 0$



$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{y}{L}\right)$ massa per unità di lunghezza dell'elettrone

$dm = \rho\, dV = \mu\, dy = \rho\, dy\, S$

$\mu_0 = 100 \frac{kg}{m}$

$I_0 = I_G + m\, OG^2$

Si ha:
$\zeta = 60\%$, $\theta_{MAX} = 5°$

$I_0 = \int_m y^2 dm = \int_0^L y^2 \mu\, dy = \int_0^L y^2 \mu_0 \left(1 - \frac{y}{L}\right) dy = \frac{1}{12} \mu_0 L^3$

$I_0 = 1{,}04\ kg\, m^2$

$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} + cL^2 \dot{\theta} + k_{eq}\, \theta = kLR \sin \underbrace{\Omega t}_{\theta}$, eq. del moto

$k_{eq} = k_T + kL^2$

$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$ con $\theta_0 = \frac{\frac{f_0}{k}}{\underbrace{\sqrt{(1-r^2)^2 - (2\zeta r)^2}}_{(1)}} = \frac{\frac{kLR}{k_{eq}}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ * $= \theta_{MAX}$

* In condizioni di risonanza: $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ per θ_{MAX}

$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_0}}$

Per $\theta_{MAX} = 5°$, $\Omega = \omega_{ris} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ da sostituire in (1)

$\Rightarrow \theta_{MAX} = \frac{\frac{kLR}{k_{eq}}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow k_{eq} = \frac{kLR}{2\theta_{MAX}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 117\ kN \frac{m}{rad}$

$k_T = k_{eq} - kL^2 = 19\ kN \frac{m}{rad} = 330 \frac{Nm}{°}$

Chilogrammi al grado: significa che si ha bisogno di 330 kg per far ruotare l'asta di un grado.

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_0}} = 177\ rad/s$

$\tan \varphi = -\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \Rightarrow \varphi = -41{,}4°$

La risposta è in ritardo di $41{,}4°$ rispetto al segnale d'ingresso.