NUMERO: 1514A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Scalia

MATERIA: Statistica + Formulario. Prof.Vicario

ricevimento D.i.P. Matematica 29-09-14 (1)

24 Punti Prima Prova con risposta errata - 50% punti domanda
8 punti seconda prova con orale.

Fenomeno casuale (o aleatorio);

fenomeno empirico i cui risultati non sono prevedibili a priori, caratterizzato dalla proprietà che la sua osservazione in un insieme fissato di circostanze non conduce sempre agli stessi risultati

⇓ **regolarità statistica**

Definizione a priori della probabilità

Def 1.1

la probabilità di un evento E è definita come il rapporto tra il numero s dei risultati favorevoli (cioè il numero dei risultati che determinano E) ed il numero n dei risultati;

$$\mathbb{P}[E] = \frac{s}{n}$$

Purché i risultati siano tutti ugualmente possibili e tra di loro incompatibili

Esempio 1

Esperimento casuale: lancio di un dado simmetrico ed omogeneo

- Qual'è la probabilità di aver come risultato un numero dispari?

$$\mathbb{P} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

- Qual'è la probabilità di ottenere la faccia con 4 pallini?

$$\mathbb{P} = \frac{1}{6}$$

Esempio 2

Esperimento casuale: estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte ben mescolate.

- Qual'è la prob. di estrarre una carta di cuori?

$$\mathbb{P} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25$$

- Qual'è la prob. di estrarre una carta con un numero compreso tra ≥ 5 e ≤ 10?

$$\mathbb{P} = \frac{16}{52}$$

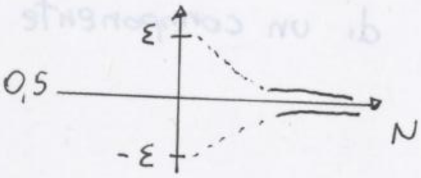
- Qual'è la prob. di estrarre un asso oppure una carta a fiori?

$$\mathbb{P} = \frac{\cancel{17}\ 16}{52}$$

limite Probabilità 30-09 (3)

$$\lim_{N \to +\infty} P\left[\,|f_\epsilon - \mathbb{P}[\epsilon]| < \varepsilon\,\right] = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N^* : \forall N > N^*\ |f_\epsilon - \mathbb{P}[\epsilon]| < \varepsilon$$



Def frequenza relativa.

Validità: campo assicurativo, biologico, controllo statistico della qualità

"Il funzionamento di ogni sistema fisico implica fenomeni di degrado" ed usura che ne modificano inevitabilmente le prop.

Def soggettivistica della probabilità.

È supportata dalla formula di Bayes $\mathbb{P}(E_1|E_2) = \dfrac{\mathbb{P}(E_2|E_1)\cdot\mathbb{P}(E_1)}{\mathbb{P}(E_2)}$

La probabilità di un evento E, secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo P che egli stima equo attribuire all'importo unitario esigibile solo al verificarsi di E.

Def assiomatica di Probabilità. (1.1.4)

- crea ma non dà un valore alla probabilità.
- crea un modello matematico.
- un evento viene rappresentato da insiemi.

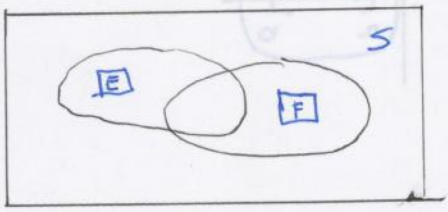
Def S=Spazio campione

è l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento casuale. Si indica anche con Ω.

esempi

- lancio di una moneta $S = \{testa, croce\}$ $\# S = 2$
- lancio di un dado $S = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$ $\# S = 6$
- lancio di una moneta $S = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$ $\# S = 4$

• Dati due eventi E ed F qualsiasi, appartenenti allo spazio degli eventi A, si definisce evento unione di E e di F ($E \cup F$) l'evento che si verifica quando si verifica E o F o entrambi



Es: $E = \{1,2,3\}$
$F = \{2,4,6\}$
$E \cup F = \{1,2,3,4,6\}$
$\overline{E \cup F} = \{5\}$

Teoremi

• se si definisce come evento intersezione di E ed F (EF o $E \cap F$) l'evento che si verifica quando si verifica sia E sia F, $EF \in A$ ($EF = E \wedge F$)

• se si definisce evento impossibile ϕ l'insieme vuoto, cioè l'insieme che non contiene nessuna descrizione, $\phi \in A$.

"un evento si è verificato"

$\Downarrow$

il risultato delle osservazioni

Esempi

• lancio moneta

$E_1 = \{\text{Testa}\}$

$E_2 = \{\text{Croce}\}$

$A = \{\phi, \{T\}, \{C\}, \underset{\{T, C\}}{S}\}$

• lancio dado

$E = \{\text{presentarsi di un numero pari}\} = \{2,4,6\}$

$E_5 = \{\text{presentarsi del numero } 5\} = \{5\}$

esempio

Si abbia un lotto costituito da M componenti, dei quali K sono difettosi, mentre i rimanenti $M-K$ non lo sono, l'esperimento consiste nell'estrazione di un campione di m componenti del lotto.
Qual'è la probabilità che nel campione vi siano k componenti difettosi?

$$S = \{(z_1, z_2, \dots, z_m) : z_i = n° \text{ del componente estratto}\}$$

- Con remissione; $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_m) = M^m \quad \forall_m$

$M \times M \times M \times M \times \dots \times M$ = sono i modi per scegliere i componenti

- senza remissione; $M \times (M-1) \times (M-2) \times \dots \times (M-m+1)$

$M-0$

$$A_k = \left\{ \begin{matrix} \text{estrazione di un campione di } m \\ \text{elementi di cui } k \text{ difettosi} \end{matrix} \right\} \subset S$$

$\# A_k$??

$$(\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_k}_{\text{Difettosi}}, \underbrace{z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_m}_{m-k \text{ non difettosi}})$$

Con remissione $\binom{m}{k} \underbrace{K \times K \times K \times \dots \times K}_{k \text{ piccolo volte}} \times \underbrace{(M-K) \times (M-K) \times \dots \times (M-K)}_{m-k \text{ volte}}$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!} \qquad \underline{nb: 0! = 1}$$

$$[A_k] = \frac{\# A_k}{\# S} = \frac{\binom{m}{k} K^k (M-K)^{m-k}}{M^m} = \binom{m}{k} \frac{K^k}{M^k} \frac{(M-K)^{m-k}}{M^{m-k}} = \binom{m}{k} \left(\frac{K}{M}\right)^k \left(1 - \frac{K}{M}\right)^{m-k}$$

senza remissione $\binom{m}{k} K \times (K-1) \times (K-2) \times \dots \times (K-k+1) \times (M-K) \times (M-K-1) \times \dots \times$
$(M-K-m+k+1)$

$k = k$ piccolo

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{\binom{K}{k} \binom{M-K}{m-k}}{\binom{M}{m}}$$

esempio

$M = 52 \quad K = 13 \quad m = 13 \quad k = 7$

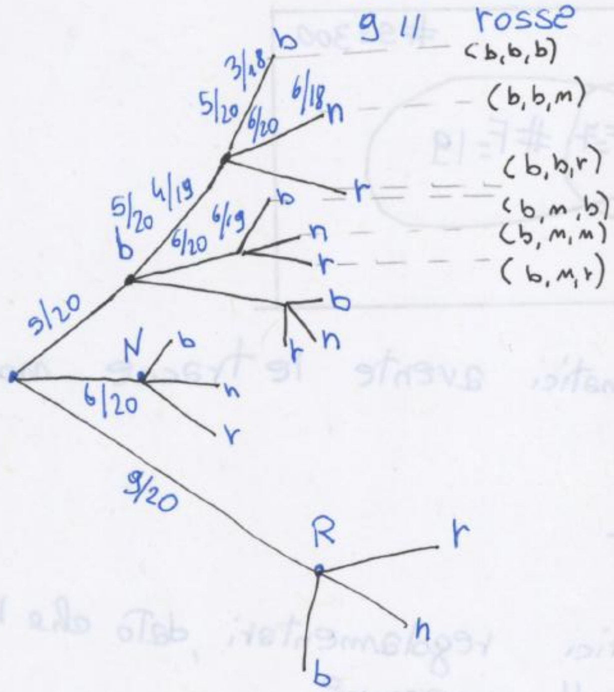
S_j = evento elementare

$P_j = \mathbb{P}[\{S_j\}]$ con $j = 1, 2, \dots, N$ e $\sum_{j=1}^{N} P_j = 1$

$\forall A \subseteq S : \mathbb{P}[A] = \sum P_j \quad j, s \in A$

Diagramma ad albero

- 20 palle ben mescolate, ho un urna con; 5 palle bianche, 6 " nere, 9 " rosse $\Rightarrow$ 20 palle



Sono tutte mutuamente escludenti

$\mathbb{P}[3\text{bianche}] = \mathbb{P}[\{(b,b,b)\}]$

con remissione $\frac{5}{20} \times \frac{5}{20} \times \frac{5}{20}$

senza remissione $\frac{5}{20} \times \frac{4}{19} \times \frac{3}{18}$

- Qual'è $\mathbb{P}[2b \text{ e } 1N] = \mathbb{P}[\{(b,b,n),(b,n,b),(n,b,b)\}]$

$= \mathbb{P}[\{(b,b,n)\}] + \mathbb{P}[\{(b,n,b)\}] + \mathbb{P}[\{(n,b,b)\}] =$

$=$ con remissione $\frac{5}{20} \times \frac{4}{19} \times \frac{6}{20}$

senza remissione $\frac{5}{20} \times \dots$

Definizione

Dato lo spazio di probabilità $(S, A, P[\cdot])$, si definisce **probabilità condizionata** dell'evento A dato l'evento B, con A e B eventi qualunque di A, il seguente rapp.

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[AB]}{\mathbb{P}[B]} \quad \text{con } \mathbb{P}[B] \neq 0, \quad \mathbb{P}[B] > 0$$

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[AB]}{\mathbb{P}[A]} \quad \text{con } \mathbb{P}[A] \neq 0, \quad \mathbb{P}[A] > 0$$

questa soddisfa l'assioma di Kolmogoroff (Pag 14)

- $\mathbb{P}[A|\cdot] \geq 0$
- $\mathbb{P}[S|\cdot] = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}[S|\cdot] =$ è la probabilità spazio campione condizionata ad un evento

$$\mathbb{P}[S|B] = \frac{\mathbb{P}[S \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = 1$$

$A_i A_j = \emptyset$

- $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$

esempio

$\Rightarrow A_1, A_2$

$\underline{A_1 A_2 = \emptyset}$ (vuol dire mutuamente escludenti)

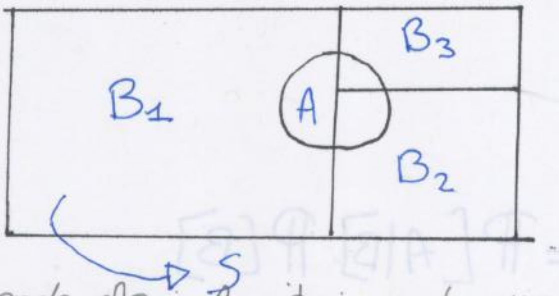
$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 | B] = \mathbb{P}[A_1|B] + \mathbb{P}[A_2|B]$$

$$\cancel{\mathbb{P}[A|B_1 \cup B_2]} \neq \mathbb{P}\cancel{[A|B]} \quad \underline{\text{No}}$$

esempio

Prob: Cambi difettosi

Provenienti da $B_1 = 65\%$, $B_2 = 25\%$, $B_3 = 10\%$



$B_i \cdot B_j = \emptyset$

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$

sapendo che i formitori producono i cambi con un difetto del 5%, 10%, 25%;

Domanda: la prob che la ditta effettua il cambio.

Dati;

$\mathbb{P}[B_1] = 0.65$; $\mathbb{P}[B_2] = 0.25$; $\mathbb{P}[B_3] = 0.10$;

$\mathbb{P}[A|B_1] = 0.05$; $\mathbb{P}[A|B_2] = 0.10$; $\mathbb{P}[A|B_3] = 0.25$;

$\mathbb{P}[A] = 0.65 \times 0.05 + 0{,}25 \times 0.10 + 0.10 \times 0.25 = 0.0825$

Teorema (formula) della probabilità totali (Pag 22)

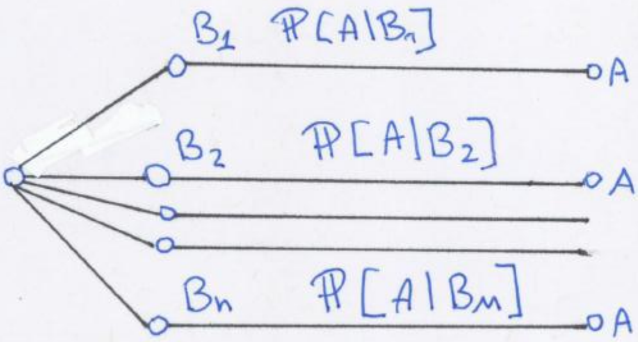
Sia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ una collezione di eventi mutuamente escludentesi tali che $S = \bigcup_{i=1}^{n} B_1$ (eventi esaustivi) e $\mathbb{P}[B_i] \neq 0$ per ogni $i = 1, 2, 3, \dots m$ qualsiasi $A \leq S$ si ha;

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A|B_i]\,\mathbb{P}[B_i]$$

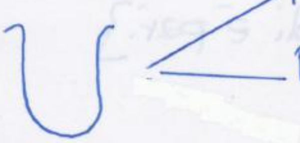
$n \Rightarrow \infty$

$n = 2$

$\underset{B}{B_1}$, $\underset{\overline{B}}{B_2}$ sono complanari



- Si supponga che si abbia un urna



Palline tutte bianche $= B_2$

Palline metà bianche, metà nere $= B_1$

ma non so quale caso;

$B_1 B_2 = \phi \qquad B_1 \cup B_2 = S$

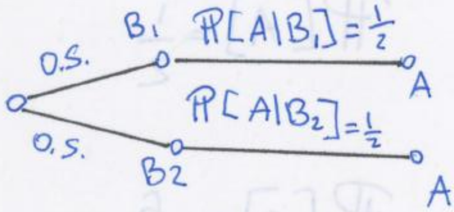
A = estrazione palla bianca

$\mathbb{P}[B_1] = 1/2 \qquad \mathbb{P}[B_2] = 1/2$

- Valutare la probabilità che l'urna contenga palline bianche

Prima estrazione

$$\mathbb{P}[B_2 | A^{(1)}] = \frac{\mathbb{P}[AB_2]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A|B_1]\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2]\mathbb{P}[B_2]} =$$



$$= \frac{1 \times 1/2}{1/2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{4}^{2}}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

seconda estrazione

$$\mathbb{P}[B_2 | A^{(2)}] = \frac{\mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\underbrace{\mathbb{P}[A|B_1]}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbb{P}[B_1]}_{=1/3} + \underbrace{\mathbb{P}[A|B_2]}_{=1}\underbrace{\mathbb{P}[B_2]}_{=2/3}} = \frac{1/2 \times 2/3}{1/2 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2/3} = \frac{4}{5} > \frac{2}{3}$$

cambio la probabilità perché penso che ci siano più bianche dato che per la seconda volta prendo una bianca.

INDIPENDENZA STOCASTICA

Due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi si dicono <u>indipendenti</u> se e solo se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A] \qquad$ se $\mathbb{P}[B] > 0$

$\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B] \qquad$ se $\mathbb{P}[A] > 0$

$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B]$

esperimento casuale: lancio di due dadi

$A_1 = \{$ sul primo dado si presenta un numero pari $\}$

$A_2 = \{$ sul secondo dado si presenta un numero pari $\}$

$A = \{$ il tot dei punteggi presentati sui due dadi è un numero dispari $\}$

$\mathbb{P}[A_1] = 18/36 = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}[A_2] = 18/36 = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

a) $\mathbb{P}[A_1 | A_2] = 9/36 = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbb{P}[A_1] \times \mathbb{P}[A_2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ indipendenti

b) $\mathbb{P}[A_1 | A] = 9/36 = 1/4 \Rightarrow \mathbb{P}[A_1] \times \mathbb{P}[A] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ indipendenti

c) $\mathbb{P}[A_2 A] = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbb{P}[A_2] \times \mathbb{P}[A] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ indipendenti

d) $\mathbb{P}[A_1 A_2 A] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}[A_1] \times \mathbb{P}[A_2] \times \mathbb{P}[A] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

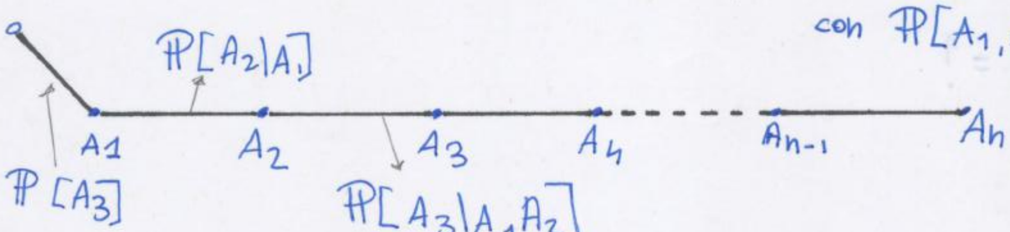
$A_1, A_2, A \Rightarrow$ non sono indipendenti

Regole per il calcolo della probabilità

Regola moltiplicativa;
se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi appartenenti tutti allo stesso spazio degli eventi si ha;

$$\mathbb{P}[A_1, A_2, \dots, A_n] = \mathbb{P}[A_1] \times \mathbb{P}[A_2 | A_1] \times \mathbb{P}[A_3 | A_1 A_2] \times \dots \times \mathbb{P}[A_n | A_1, A_2, \dots A_{n-1}]$$

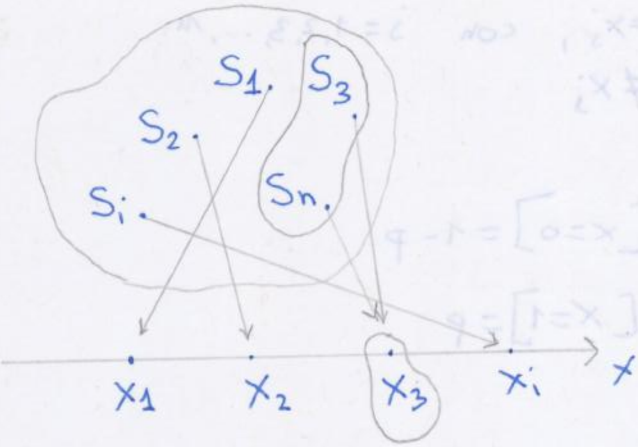
con $\mathbb{P}[A_1, A_2, \dots, A_{n-1}] \neq 0$



$$\mathbb{P}[A_2 | A_1] \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}[A_1 A_2]}{\mathbb{P}[A_1]} \overset{ind}{=} \frac{\cancel{\mathbb{P}[A_1]}\, \mathbb{P}[A_2]}{\cancel{\mathbb{P}[A_1]}} = \mathbb{P}[A_2]$$

$$\mathbb{P}[A_3 | A_1 A_2] \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}[A_1 A_2 A_3]}{\mathbb{P}[A_1 A_2]} = \frac{\cancel{\mathbb{P}[A_1]} \times \cancel{\mathbb{P}[A_2]} \times \mathbb{P}[A_3]}{\cancel{\mathbb{P}[A_1]} \times \cancel{\mathbb{P}[A_2]}} = \mathbb{P}[A_3]$$

Variabile Casuale (Pag 31)



$X: S \Rightarrow \mathbb{R}$

$X, Y, Z, W, \ldots$

$x_1, x_2, \ldots x_m.$

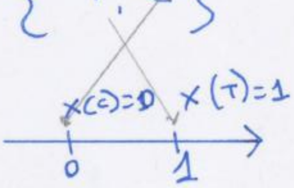
$X(s_2) = x_2$

esempio

- $S = \{T, C\}$

$$X(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = T \\ 0 & \text{se } s = C \end{cases}$$

→ è relativo al conteggio

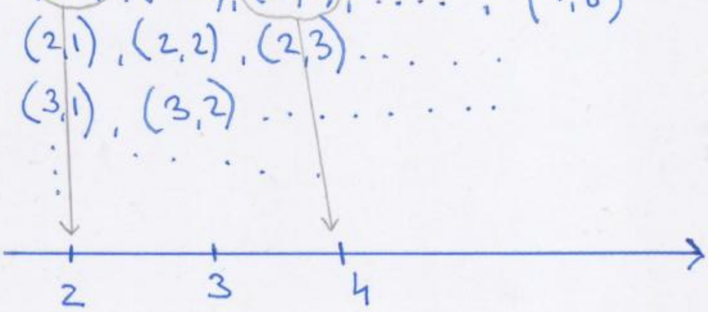


- $S \{(i,j) : i = 1, 2, 3, \ldots, 6 \quad e \quad j = 1, 2, 3, \ldots, 6\}$

dado $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$

1. $X((i,j)) = i+j \qquad \forall (i,j) \in S$
2. $Y((i,j)) = \max(i,j)$
3. $Z((i,j)) = |i-j|$

(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3) . . . . .
(3,1), (3,2) . . . .
. . . . .



esperimento casuale, lancio due dadi ben bilanciati 13

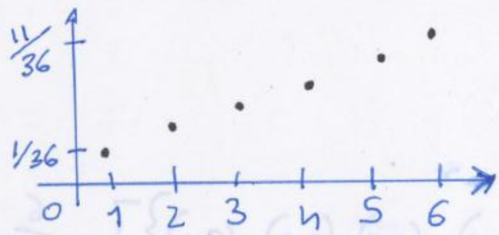
X = Variabile casuale che indica la somma dei punteggi

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\mathbb{P}[X=6]$

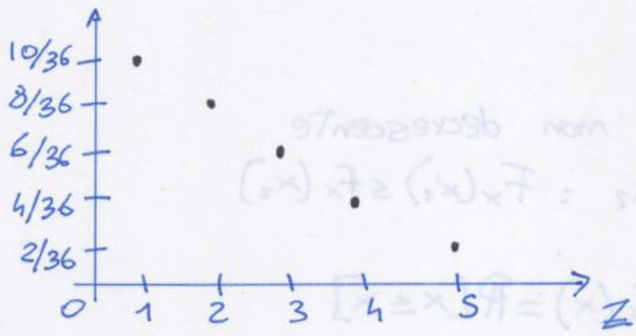
Y = Variabile casuale che indica il max tra i punteggi

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$



Z = Variabile casuale che indica il valore assoluto della diff tra i punteggi

z	0	1	2	3	4	5
$f_Z(z)$	$6/36$	$10/36$	$8/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$



funzione di distribuzione cumulativa (Pag 33) 9-10

funzione di densità discreta (Pag 36)

X variabile casuale continua

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

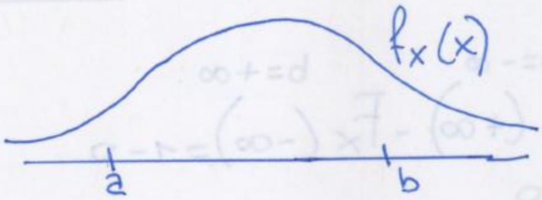
$f_X(x) \Rightarrow$ **funzione di densità di probabilità di X** Pag (38)
(o anche solo funzione di densità)

$f_X(x): \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+$

• Prima proprietà

i) $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P[x \leq X] \overset{def}{=} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$



$P[a < x \leq b]$?

$(-\infty, +\infty) = (-\infty, a] \cup (a, b] \cup (b, +\infty)$

3° assioma

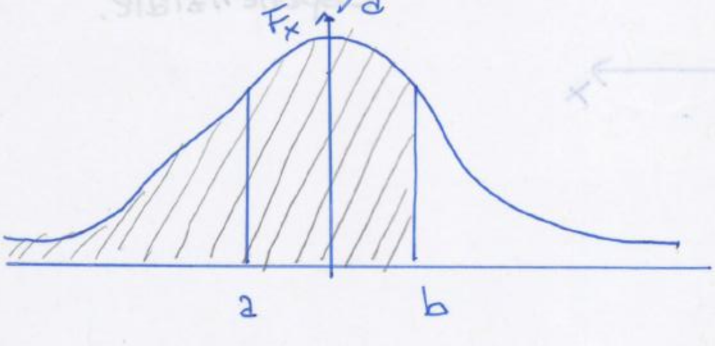
$P[x \in \mathbb{R}] = P[x \leq a] + P[a < x \leq b] + P[x > b]$

S = Spazio campione $\quad$ $x \leq b$

$1 = P[x \leq a] + P[a < x \leq b] + (1 - P[x \leq b])$

$P[a < x \leq b] = P[x \leq b] - P[x \leq a]$

$\overset{def}{=} F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx$



"accumulata"

$$F_X(b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx$$

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$

i) $f_X(x) \geq 0$ ok $\xrightarrow{\text{dim}}$ $D_X = \{x : f_X(x) > 0\}$ dominio o supporto

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\to \int_{-\infty}^{0} \cancel{0}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$

Qual'è la probabilità che quel componente duri un tempo compreso tra i 10 ed i 20 anni?

$\to \int_a^b f_X(x)\,dx$

$$\mathbb{P}[10 < X \leq 20] = \int_{10}^{20} \lambda \exp(-\lambda x)\,dx = -e^{-x\lambda}\Big|_{10}^{20} = \dots$$

definizione

$f_X(x:\lambda)\; f_X(x; n; p) \quad f_X(x; \mu . \sigma) \dots$

sono i principali valori attesi

Valori attesi $= \mathbb{E}[g(x)]$ (pag 40)

Media o (Valore atteso di X)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_j} x_j \underbrace{f_X(x_j)}_{= \mathbb{P}[X = x_j]}$$

se la variabile casuale X è discreta con punti massa $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f_X(x)\,dx}_{= \mathbb{P}[x < X \leq x+dx]}$$

se la variabile casuale X è continua con funzione di densità $f_X(x)$

esercizio 1

esperimento casuale: lancio di un dado

$$\mathbb{E}[X] \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{6} i f_X(i) = \sum_{i=1}^{6} i\,\mathbb{P}[X = x_i] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

Formula generale

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$

Mediana di X (med_x o $med(x)$)

$$\mathbb{P}[X \le med(x)] = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{med(x)} f_x(x)\,dx = \int_{med(x)}^{+\infty} f_x(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

se X è una Variabile casuale continua

$X \sim exp(\lambda)$

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$\int_{med(x)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$-e^{-\lambda x}\Big|_{med(x)}^{+\infty} = \frac{1}{2} \qquad +e^{-\lambda\, med(x)} = \frac{1}{2}$$

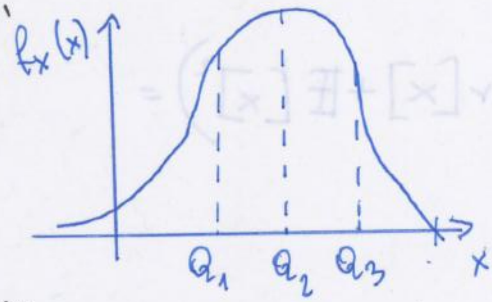
ln: $-\lambda\, med(x) = \ln\frac{1}{2}$

$-\lambda\, med(x) = +\ln 2$

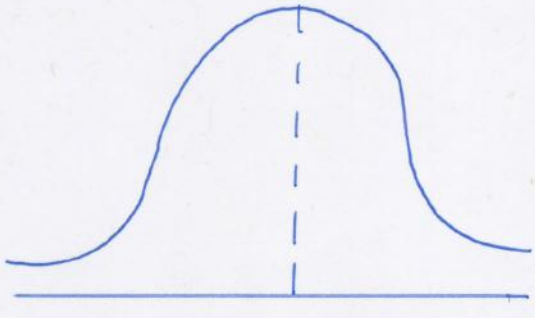
$med(x) = \frac{1}{\lambda}\ln 2 = \mathbb{E}[x]\ln 2$

$\Downarrow$ Valore atteso

- Quartili



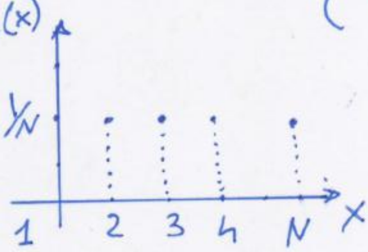
- Decili
- Percentili $\Rightarrow P_1, P_2 \ldots P_{99} \Rightarrow$ tavole
- Range inquartile $Q_3 - Q_1$
- Range o escursione $X_{max} - X_{min}$
- Moda



Famiglie di distribuzione

Distribuzione uniforme discreta

$$f_X(x) = f_X(x; N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{per } x = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Verifiche

i) $f_X(x) \geq 0$ ok

ii) $\sum_{x_j} f_X(x_j) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} N = 1$

Teorema

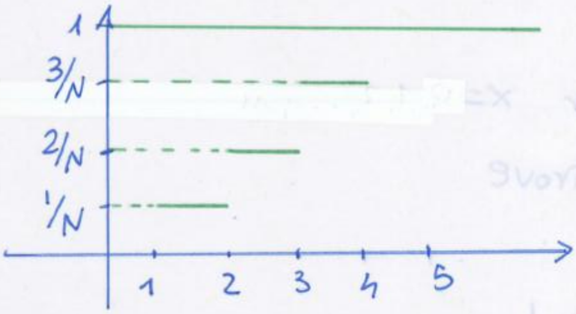
$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}}$$

$$\mathbb{E}[X] \overset{def}{=} \sum_{xy} xy\, f_X(xy) = \sum_{y=1}^{N} y \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{y=1}^{N} y = \frac{1}{\cancel{N}} \cancel{N} \frac{(N+1)}{2}$$

$$\boxed{Var[X] = \frac{N^2 - 1}{12}}$$

funzione distribuzione cumulativa della densità uniforme discreta

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ j/N & \text{per } j \leq x < j+1 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N-1 \\ 1 & \text{per } x \geq N \end{cases}$$



$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{x} \underset{p}{a^x} \underset{1-p}{b^{n-x}}}$$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p) = (p+(1-p))^n = 1$$

Teorema

$$\boxed{E[x] = np; \quad Var[x] = npq = np(1-p) \quad \text{con } q = 1-p}$$

n.b. ; se $n=1$ $\Rightarrow$ la distribuzione binomiale diventa la distribuzione di Bernoulli esempio uguale con dati diversi $\Rightarrow$ 150 libri

distribuzione ipergeometrica con $M=150$ $K=30$ $n=6$ e $x=3$

$$f_X(3;150,30,10) = \frac{\binom{30}{3}\binom{150-30}{10-3}}{\binom{150}{10}} = 0.2065 \cong 21\%$$

• forzo la mano

1 = trovo libro difettoso

X = v.c. conta # difett.

$X \sim$ binomiale (n, p) $\qquad p = \frac{K}{M}$

• Distribuzione binomiale con $n=10$, $p = \frac{K}{M} = 0.2$

$$f_X(3;10,2) = \binom{10}{3}(0.2)^3(0.8)^7 = 0.2013$$

$\searrow$ binomiale

errore minore del 0.1% $\Rightarrow$ almeno $n \leq M/10$

Distribuzione di Poisson

$$f_X(x) = f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

λ parametro reale

i) $f_X(x) \geq 0$ ok

ii) $\sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{= e^x} = 1$

Teorema

Approssimazione della densità binomiale mediante la densità di Poisson

$$\binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x} \xRightarrow[\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}]{} \frac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} = \underset{\text{Poisson}}{f_X(x;\lambda)}$$

fissato l'intero x e posto $\lambda = np$ finito

ESERCIZIO

è stato accertato che 4 persone ogni 2500 sono allergiche alle graminacee. Qual'è la probabilità che in un campione di 1500 persone vi siano 3 pers allergi?

Prendo un campione di 1500 e lo confronto con 2500

$1500 \to 2500 < 10\%$

S = Trovare una persona allergica
successo

$\mathbb{P}[S] = 4/2500$

X = V.c. conta # persone allergiche

Binomiale con $P = 0.0016$ ed $n = 1500$:

1) $\mathbb{P}[X=3] = \binom{1500}{3}(0.0016)^3(1-0.0016)^{1497} = \frac{1500!}{1497!\,3!}(0.0016)^3(0.9984)^{1497}$

Approssimando la binomiale con la legge di Poisson avente parametro

$\lambda = np = 1500 \times 0.0016 = 2.4$

i) $\mathbb{P}[X=3] = \mathbb{P}[X \le 3] - \mathbb{P}[X \le 2] = e^{-2.4}\frac{2.4^3}{3!}$

$= 0.779 - 0.570 = 0.209$

Da tavola

Distribuzione uniforme (o rettangolare)

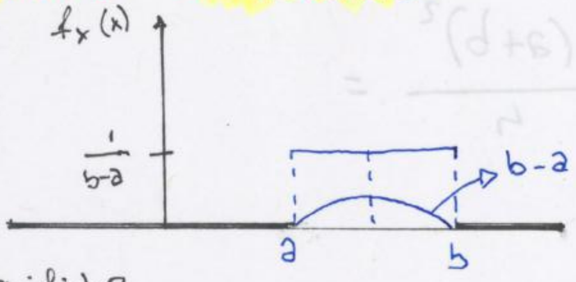
$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $-\infty < a < b < +\infty$

$D\,x = (a, b)$

$\{1, 2, \dots, 5, 6\}$ insieme di numeri interi

Densità uniforme



Verifiche

i) $f_X(x) \geq 0$ ok

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \implies$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{a} \cancel{0}\,dx}_{\to 0} + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx + \underbrace{\int_b^{+\infty} \cancel{0}\,dx}_{\to 0} = \frac{1}{b-a}\,x \Big|_a^b = 1$$

ok

Data una costante f_X su (a, b): $a < b$

$$f_X(x) = \begin{cases} k & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

i) $f_X(x) \geq 0 \rightarrow k > 0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \implies$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{a} \cancel{0}\,dx}_{\to 0} + \int_a^b k\,dx + \underbrace{\int_b^{+\infty} \cancel{0}\,dx}_{\to 0} = kx\Big|_a^b = 1$$

$$\implies k(b-a) = 1 \implies k = \frac{1}{b-a}$$

Distribuzione Normale (la più usata)

$$f_X(x) = f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Per; $-\infty < x < +\infty$ $\quad D_x \equiv \mathbb{R}$

Con; $-\infty < \mu < +\infty$; $\sigma > 0$

- μ è un indice di posizione
- rispetto a $x=\mu$ è simmetrica

Per indicare che x segue una distribuzione normale indichiamo

$X \sim N(\mu,\sigma)$ oppure $\boxed{x \sim N(\mu,\sigma^2)}$

funzione di densità; $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$

funzione di distribuzione cumulativa: $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)$

- $x=\mu$ è la moda (massimo)

$$\hookrightarrow f'_X(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}}_{\neq 0}\underbrace{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}_{\neq 0}\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}\right] = 0$$

studio il segno per vedere se è max o min

$$\frac{-x-\mu}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow -x+\mu = 0 \Rightarrow x = \mu$$

$$\frac{-x-\mu}{\sigma^2} > 0 \qquad -x+\mu > 0 \Rightarrow x < \mu$$

μ

Massimo

- ha due punti di flesso in $x=\mu-\sigma$ e in $x=\mu+\sigma$

- $x=\mu$ è la mediana (divide il 50% dell'area dx da quella sx)

13-10

TEOREMA

$\mathbb{E}[X]=\mu$; $Var[X]=\sigma^2$

$\mathbb{E}[z]=0$ per $[z]=1$

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow X=\mu+\sigma Z$

$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[\mu+\sigma Z]=\mathbb{E}[\mu]+\sigma\,\mathbb{E}[\sigma Z]=$

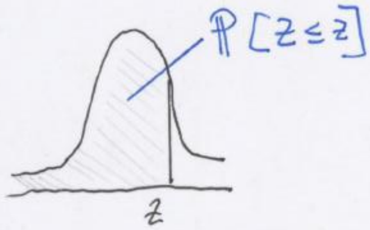
$Var[x]=var[\mu+\sigma Z]=var[\sigma Z]=\sigma^2\,Var[Z]=\underline{\underline{\sigma^2}}$

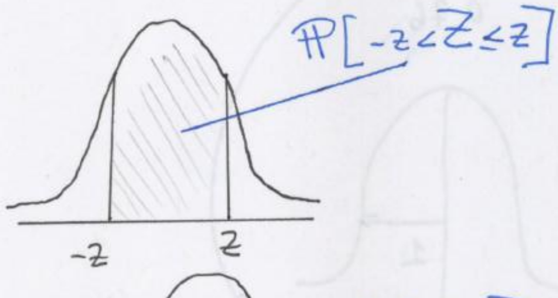
"la distribuzione normale è caratterizzata dall'avere media, mediana"

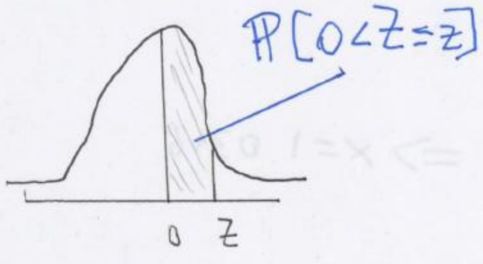
"Parla della disuguaglianza di tchebycheff" (Pag 45)

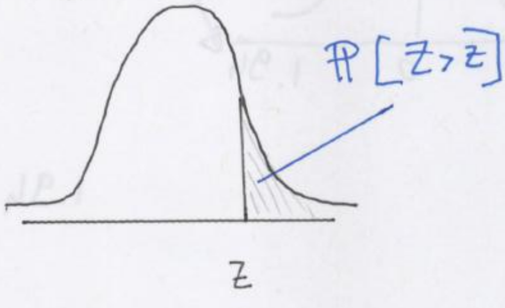
il valore di specifica nominale = è l'obiettivo
viene accettata una tolleranza.

- guardiamo la tavola n° 3 il numero delle ascisse/ordinarie sono quantili al centro sono aree.









$X \sim N(2, \sqrt{9})$

$\mathbb{P}[-2.5 < X \leq 4.5] =$

ricordiamo che la standardizzazione $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

= sottraggo la media =

$= \mathbb{P}\left[\frac{-2.5-2}{3} < \underbrace{\frac{x-2}{3}}_{=z} \leq \frac{4.5-2}{3}\right] =$ divido per la deviazione standard

$= \mathbb{P}[-1.5 < z \leq 0.833]$ ⇒ Da qui cerco i valori nelle tavole n° 3 $= \Phi(0.833) - \Phi(-1.5)$

$= \mathbb{P}[z \leq 0.833] - \mathbb{P}[z \leq -1.5] =$ ⇒ non avendo un valore negativo ragiono così =

$= 0.797 - (1 - \mathbb{P}[z \leq 1.5]) =$
$\cong$

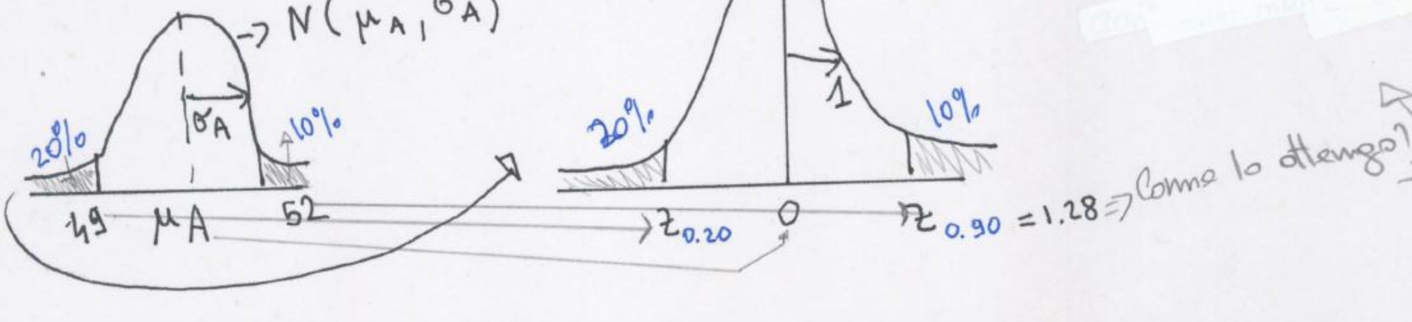
$= 0.797 - 1 + 0.9332$

esempio ③
Due produttori di pile affermano che il loro prodotto ha una media durata media di 50 h di uso continuato (durata nominale). Comunque si è osservato che il 20% delle pile del primo produttore ha una durata inferiore a 49 h ed il 10% più di 52 h, mentre il 10% delle pile del secondo produttore

X_A Variabile casuale che rapp. la durata delle pile del primo produ.
X_B " " " " " " " " secondo "

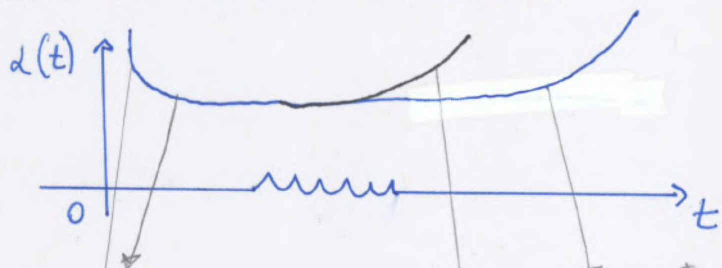
$X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$ e $X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X_A \leq 49h] = 20\% = 0.20 \\ \mathbb{P}[X_A \geq 52h] = 10\% = 0.10 \end{cases}$$



esempio

con componenti elettronici



si ipotizza che se il gioco non funziona il gestore lo sostituisce

tasso di guaso

guasto per usura

$\lambda(t) = \text{cost}$
λ

cambo oggetto subito tramite gestore

se aumenta subito non è più esponenziale ma Weibull (Pag 89)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 114

esempio ①

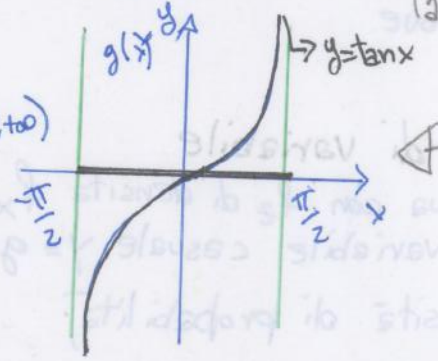
Sia X una variabile c. che segue una distribuzione uniforme sia $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Qual'è la distribuzione di $y = \tan x$?

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

consiglio: non disegnare la $f_X(x)$ ma la trasformazione

$$D_X \xrightarrow{y=\tan x} D_Y$$

$$(-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{y=\tan x} (-\infty, +\infty)$$



$x = g^{-1}(y)$

$x = \operatorname{arctgn}(y)$

$$\frac{d g^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{1+y^2}\,\frac{1}{\pi} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

si chiama "distribuzione di Cauchy" ma con parametri 0 e 1.

se volessi calcolare il valore atteso

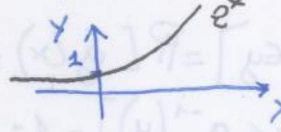
$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{1+y^2}\,\frac{1}{\pi}\,dy$$

esempio ②

Variabile casuale normale

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \exp(x)$ $\qquad f_Y(y)$?

$y = e^x \Rightarrow D_X = (-\infty, +\infty)$



$\swarrow y = e^x$

$D_Y = (0, +\infty)$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

se da f_X è decres. lo sarà anche la derivata

$$x = \log y \qquad \frac{d \log y}{dy} = \frac{1}{y}$$

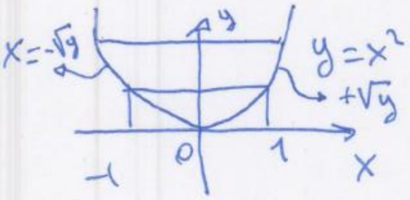
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} & y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si chiama "distribuzione log normale"

esempio

$X \sim$ uniforme su $(-1,1)$; $y = x^2$ $\quad f_Y(y)$?

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



non essendo biunivoca mi conviene spezzare $D_X = (-1,1) = (-1,0] \cup [0,1)$

$D_X^{(1)} \cap D_X^{(2)} = \phi$

$D_X = (-1,1) \xrightarrow{y=x^2} D_Y = (0,1)$ non è biunivoca

$g_{(1)}^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ $\qquad$ $g_{(2)}^{-1}(y) = +\sqrt{y}$

$y = x^2$

$x = \pm\sqrt{y}$

calcolo le derivate

$$\frac{d g_{(1)}^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \Bigg| \qquad \frac{d g_{(2)}^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \left|\frac{1}{-2\sqrt{y}}\right|\frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{per } y \in D_Y$$

$$\mathbb{P}[y < Y \le y+dy] = \mathbb{P}[x_1 + dx_1 < X \le x_1] + \mathbb{P}[x_2 < X \le x_2 + dx_2] =$$

$$= \underline{\underline{f_Y(y)}}\,\cancel{dx} = f_X(\underline{\underline{x}})\frac{dx_1}{dy} + f_X(\underline{\underline{x_2}})\frac{dx_2}{dy}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \ldots$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \underbrace{\operatorname{Var}[X]}_{= 1/3} + (\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{= 0})^2$$

Processi stocastici

- Coda
- temperatura e richiesta di energia elettrica
- Sistemi di riconoscimento della voce
- ...

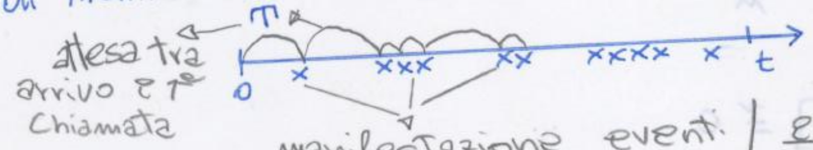
Processi di Poisson

$cm^2, m^2, \dots$ (Pag 68)

- numero di difetti per unità di superficie o per unità di lunghezza continua di un prodotto proveniente da una produzione
- numero di radiazioni emesse per unità di tempo (ora, min) da una sostanza radioattiva.
- numero di batteri presenti per unità di volume ($cm^3, m^3 \dots$) in una coltura
- continua con altri esempi...

"devo utilizzare le unità di misura in base al problema"

di norma uso il tempo



| evento possioniano!!

in un intervallo di Tempo t

- $N(t) \Rightarrow$ numero di eventi possioniano
- Π

ipotesi ① eventi possioniani

Esiste una quantità α positiva tale che la probabilità che si verifichi esattamente un evento in un piccolo intervallo di lunghezza Δt sia approssivativamente uguale a $\alpha \Delta t$

ipotesi ②

dal libro ...

$\mathbb{P}[$due o più eventi nell'intervallo $\Delta t] = o(\Delta t)$

esempio

Il numero medio di chiamte in arrivo al centralino di uno ditta di medie dimensioni è di 60 ogni ora

a) Qual'è la probabilità che non vi sia nessuna chiamata in un intervallo di tempo 2 minuti?

$\alpha = 60/1h$ $\qquad \alpha = 60/(60min) = 1/min$

$N(t)$

$\mathbb{P}[N(2min)=0]$?

$N(2min) \sim Poisson(\underbrace{\alpha t}) = Poisson(2)$

$1/\cancel{min} \times 2/\cancel{min} = 1 \times 2 = 2$

$\alpha t = \cancel{60}^{2}/\cancel{1h} \times \frac{1}{\cancel{30}} h = 2$

$= e^{-2} \frac{2^0}{0!} = 1$

b) Qual'è la probabilità che arrivino più di 5 chiamate in un intervallo di tempo di 5 min?

$N(5min) \sim Poisson(\alpha t)$

$1/\cancel{min} \times 5\,\cancel{min} = 5$

$$\mathbb{P}[N(5min)>5] = \sum_{x=6}^{+\infty} e^{-5} \frac{5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{5} e^{-5} \frac{5^x}{x!}$$

esempio

SMS

Marco e Chiara

$\alpha_C = 10/_{20min}$ $\alpha_M = 2/_{1h}$

avendo ricevuto nell'arco di 2 ore 15 sms.
Qual'è la prob che 12 provengano da Chiara?

$$\mathbb{P}[N_C(2h) = 12 / N_{TOT}(2h) = 15] \,?$$

X, Y indipendenti $X \sim$ poisson (α_1), $Y \sim$ poisson (α_2) teorema non dimostrato.

$\hookrightarrow X+Y \sim$ Poisson $(\alpha_1 + \alpha_2)$

lavoriamo in ore

$$\alpha_C = 10/_{(\frac{1}{3}h)} = 30/_h$$

$$\alpha_M = 2/_{1h}$$

$N_C(2h) \sim$ Poisson $(\alpha_C t) =$ Poisson $(30 \times 2 = 60)$

$N_M(2h) \sim$ Poisson $(\alpha_M t) =$ Poisson $(2 \times 2 = 4)$

$N_{TOT}(2h) \sim$ Poisson $(\alpha_C t + \alpha_M t) =$ Poisson $(60 + 4 = 64)$

$$\stackrel{def}{=} \frac{\mathbb{P}[\{N_C(2h)=12\} \cap \{N_{TOT}(2h) = 15\}]}{\mathbb{P}[N_{TOT}(2h)=15]} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}[\{N_C(2h)=12\} \cap \{N_M(2h)=3\}]}{\mathbb{P}[N_{TOT}(2h)=15]} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}[N_C(2h)=12] \times \mathbb{P}[N_M(2h)=3]}{\mathbb{P}[N_{TOT}(2h)=15]} = \frac{\cancel{e^{-60}}\,\frac{60^{12}}{12!} \times \cancel{e^{-4}}\,\frac{4^3}{3!}}{\cancel{e^{-64}}\,\frac{64^{15}}{15!}} =$$

$$= \frac{15!}{12!\,3!}\;\frac{60^{12}\,4^3}{\underbrace{64^{15}}_{=64^{12} \times 64^3}} = \binom{15}{12}\left(\frac{60}{64}\right)^{12}\underbrace{\left(\frac{4}{64}\right)^3}_{= 1-\frac{60}{64}} \sim \text{binomiale}\left(15, \frac{60}{64}\right)$$

campione

Un insieme di n Variabili casuali indipendenti $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e ciascuna X_i ha la stessa distribuzione: $X_i \sim f(\cdot)$

A e B v. indipen. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B]$

X e Y v. c.

$$F_X(x) = \mathbb{P}[\underbrace{\{s : X(s) \le x\}}_{A}]$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[\underbrace{\{s : Y(s) \le y\}}_{B}]$$

X e Y sono indi. $F_X(x)\, F_Y(y) = \mathbb{P}[X \le x;\ Y \le y]$

$\mathbb{E}[X_i] = \mu_*$

$Var[X_i] = \sigma^2_*$

$$\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n] = a_1\mathbb{E}[X_1] + a_2\mathbb{E}[X_2] + \dots + a_n\mathbb{E}[X_n]$$

Dimostrazione da non fare

casi particolari:

• $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$

$$\mathbb{E}[\underbrace{\tfrac{1}{n}X_1 + \tfrac{1}{n}X_2 + \dots + \tfrac{1}{n}X_n}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1] + \dots + \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_n]$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{\mu_i}$$

•• $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$\mathbb{E}[X_i] = \mu$

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu$$

$$\boxed{\mathbb{E}[\overline{X}_n]} = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\mu = \boxed{\mu}$$

casi particolari:

- Se le variabili casuali X_i sono non correlate;

"indipendenza = assenza di un qualsiasi legame"

indipen. $\Rightarrow$ non correla $cov[X,Y]=0$; $\not\Leftarrow$ Vale il contrario.

$\hookrightarrow$ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$

$$Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

.. $\{X_1, X_2, \dots X_n\} \rightarrow$ ind $\Rightarrow$ non corr.

$Var[X_i] = \sigma^2$

$$Var[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{\cancel{n^2}}\cancel{n}\sigma^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Caso particolare per due variabili casuali indipendenti

$$Var[X+Y] = \sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

$$Var[X-Y] = \sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

Formule utili

- $cov[X,Y] \stackrel{def}{=} \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] =$ Per definirla

$$= \mathbb{E}[XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y] =$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[\mu_Y X] - \mathbb{E}[\mu_X Y] + \cancel{\mathbb{E}}[\mu_X \mu_X]$$

$$\boxed{= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y}$$ Per calcolarla

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_y} x_y f_X(x_y)$$

$$cov[X,Y] = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] =$$

$$= \sum_{(x_y, x_y)} (x_y - \mu_X)(y_y - \mu_Y)\underbrace{\mathbb{P}[X=x_y; X=y_y]}_{\geq 0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 114

campione $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ da $f(x; \vartheta)$ forma nota e parametro $\vec{\vartheta}$ è incognito

(Pag 168)

obiettivo; Stimare il parametro incognito ϑ mediante una funzione appropriata dei risultati campionari x_i:

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

statistica: def 7.1

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \; ;$$

$$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$R = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) - \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ $\qquad$ $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$

$R = Y_n - Y_1$ $\qquad$ R = Range

$X_1 + 2X_2 + 4X_3 + \dots - X_n$

$\vdots$

$\bar{X}_n - \mu$ non è una statistica

stimatori; statistiche che vengono usate per stimare un parametro ϑ o una qualche sua funzione

$$T = t(X_1, X_2, \dots X_n)$$

Stime del parametro ϑ = Valori ottenuti mediante gli stimatori

$$\hat{\vartheta} = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Teorema limite centrale (7.3, 172)

$$f_{\bar{X}_n} \underset{n \Rightarrow \infty}{\Rightarrow} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Grafico pag 173

$$\bar{X}_n \underset{n \Rightarrow \infty}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Proprietà riproduttiva delle variazioni casuali

n.v.c. normali $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\rightarrow X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ + indip.

$$W = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$$

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad W \equiv \bar{X}_n$

$f(\cdot)$ è una normale $\rightarrow f_{\bar{X}_n} = N \quad \forall n$

esempio campione,

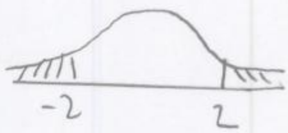
$n = 64$ estratto da una pop. avente scarto tipo $\sigma = 20$. (dev. stand.)

Qual'è la prob di avere una media campionaria che differisca per più di 5 dalla media della popolazione?

$$\mathbb{P}[|\bar{X}_{64} - \mu| > 5] = ? \quad \mathbb{P}\left[\left|\frac{\bar{X}_{64} - \mu}{20/\sqrt{64}}\right| > \frac{5}{\frac{20}{\sqrt{64}}}\right] =$$

$x \sim f(x; \mu, 20^2)$

$\hookrightarrow \bar{X}_{64} \underset{approx}{\sim} N\left(\mu, \frac{20^2}{64}\right)$



$$= \mathbb{P}[|z| > 2] = \mathbb{P}[z > 2 \text{ op } z < -2] = 2\mathbb{P}[z > 2] = 2(1 - \mathbb{P}[z \leq 2]) \cong 5\%$$

Distribuzione χ^2

10-11

Z_i: n variabili casuali normali standardizzate ed indipendenti

chi-quadro $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$

χ^2 ha una distribuzione chi-quadro con n gradi di libertà.

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ indipendenti

$\Downarrow$

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}}_{Z_i} \right)^2}$$

ha una distribuzione χ^2 con n gradi di libertà

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n$$

$\mu \Rightarrow \bar{X}_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2 \longrightarrow \chi^2_{n-1}$$

$n-1$ gradi di libertà.

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\Rightarrow \bar{x}_n$

es. $\{23, 27, 25, x\}$ $\bar{x} = 24.8$

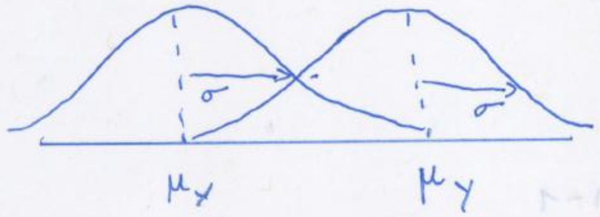
La distribuzione chi-quadro viene anche chiamata distribuzione delle varianze.

Distribuzione del rapporto di varianze

$\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ da popolazione normale con media μ_x e varianza σ^2

$\{Y_1, Y_2, \dots Y_n\}$ da popolazione normale con media μ_Y e varianza σ^2

<= Rapp. grafica



$$\frac{\boxed{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2}}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2} \sim F_{m-1,\, n-1}$$

$\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2 \to S^2_m \to \hat{\sigma}^2$

$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2 \to S^2_n \to \hat{\sigma}_2$

$$V = \frac{(m-1)S^2_n}{\sigma^2} \sim \chi^2$$

Distribuzione t di Student   tavola n° 4

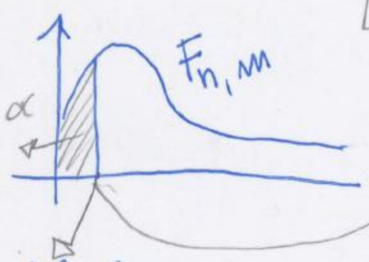
Z variabile casuale normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$

U variabile casuale che segue una distribuzione χ^2 con n gradi di libertà $U \sim \chi^2_n$

Z e U indipendenti

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{m}}}$$ con m gradi di libertà

$$\alpha = \mathbb{P}\left[F_{n,m} \le \frac{1}{f_{m,n,1-\alpha}} \right]$$



def $f_{n,m,\alpha}$

$$\boxed{f_{n,m,\alpha} = \frac{1}{f_{m,n,1-\alpha}}}$$

Fine argomento!!

esempio

Pop $f(\cdot)$ μ e $\sigma^2 = 1$

legge dei grandi numeri

$$\mathbb{P}\left[|X - \mu| < t\,\sigma_X \right] \ge 1 - \frac{1}{t^2}$$

$\bar{X}_n \to X$

$\mu_X \to \mu_{\bar{X}} = \mu$

$$\sigma_X \to \sigma_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}\left[|\bar{X}_n - \mu| < \underbrace{\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}}_{\varepsilon > 0} \right] \ge 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{t^2\sigma^2}{n} \qquad \frac{n\varepsilon^2}{\sigma^2} = t^2 \qquad \varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left[|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon \right] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon \right] = 1$$

Metodo dei momenti

(182)

$$\begin{cases} \mu'_1(\vartheta_1, \vartheta_2) = M'_1 \\ \mu'_2(\vartheta_1, \vartheta_2) = M'_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_i x_i \\ \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{MM} = \bar{X}_n \\ \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{n}\sum_i - (\mathbb{E}[X])^2 \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}^2_{MM} = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - (\bar{x}_n)^2 = M'_2 - (M'_1)^2 \equiv M_2$$

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n) = \frac{1}{n}\sum_i\left(x_i^2 - 2\bar{x}_n x_i + \bar{x}_n^2\right) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \frac{2}{n}\bar{x}_n\sum_i x_i +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_i \bar{x}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \frac{2}{\cancel{n}}\cancel{n}\,\bar{x}_n^2 + \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\,\bar{x}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}_n^2$$

se prendo

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ da $\exp(\lambda)$

$$\mu'_1(\underset{\lambda}{\vartheta_1}) = M'_1 \longrightarrow \mathbb{E}[x_{exp}] = M'_1 \qquad \frac{1}{\lambda} = M'_1$$

$$\hookrightarrow \hat{\lambda}_{Mn} = \frac{1}{\bar{x}_n}$$

$\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ da unif (a,b)

$$\begin{cases} \mu'_1(a,b) = M'_1 \\ \mu'_2(a,b) = M'_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} = M'_1 \\ \mathbb{E}[X^2] = Var[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = M'_2 \end{cases}$$

Estimatore

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = M'_1 \\ \frac{(a+b)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = M'_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2M'_1 - b \\ \underbrace{\frac{1}{n}\sum x_i^2}_{M'_2} = \frac{a^2+b^2+ab}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}_{MM} = \bar{x}_n - \sqrt{3(M_2 - \bar{x}_n^2)} \\ \hat{b}_{MM} = \bar{x}_n + \sqrt{3(M_2 - \bar{x}_n^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_{MM} = M'_1 - \sqrt{3(M_2 - (M'_1)^2} \\ \hat{b}_{MM} = M'_1 + \sqrt{3(M_2 - (M'_1)^2} \end{cases}$$

esempio

$bin(n=20, p) \qquad x=6$

$$\mathbb{P}[x=6] = \underbrace{\binom{20}{6} p^6 \, (1-p)^{20-6}}_{max} = g(p)$$

$$g'(p) = \binom{20}{6} \left\{ 6p^5(1-p)^{14} - 14p^6(1-p)^{13} \right\} = 0$$

$= 6(1-p) - 14p = 0$

$= 6 - 6p - 14p = 0 \qquad \hat{p} = \frac{6}{20} = \frac{\#\text{ casi favore.}}{\#\text{ casi possibili}} = \text{frequenza relativa}$

esempio

considero un campione $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ da Bernulli $\rightarrow \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$L(p; x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \times p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \times \dots \times p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}}_{\text{Prodotto}} =$$

$$= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = p^y (1-p)^{n-y} \qquad \text{con } y = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\ln L(p; x_1 \dots x_n) = \ln p^y + \ln (1-p)^{n-y} = y \ln p + (n-y) \ln (1-p)$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{y}{p} - (n-y)\frac{1}{1-p} = 0$$

$(1-p)y - p(n-y) = 0$

$y - \cancel{py} - np + \cancel{py} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\hat{p}_{ML}}_{\text{stimatore}} = p_{ML} = \frac{y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n$

conclusione, lo stimatore di Bernoulli coincide con la media

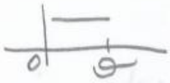
Esercizio (n°6 foglio 9) Per il futuro 13-11

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow f(\cdot) \sim unif(0, \vartheta)$

$\downarrow$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



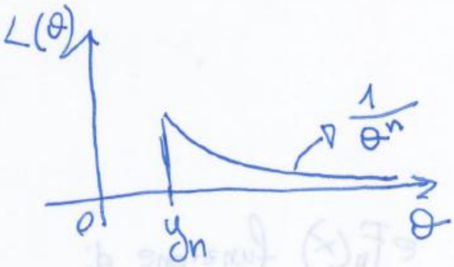
Verosimiglianza

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(x_1;\theta)}}{\frac{1}{\theta}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ f(x_2;\theta)}}{\frac{1}{\theta}} \times \dots \times \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}$$

$0 < x_1 < \theta, \; 0 < x_2 < \theta, \; \dots, \; 0 < x_n < \theta$

$\boxed{0 < \theta}$ $\quad$ $\boxed{\theta > \max(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \qquad \theta > \underbrace{\max(x_1, \dots, x_n)}_{= y_n}$$



$$\theta_{ML} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Quale stimatore scelgo?

es (stima media popolazione)

μ

- $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} x_i \Rightarrow \hat{\mu}$

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$$
$$Var[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

- $\{\cancel{x_1}, x_2, \dots, \cancel{x_n}\}$ elimino il più piccolo e il più grande

$$\bar{X}_{n-2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} x_i$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}_{n-2}] = \mu$$
$$Var[\bar{X}_{n-2}] = \frac{1}{(n-2)^2} \cancel{(n-2)} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n-2}$$

- $\{x_1, /////, x_n\}$ tengo il primo e l'ultimo

$$\bar{X}_2 = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}_2] = \mu$$
$$Var[\bar{X}_2] =$$

σ^2 Pag 188 8.1

- $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \qquad \mathbb{E}[S_n^2] = \sigma^2$
- $\Pi_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \qquad \mathbb{E}[\Pi_2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$$\lim_{n\to\infty} \text{var}[T_n] = 0$$

oss.
Se T_n è uno stimatore non distorto per ϑ, allora $\Psi(T_n)$ è uno stimatore per corretto per $\Psi(\vartheta)$ se e solo se Ψ è una funzione lineare.

Poisson (μ) $\quad$ $\mathbb{E}[X] = \mu$
$\text{Var}[X] = \mu$

esempio

• $\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ da $f_X(x) \sim \exp(\lambda)$, allora $\bar{X}_n$ stimatore corretto per $1/\lambda$

ma...
$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] \equiv \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \lambda \;?? \; \frac{1}{\bar{X}_n} \quad \text{non corretto}$$

terza proprietà efficienza

Posto che per $\tau(\vartheta)$ esistano più stimatori corretti, quale stimatore scegliere?

Criterio 1: Scelgo T_1 invece di T_2 se:

$$\mathbb{P}[\tau(\vartheta) - \varepsilon < T_1 < \tau(\vartheta) + \varepsilon] \geq \mathbb{P}[\tau(\vartheta) - \varepsilon < T_2 < \tau(\vartheta) + \varepsilon]$$

T_1 è più concentrato di T_2 $\qquad$ (Criterio di Pitman)
T^* è il più concentrato $\qquad$ Caso 2

Criterio 2: scelgo T_1 invece T_2 se:

$$\mathbb{P}[|T_1 - \tau(\vartheta)| < |T_2 - \tau(\vartheta)|] > 0.5$$

Stima per intervalli della differenza tra due medie $\mu_1 - \mu_2$ 18-11

Pag 199 (8.4)

$$\mu_1 \to \bar{X}_{n_1} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\mu_2 \to \bar{X}_{n_2} \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

migliore stimatore per la diff della medie delle due popolazioni $\mu_1 - \mu_2$

$$\mu_1 - \mu_2 \to \bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_1 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

$$\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2} \sim \mathcal{N}\Big(\mu_1 - \mu_2, \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}_{\sigma_\Delta^2}\Big)$$

3 casi;

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

(i) σ_1^2 e σ_2^2 note

(ii) σ_1^2 e σ_2^2 non note ma possono ritenersi uguali

(iii) σ_1^2 e σ_2^2 non sono né note né possono ritenersi uguali

Caso (i) Pag 200 (8.4.1.)

σ_1^2 e σ_2^2 sono note;

$$\sigma_\Delta^2 = \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} =$$

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_\Delta} \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

normale 0,1

$\sigma_\Delta \to$ deviazione standard

$\Rightarrow$ standardizzo

$$\mathbb{P}\left[-z_{1-\alpha/2} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_\Delta} \leq z_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

con;

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\Big[\overbrace{(\underbrace{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}_{\bar{X}_n}) - \sigma_\Delta z_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{Li} < \underbrace{\mu_1 - \mu_2}_{\mu \;\to\; \theta} \leq \overbrace{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \sigma_\Delta z_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{LS}\Big] = 1 - \alpha$$

$\sigma_\Delta z \to \sigma/\sqrt{n}$

esempio

Una fabbrica di pile, avendo modificato il processo produttivo, vuole verificare se il prodotto ha mantenuto le stesse specifiche. Predispone un rilievo della tensione in uscita su un campione di 100 pile. la media risulta essere di 12.077 volt. Prima della modifica, su un campione costituito da 150 pile si era ottenuta una media pari a 11.914 volt. con varianze note $\sigma_2^2 = 0.16$ e $\sigma_1^2 = 0.09$, si vuole trovare una stima della differenza fra le due tensioni con intervallo di fiducia pari al 90%.

- $\widehat{\mu_2 - \mu_1} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1 = 0.103$ volt.
- $\sigma_\Delta = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{0.9}{150} + \dfrac{0.16}{100}} = 0.047$ volt

× $X \sim N(\mu_1, \sqrt{0.09})$

× $X_{post} \sim N(\mu_2, \sqrt{0.16})$

× $\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \dfrac{0.09}{n_1}\right)$ → stimatore media campionaria

× $\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \dfrac{0.16}{n_2}\right)$

× $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \sim N$

- $1-\alpha = 0.9 = \alpha = 0.1 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$

$$\Downarrow$$

$$(L_i, L_s) = (0.103 - 1.645 \times 0.047,\ 0.103 + 1.645 \times 0.047) =$$
$$= (0.025 \text{ Volt},\ 0.18 \text{ Volt})$$

Con lo stesso esempio supponiamo che le varianze non siano note

1° campione ; $\{ \ldots\ldots \}$ $n_1 = 7$

2° campione ; $\{ \ldots\ldots \}$ $n_2 = 6$

$$\Downarrow$$

- $\bar{X}_1 = 11.914$ Volt $\qquad \bar{X}_2 = 12.017$ Volt
- $S_1^2 = 0.0981$ Volt^2 $\qquad S_2^2 = 0.1216$ Volt^2

$$S^2_{pool} = \frac{(n_1\ )S_1^2 + (n_2\ )S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{6 \times 0.0981 + 5 \times 0.1216}{7+6-2} = 0.1088$$

- $1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow t_{n_1+n_2-2,\ 1-\alpha/2} = t_{11.\ 0.95} = 1.796$

Stima per intervalli di una varianza. Pag 205 (8.5)

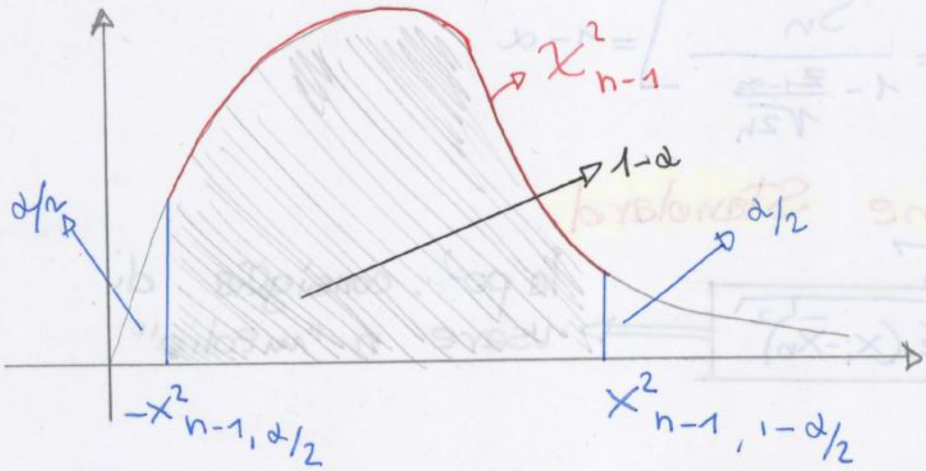
$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ con media μ e varianza σ^2

$$V = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}_n}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

quantili

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\left[\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$



$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$

↳ Intervallo di fiducia simmetrico

$$\mathbb{P}\left[\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}}}_{L_i} \leq \underset{\downarrow\,\theta}{\sigma^2} < \underbrace{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}}_{L_S}\right] = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\left[\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

Domanda: Quando si usa?

- Quando parliamo di int. di fiducia con varianza nota
- Quando costruiscono occhiali da vista per le lenti

20-11

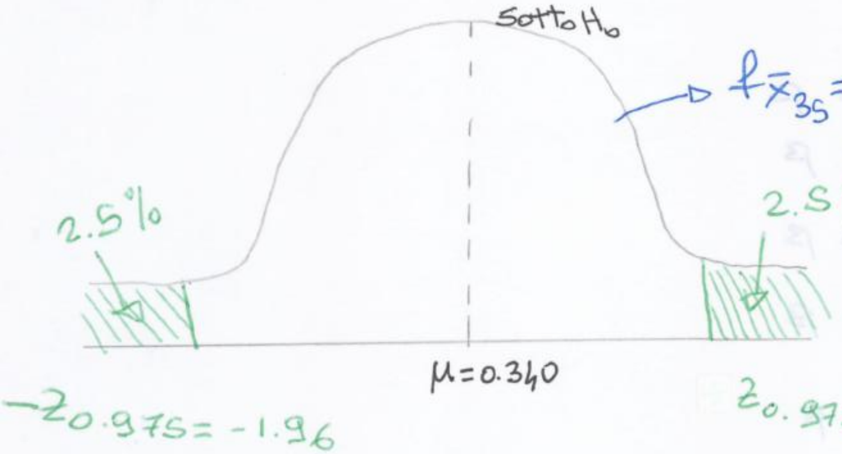
stima per intervalli delle proporzioni 8.7 Pag 210

Cap. 9 Pag 213

INFERENZA Statica; test di ipotesi

Punto ② ; Rischio $\alpha = 0.05$

Valori critici $-1,96$ e 1.96



$$f_{\bar{X}_{35}} = N\left(\underset{\mu_0}{0.34}, \underset{\frac{0.01}{\sqrt{35}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

La statistica è ;
$$Z = \frac{\bar{X}_{35} - 0.340}{\frac{0.010}{\sqrt{35}}}$$

Punto ③ Criterio : rifiutare l'ipotesi nulla se $z_{calc} < -1.96$ opp. $z_{calc} > 1.96$

Campione fisico : $\{ \square, \square, \ldots, \square \}$

$$\Downarrow$$

$$\{X_1, X_2, \ldots X_{35}\} \Rightarrow \bar{X}_{35} = 0.343$$

$$z_{calc} = \frac{\bar{X}_{35} - 0.340}{\frac{0.010}{\sqrt{35}}} = \frac{0.343 - 0.340}{\frac{0.10}{\sqrt{35}}} = 1.77$$

in minitab ⇒ dbs

Decisione ;

$$-1.96 < 1.77 < 1.96$$

non posso rifiutare l'ipotesi nulla

$\beta_{H_A: \mu=21} = \mathbb{P}\left[\bar{X}_{40} < 21 \mid \text{temp medio vero} = 21 \text{ min}\right]$

$= \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}_{40} - 21}{\frac{3.2}{\sqrt{40}}} < \frac{21-21}{\frac{3.2}{\sqrt{40}}}\right] = 0.50$

$\beta_{H_A: \mu=22} = \mathbb{P}\left[\bar{X}_{40} < 22 \mid \text{tempo medio vero} = 22 \text{ min}\right]$

$= \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}_{40} - 22}{\frac{3.2}{\sqrt{40}}} < \frac{21-22}{\frac{3.2}{\sqrt{40}}}\right] = 0.02$

tutti i valori creano il grafico

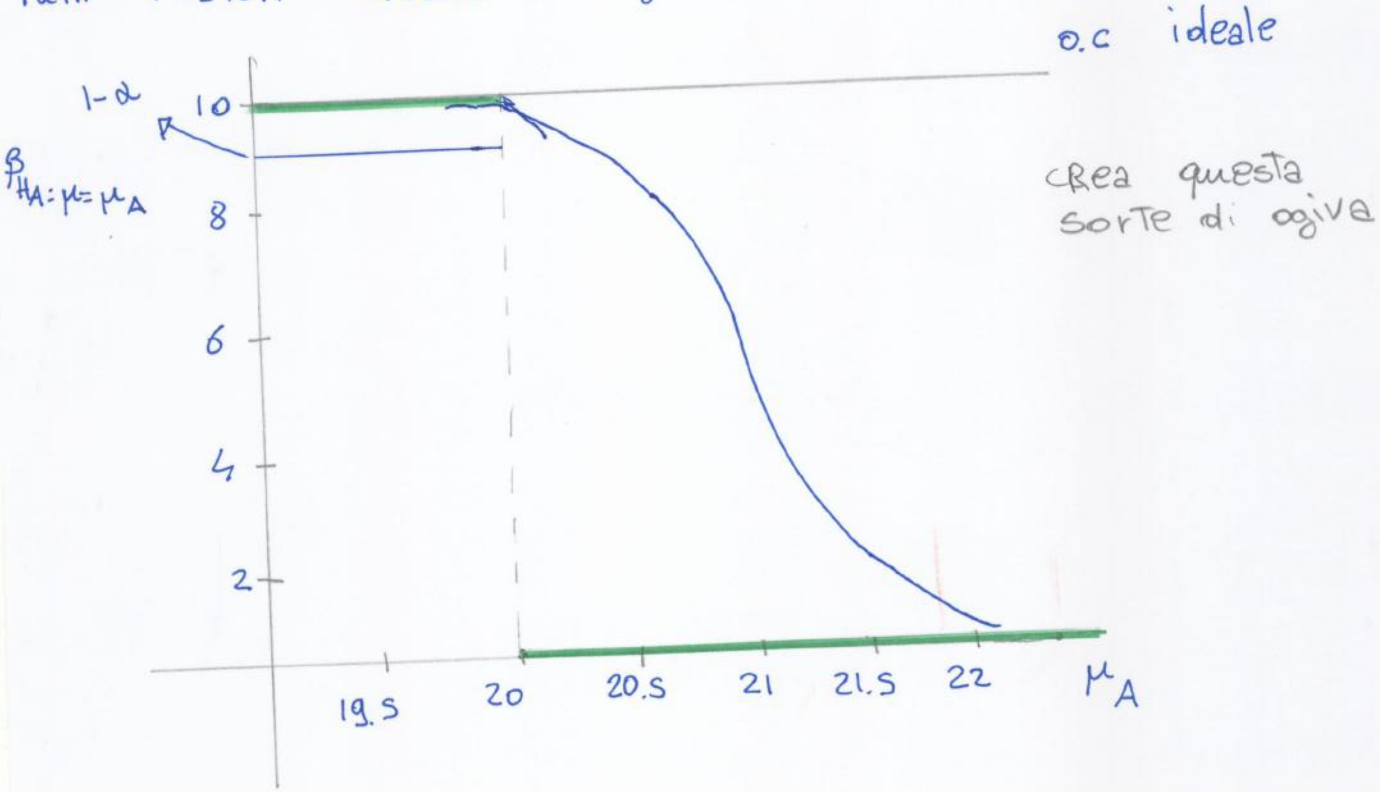


Tavola 7.

T_1. Curva di caratteristica operativa per la valutazione del rischio β dell'errore di seconda specie.

Repliche

	1	2	3	...	k
1	y_{11}	y_{12}			
2	y_{21}	y_{22}			
3	y_{31}				
⋮					
n	y_{n1}	y_{n2}			

$\overline{Y}_{\cdot 1}$ = Y medio Punto uno

$$C = c_1 \overline{Y}_{\cdot 1} + c_2 \overline{Y}_{\cdot 2} + \dots + c_k \overline{Y}_{\cdot k}$$

$\downarrow$

stimatore media μ_1

$$\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[c_1 \overline{Y}_{\cdot 1} + c_2 \overline{Y}_{\cdot 2} + \dots + c_k \overline{Y}_{\cdot k}] = c_1 \underbrace{\mathbb{E}[\overline{Y}_{\cdot 1}]}_{=\mu_1} + \dots + c_k \underbrace{\mathbb{E}[\overline{Y}_{\cdot k}]}_{=\mu_2} = 1$$

$= \Gamma$

$$Var[C] = var[c_1 \overline{Y}_{\cdot 1} + \dots + c_k \overline{Y}_{\cdot k}] =$$

$$= c_1^2 \, var[\overline{Y}_{\cdot 1}] + \dots + c_k^2 \, var[\overline{Y}_{\cdot k}] + 0 + 0 + \dots$$

$$Var[\overline{Y}_{\cdot 1}] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i1}\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{var[Y_{i1}]}_{=\sigma^2} = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var[C] = c_1^2 \frac{\sigma^2}{n} + c_2^2 \frac{\sigma^2}{n} + \dots + c_k^2 \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{k} c_1^2$$

$$C \sim N\left(\Gamma, \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{k} c_i^2\right)$$

$\downarrow$

stimatore di Γ

esercizio

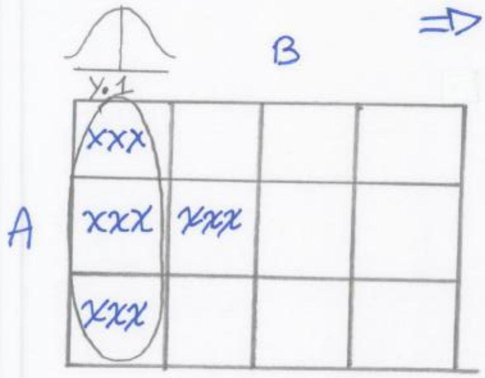
$$\frac{SS_A + SS_B + SS_{A\times B}}{SS_{TOT}} = 81.95\%$$

$H_0 : \Gamma = 15$

$H_A : \Gamma = 15$

$$\Gamma = \frac{1}{3}\left(\mu_{.1} + \mu_{.2} + \mu_{.3}\right) - \mu_{.4}$$

$\Rightarrow \Sigma_4 = 0 = ok$



$$C = \frac{1}{3}\left(\bar{Y}_{.1.} + \bar{Y}_{.2.} + \bar{Y}_{.3.}\right) - \bar{Y}_{.4.}$$

$\downarrow$ stimatore

$$\hat{\Gamma} = C = \frac{1}{3}\left(121.304 + 126.397 + 132.186\right) - 102.231 = 24.398$$

$$Var[C] = var[\quad] = \frac{1}{9}\left[\bar{Y}_{.1.} + \bar{Y}_{.2.} + \bar{Y}_{.3.}\right] + var\left[\bar{Y}_{.4.}\right]$$

$$var\left[\bar{Y}_{.1.}\right] = var\left[\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} Y_{i1k}\right] = \frac{1}{81}\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \underbrace{var\left[Y_{i1k}\right]}_{\sigma^2} = \frac{9}{81}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{9}$$

$$Var\left[\bar{Y}_{.2.}\right] = Var\left[\bar{Y}_{.3.}\right] = Var\left[\bar{Y}_{.4.}\right]$$

$$Var[c] = \frac{1}{9} 3 \times \frac{\sigma^2}{9} + \frac{\sigma^2}{9} = \frac{\sigma^2}{\underset{\substack{\uparrow \\ a \times n \\ 3\times 3}}{9}} \underbrace{\left(3 \times \frac{1}{9} + 1\right)}_{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \; = \; \Sigma c_i^2}$$

$$var[c] = \sigma^2 \frac{4}{27}$$

$$\widehat{Var}[c] = \underset{\substack{\downarrow \\ MSerr \text{ con } 24 \text{ g.d.l.}}}{\sigma^2} \frac{4}{27} = 164.01 \cdot \frac{4}{27}$$

$$t_{calc} = \frac{\overset{24.398}{C} - 15}{\sqrt{MSerr \frac{4}{27}}} = 1.906 \Rightarrow t_{24,\,1-\alpha} = \begin{cases} 1.317 & 1-\alpha = 90\% \\ 1711 & 1-\alpha = 95\% \\ 2.492 & 1-\alpha = 99\% \end{cases}$$