NUMERO: 1513A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Scalia

MATERIA: Geometria + Formulario + Eserc. Prof.Casnati

VETTORI NELLO SPAZIO

Due vettori non nulli u, v si dicono paralleli ($u // v$) se hanno la stessa direzione.
oppure sono paralleli se $\exists$ un t : $v = tu$.

Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

Proiezione ortogonale di un vettore su una retta

Sia $V = \overrightarrow{OP}$ un vettore applicato in O e sia r una retta passante per O.

$\Rightarrow V_r = \overrightarrow{OP'}$ dove P' è la proiezione ortogo. di P su r.

Proiezione ortogonale di un vettore su un piano

Sia $V = \overline{OP}$ un vettore applicato in O e sia π un piano per O.

$\Rightarrow V_\pi = V - V_r$

$$\boxed{\text{versore } V = \frac{V}{|V|}}$$

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

se $\cos \widehat{uv} > 0$ è angolo acuto

se $\cos \widehat{uv} < 0$ è angolo ottuso

tre vettori u, v, w sono complanari se e solo se il loro prodotto misto $u \cdot (v \wedge w)$ è nullo.
se abbiamo 4 vettori basta verificare che 3 di loro non sono complanari.

Spazi vettoriali sul campo reale o complesso.

Spazio vettoriale
↳ operazione somma
↳ operazione prodotto

sottospazio vettoriale
↳ un sottoinsieme $W \subseteq V$ è detto sottospazio vettoriale di $V \iff$ valgono le proprietà.
↳ ① l'elemento nullo di V appartiene a W: $0_V \in W$
↳ ② presi due elementi $u, v \in W$ la loro somma è ancora elemento di W: $u + v \in W$
↳ ③ preso un elemento $u \in W$ e un qualsiasi numero λ nel camp K il loro prodotto λu è ancora elemento di W: $\lambda u \in W$

intersezione di sottospazi
siano U e W due sottospazi dello spazio vettoriale V su K. Allora $Z = U \cap W$ è un sottospazio di W

Un insieme ordinato $B = (v_1, \dots, v_n)$ di elementi di V è una base di V $\Leftrightarrow$ ogni elemento di V si può scrivere in modo unico come comb. lineare degli elementi di B.

Metodo degli scarti successivi

Serve per ricavare un base di V

↳ (i) si scartano gli elementi v_i nulli.
↳ (ii) si scarta il primo v_i che è c.l. dei prece.
↳ (iii) si ripete il procedimento.

Questo porterà ad avere vettori l.i. che formeranno una base di V.

Sia V un K-spazio vettoriale di dim n e siano $v_1 \dots v_m \in V$.

$\Rightarrow$ ① se $v_1, \dots, v_m$ sono l.i. allora $m \leq n$.

② se $m > n$ allora $v_1, \dots, v_m$ sono l.d.

③ se $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ allora $m \geq n$.

④ se $m < n$ allora $v_1, \dots, v_m$ non possono generar

Sia V un K-spazio vettoriale di dim n e sia $W \subset V$ un suo sottospazio.

$\Rightarrow$ ① W è finitamente generato e $\dim V \leq n$

② $\dim W = n$ se e solo se $W = V$

Matrice antisimmetrica

Sia $A \in K^{m,m}$, A è detta antisimmetrica se $-{}^tA = A$, ovvero se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni scelta degli indici i, j.

Matrici Triangolari

Sia $A \in K^{m,m}$, A è detta Triangolare sup se $a_{ij} = 0$ per $i > j$

triangolare inf se $a_{ij} = 0$ per $i < j$

Prodotto di Matrici

il prodotto di Matrici è def $\iff$ il numero di colonne di A è pari al numero di righe di B

Inoltre risulta che AB ha tante righe quante ne ha A e tante colonne quante ne ha B.

$R^{\text{righe} \times \text{colonne}}$

Matrice Identica

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\#$ colonne $A = \#$ righe B

Matrice ridotta

Una matrice si dice ridotta per righe se vale la seguente proprietà: in ogni riga non nulla di A c'è un elemento non nullo al di sotto del quale ci sono soltanto zeri.

tale elemento di ogni riga si dice elemento speciale della riga stessa

Sistema lineare omogeneo

Un sistema lineare $AX=B$ si dice omogeneo se la colonna dei termini noti è il vettore nullo di $K^{m,1}$.

⇒ un sistema l. omogeneo è sempre risolubile, in quanto il vettore nullo $X=0$ è sempre soluzione.

⇒ Sia $AX=0$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio V di K^n.

Matrici Invertibili

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se ∃ una matrice B tale che $AB=BA=I$ allora essa è l'unica ad avere questa proprietà, diciamo che A è invertibile e che B è la sua inversa.

In tal caso B si denota con A^{-1}

⇒ Per trovare la matrice inversa A^{-1} è sufficiente ~~risolvere~~ risolvere l'equa. matriciale $AX=I$.

⇒ Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile e $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

⇒ la matrice A è invertibile $\Leftrightarrow$ ha rango max o $\det \neq 0$.

Regola di Cramer

Siano A una matrice invertibile e sia $AX=B$ un sistema lineare. Allora il vettore delle incognite $X=(x_1, \dots, x_n)$ sarà dato da

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$$

dove Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con il vettore dei termini noti B.

Applicazioni lineari

Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'applicazione (ovvero una legge che ad ogni elemento $v \in V$ associa uno e un solo $w \in W$)

f è lineare se valgono le seguenti proprietà:

↳ $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$

↳ $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall \alpha \in K$ e $v \in V$

Proprietà appl. lineari

Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'app. lineare. Si ha allora:

↳ $f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n), \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \quad \forall v_1, \dots, v_n \in V$

↳ $f(0_V) = 0_W$

Nucleo

Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'app. lineare. Il nucleo dell'app. f è l'insieme definito come

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V : f(v) = 0_W \}$$

Immagine

Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'app. lineare. L'Immagine dell'app. f è l'insieme definito come

$$\operatorname{Im} f = \{ w \in W : \exists\, v \in V \text{ con } f(v) = w \}$$

Immagine e matrice associata.

Sia $f: V \Rightarrow W$ un'appl. lineare e sia $A = M_f^{E,F}$ la matrice associata ad f rispetto alle basi E e F.

⇒ ↳ Il sottospazio $Im f$ è generato dai vettori di W aventi per componenti rispetto ad F le colonne di A.

↳ $Im f$ è isomorfo allo spazio delle colonne di A.

↳ $\dim Im f = \rho(A)$.

⇒ **Come trovo una base di $Im f$?**

modo ↳ ① applico il metodo degli scarti successivi alle colonne di A; le colonne rimanenti danno le componenti, rispetto ad F, di una base $Im f$.

modo ↳ ② si riduce per colonne, le colonne non nulle danno le componenti $Im f$.

NUCLEO e matrice associata.

Sia $f: V \Rightarrow W$ un'appl. lineare e sia $A = M_f^{E,F}$ la matrice associata ad f rispetto alle basi E ed F. Sia $Z \subseteq K^n$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$

↳ l'isomorfismo $\varphi: K^n \Rightarrow V$ definito da $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ induce, per restrizione, un isomorfismo fra Z e $\ker f$

↳ $\dim \ker f = \dim V - \rho(A)$

⇒ **Come trovo una base di $\ker f$?**

① si risolve il sistema omogeneo $M_f^{E,F} X = 0$

② si trova una base $(s_1, \dots, s_r)$ dello spazio Z delle soluzioni del sistema.

③ si costruisce la base $(v_1, \dots, v_r)$ per il $\ker f$, ricordando che in V si utilizza la base E: $\forall\ 1 \leq i \leq r$ le componenti di v_i rispetto alla base E sono uguali alle componenti di s_i.

Matrice di cambio base.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano $E=(e_1,\dots,e_n)$, $F=(f_1,\dots,f_n)$ due basi di V. Allora esiste una matrice $P_{E,F}=(p_{ij})\in K^{n,n}$ tale che

$$\begin{cases} f_1 = p_{11}e_1+\dots+p_{n1}e_n \\ \dots \\ f_n = p_{1n}e_{1n}+\dots+p_{nn}e_n \end{cases}$$

Come sono date?
le colonne $P_{E,F}$ sono date dalle componenti degli elementi di F rispetto ad E.
La matrice $P_{E,F}$ è detta matrice di cambio base da E ad F, o matrice di passaggio da E ad F.
La matrice $P^{-1}_{E,F}=P_{F,E}$ è la matrice di cambio base da F ad E.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{EF}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P_{F,E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ siano $f: V\to W$ un'appl. lineare, E ed E' due basi di V, F ed F' due basi di W; siano poi $P_{E,E'}$ la matrice di cambio base da E a E' e $Q_{F,F'}$ quella di cambio base da F a F'.
Infine siano $M^{E,F}$ ad $M^{E',F'}$ le matrici associate all'appl. f rispetto alle basi indicate

$$\Rightarrow M^{E',F'} = (Q_{F,F'})^{-1} M^{E,F} P_{E,E'}$$

Endomorfismo semplice.

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\varphi: V \to V$ un endomorfismo. Si dice che φ è semplice se esiste una base E di V formata da autovettori di φ; ciò equivale a dire che esiste una base E tale che $M_\varphi^{E,E}$ è una matrice diagonale del tipo

$$M_\varphi^{E,E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Molteplicità di un autovalore

λ ha molteplicità m se λ è una radice di molteplicità (algebrica) m del p.c. di φ.

Dimensione degli autospazi.

Sia λ un autovalore di φ avente molteplicità m. Si ha che $1 \le \dim V_\lambda \le m$.

Come stabilisco se un endomorfismo è semplice?

L'endomorfismo φ è semplice se e solo se, calcolate le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ del p.c. di φ e le loro rispettive molteplicità $m_{\lambda_1}, \dots m_{\lambda_s}$, le seguenti condizioni sono verificate.

- $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$
- $\forall$ autovalore λ_i, di molteplicità m_{λ_i} risulta

$$m_{\lambda_i} = \dim V_{\lambda_i} = n - \rho(A - \lambda_i I)$$

$\Rightarrow$ Se V è uno spazio vettoriale sul campo K e $\varphi: V \to V$ è un endomorfismo con n autovalori distinti tutti appartenenti a K, allora φ è semplice

⇒ due vettori v e w di V si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0$.
Una base si dice ortonormale se è costituita da versori a due a due ortogonali.

⇒ Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare, $f: V \to V$ un endomorfismo ed $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base ortonormale di V. Se la matrice $M_f^{E,E}$ è simmetrica, allora risulta che

- f è semplice e gli autospazi di f sono a due a due ortogonali;
- $\exists$ una base ortonormale di V formata da autovettori.

Matrice ortogonale

Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice ortogonale se P è invertibile e se risulta che $P^{-1} = {}^tP$. Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 oppure a -1.

Matrice ortogonale speciale

Si dice speciale se il suo determinante è uguale ad 1

⇒ Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonale se e solo se le colonne (e le righe) di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ euclideo.

⇒ Una matrice simmetrica $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ è sempre diagonalizzabile e si può sempre diagonalizzare tramite una matrice ortogonale P che ha per colonne una base ortonormale di autovettori.

⇒ Una matrice simmetrica $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ ammette tutti autovalori reali e quindi il suo polinomio caratteristico ha tutte radici reali.

Studiare il segno di una quadrica vuol dire stabilire se essa è def positiva, semidef. positiva ecc. ecc...

Forma ~~quadratica~~ canonica di una forma quadratica.

Una forma quadratica è in forma canonica se in essa compaiono solamente i termini ~~misti~~ al quadrato ovvero se e solo se la matrice associata alla forma è diagonale.

$\Rightarrow$ Ogni forma quadratica $q(x) = {}^tXAX$ ha una forma canonica del tipo

$$r(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono autovalori della matrice A e dove $Y = PX$ con P una matrice ortogonale che ha sulle colonne le componenti di una base ortonormale di autovettori.

$\Rightarrow$ Sia $q(x) = {}^tXAX$ una forma quadratica reale in n variabili e sia P = numero di autovalori positivi di A con molteplicità, N = numero di autovalori negativi di A con molteplicità, Z = numero di autovalori nulli di A con molteplicità.

Ovviamente si ha $P + N + Z = n$ e $P + N = \rho(A)$.

Con queste notazioni si ha che la forma quadrica q è:

- definita positiva se $P = n$
- definita negativa se $N = n$
- semidefinita positiva se $N = 0$
- semidefinita negativa se $P = 0$
- non definita se $P > 0$ e $N > 0$

Se r è una retta ortogonale al vettore $ai+bj$ e passante per il punto $P_0=(x_0,y_0)$ allora una sua equazione cartesiana sarà data da

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

Se r è una retta passante per $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$ allora una sua eq cartesiana sarà data da

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}=0$$

Fascio di rette

Sia P_0 un punto del piano. Il fascio di rette per P_0 è l'insieme di tutte le rette del piano passanti per P_0.

⇒ Date due rette $r_1: f(x,y)=ax+by+c=0$ ed $r_2: g(x,y)=$ $=a'x+b'y+c'=0$ intersecantisi in un punto P_0, tutte le rette hanno equazione

$$\lambda f(x,y)+\mu\, g(x,y)=0$$ ⇐ eq del fascio passanti per P_0

⇒ Sia r una retta qualsiasi del piano e $P_0=(x_0,y_0)$ un punto non appartenente ad r.

↳ La proiezione ortogonale del punto P_0 sulla retta r è il punto Q_0 intersezione della retta s passante per P_0 ed ortogonale ad r con la retta r stessa.

↳ La distanza del punto P_0 dalla retta r è uguale alla distanza del punto dalla sua proiezione ortogonale sulla retta ed è espressa mediante

$$d(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sia Γ la circonferenza di centro $C=(\alpha,\beta)$ e $R>0$ e $P_0=(x_0,y_0)$ un punto appartenente ad essa, allora $\exists$ una sola retta tangente alla circonferenza passante per P_0. Essa è la retta passante per P_0 e ortogonale alla retta passante per C e P_0 (parallela a sua volta al vettore $(x_0-\alpha)\vec{i}+(y_0-\beta)\vec{j}$)

$$\Rightarrow r: (x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)=0$$

se Γ ha equazione $\Gamma: x^2+y^2+ax+by+c=0$ e $P_0=(x_0,y_0)$ è un punto di Γ, la retta tangente a Γ in P_0 si può ottenere così:

sostituisco x^2, y^2 con $x_0\cdot x$, $y_0\cdot y$ e ax, by con $\frac{x+x_0}{2}a$, $\frac{y+y_0}{2}b$.

$$\Rightarrow r: x_0\cdot x+y_0\cdot y+\frac{x+x_0}{2}a+\frac{y+y_0}{2}b+c=0$$

Sia Γ la circonferenza di centro $C=(\alpha,\beta)$ e $R>0$ e $P_0=(x_0,y_0)$ un punto esterno ad essa. allora ci sono due rette reali tangenti a Γ e passanti per P_0: esse sono le rette passanti per P_0 e tali che la loro distanza dal centro di Γ è uguale ad R.

Geometria nello spazio

Rette e piani. Per il postulato della parallela, $\exists$ una ed una sola retta r passante per un punto P_0 e parallela ad un vettore $v = li + mj + nk$ nello spazio. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, i punti r si ottengono tutti mediante formula

$$P_t = P_0 + tv$$

= eq vettoriale parametrica della retta passante per P_0 e parallela a v.

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

l, m, n sono i parametri direttori della retta r.

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ sono due punti distinti dello spazio, esiste una ed una sola retta r che li contiene ed avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

sulle equazioni che rapp. i piani

eq. cartesiana del piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

vettore $ai + bj + ck$ è ortogonale al piano

le eq $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ rapp. lo stesso piano se e solo se le quaterne (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono proporzionali

⇒ due piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\alpha': a'x+b'y+c'z+d=0$ si intersecano in una retta se e solo se $\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$

⇒ supponiamo che la retta r sia data come intersezione dei piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\alpha': a'x+b'y+c'z+d=0$ e quindi abbia eq. cartesiana

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Per riuscire a scrivere r in forma parametrica è necessario saper individuare un vettore parallelo alla retta ed un punto P_0 che soddisfi le eq di entrambi i piani. Un vettore ortogonale al piano α e un vettore ortogonale ad α' e quindi si ha che un vettore parallelo ad r è dato dal seguente det simbolico:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

in questo modo è possibile passare dall'espressione cartesiana di una retta alla sua forma parametrica. Viceversa se la retta r ha le seguenti eq. parametriche

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

allora eliminando il parametro t tra le prime due eq e le ultime due, si trovano le eq di due piani che hanno r come intersezione. Essi sono

$$\alpha: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}; \quad \alpha': \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n};$$

qui se uno dei denominatori è nullo, è nullo anche il corrispondente numeratore che va a costituire una delle due eq dei piani; ad es., $l=0$, allora $x-x_0=0$ è una della eq, mentre $\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ è l'altra.

Sfere e circonferenze

Sia $C=(\alpha,\beta,\gamma)$ un punto dello spazio e sia R un numero reale maggiore di 0; la superficie sferica (o sfera) di centro C e raggio R è l'insieme di tutti i punti la cui distanza da C è uguale a R.
Un punto $P=(x,y,z)$ appartiene alla sfera S
$\Leftrightarrow \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$$

$$R=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2-d}$$

$\Rightarrow$ Per trovare i punti di intersezione di una superfi. sferica $S: f(x,y,z)=0$ e una retta $r:(x,y,z)=(x_0+lt,\ y_0+mt,\ z_0+nt)$ è suff. risolvere l'eq in t

$$f(x_0+lt,\ y_0+mt,\ z_0+nt)=0$$

Poiché l'eq è di secondo grado in t, essa può avere:

- due soluzioni reali distinte; in questo caso r interseca S in due punti reali distinti e si dice che r è secante.
- due soluzioni reali coincidenti; in questo caso r interseca S in due punti reali coincidenti e si dice che r è tangente ad S.
- due soluzioni complesse e coniugate; in questo caso r interseca S in due punti complessi coniugati e si dice che r è esterna ad S.

$\Rightarrow$ Sia S la sfera di centro $C=(\alpha,\beta,\gamma)$ e $R>0$
$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ un punto appartenente ad essa, allora $\exists$ uno ed un solo piano tangente alla sfera passante per il punto P_0. Esso è il piano passante per P_0 e ortogonale alla retta passante per C e P_0 (parallela a sua volta al vettore $(x_0-\alpha)i+(y_0-\beta)j+(z_0-\gamma)k$)

$$\Rightarrow \pi: (x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)+(z_0-\gamma)(z-z_0)$$

$\Rightarrow$ Per individuare una circo. Υ occorrono: raggio, centro ed il piano in cui giace.

fascio di sfere
siano $S_1: f_1(x,y,z)=0$ $\quad S_2: f_2(x,y,z)=0$ due sfere a punti reali tangenti (interna o estrer) in un punto $P=(a,b,c)$ allora

$$\lambda f_1(x,y,z)+\mu f_2(x,y,z)=0$$

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Curva di livello, una funzione di due variabili si può rapp. sul piano Oxy mediante le curve di livello.
Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, allora la curva di livello c di f è la curva del piano Oxy avente equazione $f(x,y)=c$, $(x,y) \in I$.
Questa curva è la proiezione ortogonale sul piano Oxy dell'intersezione del grafico di f con il piano $z=c$.

$\Rightarrow$ Una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1$ e $n \geq 1)$ è continua in $P_0 \in I$ se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$:

$$\forall P \in I \text{ con } \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - f(P_0)\| < \varepsilon$$

La funzione f è continua in I se è continua in ogni punto di I.

$\Rightarrow$ Sia $f: I \Rightarrow \mathbb{R}^m$ una ~~insieme~~ funzione def dall'insieme $I \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia P_0 un punto interno ad I. Allora f è continua in P_0 se e solo se $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Derivate direzionali e derivate parziali

Derivata direzionale è $\Rightarrow \dfrac{df}{du}(P_0) = \dfrac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t}$
dove $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^n$ un versore.

gradiente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)\right) \text{ di } \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ la derivata direzionale di f in P_0 secondo il versore u

$$\Rightarrow \frac{df}{du}(P_0) = u \cdot \text{grad}_{P_0} f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) + \ldots + \alpha_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

geometria differenziale.

Curva in forma parametrica: Un luogo di punti $P(x,y,z)$ dello spazio le cui coordinate sono funzioni del parametro reale t si dice curva in forma parametrica.

Funzione Regolare

Una funzione vettoriale $P=P(t)$, $t\in I$, si dice regolare se:

- $P=P(t)$ è iniettiva, ovvero presi qualsiasi $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 \neq t_2$, si ha $P(t_1) \neq P(t_2)$;
- $P(t)$ è C^∞, ovvero ha tutte le derivate e sono continue
- $P'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Retta e versore tangente.

Sia $\mathcal{L} = P=P(t)$ una curva regolare e sia $P_0=P(t_0)$ un punto fissato. La retta Tangente ad $\mathcal{L}$ in $P_0=P(t_0)$ è la retta passante per P_0 e parallela al vettore non nullo $P'(t_0)$. I vettori paralleli alle retta Tangente ad $\mathcal{L}$ in P_0 sono detti vettori tangenti ad $\mathcal{L}$ in P_0. Il versore Tangente ad $\mathcal{L}$ in P_0 è il versore

$$t(t) = vers(P'(t))$$

Funzione biregolare.

Una funzione vettoriale $P=P(t)$ si dice biregolare se è regolare e vale la seguente proprietà:

- i vettori $P'(t)$ e $P''(t)$ sono l. indipendenti $\forall t \in I$ ovvero $P'(t) \wedge P''(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

Curve biregolari

Una curva si dice biregolare se fra tutte le sue rapp. parametriche ne esiste almeno una biregolare

Piano osculatore.

Sia $\mathcal{L}: P = P(t)$ una curva biregolare e sia $P_0 = P(t_0)$ un punto di $\mathcal{L}$. In P_0, la curva $\mathcal{L}$ è dotata di retta tangente r; si consideri un ulteriore punto $P = P(t)$ $\in \mathcal{L}$ non appartenente alla retta tangente; resta così individuato il piano π_t passante per $P(t)$ e per r. La posizione limite π_0 del piano passante per $P(t) \in \mathcal{L}$ e per la tangente r ad $\mathcal{L}$ in $P_0 = P(t_0)$ quando $t \to t_0$ si dice piano osculatore $\mathcal{L}$ in P_0. tale piano esiste per le curve biregolari.

Il piano osculatore passa per $P_0 = P(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ ed è parallelo a $P'(t_0)$ e $P''(t_0)$ e quindi ha equazione cartesiana

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

curva piana

Data una curva $\mathcal{L}$ nello spazio essa si dice piana se esiste un piano in cui essa giace cioè se esiste un piano in cui è contenuto ognuno dei suoi punti.

Quindi il piano osculatore è il piano perpendicolare a $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e passante per $f(t)$ dunque è π.
Se C è piana, il piano osculatore, dove è definito, coincide con il piano della curva.

DETERMINANTI

IMPORTANTITTISE COSE DA SAPERE

$\det(A) \neq 0 \iff \rho(A) = n$ (RANGO MASSIMO)

$\iff \exists A^{-1}$ è INVERTIBILE

$\iff$ righe/colonne di A sono L.I.

$\iff$ l'endomorfismo associato che è $L_A : X \mapsto AX$ è biezione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\iff$ il sistema lineare $AX = b$ ha 1 sola soluzione $(X = A^{-1} \cdot b)$

$\iff \ker A = \{\vec{0}\}$

$\iff L_A$ iniettiva

$\iff L_A$ suriettiva

$\det(A) = \det({}^tA)$, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\leadsto \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

$\leadsto \det(P^{-1} M P) = \det M$

Se una matrice P è ortogonale (cioè $P^{-1} = {}^tP$)

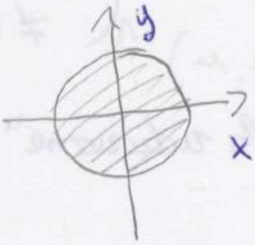
allora $\Rightarrow \det P = \pm 1$

NB. il det NON è lineare ($\det(A+B) \neq \det A + \det B$

$\det(mA) \neq m \cdot \det(A)$

$m \in \mathbb{R}$)

DIAGONALIZZAZIONE



membrana elastica si deforma secondo

$f: \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$f(x,y) = (5x+3y, \ 3x+5y)$

gli autovettori di f o di (A)

Devo risolvere $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 5x+3y = \lambda x \\ 3x+5y = \lambda y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (5-\lambda)x + 3y = 0 \\ 3x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad (A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ha soluzioni se $\det(A-\lambda I) = 0$ (cioè $\rho < 2$)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 3^2 = (5-\lambda+3)(5-\lambda-3)$$

$$= (8-\lambda)(2-\lambda) \quad \text{polinomio caratt.}$$

$\Rightarrow$ autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$

molteplicità algebrica $\leftarrow$ $m_1 = 1$, $m_2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{\mu_1 = 1 = \mu_2}$

molt $\rightarrow$ molteplicità geometrica

$\Rightarrow$ A è DIAGONALIZZABILE

$\Leftrightarrow \exists$ base di autovettori di f

$\Leftrightarrow \exists P$ invertibile 2×2:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

• Calcoliamo gli autovettori

IDENTITÀ

$\lambda_1 = 8$ autospazio $V_8 = \ker (A - 8I)$

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A-8I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\{(1,1)\}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \Rightarrow x=y \\ 0=0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 8$

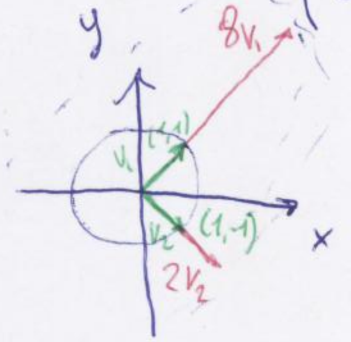
$\lambda_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A-2I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow x=-y \\ 0=0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é autovettore rel all'autovalore $\lambda = 2$



$P =$

LEZ 35

SISTEMA LINEARE ROUCHÉ CAPELLI

$AX=B$

(1) $AX=B$ è risolubile se e solo se $\rho(A|B)=\rho(A)$

(1) ammette ∞^{n-p} soluzioni (p = colonne linear. ind.)

$\Downarrow$

$AX=B$ ha

(i) nessuna soluzione se e solo se $\rho(A|B)>\rho(A)$

(ii) una soluzione se e solo se $\rho(A|B)=\rho(A)=n$

(iii) infinite soluzioni se e solo se $\rho(A|B)=\rho(A)=p<n$

MOLTEPLICITÀ ~~XXXX~~ GEOMETRICA

$n-\rho(A-\lambda I_n)$

n = dim matrice

ENDOMORFISMO SEMPLICE

$m_a = m_g$

PRODOTTO DI MATRICI

$$\mathbb{R}^{a,b} \times \mathbb{R}^{c,d} = \mathbb{R}^{a,d}$$

$$\mathbb{R}^{1,3} = (1,1,3) \qquad \mathbb{R}^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^{3,2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Due matrici possono essere sommate se e solo se hanno lo stesso numero di colonne

3 vettori

Sono complanari se Det = 0

Paralleli se proporzionali

Sono ortogonali se il prodotto scalare è zero

- ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile sia $\varphi: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ se φ é suriettiva allora $n \geq m$;

se φ é iniettiva allora $n \leq m$

- La condizione di parallelismo tra due vettori si traduce nella loro proporzionalità.

- La condizione di ortogonalità sta nel fatto che il loro prodotto misto si annulli

- C.N.S per la diagonalizzabilità di una matrice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$:
  - $\Rightarrow$ tutte le radici del polinomio reali
  - $\Rightarrow$ $m_a = m_g$

- per vedere se un punto appartiene ad un equazione basta sostituire

ESEMPIO CURVA

$(\cos(t), \sin(t), t) = \alpha(t)$

① Vedo se regolare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ É REGOLARE

② Vedo se é Biregolare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$ $\Rightarrow$ essendo una curva $\mathbb{R}^3$ per vedere se sono l. i. devo fare il prodotto vettoriale

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (\sin(t), -\cos(t), 1) \neq 0$$

É BIREGOLARE

③ Calcolo la retta tangente in un punto.

" $\alpha'(t)$ " é il vettore tangente alla mia curva.

mi calcolo il versore tangente

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1)$$

retta tangente in $\alpha(\pi)$ $\quad \alpha(\pi) = (-1, 0, \pi)$

$\alpha'(\pi) = (0, -1, 1)$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -s \\ z = s + \pi \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

queste coordinate descrivo la mia retta Tg alla elica in quel punto

SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \qquad a_{ij}, b_m \in K$$

MATRICI ASSOCIATE A UN SISTEMA LINEARE

MATRICE INCOMPLETA
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

COLONNA DELLE INCOGNITE
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad n \times 1$$

MATRICE DEI TERMINI NOTI
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad m \times 1$$

MATRICE COMPLETA
$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad m \times (n+1)$$

$\boxed{AX = B}$ sl. in forma matriciale

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + \frac{a_{12}}{2}xy + a_{22}y^2 + \frac{a_{13}}{2}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} \\ \frac{a_{21}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} \end{vmatrix}$$

det B	det A	Tr(A) · det B	TIPO
$= 0$	qualsiasi	0	DEGENERE
$\neq 0$	0	qualsiasi	PARABOLA
$\neq 0$	> 0	< 0	ELLISSE A PUNTI REALI
$\neq 0$	> 0	> 0	ELLISSE IMMAGINARIA
$\neq 0$	< 0	qualsiasi	IPERBOLE

se $\det B = 0$ cioè $\rho(B) < 3$

det A	$\rho(B)$	TIPO
< 0	2	COPPIA DI RETTE REALI DISTINTE INCIDENTI
> 0	2	COPPIA DI RETTE IMMAGINARIE (1 PUNTO REALE IN COMUNE)
$= 0$	2	COPPIA DI RETTE REALI DISTINTE PARALLELE O COMPLESSE CONIUGATE SENZA PUNTI COMUNI
$= 0$	1	COPPIA DI RETTE REALI COINCIDENTI

CURVA REGOLARE

$S: P = P(u,v)$ si dice regolare se

A: P è iniettiva

B. P è di classe C^{∞}

C. la matrice Jacobiana

$$J(u,v)\,P = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

ha rango 2 ovunque, cioè determino sempre una applicazione lineare iniettiva

PARALLELI 2 vettori = prodotto vettoriale nullo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 162

$\boxed{\text{Im } f}$ = esempio

$\text{Im } f = \{(3x-2z,\ x+y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(3x, x) + (0, y) + (-2z, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(3,1) + y(0,1) + z(-2,1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \mathcal{L}\{((3,1), (0,1), (-2,1)\}$

$\Rightarrow (3,1),\ (0,1),\ (-2,1)$ L.D.

$(\lambda : (3,1) = \lambda(0,1))$

$\text{Im } f = \mathcal{L}((3,1), (0,1)\}$ base di Im f.

4) PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{z}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left(0\vec{i},\ 0\vec{j},\ 0\vec{k} \right)}_{\vec{z}}$$

esempio compl. algebrico.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_{1,1} = 1$, $A_{1,2} = -1$, $A_{1,3} = 1$, $A_{2,1} = -5$, $A_{2,2} = 3$, $A_{2,3} = 1$, $A_{3,1} = 1$, $A_{3,2} = -1$, $A_{3,3} = -1$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia $A \in K^{n,n}$, $K = \mathbb{R}_q\, \mathbb{C}$. Allora A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$

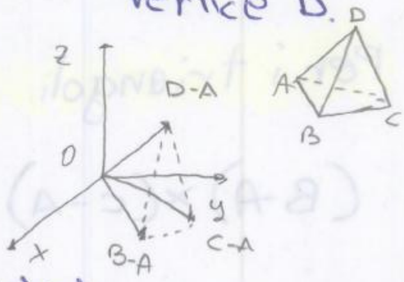
In tal caso $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \tilde{A}$

Volume Tetraedo.

Si considerano quattro punti non complanari $A, B, C, D \in S_3$

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{1}{3}\text{Area}(ABC)h$$

h = altezza vertice D.



$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|(B-A)\times(C-A)|$$

h = proiezione di $D-A = |D-A||\cos\varphi|$

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{1}{6}|\langle D-A, (B-A)\times(C-A)\rangle|.$$

esempio numerico.

$A=(1,1,1)$, $B=(2,-1,3)$, $C=(-1,0,1)$, $D=(3,3,3)$.

$B-A = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$;

$C-A = -2\vec{i} - \vec{j}$;

$D-A = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i punti non sono complanari dunque del un Tetraedo

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{1}{6}|\langle D-A, (B-A)\times(C-A)\rangle| =$$

$$= \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-14| = \frac{7}{3}$$

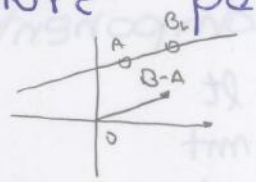
esempio (3)

$$\begin{cases} x = 3-4t \\ y = 2 \\ z = 6t \end{cases}$$

tale retta passa per il punto $B=(3,2,0)$ ed è parallela a $\vec{w} = -4\vec{i} + 6\vec{k}$

un'altro modo per costruire un vettore Parallelo.

Per costruire un vettore parallelo ar basta considerare B-A.



fissiamo in S_3

$A=(x_A, y_A, z_A)$ $B=(x_B, y_B, z_B)$

$B-A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

cossicché otteniamo le eq parametriche delle retta r passante per $A=(x_A, y_A, z_A)$ e $B=(x_B, y_B, z_B)$

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$$

esempio (4)

fissiamo $A=(1,2,-3)$

$B=(2,1,1)$

chiramente $A \neq B$, quindi esiste una retta r contenente A e B le cui eq parametriche si ottengono

$$\begin{cases} x = 1 + (2-1)t \\ y = 2 + (1-2)t \\ z = -3 + (1-(-3))t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + (-1)t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

esercizio il piano

Consideriamo $\alpha: 2x+y-3z=-5$. e siano r', r'', r'''

$r': \begin{cases} x=t-1 \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$ $\quad r'': \begin{cases} x=t \\ y=t+2 \\ z=1+t \end{cases}$ $\quad r''': \begin{cases} x=-1+t \\ y=t-3 \\ z=t \end{cases}$

Ricordiamo che un vettore $\perp$ ad α è $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$.

Determiniamo $\alpha \cap r'$

Prendiamo $(t-1, t, 1-t)$ affinché $P \in \alpha$ allora $t(t-1, t, 1-t)$ deve essere soluzione dell'eq di α

$$2(t-1)+t-3(1-t)=-5$$

$\Rightarrow 6t=0 \quad \Rightarrow t=0$ che corrisponde a $(-1, 0, 1)$

Per verificare che α e r' non sono paralleli basta sapere che $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 6 \quad \Rightarrow \vec{v} \not\perp \vec{v}'$

$\Rightarrow \alpha \not\parallel r'$.

Determiniamo $\alpha \cap r''$

$$2t+(t+2)-3(1+t)=-5$$

$\Rightarrow -1=-5$ non ha soluzioni perciò $\alpha \cap r'' = \phi$

Determiniamo $\alpha \cap r''$

$$2(-1+t)+(t-3)-3t=-5$$

$\Rightarrow 0=0 \quad \Rightarrow$ Ogni $t \in \mathbb{R}$ è soluzione di tale equazione, quindi ogni punto di r è in α

perciò $r''' \subseteq \alpha$.

In questi due ultimi casi risulta che il piano e la retta sono paralleli.

eq parametriche di una retta $r \subseteq S_3$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

da cui si ricavano le tre equazioni lineari non contenenti il parametro t

$m(x - x_0) = l(y - y_0)$, $n(x - x_0) = l(z - z_0)$, $n(y - y_0) = m(z - z_0)$

esempio

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

$$t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-3}$$

eliminando i denominatori

$y - 2 = 0$, $-3(x-1) = 2(z-3)$, $y - 2 = 0$

cioè

$y - 2 = 0$, $3x + 2z = 3$ $y - 2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases}$$

Si considerino le rette

$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ $\qquad r': \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$$

Allora

·) $r = r'$ se e solo se $rk(A) = 2 = rk(A|B)$

··) r e r' sono parallele e distinte se e solo se $rk(A) = 2$ $\quad rk(A|B) = 3$

···) r e r' si intersecano in un punto se e solo se $rk(A) = 3 = rk(A|B)$

····) r e r' sono sghembe se e solo se $rk(A) = 3 \quad rk(A|B) = 4$

matrici simili

due matrici simili hanno inverse simili
→ due matrici simili hanno lo stesso determinante
→ hanno lo stesso rango
→ hanno la stessa traccia
→ hanno gli stessi autovalori
→ hanno lo stesso polinomio caratteristico ma, due matrici A e B che abbiano lo stesso p. cara. non sono necessareamente simili: lo sono se $\forall$ autovalore λ_i risulta: $\text{rango}(A - \lambda_i \cdot I) = \text{rango}(B - \lambda_i \cdot I)$

matrice A DIAGONALIZZABILE.

⇒ è diagonalizzabile se è possibile trovare una base per V tale che la matrice associata ad f rispetto a tale base sia diagonale, cioè se esiste una base di V costituita da autovettori per f.

⇒ c.n.s. affinché sia diagonalizzabile è che esistano n autovalori distinti

⇒ $m_a = m_g$

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE

$f(x,y,z) = a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz + 2a_{0,1}x + 2a_{0,2}y + 2a_{0,3}z$

$a_{0,0} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{a_{0,0}} & \cancel{a_{0,1}} & \cancel{a_{0,2}} & a_{0,3} \\ \cancel{a_{1,0}} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \cancel{a_{2,0}} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \cancel{a_{3,0}} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

QUADRICHE NON DEGENERI: $\rho(A) = 4$

$\rho(A_0) = 3$

- $\det(A) < 0$; $\mathrm{seg}(A_0)$
  - $(3,0);(0,3)$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ \text{Ellissoide reale} \end{cases}$
  - $(2,1);(1,2)$ $\begin{cases} x^2-y^2-z^2-1=0 \\ \text{Iperboloide a 2 falde} \end{cases}$
- $\det(A) > 0$; $\mathrm{seg}(A_0)$
  - $(3,0);(0,3)$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+1=0 \\ \text{Ellissoide immaginario} \end{cases}$
  - $(2,1);(1,2)$ $\begin{cases} x^2+y^2-z^2-1=0 \\ \text{Iperboloide a 1 falda} \end{cases}$

$\rho(A_0) = 2$

- $\det(A) < 0$ $\quad x^2+y^2-z=0$ Paraboloide ellittico
- $\det(A) > 0$ $\quad x^2-y^2-z=0$ paraboloide iperbolico

QUADRICHE DEGENERI del tipo CONO o CILINDRO $\rho(A) = 3$

$\rho(A_0) = 2$

- $\mathrm{seg}(A_0) = (3,0);(0,3)$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0 \\ \text{Cono non reale} \end{cases}$
- $\mathrm{seg}(A_0) = (2,1);(1,2)$ $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ \text{Cono reale} \end{cases}$

Equazione di una quadrica di $\mathbb{R}^3$:
$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{23}yz+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$
Matrice dei coefficienti della quadrica:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Matrice della parte di secondo grado:

$$A_{44}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Forme canoniche delle quadriche:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ ellissoide reale
(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ ellissoide immaginario ($\emptyset$)
(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ iperboloide ellittico (a 2 falde)
(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ iperboloide iperbolico (a 1 falda)
(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0$ paraboloide ellittico (a 1 falda)
(6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0$ paraboloide iperbolico (a sella)
(7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ cono reale
(8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ cono complesso (punto)
(9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ cilindro ellittico
(10) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ cilindro iperbolico
(11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y}{b^2}=0$ cilindro parabolico
(12) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ cilindro complesso ($\emptyset$)
(13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ piani incidenti
(14) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ piani complessi incidenti (punto)
(15) $\frac{x^2}{a^2}-1=0$ piani paralleli
(16) $\frac{x^2}{a^2}+1=0$ piani complessi paralleli ($\emptyset$)
(17) $x^2=0$ piani coincidenti

CBM a.s. 2011/2012

Classificazione delle CONICHE

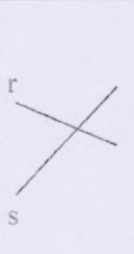
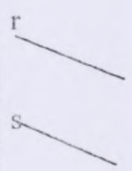
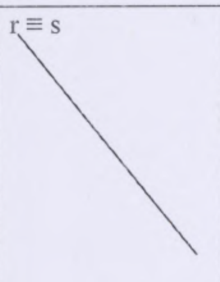
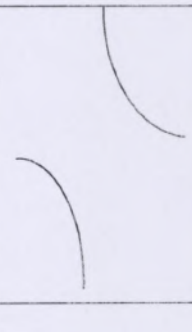
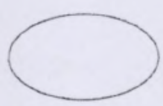
Chiamiamo CONICA il Luogo dei punti del PIANO le cui coordinate sono soluzione di un'equazione di secondo grado del tipo:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$$

Chiamiamo DISCRIMINANTE di una Conica il DETERMINANTE della matrice dei coefficienti A:

$$D=|A|=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{dove} \quad a_{mn}=a_{nm}$$

Una conica può essere degenere (quando è individuata da una coppia di rette) o non degenere (quando è individuata da un'iperbole, da una parabola o da un'ellissi).

CONICHE					
DEGENERI ($\lvert A \rvert=0$)			NON DEGENERI ($\lvert A \rvert\neq 0$)		
Rette distinte (Rango(A)=2)		Rette coincidenti (Rango(A)=1)	Punti impropri reali $a_{11}a_{22}-a_{12}^2\le 0$		Punti impropri non reali $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$
			Punti impropri reali e distinti $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$	Punti impropri reali e coincidenti $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$	
Rette incidenti	**Rette parallele**		**Iperbole**	**Parabola**	**Ellissi**
					

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 162

Schema della riduzione in forma canonica di una conica

Consideriamo la conica di equazione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Primo passo: ROTAZIONE

Per il teorema spettrale possiamo diagonalizzare la matrice A_{33} trovando gli autovalori λ_1 e λ_2 e una base ortonormale di autovettori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Sia $B = (v_1 v_2)$ la matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.

Supponiamo che $\det(B) = 1$. Allora la matrice B rappresenta una rotazione degli assi di un angolo ϑ, cioè

$$\begin{cases} x = (\cos\vartheta)x' - (\mathrm{sen}\vartheta)y' \\ y = (\mathrm{sen}\vartheta)x' + (\cos\vartheta)y' \end{cases}$$

Applicando la rotazione, si ottiene un'equazione della forma:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2ax' + 2by' + a_{33} = 0.$$

Secondo passo: TRASLAZIONE

Primo caso: entrambi gli autovalori sono diversi da 0. In questo caso se la conica è non degenere si dice *a centro*.

Applichiamo la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{b}{\lambda_2} \end{cases}$$

e otteniamo

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + c = 0.$$

A seconda del valore dei coefficienti si trovano le forme canoniche (1), (2), (3), (5) o (6).

Secondo caso: uno degli autovalori è 0 (supponiamo che sia $\lambda_2 = 0$). Operiamo la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione:

$$\lambda_1(x'')^2 + 2by'' + c = 0.$$

Se $b = 0$ si ottiene una delle forme (7), (8), (9) a seconda del segno di c.

Se $b \neq 0$ operiamo un'altra traslazione:

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y'' - \frac{c}{2b} \end{cases}$$

e otteniamo

$$\lambda_1(x''')^2 + 2by''' = 0,$$

e quindi la forma canonica della parabola (4).

RETTA TG a una curva γ in $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\gamma(P_0) = (x(x_0), y(y_0), z(z_0))$

$\gamma'(P_0) = (x'(x(t)), y'(y(t)), z'(z(t)))$ con $t = P_0$

$$r \begin{cases} x = x_0 + x'(x(t))\, s \\ y = y_0 + y'(y(t))\, s \\ z = z_0 + z'(y(t))\, s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

MATRICI INVERSE

P invertibile $\Leftrightarrow$ $\det P \neq 0$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{\det P} \left((-1)^{i+j} \det {}^tP_{ij} \right)}$$

dove ${}^tP_{ij}$ è la sottomatrice di ${}^tP$ ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima di ${}^tP$

Una matrice A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

1. $m_1 + \dots + m_s = n$
2. verificare che $\forall i$ $\dim V_{\lambda_i} = m_i$

caso particolare: se ci sono "n" autovalori distinti
$\Downarrow$
la matrice è semplice
$\Downarrow$
" " " diagonalizzabile

ORTOGONALITÀ e PARALLELISMO fra rette

$r: P = tV + P_0$ $\quad V = (V_1, V_2, V_3)$

$s: P = tV' + P'_0$ $\quad V'(V_1', V_2', V_3')$

$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow V \cdot V' = 0}$

$\boxed{r \parallel s \Leftrightarrow V \wedge V' = 0}$ $\rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ V_1' & V_2' & V_3' \end{vmatrix}$

ORTOGONALITÀ e PARALLELISMO fra r e π

$\boxed{\begin{array}{l} \pi: (P - P_0) \cdot V = 0 \\ r \perp \pi \Leftrightarrow V \cdot W = 0 \end{array}}$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} r: P = tW + P_1 \\ \pi \parallel r \Leftrightarrow V \wedge W = 0 \end{array}}$

TEOREMA DEL RANGO

Sia $A \in K^{m,n}$. Allora $\boxed{\dim(R_A) = \dim(C_A)}$

DIM.

Poniamo: $A = (a_{ij})$
$R = R_A$
$C = C_A$
$r = \dim(R)$

poiché $r = \dim(R)$, esistono r vettori di K^n diciamo

$$V_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n})$$
$$V_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n})$$
$$\dots$$
$$V_r = (c_{r1}, \dots c_{rn})$$

che generano lo spazio delle righe.
Pertanto ogni riga R_i si esprime come c. l. di $V_1, \dots, V_r$;

$$R_1 = p_{11} v_1 + \dots + p_{1r} v_r$$
$$R_2 = p_{21} v_1 + \dots + p_{2r} v_r$$
$$\vdots$$
$$R_m = p_{m1} v_1 + \dots + p_{mr} v_r$$

le $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ si traducono in componenti (Rispetto alla BASE CANONICA di K^n); per la 1ª componente della riga R_i si ottiene;

$$a_{i1} = p_{i1} c_{11} + p_{i2} c_{21} + \dots + p_{ir} c_{r1}.$$

cioè il vettore 1ª colonna di A si scrive:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = c_{11} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix} + \dots + c_{r1} \begin{pmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{pmatrix}.$$

FORMULARIO MISTO

- Due PARABOLE in un PIANO si tagliano al più 4 punti
- Curva REGOLARE $\Leftrightarrow$

  $P = P(t)$ è iniettiva
  $P(t)$ è C^∞ (ha tutte le derivate)
  $P'(t) \neq 0 \quad (\forall t)$

- Per tre punti non allineati passa una ed una sola CIRCONFERENZA
- TRE PUNTI sono ALLINEATI $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

- Un sistema ha INFINITE SOLUZIONI se $\rho(A) = \rho(A|B)$ ed è inferiore a 3 (numero incognite)
- Una matrice è INVERTIBILE se il suo det non è nullo.
- Due vettori sono ORTOGONALI se il loro prodotto scalare è 0.
- Un sistema è RISOLUBILE $\Leftrightarrow$ il $\rho(A) = \rho(A|B)$
Ha una 1 SOLA SOLUZIONE $\Leftrightarrow$ $\rho(A) = \rho(A|B)$ ed al numero delle incognite ρ massimo