NUMERO: 1512A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Scalia

MATERIA: Analisi Matematica II + Formul. + Eserc. Prof.Quelali

ANALISI II

A.A. 2014/15

TEORIA + esercizi

Prof Quelali Guillermo

Ing. Gestionale

Definizione 29-09

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di numeri reali.

Chiameremo serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

Per ogni intero $k \geq 1$ chiameremo successione delle ridotte

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$

e chiamiamo somma parziale k-esima della serie la quantità

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$$

Diciamo che la serie (1) è convergente se esiste ed è finito il limite delle somme parziali;

$$S = \lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j \quad (2)$$

In tal caso (e solo in tal caso!!!) diciamo che S è la somma della serie (1)

Se il limite (2) esiste ma è $= a +\infty$ o $-\infty$ diciamo che la serie è divergente

Infine se il limite in (2) non esiste diciamo che la serie è indeterminata

esempio

Serie telescopiche

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice telescopica se il termine generico

$$a_n = b_n - b_{n+1} \qquad \{b_n\}_{n \geq 0}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \ldots + (\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n}) + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) =$$

$$= b_1 - b_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} b_1 - b_{n+1}$$

Se $\lim_{n \to +\infty} b_{n+1} = B \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_1 - B$$

esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$S_0 = 1$

$S_1 = 1-1 = 0$ — è indeterminata

$S_2 = 1$ — non esiste il limite della successione.

$S_n = (-1)^n$

esempio

Serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$S_0 = x^0 = 1$

$S_1 = x^0 + x^1 = 1+x$

$S_2 = 1 + x^1 + x^2$

$S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$

$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

$$(1-x)\, S_n = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = (1+x+x^2+\dots+x^n) - x(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) =$$

$$= 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \dots + \cancel{x^n} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \dots - x^{n+1}$$

$$(1-x)\, S_n = 1 - x^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & |x|<1 \\ \infty & x>1 \\ \nexists & x<-1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (a)^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ +\infty & a>1 \\ \nexists & a<-1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3-1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^0 - \left(\frac{4}{5}\right)^1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sin(t) \sim t$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

non converge

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 1 \neq 0 \quad \text{non converge}$$

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$3 < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}\right) > S_8 + \frac{1}{2}$$

REGOLA

$$S_{2^k} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to+\infty} 1 + k\frac{1}{2} = +\infty$$

Per il teorema del confronto

$$S_{2^k} \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \underline{\text{Diverge}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Comportamento definitivo

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente/divergente/indeterminata anche se tolgo un numero finito di elementi, ma, la somma di una serie convergente sarà diversa.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^0 - \left(\frac{1}{4}\right)^1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

es ②

$$\sum_{n=2014}^{\infty} \frac{1}{n} = \to +\infty \quad \text{diverge}$$

Criteri !!

Criterio del confronto

Consideriamo 2 serie;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$a_n \geq 0 \qquad 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 0$$
$$b_k \geq 0$$

① se la serie; $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

② se la serie; $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge allora diverge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

dimostrazione; $0 \leq a_0 \leq b_0 \Rightarrow 0 \leq a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1$

$$\Rightarrow 0 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq b_0 + b_1 + b_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow 0 \leq a_0 + a_1 + \dots + a_k \leq b_0 + b_1 + \dots + b_k$$

$$0 \leq A_k \leq B_k$$

$$\lim_{k\to+\infty} A_k \leq \lim_{k\to+\infty} B_k \quad (*)$$

① se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty \qquad \lim_{k\to+\infty} B_k = B \in \mathbb{R}$

Allora $(*)$ $\quad \lim_{k\to+\infty} A_k \leq B$ (è limitato) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$

Criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi

Date le due serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

con $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$

$(a_n \sim L\, b_n \quad n \to +\infty)$

$\Rightarrow$ le due serie hanno lo stesso comportamento

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Verifico i termini positivi

$1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$ è sempre positivo.

$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq 1$

N.B. || controlla sempre se sono positivi

$\cos(t) \sim 1 - \frac{1}{2} t^2 \quad t \to 0$

$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^4} \quad n \to +\infty$

$a_n \sim n^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^4}\right) = \sim n^2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$

Domanda la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow$ converge

Per il confronto la serie converge.

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^n}{e^n (n+1)!}}$$

usiamo la formula di stearling

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $n \to +\infty$

$b_n = \frac{n^n}{e^n (n+1)!} = \frac{n^n}{e^n \cdot n! \cdot (n+1)}$

$b_n \sim \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{e^n}\, \cancel{n^n}\, \cancel{e^{-n}} \sqrt{2\pi n}\,(n+1)}$, $n \to +\infty$

$b_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\; n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n\cancel{(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1$$

la serie è convergente.

Criterio della radice

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \quad \forall n$

si supponga che esista, finito o infinito il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

se $\ell > 1 \Rightarrow$ diverge
se $\ell < 1 \Rightarrow$ converge
se $\ell = 1 \Rightarrow$ rivolgersi ad un altro criterio

Studiare al variare di x la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n \qquad x \geq 0$$

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 0 < +\infty$

$x>0 \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,x^n}$ " osservo che $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n}$ "

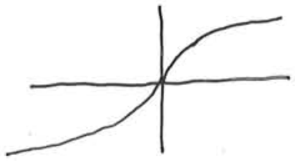
riscrivo $e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$

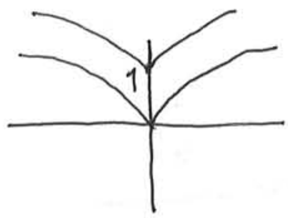
$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^{\frac{1}{n}}}_{1} x = x = \ell < 1 \qquad \boxed{0 \leq x < 1}$$

esercizio 3.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}|x| + 1 \right)^n$$

<u>Diverge</u>





$\operatorname{arctg}|x|$

esercizio 5.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(n+3) - \log(n+1)$$

$$a_n = \log\left(\frac{n+3}{n+1}\right) = \log\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)$$

$$a_n \geq 0 \iff 1 + \frac{2}{n+1} \geq 1 \iff \frac{2}{n+1} \geq 0 \iff n \geq -1$$

$$a_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$\log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \sim \frac{3}{n+1} \qquad n \to +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} \to +\infty$$

esercizio 5.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{1+2^{-n}} - 1 \right) \Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{2^n}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{n+\frac{1}{2^n}} \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^n} \geq 1 \qquad \frac{1}{2^n} \geq 0$$

$$\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{1}{2}t \qquad t \to 0$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^n}} - \sim \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\right) - 1 \qquad n \to +\infty$$

$$\sim \frac{1}{2^{n+1}} \qquad n \to +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < +\infty$$

esercizio 6.5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$$

ERRORE Da non fare o Dire

$\Downarrow$

$\log n \sim n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}} = 0 \quad \text{quando } \alpha > 0$$

"Quando ho il $\log n$ non posso applicare il confronto asintotico."

$$\log n < n^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}} < \frac{n^{\alpha}}{n\sqrt{n+1}} \qquad n>0$$

$$\sim \frac{n^{\alpha}}{n\cdot n^{\frac{1}{2}}} \qquad n\to+\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}-\alpha}}$$

$$\alpha < \frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}-\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{2}-\alpha > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n\sqrt{n+1}} < +\infty$$

esercizio

Criterio dell'integrale

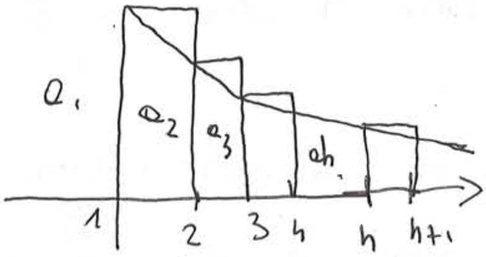
06-10

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \qquad a_j = f(j)$

f continua
decrescente
positiva

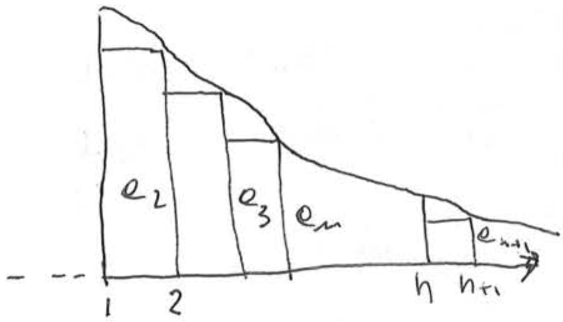
$f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \overset{b}{1} \cdot \overset{h}{f(j)}$$



$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} f(j)$$

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le S_n$$



$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$S_{n+1} \le a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$S_{n+1} \le a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + S_n$$

S_1

$-p+1>0 \Rightarrow p<1$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=+\infty$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}\text{conv.} & p>1\\ \text{div.} & p\leq 1\end{cases}$$

lo stesso funziona per la serie armonica $\int_0^{+\infty} x^p\,dx$

esercizio 9.1

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ "quando abbiamo il $\log n$ non possiamo usare il criterio asintotico"

$$\int_2^{+\infty}\frac{\log x}{x}\,dx \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{\log x}{x}\,dx$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\log^2 x}{2}\right)$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log^2 t}{2}-\frac{\log^2(2)}{2}=+\infty$$

esercizio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\operatorname{arctg}(n)}}{n^2+1}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{x^2+1}\,dx$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)_1^t \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{\operatorname{arctg} t}-e^{\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{4}}>0$$

Converge!

Convergenza assoluta $\xRightarrow{\text{implica}}$ convergenza
$\not\Leftarrow$ non implica il contrario

Def Si definisce serie a termini di segno alterno la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $\quad a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{ricordiamo che } (-1)^k = \cos(k\pi)}$

oppure $(-1)^{n^2+2n}$ qui pongo $n = 2m$ (caso pari)

$$n^2+2n = (2m)^2 + 2(2m)$$
$$= 4m^2 + 4m$$

$n = 2m+1$ (caso dispari)

$$n^2+2n = (2m+1)^2 + 2(2m+1)$$
$$= 4m^2 + 4m + 4m + 2 + 1$$

Criterio di Leibniz

Data una serie a termini di segno alterno, se valgono le due condizioni

1. $\lim_{n \to +\infty} a_k = 0$
2. la successione $\{a_k\}_{k \geq 0}$ è monotona decrescente. $\Rightarrow$ la serie è convergente (semplicemente)

esempio!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < +\infty \quad \text{(converge)} \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

(1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Dimostrazione crit radice

9-10

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Se $L < 1 \Rightarrow$ la serie converge
Se $L > 1 \Rightarrow$ la serie diverge
Se $L = 1 \Rightarrow$ usiamo un'atro criterio

$a_n \geq 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow L \geq 0$

$0 < L < 1$

Supponiamo $L < x < 1$

$\sqrt[n]{a_n} \leq x \quad \forall n \Rightarrow$ elevo $^n \Rightarrow a_n \leq x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad 0 < x < 1$

Per il criterio del confronto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ "converge"

$\boxed{L > 1}$ $\quad L \geq x > 1$

$\sqrt[n]{a_n} \geq x \quad \forall n$

$a_n \geq x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad x > 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to +\infty$

Premessa

$\{a_n\}_n \geq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ < conv / div / ind

Def

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ $\{a_k\}_{k \geq 0}$ una successione numerica. Chiamiamo serie di potenze una serie della forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

dove x_0 è il centro della serie e gli a_k sono i coefficienti della serie.

se $x = x_0$ l'insieme di convergenza sarà dato da:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = x_0\} = \{x_0\}$$

esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{(ha come coeff)}$$

studio la convergenza assoluta ma essendo $n! > 0$ non ho bisogno di valore assoluto

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

nb: se c'è la conv assoluta c'è anche quella normale

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{|x|^n} \cdot |x|}{n!\,(n+1)} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \qquad \forall x$$

converge, l'insieme di convergenza è $\mathbb{R}$

TEOREMA

l'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un intervallo (che può essere aperto, chiuso, semiaperto e semichiuso).

tale intervallo è sempre non vuoto e centrato nell'origine

(a) ... $\{0\}$ $(\{x_0\})$

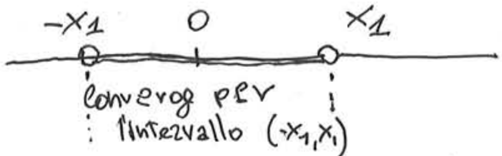
(b) ... $(-R, R)$ $\quad (-R, R]$ $\quad R>0$

$[-R, R]$ $\quad [-R, R)$

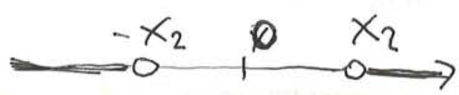
(c) l'insieme di convergenza coincide con $\mathbb{R}$

Teorema

(a) Se una serie di potenze converge in un certo punto $x_1 \neq 0$, essa converge assolutamente (e quindi converge) per tutti gli x tali che $|x| < |x_1|$



(b) Se una serie di potenze non converge in un certo punto $x_2 \neq 0$, allora essa non converge in tutti i punti x tali che $|x| > x_2$



i punti esterni non convergono.

dimostrazioni

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n < +\infty$ convergente

$\lim_{n \to +\infty} |a_n x_1^n| = 0$ una successione che tende a 0 è limitata!!

$\exists M > 0 \quad |a_n x_1^n| \leq M \quad \forall n$

10-16

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$$

$$\int_1^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} -2x\, e^{-x^2}\, dx$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \int_1^t -2x\, e^{-x^2}\, dx$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-x^2} \right)_1^t$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-t} - e^{-1} \right) = \frac{1}{2} e^{-1} < 1 \quad \text{converge}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot (\log(\log n))^2}$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot (\log(\log n))^2}\, dx$$

è una fun $\begin{cases} \text{decrescente} \\ \text{positiva} \\ \text{continua.} \end{cases}$

Consideriamo $g(x) = \log(\log(x))$ $\quad g'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$ è uguale al 1°

$$\int \frac{g'(x)}{(g(x))^2}\, dx = \frac{1}{g(x)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_3^t \frac{1}{x \log x\, (\log(\log x))^2}\, dx$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{\log(\log x)} \right)_3^t = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{\log[(\log t)]} + \frac{1}{\log(\log 3)} \right)$$

è convergente per il criterio del confronto

" nb: il log non vuole l'asintotico "

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)-3\sin(n^2)}{n^2}$$

devo studiare la conv assoluta.

osservo
$$-1 \le \sin(n^2) \le 1$$
$$-3 \le -3\sin(n^2) \le 3 \quad \text{(se moltiplico per 3)}$$
$$-1 \le \cos(n) \le 1$$
$$-4 \le \cos(n)-3\sin(n^2) \le 4$$
$$|\cos(n)-3\sin(n^2)| \le 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)-3\sin(n^2)|}{n^2}$$

$$\frac{|\cos(n)-3\sin(n^2)|}{n^2} \le \frac{4}{n^2}$$

Converge assolutamente
$\Rightarrow$ converge semplicemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}\cos(\sqrt{n})$$

$\boxed{\text{nb. la } \sqrt{n} \text{ è sempre positiva}}$

devo studiare la conv. assoluta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}|\cos\sqrt{n}|$$

$$\frac{n^3}{7^n}|\cos\sqrt{n}| \le \frac{n^3}{7^n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}$ per studiare questa serie applichiamo il rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{3n+3+\cancel{n^3}}{(n+1)^3}\,\cancel{7^n}}{\cancel{7^n}\,7\,\cancel{n^3}} = \frac{1}{7} < 1 \quad \text{converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$$

osservo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0$$

questa serie non converge quindi o diverge o è indet. (oscilla)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1-1}{n^2+1} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right) \Rightarrow +\infty \quad \text{diverge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2011}}{2011+n^{2011}}$$ diverge perchè $\Rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

il raggio vale $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$ l'insieme di convergenza va da $(-2, 2)$

se $x = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

se $x = -2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = (-1)^{2n} \Rightarrow \text{diverge}$$

Criterio della radice per la serie di potenze

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n x^n$$

Supponiamo che esista finito o infinito il limite

$$A := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Allora il raggio di convergenza della serie di potenze e' dato da

$$R := \frac{1}{A}$$

$$R = \begin{cases} 0 & A \to +\infty \\ \frac{1}{A} & A \text{ finito} \\ +\infty & A \to 0 \end{cases}$$

$f(x) = \sin x \to 0$

$f'(x) = \cos x \quad \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

"Sviluppi da sapere"

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\log(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \qquad \forall x \in (-1, 1]$$

esercizio 1.3 17-10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ usiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$ ora aggiungo 1 e tolgo 1

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$

$\underbrace{R}_{\text{Raggio}} = \frac{1}{e^{-1}} = e$ l'insieme di convergenza andrà $(-e, e)$

ora dobbiamo studiare i bordi $\Rightarrow x = -e$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (-e)^n$ bisogna capire se converge o diverge.

ricordo la formula di Stirling $\Rightarrow n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

riscrivo $\frac{n!}{n^n} (-1)^n e^n \sim \frac{\cancel{n^n} \cancel{e^{-n}} \sqrt{2\pi n}}{\cancel{n^n}} (-1)^n \cancel{e^n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{2\pi n}$ converge e quindi l'insieme di convergenza è quello di partenza.

esercizio 1.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$$

ricordiamo che $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \log \frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot 2 = 2$$

$$R = \frac{1}{2} \qquad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge in } \frac{1}{2}$$

$x = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \Rightarrow \text{converge per Leibniz}$$

$\Rightarrow$ l'insieme di convergenza sarà $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Domanda se ho $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, come mi comporto?

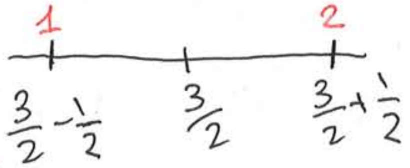
metto $- \underline{\sum (-1)^n \frac{1}{n}}$

secondo metodo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(2x-3)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left(2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(n+1)\,2^n}_{a_n} \underbrace{\left(x-\frac{3}{2}\right)}_{x-x_0}^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,2^n} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$



$(1, 2)$

esercizio 1.28

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(2x+3)^n$$

Pongo $2x+3=t$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(t)^n \qquad = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2$$

$t \in (-2, 2)$

se $t=2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cancel{2^n}}\cancel{2^n}$ é la serie armonica che diverge

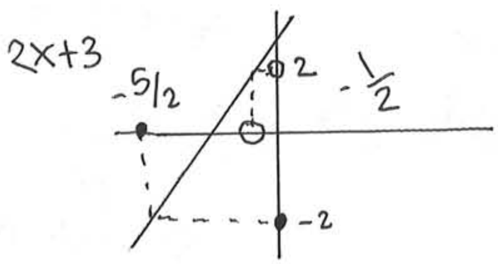
se $t=-2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{(-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per Leibniz

$t \in [-2, 2)$

devo studiare la controimmagine



quanto é il centro? basta mettere

$2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

devo risolvere

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{x-1} = e^{-\frac{1}{3}}$$

$$x-1 = e^{-\frac{2}{3}}$$

$$x_0 = 1+e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left(1+e^{-\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

esercizio 2.3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 e^{nx}$$

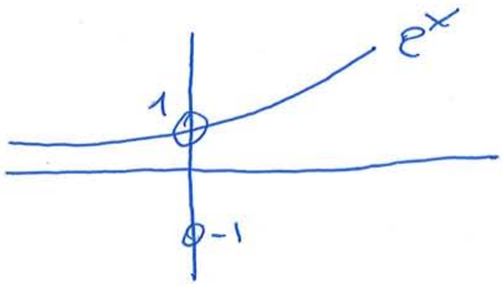
lo riscrivo $\sum_{n=1}^{\infty} n^s (e^x)^n$

con $e^x = t$

studio

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s t^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^s} = 1 \qquad t \in (-1, 1)$$



non ha senso calcolare attraverso l'esp studio quindi $t \in (0, 1)$

non converge

$$f^{-1}((0,1)) = (-\infty, 0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 240

un eq. diff. ordinaria (EDO) di ordine m si scrive

$$f(x, y', y'', y''', \dots y^{(m)})$$

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

$$y^{(m)} + a_{n-1}\, y^{(m-1)} + a_{m-2}\, y^{(m-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 = \begin{cases} = 0 \\ = b(x) \end{cases}$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

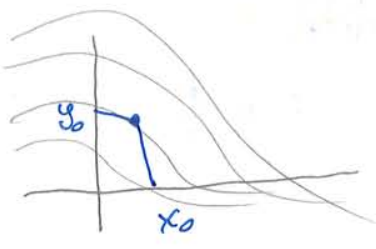
$f : \mathring{E} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad R = \underbrace{[x_0 - a, x_0 + a]}_{I} * [y_0 - b, y_0 + b]$

insieme aperto

$\mathring{E}$ = é l'insieme E senza la frontiera

$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$

- soluzione dell'eq differenziale
- $x_0 \in I$
- $y(x_0) = y_0$



come si può vedere localmente questa funzione, in un intorno di 0

$$y = -\sqrt{9\left(1+\frac{2}{9}x^4\right)} = -3\sqrt{1+\frac{2}{9}x^4} \sim -3\left(1+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{9}x^4\right) \quad x \to 0$$

$$y \sim -3 - \frac{1}{3}x^4$$

equazione lineare del primo ordine

$$y'(x) = p(x)\,y(x) + q(x) \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)}$$

dal canuto tabacco

$$p, q : I \to \mathbb{R}$$

$$y(x) = e^{\int p(x)\,dx}\left(\int e^{-\int p(x)\,dx}\,q(x)\,dx + c\right)$$

esempio

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2y}{x} + 6x^3 \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1 \text{ quindi non metto il valore assoluto}$$

$$\int p(x)\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\log x$$

Vado a calcolare la soluzione.

$$y(x) = e^{-2\log x}\left(\int e^{2\log x}\,6x^3\,dx + c\right)$$

$$= e^{\log(x^{-2})}\left(\int e^{\log x^2}\,6x^3\,dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int x^2\,6x^3\,dx + c\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(x^6 + c\right)$$

$$y(1) = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = \frac{1}{(1)^2}\left(1^6 + c\right) = \frac{1}{2} \qquad 1 + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^6 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$ è la solu. del problema di Cauchy.

$$f(x,y) = \frac{-2y}{x} + 6x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{x} \qquad \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

esempio

$$y(x) = 2y(x)\ tg(x) + \sqrt{y(x)}$$

$$y(x) \neq 0$$

$$\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \cancel{2}\sqrt{y(x)}\ tg(x) + \frac{1}{2}$$

$$u(x) = \sqrt{y(x)} \qquad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} \cdot y'(x)$$

$$u'(x) = u(x)\ tg(x) + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y'(x) = p(x)\ y(x) + q(x)}$$

$$p(x) = tg\, x$$

$$\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\lg|\cos x|$$

$$u(x) = e^{-\log|\cos x|}\left(\int e^{\log(\cos x)} \cdot \frac{1}{2} dx + c\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{|\cos x|}\left(\int |\cos x| \cdot \frac{1}{2} dx + c\right)$$

$$u(0) = 1$$

$$u(x) = \frac{1}{\cos x}\left(\int \frac{\cos x}{2} dx + c\right) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{2} + c\right)$$

$$u(0) = \frac{1}{\cos(0)}\left(\frac{\sin(0)}{2} + c\right) = 1(0 + c) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\frac{t^2}{2} = \log\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

$$t^2 = 2\log\left(\frac{x}{2}\right) + 4$$

$$t = \sqrt{2\log\left(\frac{x}{2}\right) + 4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 240

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x) = y_0 \\ y'(x) = y_1 \\ y''(x) = y_2 \\ y^{(n-1)}(x) = y_{n-1} \end{cases}$$

$x_0 \in J$

$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in$ (1)

$f : J \times D \Rightarrow \mathbb{R}$

$\downarrow$

x_0

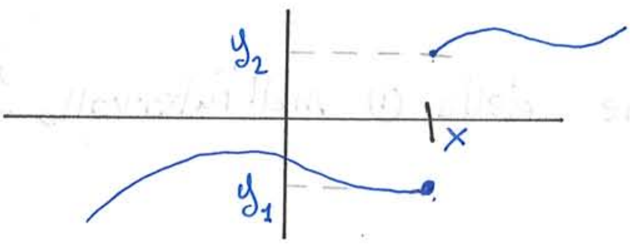
$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — Definizione

è una funzione Lipschitziana

su $E = J \times D$ rispetto a y ed uniforme rispetto a x

se $\exists L > 0 \quad (L \in \mathbb{R})$

se $\forall (x, y_1) \quad (x, y_2)$ Vale $\quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \, |y_1 - y_2|$



$f : E \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

f è Lipschitziana su E rispetto a y ed uniforme rispetto a x

se $\exists L > 0$: $\forall (x, \bar{y}_1) \quad \forall (x, \bar{y}_2)$

sono vettori

$y_1, y_2 \in D$

$x \in J$

$|f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2)| \leq L \, |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$

se la f è continua $\Rightarrow$ f è Lipschitziana

$\not\Leftarrow$

non vale il contrario

Wronskiano (Pag 208)

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

si dimostra che se esiste $x_0 \in J \ / \ w(y_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ le n funzioni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sono l.i. in J.

• Determinare gli n integrali l.i. della eq omogenea ②

$y = e^{\alpha x}$ $\rightarrow$ le sdo. sono in questo modo $\Leftrightarrow$ α è soluzione dell'eq caratteristica associata alla ②

basta sostituire λ al posto delle derivate

$\lambda \Rightarrow y'$
$\lambda' \Rightarrow y''$
$\lambda^{\dots} \Rightarrow y^{n-1}$

$f^{(n)}(x) + a_1 y(x) + \dots + a_n y(x) = 0$

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

$y = y^0 \Rightarrow \lambda^0 = 1$

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

$y = e^{\alpha x}$

$y' = \alpha e^{\alpha x}$

$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$y''' = \alpha^3 e^{\alpha x}$

$y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$

a questo punto posso sostituirle all'eq omo

$\alpha^n e^{\alpha x} + \alpha^{n-1} e^{\alpha x} a_1 + \dots + \alpha^2 e^{\alpha x} a_{n-2} + a_{n-1} \alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x} = 0$

$e^{\alpha x}\left(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + \alpha^2 a_{n-2} + \alpha a_{n-1} + a_n\right) = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \lambda$

$\boxed{e^{\alpha x}}$

è soluzione dell'omogenea

c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ } sono i coniugati

molteplicità k

$\cancel{x^m e^{(\alpha+i\beta)x}}$ $\qquad$ $\cancel{x^m e^{(\alpha-i\beta)x}}$

$m = 1, 2, \dots, k-1$

ma le soluzioni le scriveremo Tramite formula di eulero

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ y(x) &= x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}}$$

esempio

$y^{(n)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$

$\Rightarrow \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ $\qquad$ Posso usare ruffini

$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$

1	1	-2	2	-2	1
		1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	0

1		1	0	1
	1	0	1	0

$P(\lambda) = (\lambda-1)^2 (\lambda^2+1)$ $\qquad$ $\lambda = 1 \quad k = 2$

$\lambda = 0 + i \qquad \lambda = 0 - i$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{0x} \cos(1 \cdot x) + c_4 e^{0x} \sin(1 \cdot x)$

Quanto vale l'immagine?

$$f(x_0) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \log\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > -e^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} e^{2n}$$

Usando il confronto asintotico scopriamo che $b_n \to +\infty$, $n \to +\infty$

$x^2 \log|x| = f(x)$

~~$(-e^2, e^2)$~~ non posso usare questa

ma $\left(-\frac{1}{2}, e^2\right)$

Per trovare x_1 e x_2 devo risolvere

$x^2 \log|x| = e^2$

$x_1 = -e$, $x_2 = e$

$x \in (-e, e)$ è l'insieme di convergenza.

Ricordiamo come si fa il prodotto alla Cauchy

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}$$

$k=0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{4}{3}\right)^{n-k}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{\cancel{\infty}} \underline{\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-k}}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \right]^k = \boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$q = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{1-9/16} = C_n$$

con raggio di convergenza

$$R = \frac{3}{4}$$

esercizio 13

$x_0 = 1$

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}}{4-x}\right) = \frac{1}{2}\log x - \log(4-x)$$

$x \to 1$

$x-1 \to 0 \Rightarrow t = x-1 \Rightarrow t \to 0$

$x = t+1$

cambio tutto

$$\frac{1}{2}\log(t+1) - \log(4-t-1) \qquad t \to 0$$

$$\frac{1}{2}\log(t+1) - \log(3-t)$$

serie di potenze del log

$$\boxed{\log(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k}$$

$|x|<1$

$$\log\left(3\left(1-\frac{t}{3}\right)\right) = \log 3 + \log\left(1-\frac{t}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\log(t+1) - \log 3 - \log\left(1-\frac{t}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k - \log 3 -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(-\frac{t}{3}\right)^k$$

riscrivo la seconda parte

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^k t^k \qquad \frac{1}{3}(-1)^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{(-1)^k}{3^k} t^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} \frac{1}{3^k} t^k$$

ricordo che $(-1)^{2k+1} = -1$

Riscrivo l'espressione intera

$$f(t+1) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k - \log 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k} t^k$$

$$-\log 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k} + \frac{1}{k3^k}\right) t^k \quad t \to (x-1)$$

esercizio

$y^{(3)} - k y'' + k^2 y' - k^3 y = 0$ $\qquad k \neq 0$

$\lambda^3 - k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 = 0$

$\lambda(\lambda - k) + k^2(\lambda - k) = 0$

$(\lambda^2 + k^2)(\lambda - k) = 0$

quali sono le soluzioni?

$\lambda = k \quad , \quad \lambda = \pm i k$

$\lambda = 0 \pm ik$

$\alpha \pm i\beta$

$y_0(x) = C_1 e^{kx} + C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx)$

esercizio 1

$y''' + 9y' = 0$

$\lambda^3 + 9\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 9) = 0$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = 3i$

$\qquad\qquad \lambda = -3i$

$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{0x} \cos(3x) + C_3 e^{0x} \sin(3x) =$

$= C_1 + C_2 \cos(3x) + C_3 \sin(3x)$ $\Rightarrow$ soluzioni

esercizio 2

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$

$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = 0, \quad \lambda = 2, \quad \lambda = 1$

$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$ $\Rightarrow$ soluzioni

esercizio 3

Data la soluzione ricavare l'eq di partenza

$y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{2x} \cos(2x) + C_4 e^{2x} \sin(2x)$

$\lambda = 3 \qquad m = 2$

$\lambda = 2 + i2$

$\lambda = 2 - 2i$ $\longrightarrow$ $(\lambda - 2) = 2i$

$(\lambda - 2)^2 = (2i)^2$

$(\lambda - 2)^2 = -4$

$(\lambda - 2)^2 + 4 = 0$

$P(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \cdot [(\lambda - 2)^2 + 4] =$

$= (\lambda - 3)^2 (\lambda - 2)^2 + 4(\lambda - 3)^2.$

esercizio

$y''' + 9y' = 2e^{3x}$

$\lambda''' + 9\lambda' = 2e^{3x}$

$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$b(x) = P_0\, e^{3x}$

$P(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda \Rightarrow$ il 3 non soddisfa il polinomio caratteristico $(3)^3 + 9(3) = 54 \neq 0$

devo usare la soluz. del caso 1 2

$y_p = Ae^{3x}$

$y'_p(x) = 3Ae^{3x}$

$y''_p(x) = 9Ae^{3x}$

$y'''_p(x) = 27Ae^{3x}$

quindi

$y'''_p + 9y'_p = 2e^{3x}$

sostituisco

$27Ae^{3x} + 27Ae^{3x} = 2e^{3x}$

$54A\cancel{e^{3x}} = 2\cancel{e^{3x}}$

$A = \frac{1}{27}$

$y_p = \frac{1}{27}e^{3x}$

$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

esercizio 1 30-10

$$\begin{cases} y^{(6)}+y^{4}=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=1 \\ y'''(0)=-1 \\ y^{(4)}(0)=1 \\ y^{(5)}(0)=-1 \end{cases}$$

risolviamo

$\lambda^6+\lambda^4=0$

$\lambda^4(\lambda^2+1)=0$

$\lambda_1=0 \quad m=4$ $\qquad \alpha+i\beta$

$\lambda_2=-i \quad \lambda_3=+i$

$\lambda_3=0-i \quad \lambda_3=0+i$

$$y(x)=C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}+C_3x^2e^{0x}+C_4x^3e^{0x}+C_5e^{0x}\cos(1x)+ +C_6e^{0x}\sin(1\cdot x)$$

$y'(x)=C_2+2C_3x+3C_4x^2-C_5\sin(x)+C_6\cos(x)$

$y''(x)=2C_3+6C_4x-C_5\cos(x)-C_6\sin(x)$

$y'''(x)=6C_4+C_5\sin x-C_6\cos x$

$y^4(x)=C_5\cos x+C_6\sin x$

$y^5(x)=-C_5\sin x+C_6\cos x$

impongo

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_5=1 \\ y'(0)=C_2+C_6=-1 \\ y''(0)=2C_3-C_5=1 \\ y'''(0)=6C_4-C_6=-1 \\ y^4(0)=C_5=1 \\ y^5(0)=C_6=-1 \end{cases}$$

se il sistema ~~in~~ $y(0)$ ammette soluzione è unico se non ammette soluzione non esiste il problema di Cauchy.

$C_5=1$

$C_6=-1$

$$\begin{cases} \Rightarrow 6C_4-6_6=1 \Rightarrow 6C_4=C_6-1 \Rightarrow C_4=\frac{-1-1}{6}=-\frac{1}{3} \\ \Rightarrow 2C_3=C_5+1 \Rightarrow C_3=\frac{C_5+1}{2}=\frac{1+1}{2}=1 \\ \Rightarrow C_2=-C_6-1=0 \\ \Rightarrow C_1=-C_5+1=0 \end{cases}$$

$C_1=C_2=0$

$C_3=1$

$C_4=-\frac{1}{3}$

$C_5=1$

$C_6=-1$

$y(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3+\cos x-\sin x$ è la soluzione del Problema di Cauchy

esercizio 4

$$\begin{cases} y''' - 16y' = 0 \\ y(1) = 1 + \cosh(4) \\ y'(1) = 4 \sinh(4) \\ y''(1) = 16 \cosh(4) \end{cases}$$

$\lambda^3 - 16\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 16)$

$\lambda = 0 \quad \lambda = \pm 4 \Rightarrow \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = -4$

$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{4x}$ $\Rightarrow y(1) = C_1 + C_2 e^{-4} + C_3 e^{-4}$

$y_0'(x) = -4C_2 e^{-4x} + 4C_3 e^{4x}$ $\Rightarrow y_0'(1) = -4C_2 e^{-4} + 4C_3 e^{4}$

$y_0''(x) = 16C_2 e^{-4x} + 16C_3 e^{4x}$ $\Rightarrow y_0''(1) = 16C_2 e^{-4} + 16C_3 e^{4}$

$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{2}$

tramite la trasformazione del sinh / cosh

$y_0(1) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{4x} = 1 + \cosh(4x$

sistemi differenziali lineari omogenei a coeff costanti. 03-11

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dove

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x(t), y(t)) \qquad \forall t$$

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Teorema

L'insieme delle soluzioni $X(t)$ del sistema $X' = AX$ è uno spazio vettoriale

matrice $(n \times n)$

Teorema

Lo spazio vettoriale delle sol. di un sistema lineare omogeneo $X' = AX$, A $n \times n$, ha dimensione n.

Per risolvere un sistema diff. omogeneo $X' = AX$, (A $n \times n$) basta trovare n soluzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$ l.i.

Tali soluzioni formano una <u>base</u> dello spazio delle soluzioni.

Se le soluzioni formano una base otterremo un

$\Rightarrow$ <u>Sistema fondamentale di soluzioni</u>

La soluzione generale del sistema $X' = AX$ è data da tutte le possibili combinazioni lineari

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t)$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Teorema (Vale con Autovalori reali distinti)
Sia A una matrice reale 2x2 con due autovalori reali e distinti
λ_1, λ_2 (con i relativi autovettori V_1 e V_2)
Allora le soluzioni

$$\left.\begin{array}{l} Y_1(t)=e^{\lambda_1 t}V_1 \\ Y_2(t)=e^{\lambda_2 t}V_1 \end{array}\right\rangle \text{ sono l.i.}$$

e la soluzione generale è data da

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}v_1+C_2e^{\lambda_2 t}V_2$$

$\hookrightarrow X'=AX$

esempio ⑨
Data $x''+3x'+2x=0$ trasformare in un sistema

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=-2x_1-3x_2 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad X'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$X'=AX \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \qquad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{array}{l} \lambda^2+3\lambda+2=0 \\ (\lambda+1)(\lambda+2)=0 \\ \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2 \end{array}$$

cerco gli autovalori caso $\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_2=-x_1 \\ V_1=(1,-1) \end{array}$$

caso $\lambda=-2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x_1+x_2=0 \Rightarrow x_2=-2x_1$$

$$V_2=(1,-2)$$

nb: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ due valore negativi

$$y(t)=c_1e^{\lambda t}v_1+C_2e^{\lambda_2 t}V_2$$
$$=c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1(t)=C_1e^{-t}(1)+C_2e^{-2t}(1) \\ X_2(t)=C_1e^{-t}(-1)+C_2e^{-2t}(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t} \\ x_2(t)=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t} \end{cases}$$

esempio (4)

$$\begin{cases} x' + x - y = 0 \\ y' - 4x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 4x - y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

autovalori

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda+1)^2 - 4 = 0$$

$$(\lambda+1)^2 = 4$$

$$\lambda + 1 = \pm 2$$

$$\lambda = -1 \pm 2 < \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

$$V_1 = (1, -2)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -2x + y = 0 \Rightarrow y = 2y$$

$$V_2 = (1, 2)$$

teorema Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \rightarrow n\times n \\ X'(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

ammette come soluzione la funzione

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + \dots c_n e^{\lambda_m t}$$

la soluzione particolare $u(t)$ di $X'(t) = AX(t) + \underline{f(t)}$

$u(0) = 0$

$$u(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds$$

esempio

$$\begin{cases} x' = 3x + t \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$

$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 3 \quad \begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0x - 2y = 0, \; y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 3-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2x - 0y = 0, \; x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} s e^{3(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_0^t s e^{3(t-s)} ds & 0 \\ 0 & \int_0^t e^{t-s} ds \end{pmatrix}$$

$V_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cos(\beta t) + i\,i\sin\beta t \\ \cos\beta t + i\sin\beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\beta t + i\cos\beta t \\ \cos\beta t + i\sin\beta t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ \sin\beta t \end{pmatrix} = X_{Re}(t) + i\, X_{Im}(t)$$

se $X(t) = X_{Re}(t) + i\, X_{Im}(t)$
è una soluzione
complessa del sistema
differenziale lineare $X' = AX$

$\Rightarrow$ sia la parte reale $X_{Re}(t)$ e sia la parte imm. $X_{im}(t)$ sono
soluzioni dello stesso sistema

$$X' = AX$$

Lo spazio delle solu. reali del sistema $X' = AX$ è descritta da
tutte le combinazioni lineari

$$C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{im}(t)$$

Posso scrivere la soluzione come

$$C_1 \begin{pmatrix} -\sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ \sin\beta t \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \boxed{C_1 \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}}$$

$$X(t) = X_{Re}(t) + i\, X_{imm}(t)$$

$$X'(t) = X'_{Re}(t) + i\, X'_{imm}(t)$$

$$\parallel$$

$$AX(t) = A\left(X_{Re}(t) + i\, X_{imm}(t)\right) = AX_{Re}(t) + iAX_{im}(t)$$

$X'_{Re}(t) = AX_{Re}(t)$ la sol. è la combi. lineare

$X'_{Im}(t) = AX_{im}(t)$

esempio 1

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -5x + 3y \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad |A - \lambda I| = 0$

$(3-\lambda)^2 + 25 = 0$

$(3-\lambda)^2 = -25$

$(\lambda - 3)^2 = -25 \Rightarrow \lambda - 3 = \pm 5i \Rightarrow \lambda = 3 \pm 5i$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}$$

caso con radice reale doppia

2x2 $\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) \\ y'(t) = a\,y(t) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$\frac{dx}{dt} = ax$

$\int \frac{dx}{x} = \int a\,dt \Rightarrow \log x = at \Rightarrow x = e^{at}$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{at} \\ y(t) = C_2 e^{at} \end{cases}$$

esempio

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) \\ y'(t) = 3y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} \\ y(t) = C_2 e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + y(t) \\ y'(t) = \alpha y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} \\ y(t) = C_2 e^{\alpha t} \end{cases}$$

esempio

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) \\ y'(t) = 5y(t) \end{cases}$$

qui basta sostituire

teorema Jordan Decomposizione di Jordan

$U / AU = V_1 + \alpha u$

U non deve essere proporzionale a v_1 devono essere indipendenti

$Au = V_1 + \alpha u$

$$Au = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\alpha + b \\ \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{a\alpha} + b = 1 + \cancel{a\alpha} \\ \alpha b = \alpha b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

dobbiamo dare la soluzione più semplice

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad V_1 \quad U$$

$A = P \quad P^{-1}$

$A = P \, J \, P^{-1} \rightarrow J$ = Diagonalizzazione di Jordan

$$\boxed{P^{-1} A P = y}$$

$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$J=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$

$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$

$e^{At}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\alpha t}&t\,e^{\alpha t}\\0&e^{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}&t\,e^{\alpha t}\\0&e^{\alpha t}\end{pmatrix}$ (*) vedi soluzione precedente

esempio generale

abbiamo usato il metodo di decomposizione tramite Jordan

$$\begin{cases}x'(t)=-8x(t)+y(t)\\ y'(t)=-36x(t)+4y(t)\end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix}-8&1\\-36&4\end{pmatrix} = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix}-8-\lambda&1\\-36&4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+8)(\lambda-4)+36$

$=\lambda^2+4\lambda-32+36=\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$\begin{pmatrix}-8+2&1\\-36&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = -6x+y=0 \qquad x=1 \quad y=6$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ non diagonalizzabile

$u \mid Au=v_1-2u$

$\begin{pmatrix}-8&1\\-36&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8a+b\\-36a+4b\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-8a+b\\-36a+4b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-8a+b=1-2a\\-36a+4b=6-2b\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6a+b=1\\-36a+6b=6\end{cases}$$

$-6a+b=1 \Rightarrow a=0 \qquad b=1$

$P=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\rightarrow P^{-1} \qquad A=PJP^{-1}$

$v_1 \quad u$

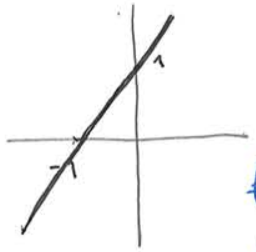
3) $f(x) = e^x + x = y$

non siamo in grado di esprimere x in funzione di y

Siamo in grado di tracciare il grafico della funzione inversa come simmetria di f rispetto a $y=x$

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$f(x) = e^x + x = 1 + x + x + o(x)$$



$$y = 1 + 2x$$

$$f^{-1}(x) = \quad y = 1+2x \iff 2x = y-1 \iff x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

riusciamo a farla solo localmente

teorema della derivata della funzione inversa

f continua ed invertibile in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ e con $f'(x) \neq 0$.
Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$$\left(f^{(-1)}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

esempio

$$f(x) = e^x + x \qquad x_0 = 0$$

$$f'(x) = e^x + 1 \qquad f(0) = e^0 + 0 = 1 \equiv y_0$$

$$f'(0) = e^0 + 1 = 2$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 240