



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1509A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Muggianu

MATERIA: Strutture Aeronautiche. Prof.DiSciuva

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

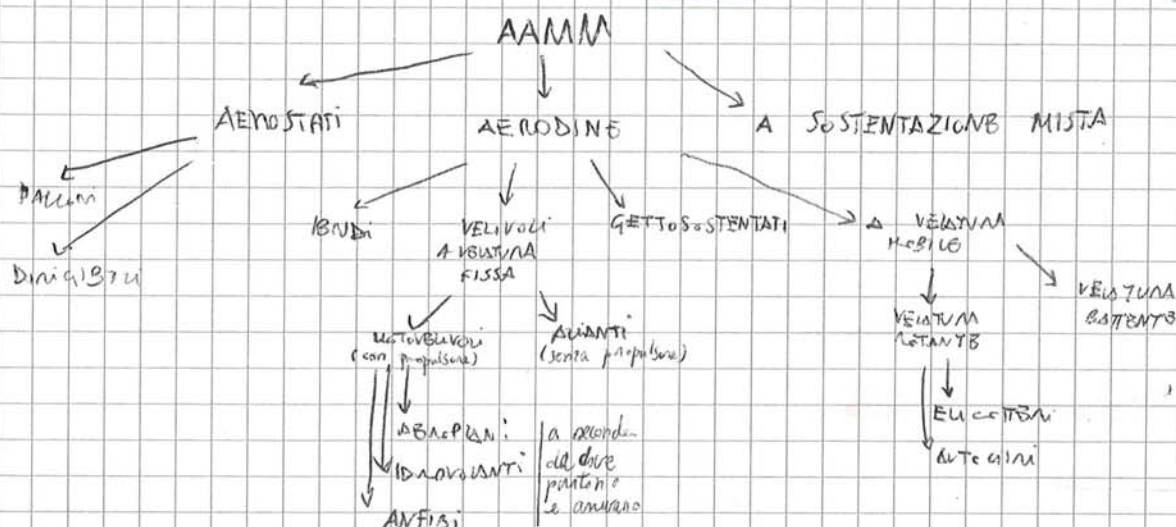
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

STRUTTURE AERONAUTICHE

M. Di Sciura

marco.di sciura@polito.it

CLASSIFICAZIONE AAMM



La portanza necessaria alla sustentazione può essere ottenuta in modo statico, dinamico o misto. Nel caso delle aerodine, la velatura è la parte dell'AM che genera la sustentazione: la velatura può essere fissa o mobile.

IL PROGETTO STRUTTURALE

Lo studio di una struttura viene fatto in due distinte fasi, il progetto e l'analisi strutturale.

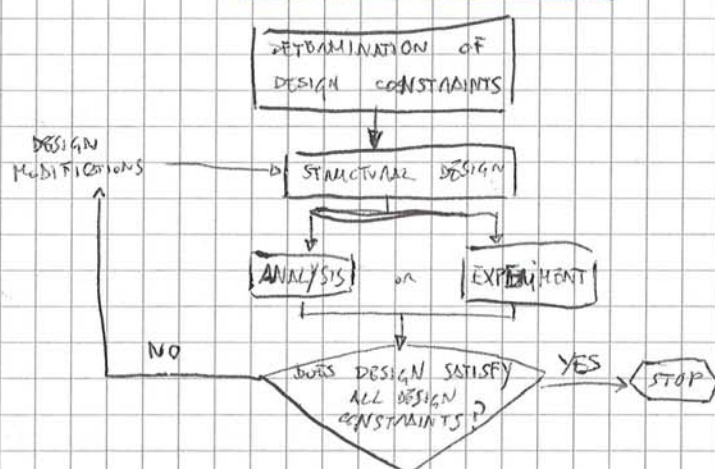
Il progetto di una struttura viene realizzato in base a una specifica dei requisiti che soddisfano il progetto. Ha come obiettivo lo sviluppo di strutture aeronautiche a basso peso, per svolgere il loro compito con i requisiti fondamentali, valenti per tutte le aerostutture, di minimo costo e massima sicurezza. Grosso modo il peso delle strutture influenza per un circa $\sim 25\%$ il peso dell'intero ~~struttura~~ dell'aeromobile.

FUNZIONI DELLA STRUTTURA

Assicurare che nel campo di impiego del componente il suo funzionamento si svolga in condizioni di sicurezza acquisite con calcoli (analisi strutturale), prove a tense e in volo, inoltre è richiesto di indicare la vita o la durata del componente.

~~Il~~ Il parametro delle manovre è fondamentale compatibilmente alle prescrizioni delle norme.

STRUCTURAL DESIGN PROCESS



COMPITO DELL'ANALISI STRUTTURALE

Definita geometria, materiali, condizioni di carico e di vincolo: ~~procedo~~

- determinare lo stato di sollecitazione e deformazione in tutti i p.ti (STATO DI LAVORO)
- confrontare tali sollecitazioni e deformazioni con quelle ammissibili in base a un preciso criterio
- valutare i margini di sicurezza
- eseguire analisi di meccanica delle fratture e di fatica
- valutare tensioni residue
- definire il tipo di controlli non distruttivi (per seguire l'evoluzione del danno).

ROBUSTEZZA
RIGIDITÀ
DILATABILITÀ

← per valutare "l'offerta"
o confrontarla con la
"richiesta"

LIVELLI DI CARICHI DI PROGETTO

CARICO A CONTINGENZA (Limit load, carico nominale) massimo carico che si prevede che la struttura deve sopportare durante la sua vita operativa

YIELD LOADS massimi carichi sotto cui la struttura non subisce deformazioni che ne limitino le prestazioni

CARICO DI ROBUSTEZZA (ultimate load) carico che la strutt. deve sopportare senza rottura, è uguale a carico contingenza per FATICA

ES. $\sigma_s = 30 \text{ kg/mm}^2$ $\sigma_R = 45 \text{ kg/mm}^2$ DURAL

$\sigma_R / \sigma_s = \approx 1.5$ e $K_R / K_L = 1.5$ (per i valori di normativa)

ecco pochi per il DURAL o altre leghe di alluminio si può utilizzare indifferente uno dei due criteri.

RIGIDEZZA - capacità di sopportare i carichi deformandosi poco;
deformazioni sotto carico non superiori ad un certo valore
(es. RIGIDEZZA FLESSIONALE DELL'ALA, RIGIDEZZA TORSIONALE DI UN ALBERO, ECC.)

ELASTICITÀ - capacità di ritorno elastico sotto i carichi
cioè perfetta ritorno in cond. scarse, senza deformazioni residue (o entro un certo limite)

CRITERI DI PROGETTO STRUTTURALE

La SICUREZZA STRUTTURALE dipende dalle capacità di operare in presenza di difetti senza arrivare a rotture catastrofiche

FINO A UN DECENNIO FA X QUESTO CRITERIO, SI CONSIDERAVA UNA STRUTTURA ESENTE DA DIFETTI E SI ADEGUAVA UNO DEI SEGUENTI TRE APPROCCI

- VITA SICURA (safe-life): determinazione delle durata max prima delle rotture

- SICUREZZA NEI GUASTI (fail-safe): il verificarsi di una rottura non deve portare a una catastrofe.
Si verifica le capacità delle strutture nell'operare con elementi rotti.

DOPO UN NUMERO DI CICLI il componente viene sostituito **PRESCINDENDO** (soltanto 1/5 della vita effettiva)

σ SNERCIAMENTO: inizia deformazione plastica;

σ ROTTURA: max σ del materiale;

• CARICO A CONTINGENZA

• YIELD LOAD

• CARICO DI ROBUSTEZZA

• CARICO DI ROTTURA

• PROOF LOAD

• FATTORE DI RISERVA

• MARGINE DI SICUREZZA

07/03/2013

Oltre quindi ai criteri di verifica (suggeriti...) abbiamo dei criteri di progetto strutturale che sono appunto il "fail-safe" e il "safe-life". In particolare il fail-safe è un criterio che si basa sulle ipostaticità della struttura.

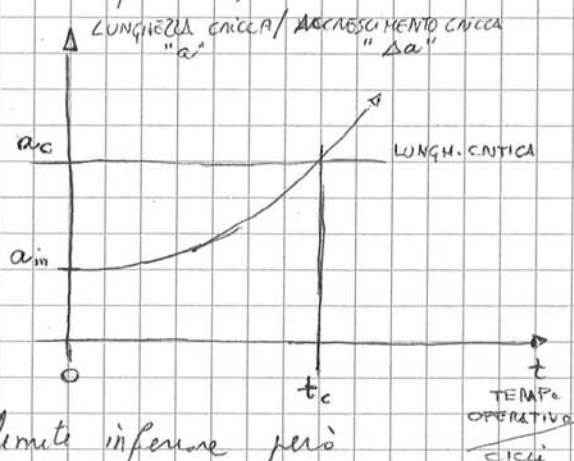
CRITERIO DI PROGETTO STRUTTURALE DAMAGE TOLERANCE

Nei criteri precedenti si suppone che la struttura all'inizio della sua vita operativa è integra e senza imperfezioni. Nel criterio DAMAGE TOLERANCE si prendono in considerazione anche le imperfezioni al tempo iniziale, in particolare garantisce che se anche fosse presente una cricca o un difetto iniziale esso non cresca durante le vita di esercizio previste provocando rotture catastrofiche. Prevede 2 approcci:

- * sicurezza nella rottura (fail-safe); → (corros prima)
- * SLOW CRACK GROWTH: crescita lenta della cricca, che verifica proprio quanto detto prima;

Il grafico mostra l'evoluzione di una cricca da valore iniziale a quello critico ("ammissibile").

Il valore " a_{in} " influenza anche il tempo di vita operativa. Se " a_{in} " diminuisce la vita aumenta. C'è un limite inferiore però per sotto cui gli strumenti non sono in grado di osservare cricche. Si assume quindi che al più, nell'elemento che osserva, c'è una lunghezza di cricca che coincide con il livello di definizione dello strumento (e che senza proprio " a_{in} "). Quando la cricca cresce ed è "osservabile" allora lo strumento programmando le ispezioni. È ovvio che l'elemento deve essere accessibile, monitorabile e



da cose voglio ottenere le cose considero.

* CARICHI STATICI

Forze costanti applicate alle strutture ~~o parte~~ in tutta o parte delle sue vite, come la forza peso, pressurizzazione o gradienti termici. Si considerano statici anche carichi variabili nel tempo se la loro applicazione è sufficientemente ~~lenta~~ lenta e dura a lungo. Necessita di considerare eventuale affaticamento (dovuto proprio al fatto che non è realmente statico, ma subisce cedi)

* CARICHI QUASI-STATICI

Hanno origine dinamica, ma il loro effetto può essere considerato, in prima approssimazione, statico. Esempio le sollecitazioni centrifughe nei rotori (in "rotazione", non nel transitorio). Si considera quasi-statico se la scala dei tempi di variazione dei carichi è molto maggiore del periodo relativo alle prime frequenze proprie delle strutture.

VERrà SPIEGATO
PIÙ AVANTI

* CARICHI DINAMICI

Tutto il resto, quei carichi che variano velocemente nel tempo causando vibrazioni e risonanza (rotori non perfettamente equilibrati, deoelastica nei motori a getto). Necessita di analisi dinamica.

FATICA

Rotture a carichi inferiori a quelli di rottura statica, quando detti carichi variano nel tempo.

È indipendente dal tempo impiegato a compiere ciascuna alternanza di carico, e da eventuali pause tra le alternanze.

Concetti Correlati

LIMITE A FATICA

valore del carico ciclico al di sotto del quale non si accumula fatica

ACCUMULO DEL DANNO

evoluzione progressiva del materiale

INCUBAZIONE

fase del fenomeno in cui non si ha manifestazione del danno

PROPAGAZIONE

fase del fenomeno in cui si ha manifest. del danno.

Per σ leggermente superiore a σ_p ~~non~~ ^{ancora} c'è ~~più~~ ritorno elastico, fino a σ_E , tensione al limite di elasticità del materiale ($\sim 5\% > \sigma_p$), anche se il comportamento non è più lineare. Per $\sigma > \sigma_E$ si perde anche il ritorno elastico. Può accadere che si raggiunga un valore di σ per cui, anche non aumentando ulteriormente σ , aumenta la deformazione. Si ha una instaurazione dei piani cristallini, si ha lo snervamento del materiale, σ_s .

Dopo riprendono ad aumentare entrambe non linearmente. Se ora, se scarico, si ha un ritorno non elastico come mostrato.

Si parte dal p.to ~~da~~ della curva, la parallela ad "y" individua la deformazione nel p.to con quel carico. Se scarico si ottiene invece la deformazione residua plastica (ϵ_p), intercettata dalle parallele al tratto che segue la legge di Hooke. La parte che si recupera invece è deformazione elastica $\epsilon_E = \epsilon - \epsilon_p$;

se ora ricarico il profilo, il diagramma di carico segue la linea di scarico precedente, per una lunghezza maggiore: aumenta la zona di proporzionalità diretta, si ha il fenomeno dell'incrudimento o hardening, che aumenta la zona elastica ma diminuisce drasticamente la zona plastica $\Rightarrow$ IL MATERIALE DIVENTA FRAGILE.

Se aumento fino a rottura ottengo le deformazioni, sotto quel carico, del provino in attimo prima della rottura. Se riuscissi a scaricare in attimo prima della rottura ottengo una deformazione pari ~~alla~~ ^{alle} lunghezza che ottengo portando a rottura e accostando i 2 pezzi rimasti. Posso introdurre una deformazione percentuale ^{che} ~~è~~ la deformazione ^{percentuale} sotto carico al momento della rottura, o A_p (allungamento percentuale) che è accettato anche come $\epsilon_{residua}$ accostando i pezzi dopo rottura. Posso trovare l' $A_{p5/10}$, che indica il valore dell'allungamento [%] a rottura viene trovato su un provino con Lung. utile 5/10 volte il diametro delle sezione. (10)

CONFRONTO DURAL - ENIGAL o SAE 2024 e SAE 7075

Le leghe di alluminio → LEGHE LEGGERE

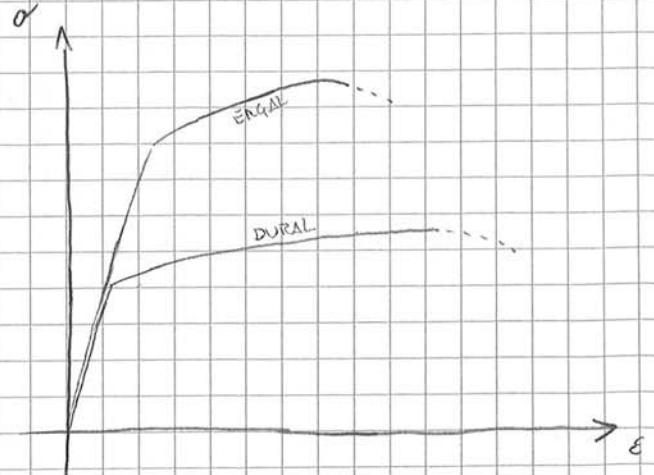
" " di magnesio → " EXTRA-LEGGERE

Altro parametro è L_R LUNGHERIA DI ROTTURA

$$L_R = \frac{\sigma_R}{\gamma} = \frac{\sigma_a \text{ rottura}}{\text{peso specifico del materiale}} \rightarrow \text{IN [km]}$$

$$L \rightarrow \left[\frac{E}{L} \right] \cdot \left[\frac{L^3}{F} \right]$$

$\downarrow$ IN $\frac{kg}{mm^2}$ $\downarrow$ IN $\frac{kg}{dm^3}$



La **RESISTENZA SPECIFICA** è un altro nome della L_R : è la lunghezza che avrebbe un provino per il quale, se vincolato ad una estremità, si verificherebbe (PROVINO LUNGO L_R), se sottoposto al suo stesso peso, una tensione pari a quella di rottura ⇒

σ_R è importante al fine dei criteri di robustezza.

L'importanza però è la σ_R rapportata al peso // ⇒ (L_R) specifico

$$p = \gamma L \cdot A$$

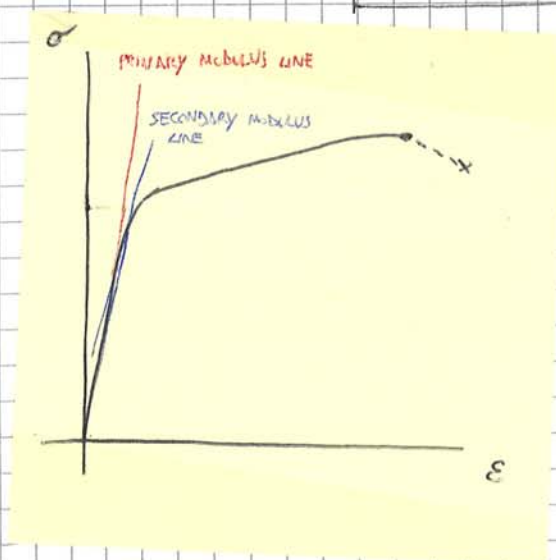
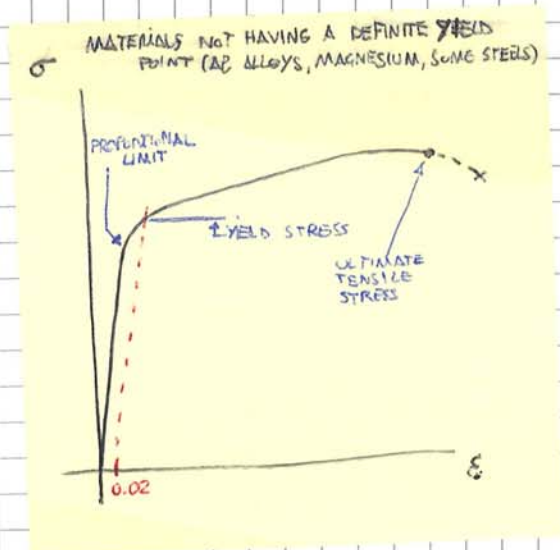
$$L p = N_{in}$$

$$\sigma_{in} = \frac{N_{in}}{A}$$

$$L \rightarrow \sigma_{in} = \frac{\gamma L \cdot A}{A} = \gamma L$$

$$\sigma_R = \gamma L_R$$

con $in = \text{incastro}$
 $N = \text{spinta normale}$
 $p = \text{peso}$



L'ossidazione consente di creare uno strato esterno di ossido (ossidazione anodica). Le placcature ricoprono il ferro di Al, zinco, Ni, ecc. L'Acciaio è usato per costruzioni centrali, longheroni, ordinate di forme e di forza, pannelli. Sono lavorati per estrusione.

LEGHE DI TITANIO

Il titanio è costoso. Hanno una buona resistenza alle temperature (sui $450-500^{\circ}\text{C}$ se non trattate). Viene utilizzata per componenti molto sollecitati a fatica.

Le "gambe" dei cancelli sono in lega di Titanio, come le camere di combustione o altre parti di motore (magari con trattamenti o rivestimenti resistenti al calore).

$$\rho = 4.5 \text{ kg/dm}^3$$

$$E = 10'500 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_R = 100 \div 120 \text{ kg/mm}^2$$

$$\Delta\sigma_s = 13 \div 18$$

$$L_R \approx 24$$

Acciai

LEGHE Fe-C

Sono di 2 tipi: salde fili o da bonifica (che hanno subito la tempera). Si usano per le bullonerie o per i castelli a motore (se a traliccio), oppure per la fusoliera o traliccio, le aste di trasmissione dei comandi, ecc.

$$\rho = 7.8 \text{ kg/dm}^3$$

$$\sigma_{R \text{ BONIFICA}} \geq 120 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{R \text{ SALDABILI}} = 50 \div 80 \text{ kg/mm}^2$$

$$E = 21'000 \text{ kg/mm}^2$$

$$\Delta\sigma_s \text{ BONIFICA} = 14 \div 20 \%$$

$$\Delta\sigma_s \text{ SALDABILI} \geq 20 \%$$

$$L_{R \text{ BONIFICA}} \geq 15 \text{ km}$$

$$L_{R \text{ SALDABILI}} \approx 8 \text{ km}$$

SAPERE i NUMERI DELLA TABELLA A MEMORIA,

CONFRONTARE I MATERIALI, PROGI E DIFETTI.

DOMANDA: COSTRUIRE UNA TABELLA IN CUI SI CONFRONTI DUAL-EGAL:
Due caratteristiche materiali e scrivere i valori, pregi e difetti.

di $E = 4'500 \text{ kg/mm}^2$ e 28 kg/mm^2 la tensione σ_R di rottura.

Vengono generalmente utilizzate nelle costruzioni di elementi massicci ^(per densità basse a parti di volume) e nelle zone con grandi flussi di calore (fanno da pozzo di calore). La più famosa lega è l' **ELEKTRON**. Sono materiali infiammabili. I cerchioni dei candelieri sono in leghe di Magnesio, che assorbono calore e devono avere bassi momenti d'inerzia per il piazzamento.

LEGHE DI AL - LEGGERE

$$\rho = 1.8 \text{ kg/dm}^3$$

$$E = 4'600 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_R = 28 \div 32 \text{ kg/mm}^2$$

$$A_{ps} = 10 \div 15 \%$$

$$L_R \approx 16 \text{ km}$$

L'alluminio ~~da solo~~ legato ad altri materiali le caratteristiche interessanti.

IL DURAL è AL + rame (93% + 5-6% + percentuali di ZINCO, MANGANESE), ha una densità di 2.8 kg/dm^3 .

L'Engal è AL (90%) + ZINCO (5%) + tracce rame, MANGANESE. La densità è sempre 2.8 kg/dm^3 .

Le maggior parti delle strutture aeronautiche sono in AL.

L'Engal è superiore al Dural su σ_R , ~~Aps~~ e L_R .

	DURAL	ENGAL
$\rho [\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}]$	2.8	"
$E [\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}]$	7300	"
$\sigma_R [\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}]$	45	60
A_{ps}	14-20%	4-11
L_R	≈ 15	≈ 23

IL DURAL è più quello usato L_R maggiormente proprio per il suo A_{ps} superiore, che rappresenta la capacità di assorbire tensioni deformandosi plasticamente.

E poiché le strutture aeronautiche sono sollecitate molto a fatica, il valore superiore di A_{ps} per il Dural lo rende una scelta migliore. Si potrebbe pensare di usare l'Engal per le parti compressive e il Dural per quelle tese.

In passato non erano saldebili, oggi vengono saldate, con l'attenzione alle temperature ($> 180-200^\circ\text{C}$) che ne denotano le caratteristiche. Sono anche soggetti a ossidazione, quindi vengono trattati tramite anodizzazione, ALODIZZIONE E. L'Alodizzazione (processo ALODYNE) consiste

(14) uniformemente il pezzo con uno strato di ~~Al~~ ^{sostanze alcaline potenti} per ~~proteggere~~ ^{proteggere} la ~~immersione~~ ^{immersione} all'ossidazione.

Tutti i valori che abbiamo visto sono valori med, numeri che rappresentano statisticamente il comportamento di quel materiale. Quindi questi valori devono essere accompagnati da qualcosa che ci informi dell'attendibilità. Sono 3 fondamentalmente:

DATO CARATTERIZZATO IN BASE - S
 " " " " - A
 " " " " - B

BASE - S

Se quel dato è caratterizzato in base - S, almeno il 90% significa che viene fornito il valore più basso delle σ_x che viene fuori dalle prove su tot. campioni. Anche non si è sufficientemente "forniti" di materiale statistico.

BASE - B

Almeno il 90% della popolazione presenta un valore uguale o superiore al valore fornito, con un grado di confidenza del 95% (Sono comunque dati forniti su un insieme finito di prove).

BASE - A

Almeno il 99% della popolazione presenta un valore uguale o superiore al valore fornito, con un grado di confidenza del 95%.

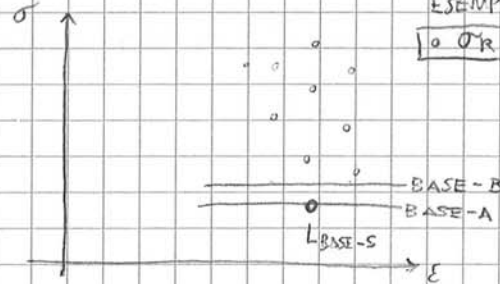
Si utilizza una base piuttosto che un'altra "in base" alle filosofie di progetto scelte all'inizio. Se il comportamento del unico componente è fondamentale per la struttura, uso la base - A.

Se non è fondamentale uso la base - B. I valori di progetto vanno scelti in base a un numero minimo di test del materiale che vanno incontro a specifiche più stabili e i valori di progetto su basi statistiche.

Quindi per ~~struttura~~ elementi le cui forze è critica si usa la base - A, per elementi volanti, cioè iperstatici, la base - B.

ESEMPIO SU PROVE SU CAMPIONI

0.02



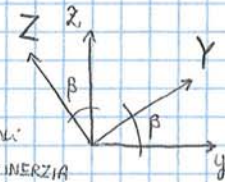
CARATTERISTICHE DELLO STATO TENSIONALE

14/3/13

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z$$

$$\text{dove } J_y + J_z = J_x + J_z$$

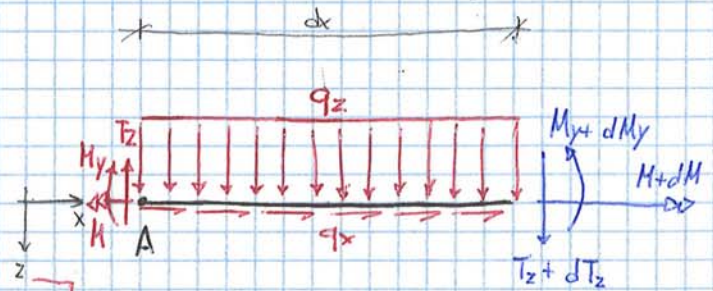
(x, y, z) SISTEMA BARICENTRICO
 (X, Y, Z) " ASSI PRINCIPALI D'INERZIA



Se data una struttura caricata, determinare lo stato tensionale.

Si costruiscono i diagrammi di momento e taglio, e poi si calcolano le tensioni nei p.ti critici.

Si scrivono le eq. di equilibrio per il concio elementare



$$[\downarrow] -T_z + q_z dx + dT_z = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT_z}{dx} = -q_z}$$

$$[A] -M_y - q_z dx \frac{dx}{2} - (T_z + dT_z) dx + M_y + dM_y = 0$$

$$dM_y - T_z dx - \frac{1}{2} q_z (dx)^2 - dT_z dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dM_y}{dx} = T_z \\ \frac{dT_z}{dx} = -q_z \end{cases}$$

$$[\rightarrow] -N + q_x dx + N + dN = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dx} = -q_x}$$

Se faccio $\frac{d\sigma_x}{dx}$, utilizzando la formule di cui sopra:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \sigma_{x,x} = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{1}{J_z} y + \frac{dM_y}{dx} \cdot \frac{1}{J_y} z = \sigma_{x,x} = \frac{T_z}{J_z} y + \frac{T_y}{J_y} z$$

TRASCURANDO
gli EFFETTI
DELLA SFORZO
NORMALE

La struttura tipica in aeronautica è una struttura a guscio rinforzato o a semiguscio, costituito da un rivestimento sottile esterno, rinforzata da elementi di rinforzo longitudinali detti CORRENTI (che resistono a carichi trasversali) e dei rinforzi detti ORDINATE (che resistono ai carichi nel piano).

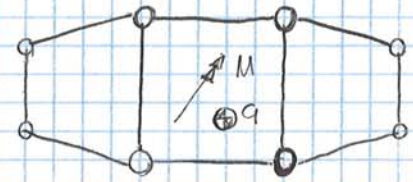
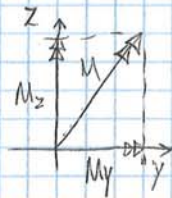
Questo fa le fusoliere, per le ali abbiamo rispettivamente correnti e cèntine. Il rivestimento in lamiera prende il nome di GUSCIO. Un guscio è una struttura con una deformazione trascurabile rispetto alle altre. Un guscio resiste bene a un carico distribuito, ma, senza rinforzi, è pessimo per i carichi concentrati. Un guscio rinforzato è in grado di assorbire carichi in tutte le direzioni. Un GUSCIO RINFORZATO è quindi costituito da un RIVESTIMENTO, un

(19)

L'area resistente a flessione quindi non coincide con l'area geometrica.

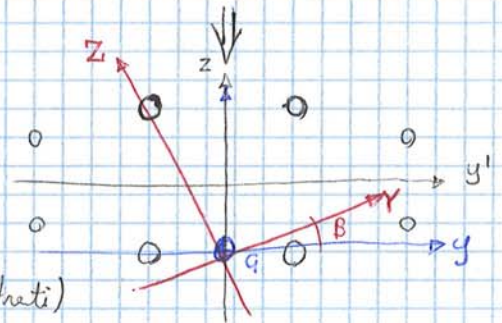
$$\sigma_x^i = \frac{N}{A} + \frac{M_z J_y - M_y J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} y_i + \frac{M_y J_z - M_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} z_i$$

→ $B \approx 5110 \text{ "6004"}$ CORRETTO



Dove i momenti di inerzia sono riferiti a queste, così come le coordinate.

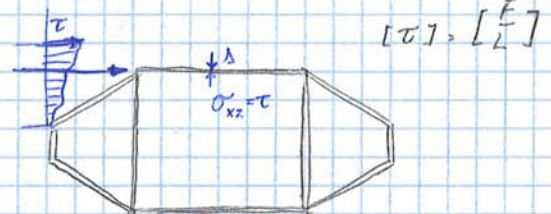
Nel modello a congiungimento ideale i pannelli assorbono solo taglio, gli elementi longitudinali assorbono solo le sguine (purché li abbiano concentrati)



Sia i pannelli che i correnti assorbono il taglio e lo sforzo normale

$$q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz \quad \text{se } \tau = \text{cost.} \Rightarrow q = \tau \cdot h$$

QUESTO PER IL TAGLIO, AVrà QUINDI SOLO I PANNELLI, MA NON I CORRENTI (TRASCURA IL TAGLIO ASSorbito DAI CORRENTI)



Vediamo come si calcola il taglio per un pannello semplice. Supponiamo un flusso di taglio costante. Ci interessa valore, direzione e retta d'azione del taglio. Vogliamo conoscere il SISTEMA STATICAMENTE EQUIVALENTE.

q è l'intensità del flusso di taglio
 $\vec{t}$ è il versore tangente.

Il flusso elementare sarà: $q dC \vec{t} = d\vec{F}$
 se integro ottengo la forza totale. $\vec{F} = \int_0^L q dC \vec{t}$, scomponendo $\vec{t}$

$$\vec{F} = \vec{i}_1 q \int_{x_1^i}^{x_1^f} dx_1 + \vec{i}_2 q \int_{x_2^i}^{x_2^f} dx_2 = (\vec{i}_1 L_1 + \vec{i}_2 L_2) q$$

Quindi le componenti saranno: $\begin{cases} F_{x_1} = qL_1 \\ F_{x_2} = qL_2 \end{cases} \Rightarrow F = |\vec{F}| = qL$

INTENSITÀ DELLA RISULTANTE DEL FLUSSO DI TAGLIO COST.

La direzione la calcoliamo da:

$$\frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} = \frac{qL_2}{qL_1} = \frac{L_2}{L_1} \quad \text{è la pendenza, che è parallela alle corde sottratta dal pannello.}$$

Su quale particolare parallela? Cioè su quale retta d'azione? Lo troviamo tramite l'uguaglianza dei momenti;

⇒

(21)

SISTEMA 3 PANNELLI + CORRENTE

Se una struttura è in equilibrio, ogni sua parte lo deve essere, così come l'elemento mostrato qui.

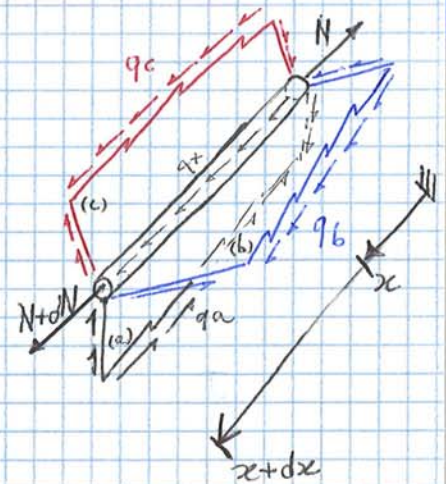
Il flusso di taglio cambia da pannello a pannello, ma si mantiene costante su ogni pannello. Lo sforzo normale cambia invece.

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$\rightarrow q_x = -q_a + q_b + q_c \quad \text{IN GENERALE } q_x = \sum_{k=1}^n q_k$$

N° PANNELLI CHE CONVERGONO NEL CORRENTE
I-SINGOLO

R(i)



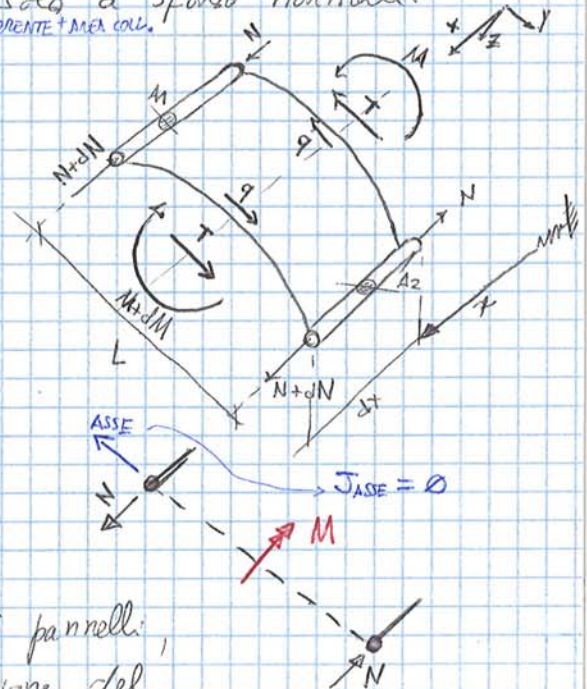
Questa relazione mette insieme il fatto che i pannelli ammettono solo sforzi ~~normali~~ di taglio mentre i ~~pan~~ correnti solo a sforzo normale.

SEMPRE CORRENTE + AREA COLL.

ESEMPIO - CASO GENERALE

Il modo migliore per far lavorare questi sistemi è applicare lo sforzo di taglio in modo che agisca sulle rette d'azione

Il vettore momento deve essere orientato perpendicolarmente alla congiungente i due booms. Questo perché sulle congiungenti il momento d'inerzia è nullo, portando la sollecitazione a valori elevatissimi.



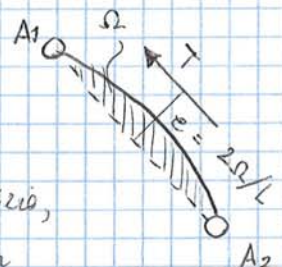
Essendo il flusso di taglio costante sui pannelli, il taglio non varia lungo la direzione del pannello.

Essendo il momento flessante ammetto solo dai correnti:

$$NL = M \rightarrow N = \frac{M}{L} \rightarrow \sigma_1 = N/A_1, \quad \sigma_2 = N/A_2$$

$$\text{mentre } q = \frac{T}{L}$$

Il taglio va applicato sulle congiungenti i booms a una distanza pari a $\frac{2\Omega}{L}$, sulle RETTE d'taglio, che è la retta dove deve passare il taglio per avere una sezione ~~non~~ con flusso di taglio sollecitato a flessione e non a torsione.



19/03/13

Ipotezzando queste strutture già schematizzate secondo il modello a semi guscio ideale, con aree dei pannelli uguali, base b e h alt.

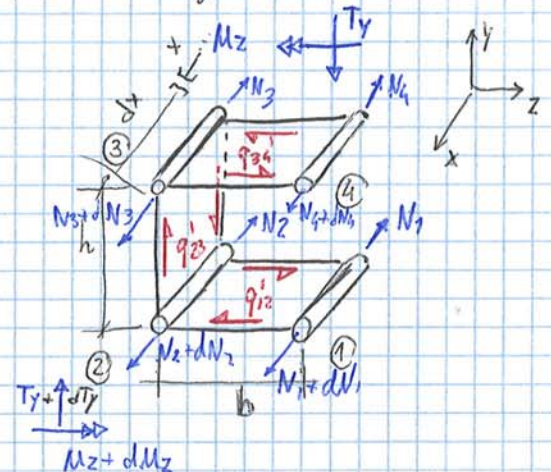
Con M_z dato:

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{M_z}{J_z} y_i \quad \text{con} \quad \begin{cases} J_z = Ah^2 \\ y_1 = y_2 = -h/2 \\ y_3 = y_4 = +h/2 \end{cases}$$

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)} = -\frac{M_z}{2Ah} \quad \sigma_x^{(3)} = \sigma_x^{(4)} = \frac{M_z}{2Ah}$$

$$N_1 = N_2 = -\frac{M_z}{2h} \quad N_3 = N_4 = \frac{M_z}{2h}$$

$$\sum_{i=1}^4 N_i = 0$$



$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

Calcolare i flussi di taglio nei pannelli (ho bisogno del "tronchetto" elementare)
I GRADIENTI di SFORZO N SONO LEGATI AI MOMENTI FLETTENTI

$$\frac{dN_i}{dx} = A^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} = \frac{M_z}{J_z} A^{(i)} y^{(i)} = \frac{T_y}{J_z} A^{(i)} y^{(i)} = \frac{T_y}{J_z} S_z^{(i)}$$

MOM. STATICO

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_2}{dx} = -\frac{T_y}{2h}$$

$$\frac{dN_3}{dx} = \frac{dN_4}{dx} = \frac{T_y}{2h}$$

$\sum_{i=1}^4 \frac{dN_i}{dx} = 0$ POICHÉ NON C'È SFORZO NORMALE EXT. APPLICATO ALLA TRAVESINA. LA SOMMA DI N_i CHE DE' SUOI GRADIENTI È 0

Il fatto che siano uguali a zero le sommatorie degli sforsi normali indica che non ci sono N esterne, e che gli sforsi normali sono linearment dip.

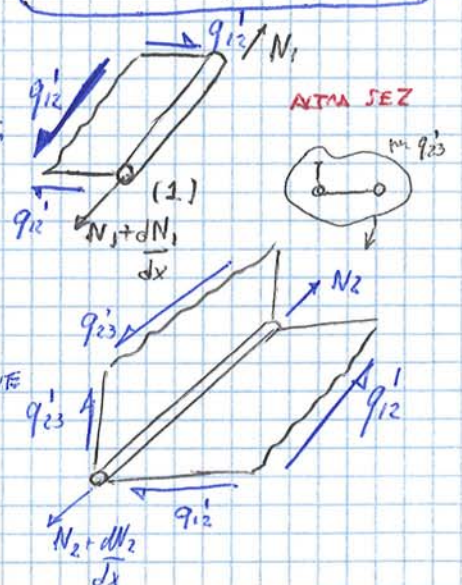
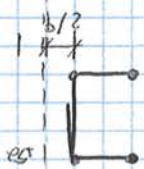
ASSE NEUTRO: luogo dei p.ti dove lo sforso normale è nullo $\sigma_x = 0$

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} = -q'_{12} = -\frac{T_y}{2h} \Rightarrow q'_{12} = \frac{T_y}{2h} \\ \frac{dN_2}{dx} = q'_{12} - q'_{23} = -\frac{T_y}{2h} \Rightarrow q'_{23} = q'_{12} + \frac{T_y}{2h} = \frac{T_y}{h} \\ \frac{dN_3}{dx} = q'_{23} - q'_{34} = \frac{T_y}{2h} \Rightarrow q'_{34} = q'_{23} - \frac{T_y}{2h} = \frac{T_y}{h} \end{cases}$$

CENTRO DI TAGLIO

$$T_y e_{cr} = 2 \Omega_3 q'_{34} \Rightarrow e_{cr} = 2 \Omega_3 \frac{q'_{34}}{T_y} = \frac{\Omega_3}{h}$$

$$\Omega_3 = \frac{bh}{2} \Rightarrow e_{cr} = b/2$$



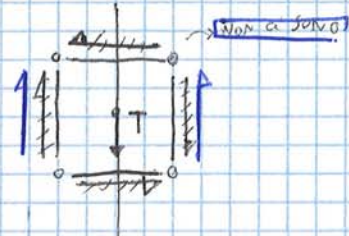
CASI PARTICOLARI

- 1) Immaginiamo di caricare le strutture nel c.t. della sezione aperta
"a = b/2"

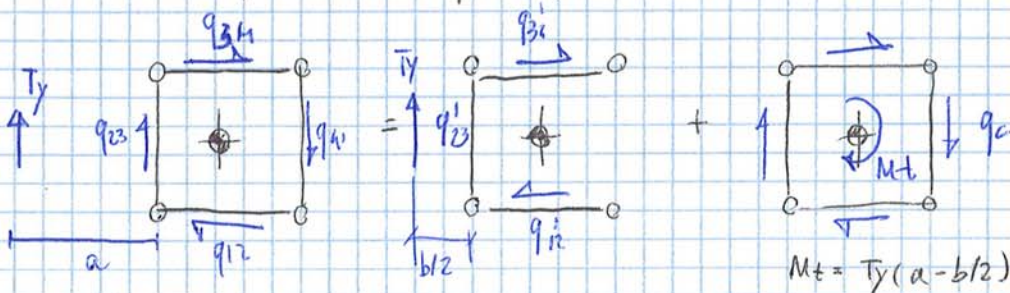
Otengo quindi lo stesso risultato della sezione aperta ($q_{41} = 0$),
finché quel pannello assorbe proprio la torsione generata dal taglio.

- 2) Applico il taglio nel c.t. della chiusa, cioè nel baricentro (in asse degli assi di simmetria, $a = -b/2$)

$$\begin{cases} q_{12} = q_{24} = 0 \\ q_{23} = -q_{41} = \frac{T_y}{2h} \end{cases}$$

METODO ALTERNATIVO

Risolvere la sezione chiusa, sommando una sezione aperta caricata solo a taglio su c.t. (quindi mom. flettente) più una sezione chiusa caricata solo con un momento torcente (che non produce σ_x e N e dN/dx in la teoria di De-Saint Venant [sezioni sottoposte a torsione rotano rigidamente restando parallele])
e un flusso di q_c circolatorio



$q'_{12}, q'_{23}, q'_{34}$ già visti

$$\begin{cases} q_{12} = q'_{12} + q_c \\ q_{23} = q'_{23} + q_c \\ q_{34} = q'_{34} + q_c \\ q_{41} = q_c \end{cases} \quad \begin{aligned} a T_y &= 2 \Omega_{34} q'_{34} + 2 q_c \Omega \Rightarrow 2 q_c \Omega = a T_y - 2 \Omega_{34} q'_{34} \\ 2 q_c \Omega &= T_y \left(a - \frac{b}{2} \right) \\ q_c &= \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2} \right) \frac{T_y}{2h} \end{aligned}$$

CALCOLO C.T.

FONDAMENTI DELLA TEORIA

21/03/13

DELL'ELASTICITÀ

Corpo ci consente di valutare lo stato di tensione e deformazione.

IL CORPO DEFORMABILE cambia la sua forma se sollecitato con carichi di diversa natura.

$$\vec{\sigma} = \text{STRESS} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \left[\frac{F}{L^2} \right] \quad \begin{array}{l} \text{RIDUCENDO IL VALORE DELL'AREOLA SOGGIACENTE A } \Delta F \\ \text{OTTENGO LA TENSIONE} \end{array}$$

Possiamo suddividere il vettore $\vec{\sigma}$ in una componente lungo normale all'area e una giacente sull'area.

La componente $\vec{\sigma}_n$ è la TENSIONE NORMALE / SFORZO NORMALE

La componente $\vec{\sigma}_t$ è lo SFORZO DI TAGLIO.

Ora associamo alle componenti di tensione degli indici che individuino la normale alla superficie che sto considerando e un indice che mi dica qual è l'asse che mi dice dove ho proiettato la componente tangenziale

σ_{ij} $\begin{cases} i \text{ INDICA LA NORMALE ALL'AREOLA} \\ j \text{ " L'ASSE DI PROIEZIONE} \end{cases}$

$$\text{se } i=j \Rightarrow \sigma_{ii} = \sigma_n$$

$$\text{se } i \neq j \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_t \cdot (\text{VERSORE ASSE } j)$$

Solitamente scomponiamo la $\vec{\sigma}$ secondo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x,y,z).

Per valutare le tensioni, prendo un p.to P del corpo, traccio i piani paralleli ai piani associati (xy, yz, xz) e su ogni "faccia" del parallelepipedo risultante agisce delle tensioni σ_{ij} , agenti sul parallelepipedo di volume $dx dy dz$. I seguenti sono valutati allo stesso modo delle teorie delle travi.

Come varia la tensione a una distanza

infinitesimale da P? USO LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

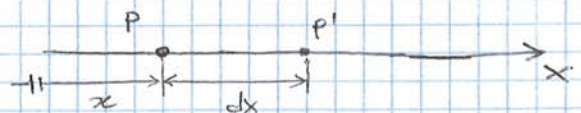
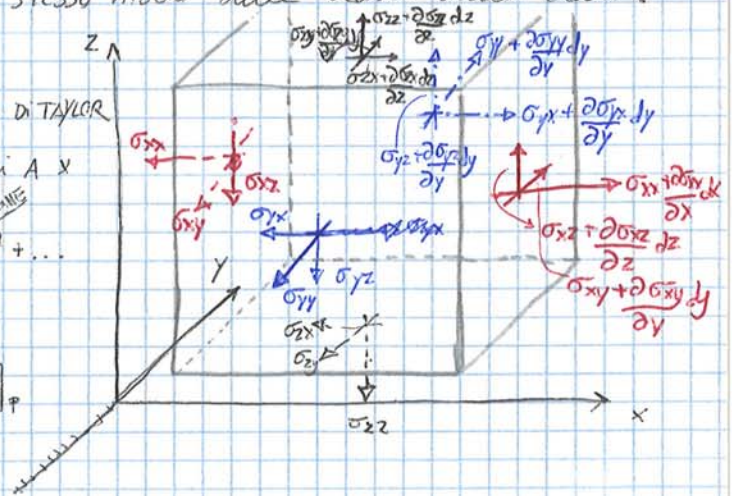
$$P: f(x,y,z) \rightarrow P': f'(x+dx, y, z) \quad \text{LIMITANDOCI A } x$$

$$f'(x+dx, y, z) \Big|_{P'} = f(x, y, z) \Big|_P + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_P dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Big|_P (dx)^2 + \dots$$

$$\sigma_{xx} \Big|_{P'} = \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right] \Big|_P \quad \sigma_{xy} \Big|_{P'} = \left[\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx \right] \Big|_P$$

ugualmente per le altre.

Per implementare nel calcolatore, la simbologia adottata, di tipo numerico, è:

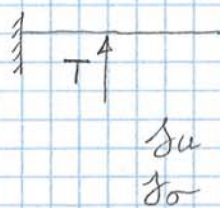
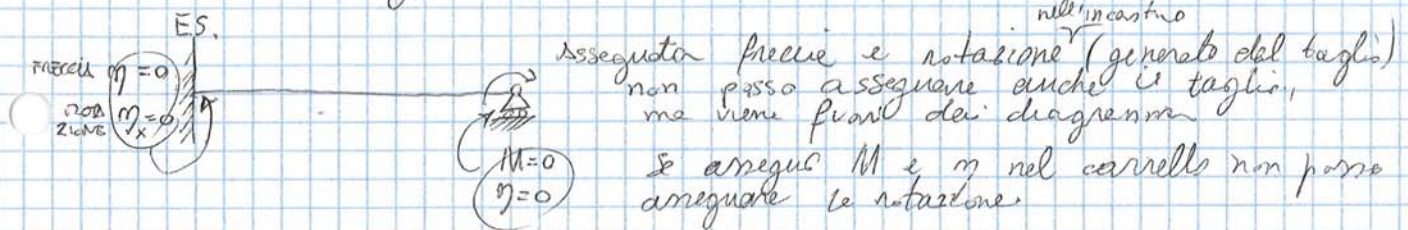


CONDIZIONI AL CONTO RNO E INIZIALI

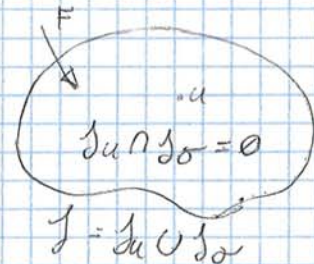
Nelle eq. abbiamo derivate prime e derivate seconde, quindi ho necessità di cond. al contorno (per le derivate spaziali) e cond. iniziale (derivate temporali) per poter valutare le costanti di integrazione. Le cond. al contorno possono essere MECCANICHE o CINEMATICHE.

La grandezza meccanica più importante è il lavoro, dato da una delle MECCANICHE sono tagli, momenti, le CINEMATICHE sono spostamenti e rotazioni. Il lavoro le lega (per prodotto) e se assegno una e univocamente determinata l'altra.

Su una stessa superficie, se assegno condizioni di tipo meccanico non posso assegnare cond. di tipo cinematico (e viceversa).



Assegno il taglio, gli spostamenti sono determinati dalle cond. meccaniche.



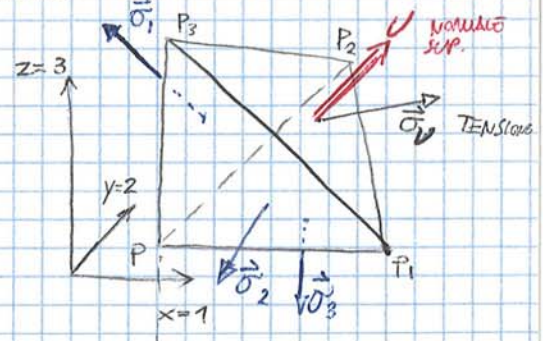
NON CI SONO QUINDI P.TI CON ENTRAMBE LE CONDIZIONI

COND. AL CONTO RNO

Usiamo un tetraedro di lati dx, dy, dz , per poter scrivere lo stato di tensione all'interno, su una faccia sghemba.

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \quad \{\sigma_0\}^T = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_1\}^T &= [\sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13}] \\ \{\sigma_2\}^T &= [\sigma_{21} \ \sigma_{22} \ \sigma_{23}] \\ \{\sigma_3\}^T &= [\sigma_{31} \ \sigma_{32} \ \sigma_{33}] \end{aligned}$$



Facciamo l'eq. del tetraedro:

$$\vec{\sigma}_0 dS = \vec{\sigma}_1 \left(\frac{1}{2} dy dz \right) + \vec{\sigma}_2 \left(\frac{1}{2} dx dz \right) + \vec{\sigma}_3 \left(\frac{1}{2} dx dy \right)$$

SOSTITUENDO ALLE ANDE LE ESPRESSIONI FUNZ. di σ_i e dS :

$$\{\sigma_0\} = \sum_{i=1}^3 \{\sigma_i\} \sigma_i \quad \text{COSENI DIRETTORI DELLA NORMALE}$$

$$\begin{aligned} dS &= \text{AREA } P_1 P_2 P_3 \\ \begin{cases} \text{area } P_2 P_3 = \sigma_1 dS \\ \text{area } P_1 P_3 = \sigma_2 dS \\ \text{area } P_1 P_2 = \sigma_3 dS \end{cases} \\ \text{PROIEZIONI AREA} \\ \text{SUL SGHENNA SU PIANI} \\ \text{PRINCIPALI } \{\sigma_i\} dS \end{aligned}$$

26/03/2013

Utilizzando la convenzione sulle der. te suveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} ; \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}$$

Avrà:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\text{Es. } \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (2u_{1,1}) = u_{1,1}$$

Si nota che per le componenti di scorrimento
si ha:

$$2\varepsilon_{ij} = \tau_{ij}, \text{ per } i \neq j$$

~~ε_{12}~~

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} \tau_{12}$$

il pedice di ε , $\{\varepsilon_\tau\}$ indica che le τ , ovvero $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$, descrivono le τ in termini ingegneristici, legati cioè a quelli tensionali del fattore $\times 2$.

LEGGE DI HOOKE

GENERALIZZATA

Relazioni sforzo-deformazione

Equazioni costitutive del materiale

Il vettore delle tensioni è legato a quello delle deformazioni delle caratteristiche del materiale. Nel tratto elastico, σ ed ε sono legate da prop. dirette: $\sigma = E \varepsilon$; noi assumeremo che il legame tra le σ e le ε sia del tipo rettilineo lineare anche in termini vettoriali:

LEGGE DI
HOOKE
GENERALIZZATA

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon_\tau\}$$

MATRICE DEI COEFF. ELASTICI: non ha 36 elementi indipendenti, ma 21 (l'en. elastica è "simmetrica")

INVERTIBILE PERCHÉ
NON SINGOLARE

$$[C]^{-1} = [S]$$

premultiplico per $[C]^{-1}$:

$$\{\varepsilon_\tau\} = [C]^{-1} \{\sigma\} = [S] \{\sigma\}$$

MATRICE DEI COEFF. DI
DEFORMABILITÀ DEL MATERIALE
(sempre 21 elementi)

N.B.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

IDENTITÀ

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

UNITARIA

I MATERIALI POSSONO ESSERE **OMOGENEI** o **ETEROGENEO**

Ogni caratteristica del materiale varia da p.to a p.to dello stesso;

ma caratteristica è invariante rispetto alla posizione;

Ora invece fissando un p.to del materiale, i materiali sono distinti in:

ORTOTROPO: materiali, in cui in ogni p.to, posso determinare 3 piani mutuamente ortogonali, rispetto ai quali le caratteristiche sono simmetriche. Questi piani individuano 3 assi perpendicolari tra loro, chiamati

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Facciamo ora i calcoli delle eq.:

3 eq. d'equilibrio

6 eq. di Hooke generalizzato

6 eq. $\{\epsilon_{ij}\} = f(u, v, w)$

6 $\{\sigma_{ij}\}$

6 $\{\epsilon_{ij}\}$

3 spostamenti (u, v, w)

15 equazioni

15 incognite

PROBLEMA BEN POSTO $\Rightarrow$ 1 soluzione unica

Sono però eq. differenziali del I ordine

+ EQ. AL CONFINO su σ e spostamenti.

Accade però che anche in sistemi semplici le soluzioni analitiche non ci sono, e si usano metodi numerici.

La teoria delle travi si basa essenzialmente su un axioma:
se conosco gli spostamenti dell'intero di un campo posso calcolare le deformazioni, da cui ottengo le tensioni.

Scopo delle mie analisi è quindi calcolare gli spostamenti in tutti i punti.

$$u(x, y, z) = F(x) G(y) H(z)$$

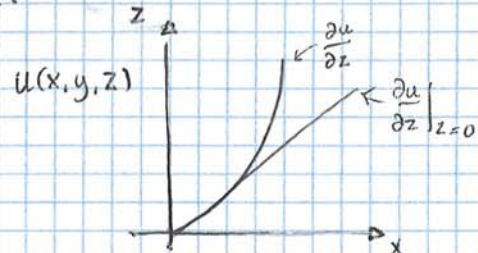
(sono gli spostamenti (nell'as. lungo x)
come prodotti di 3 funzioni di una sola variabile.

~~Nella teoria delle~~

Farei questo nella scrittura delle eq. per le piastre multi-strato.

$w(x,y,z) = w^{(0)}$ W LA APPROSSIMO A QUELLO CHE SUCCEDDE NEL SOLO PIANO MEDIO, COME ABBIAMO DETTO PRIMA.

chiamiamo $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = u^{(1)}(x,y,0)$



Quindi avremo

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u = u^{(0)} + z u^{(1)} \\ v(x,y,z) = v = v^{(0)} + z v^{(1)} \\ w(x,y,z) = w = w^{(0)} \end{cases}$$

QUINDI DEBBO CALCOLARE LE $u^{(0)}, u^{(1)}, v^{(0)}, v^{(1)}, w^{(0)}$
HO 5 INCOGNITE, HO BISOGNO DI 5 EQ., QUESTA TEORIA VIENE CHIAMATA **TEORIA DI MINDLIN**

Possiamo semplificare il tutto ipotizzando che sezioni piane restino piane, cioè $\gamma_{ij} = 0$, purché accada anche nelle partec, ^{non} essendoci scorrimento, inoltre i segmenti di spessori non variano di spessore ($w = \text{cost.}$), rettilinei e perpendicolari alle superficie deformata (ecco perché i due scorrimenti γ_{xz} e γ_{yz} sono uguali a zero purché

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = u^{(1)} + w_{,x}^{(0)} = 0 \Rightarrow u^{(1)} = -w_{,x}^{(0)} \\ \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = v^{(1)} + w_{,y}^{(0)} = 0 \Rightarrow v^{(1)} = -w_{,y}^{(0)} \end{cases}$$

se li sostituisco:

$$\begin{cases} u = u^{(0)} - z w_{,x}^{(0)} \\ v = v^{(0)} - z w_{,y}^{(0)} \\ w = w^{(0)} \end{cases}$$

~~MODELLO PIASTRA DI MINDLIN~~ **MODELLO PIASTRA DI KIRCHHOFF**
(con 2 incognite in meno)

TEORIA DELLE PICCOLE

DEFORMAZIONI

DEFORMAZIONI

Le linearizzazioni già fatte sono 2 $\rightarrow$ TRATTO LINEARE 2° ORDER (LINEARIZZAZIONE MATERIALE)
 $\rightarrow$ SOLO DER. 1° PRIME (" SPOSTAMENTI)

Gli spostamenti delle partec sono piccoli rispetto allo spessore, inoltre le deformazioni sono piccoli rispetto l'unità (1 significa raddoppiare, non sarebbe lineare).

La rigidità delle partec cercata trasversalmente è bassa, quindi la studieremo con carichi trasversali.

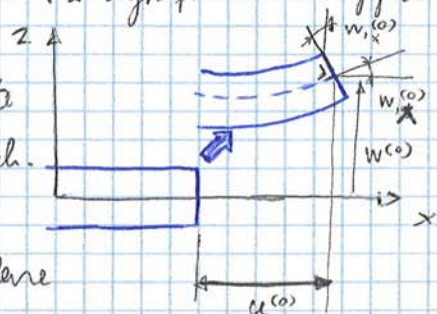
CAMPO DI DEFORMAZIONE

Se conosco il campo di spostamento, posso calcolare le deformazioni, come?

ϵ_z è sicuramente zero, e le γ_{yz} e γ_{xz} pure!

INTRODUCIAMO UN VETTORE $\{E_0\}$ DI DIM. MINORI $[3 \times 1]$

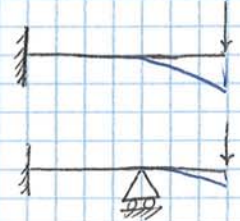
$$\{E_r\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{E_s\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix}$$



IN QUESTO MODO: $\sigma_z = C_{13} \epsilon_x + C_{23} \epsilon_y = 0$, così da ELIMINARE 3^a RIGA E COLONNA ANDANDO AL VETTORE COLONNA $[\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$;

AUMENTANDO I VINCOLI, UNA TRAVE DIVENTA MENO DEFORMABILE (PIÙ RIGIDA)

ECCO PERCHÉ, APPLICANDO QUESTE CONSIDERAZIONI ALLA PIASTRA DI KIRCHHOFF, CI SI ACCORGE CHE ANCHE LA PIASTRA È PIÙ RIGIDA DELLA REALTÀ (CON $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \epsilon_z = 0$), QUINDI PONGO SOLO $\sigma_z = 0$ MA NON LA ϵ_z :



$$\begin{cases} \sigma_x = C_{11} \epsilon_x + C_{12} \epsilon_y + C_{13} \epsilon_z \\ \sigma_y = C_{12} \epsilon_x + C_{22} \epsilon_y + C_{23} \epsilon_z \\ 0 = C_{13} \epsilon_x + C_{23} \epsilon_y + C_{33} \epsilon_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \epsilon_x + \left(C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \right) \epsilon_y = Q_{11} \\ \sigma_y = \left(C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \right) \epsilon_x + \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \epsilon_y = Q_{22} \\ \epsilon_z = -\frac{C_{13}}{C_{33}} \epsilon_x - \frac{C_{23}}{C_{33}} \epsilon_y \end{cases}$$

PIÙ IN GENERALE:

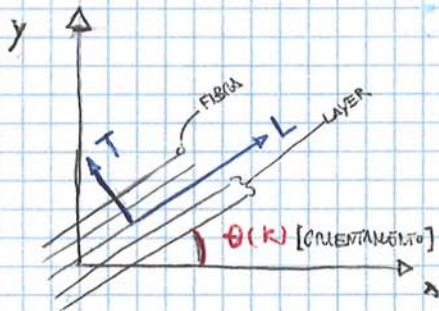
$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} C_{j3}}{C_{33}}, \quad i, j = 1, 2$$

MENTRE

$$Q_{66} = C_{66} \quad \text{e} \quad Q_{16} = Q_{26} = 0$$

MATERIALI COMPOSITI

RINFORZATI (FIBRE + MATRICE [RESINE]), FIBRE "BAGNATE" NELLA MATRICE, INOLTRE VENGONO DECISI ANCHE L'INCREMENTO DELLE FIBRE, E I "LAYER"



NOI LI CONSIDEREREMMO ORTOTROPICI (CON MATRICE E FIBRE RISPETTIVAMENTE ISOTROPICI), CON ASSI PRINCIPALI DI ORTOTROPIA L (ASSE DI FIBRA) E T (UNO PER y UNO PER z RUOTATI)

SIA Λ LA MATRICE DEI COSENI DIRETTORI DELLA DIREZIONE DEGLI ASSI PRINCIPALI D'ORTOTROPIA (L e T) RISPETTO AGLI ASSI GEOMETRICI (x, y) [IN GENERALE VARIABILI PER OGNI LAYER]:

$$\Lambda^{(k)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{DA cui: } \begin{Bmatrix} \sigma_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}$$

PRINCIPALI

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix} \quad \text{NOTAZIONI TENSORIALI}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \end{Bmatrix}$$

$$\text{perché } \begin{Bmatrix} \epsilon_{xp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p \end{Bmatrix}, \text{ ma } \begin{Bmatrix} \epsilon_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix} \text{ con } \begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \end{Bmatrix}$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE DELLE PIASTRE DI KIRCHHOFF

1) $\{N\} = \langle \{\sigma_p\} \rangle \quad M = \langle z \cdot \{\sigma_p\} \rangle$

dove $\{\sigma_p\} = [Q_p] \{\epsilon_p\}$
 $\{\epsilon_p\} = \{\epsilon_p^{(0)}\} + z \{K_p\} \quad \rightarrow \quad \{\sigma_p\} = [Q_p] (\{\epsilon_p^{(0)}\} + z \{K_p\})$

da cui $\rightarrow \{N\} = \langle [Q_p] \{\epsilon_p^{(0)}\} \rangle + \langle z \cdot [Q_p] \{K_p\} \rangle$

SFRUTTO PROPRIETÀ COMMUTATIVA
MATRICI E SOMMA INTEGRALE

$\{N\} = \langle [Q_p] \rangle \{\epsilon_p^{(0)}\} + \langle z [Q_p] \rangle \cdot \{K_p\} \rightarrow [Q_p] \text{ FUNZ. DI } z \text{ DIPENDE
DAGLI STRATI}$

$\{\epsilon_p^{(0)}\}, \{K_p\}$ INDIP. DA z

$\langle [Q_p] \rangle = [A] \quad \text{MEMBRANE STIFFNESS MATRIX - MATRICE RIGIDITÀ MEMBRANALI}$

$\langle z \cdot [Q_p] \rangle = [B] \quad \text{COUPLING " " - " " "ACCOPPIATE" 0
" " DI ACCOPPIAMENTO EFFETTI}$

$\{N\} = [A] \{\epsilon_p^{(0)}\} + [B] \{K_p\}$

2) $\{M\} = \langle z \cdot [Q_p] \rangle \{\epsilon_p^{(0)}\} + \langle z^2 [Q_p] \rangle \{K_p\}$

$\langle z^2 \cdot [Q_p] \rangle = [D] \quad \text{BENDING-TORSION STIFFNESS MATRIX - MATRICE RIGIDITÀ FLESSOTORSIONALI
TORG. E FLETT.}$

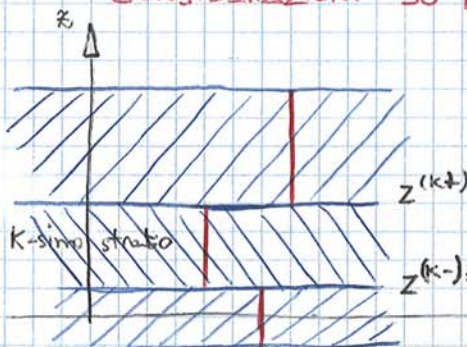
$\{M\} = [B] \{\epsilon_p^{(0)}\} + [D] \{K_p\} \quad \text{LEGANO FORZE E MOMENTI CON DEFORM.
MEMBRANALI E CURVATURE
TORSIONE}$

CASO PARTICOLARE: se $[B] = [0] \quad \begin{cases} \{N\} = [A] \{\epsilon_p^{(0)}\} \\ \{M\} = [D] \{K_p\} \end{cases}$

RESULTANTI SUL
PIANO MEMBRANALE

se $[B] \neq [0] \rightarrow \{N\}$ GENERA CURVATURE OLTRE A DEFORMAZ. MEMBRANALI
 $\{M\}$ // DEFORMAZIONI SUL PIANO MEMBRANALE OLTRE CURVATURE

CONSIDERAZIONI SU $[Q_p]$ IN CASO MULTI STRATO:



$[Q_p]$ È COSTANTE IN OGNI STRATO

NS = numero strati
 POSSO DIRE CHE

$$\int_{-h/2}^{+h/2} dz = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{k-}}^{z^{k+}} dz$$

OVVERO: $\int_{-h/2}^{+h/2} [Q_p] dz = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{k-}}^{z^{k+}} [Q_p] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \cdot (z^{k+} - z^{k-})$

ANALOGAMENTE: $\int_{-h/2}^{+h/2} z [Q_p] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \cdot \left(\frac{z^{(k+)^2} - z^{(k-)^2}}{2} \right)$

E: $\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [Q_p] dz = \dots$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

PRENDO UN CONCIO ELEMENTARE E FACIO EQUILIBRIO (N.B. SOLO FORZE TRASL.)

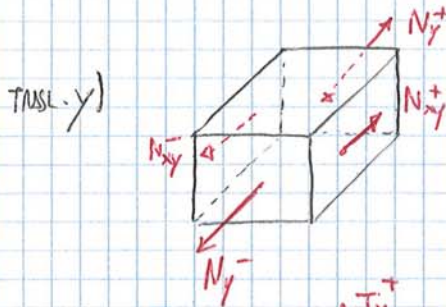
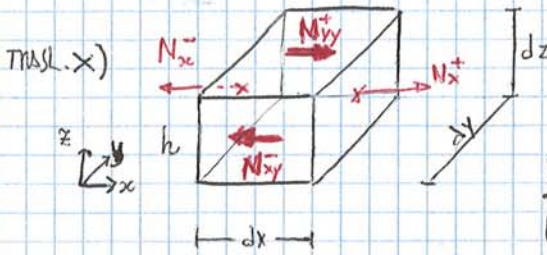
$$(N_x^+ - N_x^-) dy + (N_{xy}^+ - N_{xy}^-) dx = 0$$

FORZE PER
UNITÀ DI
LUNGHERA

Considero lo sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{cases} N_x^+ = N_x^- + N_{x,x} dx \\ N_{xy}^+ = N_{xy}^- + N_{xy,y} dy \end{cases}$$

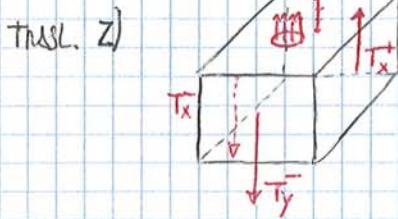
OTTENGO QUINDI: $(N_{x,x} dx dy + N_{xy,y} dx dy) = 0 \Rightarrow \boxed{N_{x,x} + N_{xy,y} = 0}$



$$\boxed{N_{xy,x} + N_{y,y} = 0}$$

SOLO CARICO TRASVERSALE

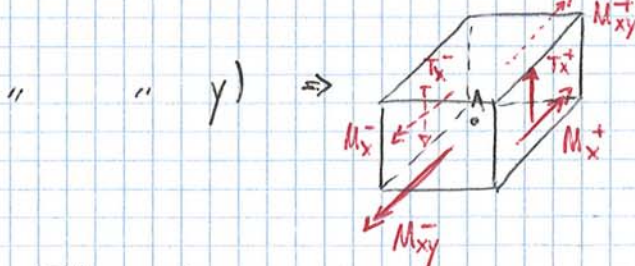
$$\boxed{T_{x,x} + T_{y,y} + \bar{q}_z = 0}$$



perché $(T_x^+ - T_x^-) dy + (T_y^+ - T_y^-) dx + \bar{q}_z dx dy = 0$

$$T_{x,x} dx dy + T_{y,y} dx dy + \bar{q}_z dx dy = 0$$

ROTAZIONE SU Z) $\Rightarrow$ D'ALAMBERT $T_{xy} = T_{yx}$



AVRÀ MOMENTO TORCENTE E FLETTENTE

$$T_x^+ = T_x^- + T_{x,x} dx \quad \rightarrow \quad T_x^- \downarrow \quad \uparrow T_x^+ \Rightarrow T_x^+ = T_x^- + T_{x,x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{x,x} dx dy + M_{xy,y} dy dx - T_x dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x = 0}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{2} T_x^- + \frac{1}{2} T_x^+$

N.B. MOMENTO DI $\bar{q}_z = 0$ SE IN C.G.,
OPPURE È INFINITESIMO II ORD.

ROTAZ. SU X) $\boxed{M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y = 0}$

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_z \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} -w^{(0)}_{,xx} \\ -w^{(0)}_{,yy} \\ -w^{(0)}_{,xy} \end{cases} \quad \text{ottenendo:}$$

$$\begin{cases} M_x = -D_{11}w^{(0)}_{,xx} - D_{12}w^{(0)}_{,yy} = 0 \\ M_y = -D_{12}w^{(0)}_{,xx} - D_{22}w^{(0)}_{,yy} = 0 \end{cases}$$

per $x=0, a$

$$\begin{cases} -D_{11}w^{(0)}_{,xx} - D_{12}w^{(0)}_{,yy} = 0 \\ -D_{12}w^{(0)}_{,xx} - D_{22}w^{(0)}_{,yy} = 0 \end{cases} \quad \text{PER } x=0 \text{ ABBIAMO } w^{(0)}|_{x=0} = 0 \Rightarrow w^{(0)}_{,xx}|_{x=0} = 0$$

Quindi $w^{(0)}(x,y)$ sarà una funz. tale che sia la stessa funz. che la sua der. ta si annullano per $x=0$ ed $y=0$ (c'è $(0,y)$ e $(x,0)$) $\Rightarrow$ NESSUN SPOSTAMENTO NESSUNA CURVATURA

$$\begin{cases} w^{(0)} = w^{(0)}_{,xx} = 0 & x=0, a \\ w^{(0)} = w^{(0)}_{,yy} = 0 & y=0, b \end{cases}$$

In questo caso (con questo vincolo) le soluzioni sarà del tipo generale + particolare con termine noto (il carico):

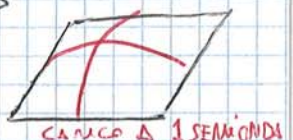
IL CARICO CHE FUNZ. È? $\rightarrow$ SVILUPPIAMO CON TAYLOR

$$\bar{q}_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) ; \quad \text{con } \begin{cases} \lambda_m = \frac{m\pi}{a} \\ \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \end{cases} ; \quad \begin{matrix} m, n \text{ SEMONDE} \\ \text{LUNGO } x, y \\ \text{RISPETTIVAMENTE} \end{matrix}$$

~~Assumo~~ Scriviamo anche la $w^{(0)}(x,y)$ come doppia espansione di Fourier:

$$w^{(0)}(x,y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y)$$

essa è soluzione dell'eq. differenziale. Sostituisco ~~entraambe~~ nelle eq. di $w^{(0)}$ rispettando le cond al contorno, ottenendo:



$$\begin{cases} w^{(0)}_{,xxxx} = w_{mn} \lambda_m^4 \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \quad \leftarrow \text{SOLA SOMMATORIA} \\ w^{(0)}_{,xx} = w_{mn} (-\lambda_m^2) \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \\ w^{(0)}_{,xxyy} = w_{mn} \lambda_m^2 \lambda_n^2 \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \\ w^{(0)}_{,yyyy} = w_{mn} \lambda_n^4 \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \end{cases}$$

Sostituisco ~~entraambe~~ ($w^{(0)}$ e $\bar{q}_z$):

$$[D_{11} \lambda_m^4 w_{mn} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 w_{mn} + D_{22} \lambda_n^4 w_{mn}] \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) = q_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y)$$

$$\Rightarrow w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4} \Rightarrow \text{HO SOLUZIONE}$$

COND. AL CONTORNO

$$w_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) = \begin{cases} \text{per } x=0 \rightarrow w=0 \\ \text{per } x=a \rightarrow w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot a\right) \sin \dots = 0 \\ \text{STESSO PER } y \end{cases}$$

PIASTRE SANDWICH

LAVORANO BENE A CARICHI CONCENTRATI

ANALISI & MODELLIZZAZIONE

SI PARTE SEMPRE DALL' ASSUNZIONE
CHE LA SPESSORE SIA TRASCURABILE
RISPETTO LE ALTRE 2 DIMENSIONI

h SPESSORE DEL CORE

h_f e h_b SONO GLI SPESSORI

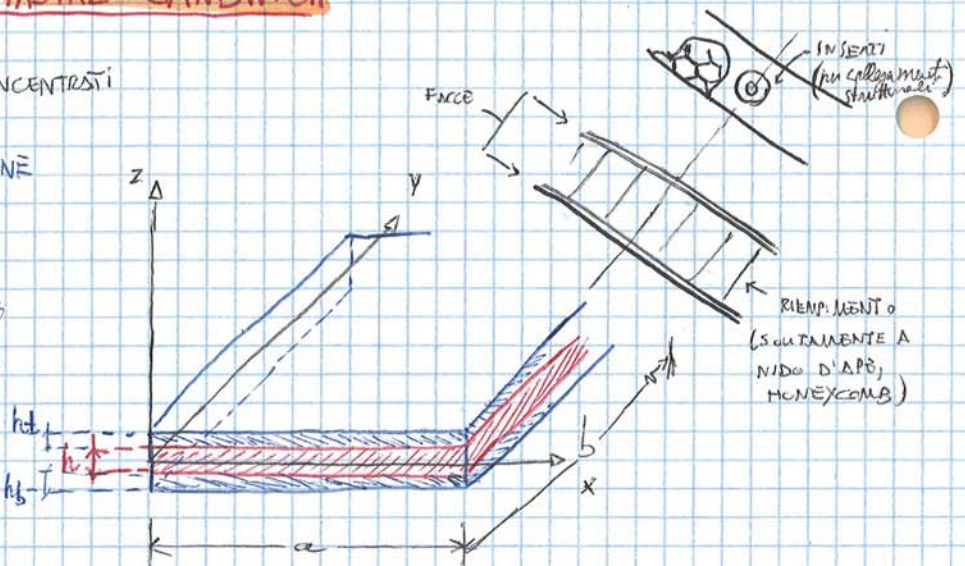
DELLE FACCE

SPESSORE TOTALE = $h + h_f + h_b$

MENTRE IL PIANO DI RIFERIMENTO LO FACCIAMO COINCIDERE COL PIANO DI
SIMMETRIA DEL CORE ($h/2$), E COINCIDERÀ CON QUELLO DELLA PIASTRA
SE $h_f = h_b$

ASSUNZIONI

- * CORE E FACCE A SPESSORE COSTANTE
- * IN GENERALE LE FACCE POSSONO ESSERE MULTISTRATO, DI MATERIALE ORTOTROPO E CHE CI SIA UNA PERFETTA ADEGENZA TRA GLI STRATI, SENZA SCORRIMENTI, E CHE POSSIAMO ORIENTARE LO STRATO ARBITRARIAMENTE
- * SIA IL CORE CHE LE FACCE OBEDISCONO ALLA LEGGE DI HOOKE
- * IL CORE È TRASVERSALMENTE ISOTROPO (LUNGO LA SPESSORE), NEL PIANO È INVECE ORTOTROPO (SEGUENDO ALCUNE LEGGI E FORMULE)
- * LO SPESSORE DEL CORE È MOLTO MAGGIORE DELLO SPESSORE DELLE FACCE.
- * DURANTE LA DEFORMAZIONE TUTTI P.T.I DI UNA NORMALE ALLA PIASTRA SI SPOSTANO DI UNA CERTA QUANTITÀ ($w = \text{cost}$, $\epsilon_z = 0$)
- * LO SPOSTAMENTO NEL PIANO PUÒ RITENERSI COSTANTE ALL'INTERNO DELLE FACCE (u e v INDIPENDENTI DA z)
- * LA DISTRIBUZIONE DEGLI SPOSTAMENTI NEL PIANO DEL CORE $u^{(c)}$ e $v^{(c)}$ È LINEARE.
- * LE TENSIONI $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ NEL CORE SONO TRASCURABILI (IL CORE ASSORBE LE T. TRASVERSALI)
- * GLI SFORZI TRASVERSALI τ_{xz} e τ_{yz} SULLE FACCE SONO TRASCURABILI
- * GLI SPOSTAMENTI SONO PICCOLI RISPETTO ALLO SPESSORE
- * GLI ~~DEFORMAZIONI~~ SFORZI NEL PIANO SONO PICCOLI RISPETTO ALL'UNITÀ



CAMPO DI TENSIONE

Seguendo la legge di Hooke (facile e core), vale la relazione del tipo $\sigma = C \cdot \dots$;
 ESSENDO LE FACCE DELLE PIASTRE, VALE LA LEGGE DI KIRCHOFF

$$\{\sigma^{(t)}\} = [Q_P^{(t)}] \{\epsilon^{(t)}\} =$$

$$\{\sigma^{(b)}\} = [Q_P^{(b)}] \{\epsilon^{(b)}\} =$$

↓
P=PIANO

Per il core, se considero le relazioni costitutive per un materiale ortotropo curvi:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ 0 & 0 & C_{26} & 0 & 0 & 0 \\ C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

RACCOMANDO τ_{xz}, γ_{xz} E SCRIVIAMOLA $\Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = C_{44} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = C_{55} \gamma_{yz} \end{cases}$

IL PASSAGGIO DA C A Q È DOVUTO AL PASSAGGIO DAL RIFERIMENTO (x,y,z) A (L,T),
 MA RIMANENDO UGUALE LA NORMALE, RIMANGONO UGUALI I COEFFICIENTI, MA PER UNIFORMARLI
 LA SOLUZIONE USANDO LE Q:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = C_{44} \gamma_{xz} = Q_{44} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = C_{55} \gamma_{yz} = Q_{55} \gamma_{yz} \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

CORE $\{\tau^{(c)}\} = [Q_T] \{\gamma^{(c)}\}$
 ↓
T=TRANSVERSE

RISULTANTI DI TENSIONE (PER UNITÀ DI LUNGHEZZA)

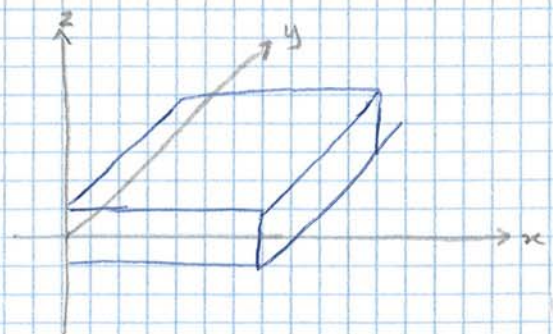
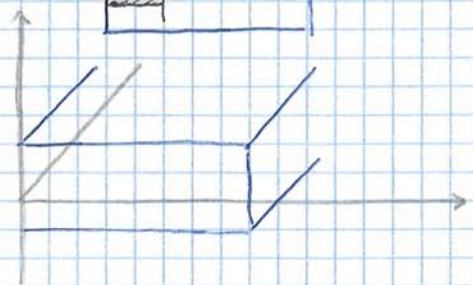
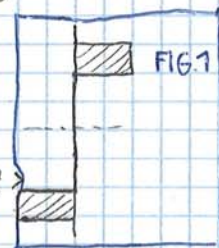
$$\{N\} \equiv \int_{-h/2-h_b}^{+h/2+h_t} \{\sigma\} dz = \int_{-h/2-h_b}^{-h/2} \{\sigma^{(b)}\} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_t} \{\sigma^{(b)}\} dz = \langle \{\sigma\} \rangle$$

ESSENDO LE σ ASSORBITE SOLO DALLE FACCE,
 AVREI UNA DISTRIBUZIONE COME IN FIG.1, QUINDI
 POSSO "SCINDERE" L'INTEGRALE LO STESSO
 RAGIONAMENTO VALE PER M, PERCHÉ NON CI SONO σ
 NEL CORE

$$\{M\} \equiv \int_{-h/2-h_b}^{+h/2+h_t} z \{\sigma\} dz = \int_{-h/2-h_b}^{-h/2} z \{\sigma^{(b)}\} dz + \int_{h/2}^{+h/2+h_t} z \{\sigma^{(b)}\} dz$$

PER LA T, INVECE, AL CONTRARIO, VALE SOLO IL CORE

$$\{T\} \equiv \int_{-h/2-h_b}^{+h/2+h_t} \{\tau\} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau^{(c)}\} dz$$



CASO PARTICOLARE:

SUPPONIAMO CHE IL SANDWICH SIA SIMMETRICO (SIA GEOMETRICO CHE DEL MATERIALE)
 SI OTTIENE CHE LA MATRICE DI RIGIDEZZA MEMBRANALE SUP. È UGUALE A QUELLA INF.
 MENTRE LE $[C]$ SONO OPPOSITE

QUINDI: $[B] = [0]$ ed $\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\}$

$$[A] = 2[A_t] = 2[A_b]$$

$$[C] = [0]$$

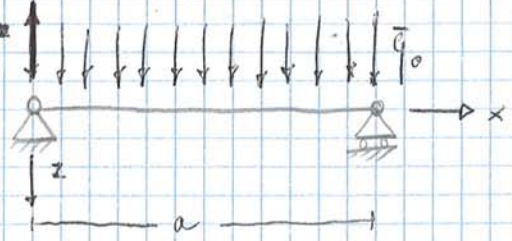
$$[D] = h[C^{(b)}] \text{ ed } \{M\} = [D]\{K\}$$

PER UN SANDWICH SIMMETRICO
 SI OTTIENE LO STESSO CHE PER
 LA PIASTRA MULTISTRATO SIMM.

CIOÈ SFORZI NORMALI E MOMENTI
 SONO DISACCOPLIATI

ANALISI STRUTTURALE TRAVE SANDWICH

sostanzialmente è una piastra vincolata su due lati opposti, e si inietta ~~se~~ come una superficie cilindrica, e le grandezze quindi non varieranno lungo un asse (nel fig. l'y)
Possiamo quindi considerare una sola "striscia" di piastra lungo x;



Problema di FORMULAZIONE SPOSTAMENTI -

- DEFORMAZIONE CILINDRICA, con un sandwich simmetrico, con carico lungo z.

$$G_{13} = C_{44} \quad G_{13} \cdot h = A_{44}$$

EQUAZIONI D'EQUILIBRIO

$$\begin{aligned} [\rightarrow x] & \quad \times \\ [\rightarrow y] & \quad \times \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [\rightarrow x] \\ [\rightarrow y] \end{aligned}} \right\} \text{NESSUN CARICO}$$

$$[\rightarrow z] \quad G_{13} h (\psi_{x,x} + w_{,xx}^{(0)}) + \bar{q}_z = 0 \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$[\curvearrow y] \quad \times : \psi_{x,xy} = \psi_{y,yy} = 0 \Rightarrow D_{66} \psi_{,yy} = G_{23} h \psi_y \quad \left(\text{MA ESSENDO } \psi_y = 0 \text{ PER VIA DELLA FLESSIONE CILINDRICA (RAPPRESENTA LA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE X)} \right)$$

$$[\curvearrow x] \quad D_{11} \psi_{,xx} - G_{13} h (\psi_x + w_{,x}^{(0)}) = 0$$

Rispetto alle cond. al contorno (avendo vincoli "appoggi") hanno forze e curvatura nulle: $w^{(0)} = \psi_{x,x} = 0$ su $x = 0, a$

RISAPITOLANDO:

$$\begin{cases} D_{11} \psi_{,xx} - G_{13} h (\psi_x + w_{,x}^{(0)}) = 0 \\ G_{13} h (\psi_{x,x} + w_{,xx}^{(0)}) + \bar{q}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_x &= \{M\} = [D] \{K\} \Rightarrow M_x = D_{11} K_x + D_{11} K_y \\ \begin{cases} K_x = \psi_{x,x} \\ K_y = \psi_{y,y} \end{cases} \\ \Rightarrow 0 &= D_{11} \psi_{x,x} \Rightarrow \psi_{x,x} = 0 \end{aligned}$$

Una prima soluzione (eq): $(\psi_{x,x} + w_{,xx}^{(0)}) = (\psi_x + w_{,x}^{(0)})_{,x} \xrightarrow{\int dx} (\psi_x + w_{,x}^{(0)})$
mentre $\int \bar{q}_0 dx = x \bar{q}_0 + c_1$

$G_{13} h (\psi_x + w_{,x}^{(0)}) + \bar{q}_0 x + c_1 \downarrow$ e sostituendola nelle ~~due~~ ^I eq. di prima:

$$D_{11} \psi_{,xx} - G_{13} h (\psi_x + w_{,x}^{(0)}) = 0 \xrightarrow{\int dx} D_{11} \psi_{,x} + \frac{1}{2} \bar{q}_0 x^2 + c_1 x + c_2$$

e attraverso le cond. al contorno ottengo: $c_1 = -\frac{\bar{q}_0 a}{2}$; $c_2 = 0$
ottenendo:

$$\psi_{x,x} = -\frac{\bar{q}_0 a^2}{2 D_{11}} \cdot \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \text{ che sostituendo nelle prime:}$$

$$G_{13} h (\psi_x + w_{,x}^{(0)}) + \frac{\bar{q}_0 a}{2} \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) = 0$$

PIASTRE IRRIGIDITE

Vediamo una piastra irrigidita da elementi longitudinali (lungo x).

Hp. PIANO DI RIF. $\Rightarrow$ PIANO MEDIO PIASTRA

IRRIGIDIMENTI UGUALI SEZIONE E MATERIALE
ANCHE CODIMENTO IRRIGIDIMENTO (CORRENTE)

SONO MOLTO MAGGIORI DI QUELLI DEL PANNELLO.

DISTANZA IRRIGIDIMENTI (PASSO) MINORE $\sim 3,4,5$ VOLTE LA BASE DEL CORRENTE

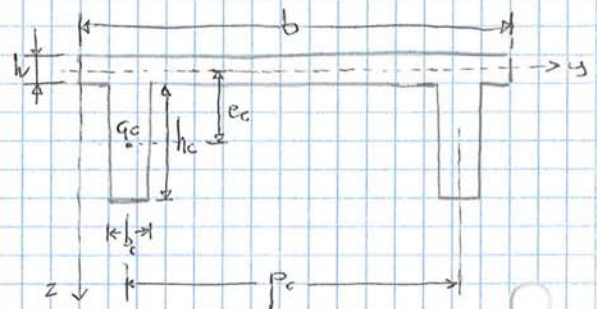
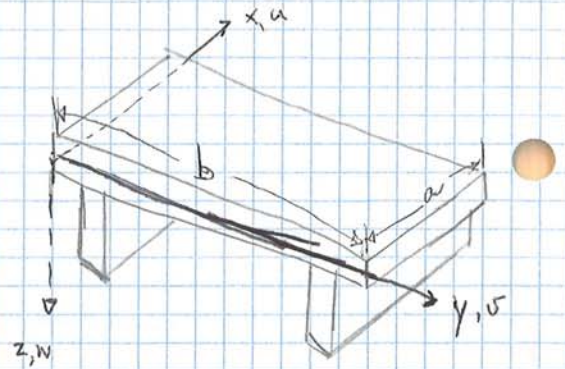
METODO DELLE RIGIDIZZE SPALMATE

LA PIASTRA "SPALMATA" SI COMPORTA COME UNA PIASTRA DI KIRCHHOFF

h_c = ALZ. CORRENTE b_c = BASE CORRENTE

e_c = ECCENTRICITÀ DEL CORRENTE $\equiv z_{q.corrente}$

p_c = PASSO CORRENTE



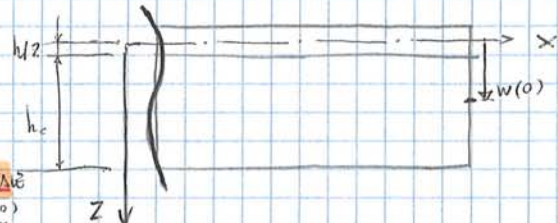
In riferimento al piano medio dell'rivestimento, seguendo la teoria delle piastre di Kirchhoff, cerchiamo cosa avviene nel piano xz , cioè quello in cui il corrente h_c è il piano di simmetria:

(x, z)

PER LA NOTAZIONE CORRENTE $\begin{cases} w^{(c)} = w^{(0)} \\ u^{(c)} = u^{(0)} - zw^{(0)} \end{cases}$

CAMPO SPOSTAMENTI DEI P.TI CHE SONO AL PIANO TRASVERSALE

quindi per $\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_c$ $\begin{cases} w^{(c)} = u^{(0)} - zw^{(0)} \\ w^{(c)} = w^{(0)} \end{cases}$



CAMPO DI DEFORMAZIONE (DEI P.TI E AL PIANO TRASVERSALE) E TENSIONI (1)

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{,x}^{(c)} = \epsilon_{xx}^{(c)} = u_{,x}^{(0)} - zw_{,xx}^{(0)} = \epsilon_{xx}^{(0)} + zK_{xx} \\ \sigma_{xx}^{(c)} = \sigma_{xx}^{(0)} = E_c \epsilon_{xx}^{(c)} = E_c \epsilon_{xx}^{(0)} + z E_c K_{xx} \end{cases} \quad E_c \text{ MODULO DI YOUNG CORRENTE}$$

CAMPO DEI RISULTANTI DELLE TENSIONI (1) [C'È SOLO MOMENTO E SFORZO NORMALE]

$$N_{xx,i}^{(c)} = \int_{A_c} \sigma_{xx,i}^{(c)} dA$$

$$M_{xx,i}^{(c)} = \int_{A_c} z \sigma_{xx,i}^{(c)} dA$$

"i" GENERALE
IRRIGIDIMENTO

$$\begin{cases} N_{xx,i}^{(c)} = E_c A_c \epsilon_{xx}^{(0)} + E_c A_c e_c K_{xx} ; \\ M_{xx,i}^{(c)} = E_c A_c e_c \epsilon_{xx}^{(0)} + E_c (I_{gc} + e_c^2 A_c) K_{xx} ; \end{cases}$$

con $I_{gc} = \frac{b_c h_c^3}{12}$; $S_{yc} = e_c A_c$ MOMENTO STATICO CORR. ; $I_{gc} + e_c^2 A_c = I_{ye}$

MOMENTO ECCENTRICO
RISPETTO ASSI CORR.

MOMENTO INERZIA
RISPETTO ASSI CORR.

però a rif. alto

Uguualmente per i momenti:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{M}_{x,i} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_c A c c}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_{c,i} + \begin{bmatrix} \frac{E_c (I_{ge} + e_c^2 A c)}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}_{c,i}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{M}_{y,j} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_c A c c}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_{c,j} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_c (I_{ge} + e_c^2 A c)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}_{c,j}$$

Formalmente lo quindi espresso per i correnti:

$$\begin{cases} \{\tilde{N}_x\}_i = [A_x^c]_i \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [B_x^c]_i \{K\} \\ \{\tilde{M}_x\}_i = [B_x^c]_i \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [D_x^c]_i \{K\} \end{cases} \quad \begin{cases} \{\tilde{N}_y\}_j = [A_y^c]_j \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [B_y^c]_j \{K\} \\ \{\tilde{M}_y\}_j = [B_y^c]_j \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [D_y^c]_j \{K\} \end{cases}$$

Posso quindi costruire la matrice per $\{N^t\}$ ed $\{M^t\}$ per il sistema;

$$\text{Totale } \{N^t\} = \{N\} + \sum_{i=1}^I ([A_x^c]_i \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [B_x^c]_i \{K\}) + \sum_{j=1}^J ([A_y^c]_j \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [B_y^c]_j \{K\})$$

$$\rightarrow = [A] \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [B] \{K\}$$

quindi risulta:

$$\{N^t\} = ([A] + \sum_{i=1}^I [A_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [A_y^c]_j) \{\varepsilon_p^{(0)}\} + ([B] + \sum_{i=1}^I [B_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [B_y^c]_j) \{K\}$$

$$\{N^t\} = [A^t] \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [B^t] \{K\} \quad \text{con } \begin{cases} [A^t] = [A] + \sum_{i=1}^I [A_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [A_y^c]_j \\ [B^t] = [B] + \sum_{i=1}^I [B_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [B_y^c]_j \end{cases}$$

Uguualmente per $\{M^t\}$

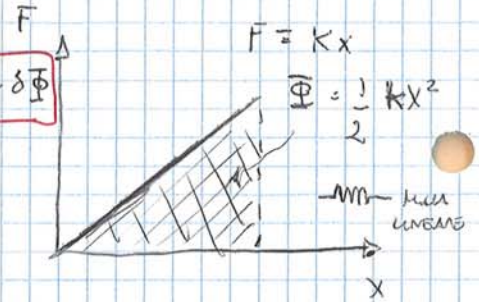
$$\{M^t\} = [B^t] \{\varepsilon_p^{(0)}\} + [D^t] \{K\} \quad \text{con } \begin{cases} [B^t] = \text{'' '' '' ''} \\ [D^t] = [D] + \sum_{i=1}^I [D_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [D_y^c]_j \end{cases}$$

PER PIASTRE SIMMETRICAMENTE INROGIDITE, ESSENDO e_c PRIMA POSITIVO POI NEGATIVO, PENSIAMO LE MATRICI $[B^c]$. NORMALMENTE PERÒ, SI COMPORTANO ANALOGAMENTE AI PANNELLI NON SIMMETRICI.

Mentre il lavoro esterne:

$$\mathcal{L}^{(e)} = 2 P \eta \Rightarrow \delta \mathcal{L}^{(e)} = \mathcal{L}_{,\eta}^{(e)} \delta \eta = \mathcal{L}_{,\eta}^{(e)} \eta \delta \alpha$$

$$\delta \mathcal{L}^{(e)} = \mathcal{L}_{,\eta}^{(e)} L \sin \alpha \delta \alpha \Rightarrow \boxed{\delta \mathcal{L}^{(e)} = 2PL \sin \alpha \delta \alpha}$$



Substituendo:

$$(2PL \sin \alpha - 4Kt\alpha) d\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \forall p \text{ e' una configurazione d'equilibrio}$$

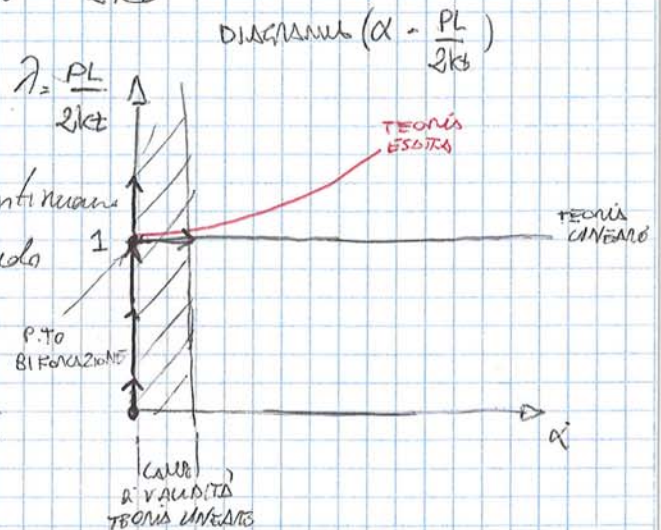
per un
a26Re



Quarta Un'altra soluzione è per cui:

$$2PL \sin \alpha - 4kt d = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{PL}{2kt}$$

Greg caudo vede anche qui il p.to di biforcazione ($\lambda=1$), aumentando $\lambda = \frac{PL}{2kx}$ il carrier arriva a $\lambda=1$, lì, o si continua su $\alpha=0$, e le aste continuano a puntarsi, oppure α cresce, seguendo la teoria esatta.



LINEARIZZAZIONE

Per la linearizzazione fattivo delle ipotesi su α , che sia piccolo, tale che i

$$\cos \alpha \approx 1 \quad \text{e} \quad \sin \alpha \approx \alpha$$

e sostituendo:

sostituendo:

$$(2PL - 4kt)\alpha' \delta\alpha = 0 \quad \text{--- soluzioni ---}$$

$\alpha = 0, \forall p$

$\frac{PL}{2kt} = 1, \forall \alpha$

Con la T.L. si può τ^{xo} l'uniformazione su cui $\frac{PL}{2kt} > 1$;

4 CRITERI PER L'ANALISI DI STABILITÀ

L-3 STATIC

1 DYNAMICS $\Rightarrow$ FREQUENZA = $\frac{124150221}{10554} = \emptyset$

1° STATICO) carico che ^{genera} porta a una flessione infinita

2° STATICO) CR. DI EUERO, aumentando il carico, aumenta il moment. in cui, se t_v perturb. annulla

3° statico) es. a. ussange usa inco come parametro l'en. potenziale totale

• 'h̃zom̃ə ∫ q t

PRESENTA

PREUNTA

TABLO NOMLO

ASIN VICON 2A

Nelle teorie linearizzate (cioè $\sin \alpha \approx \alpha$ e $\cos \alpha \approx 1$), la derivata seconda di E_t :

$$d^2 E_t / d\alpha^2 = 4kt - 2PL > 0 \Leftrightarrow 4kt(1-\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$$

UNICA COND. STABILE, dato che come detto prima la teoria linearizzata non spiega cosa accade per valori di $\lambda > 1$.

Si conclude che per α piccoli la teoria linearizzata fornisce risultati in buon accordo con quelle esatte (sostanzialmente la retta orizzontale è la derivata del ramo delle teorie esatte).

IL METODO DELLE IMPERFEZIONI DI FORMA LO FAREMO A ESECUZIONE

IL CRITERIO DINAMICO NON LO FACCIAMO

CRITERIO DI EULERO-BERNOULLI

Identifica i p.ti di biforcazione, sebbene non dia informazioni sulle stabilità.

Faremo prima l'analisi di stabilità, cioè andare a vedere se le conf. di equilibrio sono stabili! Considereremo un sistema perfetto, trattato in analisi non lineare, per cui le cond. di equilibrio erano:

$$\alpha_{eq} = 0; \quad \lambda = \frac{d_{eq}}{\sin \alpha_{eq}}, \quad \text{andremo ora a perturbare la config. d'equilibrio facendolo variare l' α_{eq} !}$$

$$\alpha_{eq} \rightarrow \alpha = \alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} \quad \text{da sostituire in } \begin{cases} 4kt\alpha - 2PL \sin \alpha = 0 \\ \Rightarrow \alpha - \lambda \sin \alpha = 0 * \\ \Rightarrow \lambda = \frac{PL}{2kt} \end{cases}$$

(intorno delle cond. d'eq.)

$$\alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} - \lambda \sin \alpha_{eq} \cos \epsilon \alpha^{(1)} - \lambda \sin \epsilon \alpha^{(1)} \cos \alpha_{eq} = 0$$

Vedo ora se per λ fissato, esiste contemporaneamente la configurazione d'equilibrio (α_{eq}) e la configurazione perturbata ($\dots + \epsilon \alpha^{(1)}$)

$$\text{Essendo } \epsilon \ll 1 \Rightarrow \cos \epsilon \alpha^{(1)} \approx 1 \quad \sin \epsilon \alpha^{(1)} \approx \epsilon \alpha^{(1)}$$

così faccio un'analisi di stabilità LINEARIZZATA di una analisi d'equilibrio non lineare!

$$\alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} - \lambda (\sin \alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} \cos \alpha_{eq}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$* \alpha_{eq} - \lambda \sin \alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} (1 - \lambda \cos \alpha_{eq}) = 0 \Leftrightarrow$$

tell'eq. d'equilibrio

Concludiamo che per questo sistema a 1 grado di libertà, che raggiunto il limite del carico per cui le cond. d'equilibrio va in crisi, posso fare una analisi linearizzata sia per ottenere l'equilibrio che per la stabilità. Se sono interessato ~~all'equilibrio~~ al POST-BUCKLING, cioè il comportamento in post-critico, sono costretto a fare una analisi non lineare.

mentre le cond. al continuo cambiano in:

$$B.C.) \quad \begin{cases} w = 0, & x = 0, L \\ w_{,xx} = 0, & x = 0, L \end{cases}$$

Dobbiamo trovare un'eq. una funt. $w(x)$ che soddisfi l'eq. e le B.C

$w(x) = w_{eq} = 0$ CONFIGURAZIONE D'EQUILIBRIO INDEFORMATA $\rightarrow$ rispetta l'eq. e le BC
è stabile?

utilizziamo il METODO DEGLI STATI DI EQ. ADISCONTI; introduciamo una perturbazione

$$w = w_{eq} + \epsilon w^{(1)}, \text{ con } \bar{p} \text{ INVARIATO}$$

$$\begin{cases} M = M_{eq} + \epsilon M^{(1)} \\ H = H_{eq} + \epsilon H^{(1)} \end{cases}$$

LA PERTURBAZIONE DI H RISULTA UGUALE A ZERO

$\downarrow$
in quanto $\bar{p}$
rimane invariato
 $= \bar{p}$

Riprendendo l'eq. precedente a cui applicare le perturbazioni:

$$M_{,xx} + H w_{,xx} = 0 \Rightarrow (M_{eq} + \epsilon M^{(1)})_{,xx} + H_{eq} (w_{eq} + \epsilon w^{(1)})_{,xx} = 0$$

$$\Rightarrow M_{eq,xx} + \epsilon M^{(1)}_{,xx} + H_{eq} (w_{eq,xx} + \epsilon w^{(1)}_{,xx}) = 0 \quad \text{raccoleggo e ottengo:}$$

$$M_{eq,xx} + H_{eq} w_{eq,xx} + \epsilon (M^{(1)}_{,xx} + H_{eq} w^{(1)}_{,xx}) = 0$$

CONFIGURAZIONE
DI EQUILIBRIO SCRITA
IN COND. DI EQUILIBRIO
 $= 0$

$\rightarrow$ PER ESSERE $= 0$, ESSENDO ϵ QUALSIASI MA $\neq 0$,
AVREMO

$$M^{(1)}_{,xx} + H_{eq} w^{(1)}_{,xx} = 0$$

EQUAZIONE DI STABILITÀ

(formalmente identica a quella d'equilibrio, comparso però le perturbazioni)

$$M^{(1)}_{,xx} + (H_{eq} w^{(1)}_{,x})_{,x} = 0$$

$\downarrow$ incremento $\downarrow$ momento applicato agli estremi

$$EJ w^{(1)}_{,xxxx} + \lambda \bar{p}_0 w^{(1)}_{,xx} = 0$$

le BC non variano invece!

$$\begin{cases} M = M_{eq} + \epsilon M^{(1)} = 0 \Rightarrow M^{(1)} = 0 \\ \text{per } x = 0, L \\ w'' = 0 \text{ per } x = 0, L \end{cases}$$

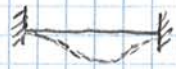
Il problema agli autovalori si pone quando abbiamo eq. di campo e cond. al continuo omogenee. Nel caso dell'eq. generale ~~non~~ non hanno cond. omogenee ($H \neq 0$) e riesce a trovare una soluzione. Nelle eq. di stabilità invece, essendo tutto omogeneo, trova solo la forma della soluzione. La soluzione generica di questa eq. sarà:

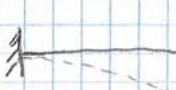
La σ_{cr} dipende dalle condizioni al contorno (noi abbiamo per ora analizzato il semplice appoggio).

Se considero il rapporto $A_{eff} = \frac{L_{eff}}{S}$ vale la formula che abbiamo visto prima.

La lunghezza effettiva L_{eff} è la distanza tra 2 fermi consecutivi dell'asta compressa deformata. Sarà sostanzialmente, a seconda dei vincoli, una frazione δ della lunghezza geometrica:

$$L_{eff} = \delta L$$

PER ASTA INCERNATA ALE ESTREMITÀ $\delta = 0.5$ 

PER " " A 1 SOLA ESTREMITÀ E LIBERA ALL'ALTRA $\delta = 2$ 

PER ASTA SIMPLY SUPPORTED $\delta = 1$

Se ho un'asta semplicemente appoggiata ho snellezza A_{ss} , la snellezza delle corrispondente della incernata è pari a $A_{cc} = 2 A_{ss}$ mentre per l'incernata a 1 sola estremità e libera all'altra sarà $A_c = \frac{1}{2} A_{ss} = \frac{1}{4} A_{cc}$ [???

Nel caso di aste con snellezza inferiore a quelle limite, non posso usare le teorie euleriana

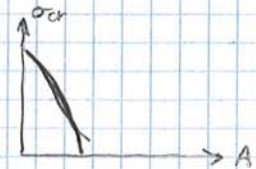
IMP: Comportamenti delle aste compresse?
Necessario definire snellezza e materiale

ASTE CORTE

Per snellezze inferiori a quelle limite, cioè $\sigma_P < \sigma_{cr}$

FORMULA DI JOHNSON

$$\sigma_{cr} = \sigma_s - \frac{\sigma_s^2 A^2}{4\pi^2 E} ; \text{ è una parabola che si ricurva all'ipotesi di Euler per } \sigma_{cr} = \sigma_s$$

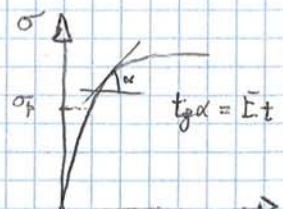


FORMULA DEL MODULO TANGENTE

Stessa forma di Euler, solo che al posto del modulo di elasticità ha quello tangente E_t , che dipende dal livello di carico:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{A^2}$$

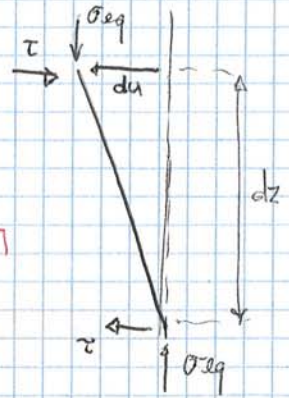
FUNZIONE BENE NEL CAMPO AEROSPAZIALE



Tutte queste formule che abbiamo visto riguardano sempre INSTABILITÀ GLOBALE, mentre le sezioni trasversali sostanzialmente non ne risente. Per le strutture in parete sottile più, più determinati cernichi, si ha cedimento per INSTABILITÀ LOCALE (soprattutto aperte, ma anche per le chiuse).

Per l'eq. verticale sono sempre appeso, così come l'orizzontale. Devo vedere solo quello alle rotazioni:

$$\sigma_{eq} \cdot du = \tau \cdot dz, \quad \frac{du}{dz} = \tan \beta \approx \beta \Rightarrow du = \beta dz$$



Ma $du = r \cdot \theta \cdot dz$ quindi $\beta dz = r \cdot \theta \cdot dz \Rightarrow \tau = r \cdot \theta \cdot \sigma_{eq}$

quindi per quanto riguarda il momento torcente necessario per equilibrare:

$$M_t^{ex} = \int_S \tau \cdot r \cdot dS = \int_S \sigma_{eq} \cdot r^2 \cdot \theta \cdot dS \Rightarrow M_t^{ex} = \sigma_{eq} \cdot \theta \cdot \int_S r^2 \cdot dS = \sigma_{eq} \cdot \theta \cdot J_p$$

Affinché ci sia equilibrio dovrà avere:

$$M_t^{ex} = M_t^{in} \quad \text{con} \quad M_t^{in} = G J_t \cdot \theta$$

ottenendo:

$$\sigma_{cr,t} = G \frac{J_t}{J_p}$$

→ σ CRITICA PER INSTABILITÀ TORSIONALE

→ RIGIDEZZA TORSIONALE

MOMENTO POLARE D'INERZIA DELLA SEZIONE TRASVERSALE CALCOLATO RISPETTO AL C.T.

SOLTANTAMENTE PER UNA SER. CHIUSA LA $\sigma_{cr,t}$ È ESTREMAMENTE ELEVATA (A VOLTE SUPERANO ANCHE ALLA σ D'ATTIVITÀ) E NON VA FATTO IL CALCOLO DI $\sigma_{cr,t}$.

$$J_t = 4 \cdot \Omega^2 \int \frac{dC}{s}$$

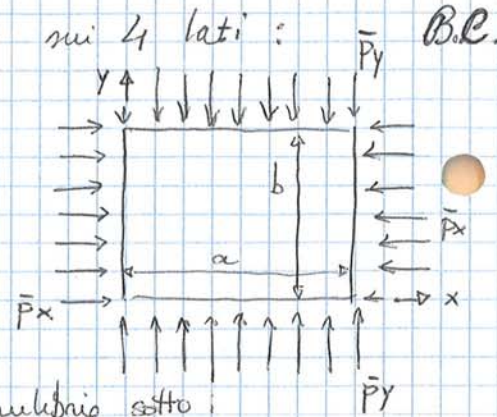
Supponiamo il pannello semplicemente appoggiato sui 4 lati: B.C.

per $x=0, a$: $w = M_x = H_{xy} = 0$

$H_x = -\bar{p}_x$

per $y=0, b$: $w = M_y = H_{xy} = 0$

$H_y = -\bar{p}_y$



Ora vediamo se la configurazione "piana" è in equilibrio sotto:

carichi $\bar{p}_x$ e $\bar{p}_y$:

STATO DI PREBUCLING $\Rightarrow w = 0$; $H_x = -\bar{p}_x$; $H_y = -\bar{p}_y$; $H_{xy} = 0$

Si ha: $M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \{M_x\} = [0] \text{ K} \end{array} \right\}$ CURVATURA, MA $\dot{w} = 0 \Rightarrow M_{x,xx} = 0$

LA SOLUZIONE $w = 0$ SODDISFA IDENTICAMENTE L'EQ.

UGUALE PER M_y e M_{xy}

Ora ci chiediamo: la conf. piana è stabile?

PERTURBIAMO, SOSTITUIAMO, ACCOGLIAMO (EQ. DI EQUILIBRIO = 0).

EQ. DI STABILITÀ LINEARIZZATA

Identica a quelle d'equilibrio, con apice (1)

$M_{x,xx}^{(1)} + 2M_{xy,xy}^{(1)} + M_{y,yy}^{(1)} - \bar{p}_x w_{,xx}^{(1)} - \bar{p}_y w_{,yy}^{(1)} = 0$ B.C. $x=0, a$: $w^{(1)} = M_x^{(1)} = 0$
 $y=0, b$: $w^{(1)} = M_y^{(1)} = 0$

ANALISI PER PIASTRA CROSS-PLY SIMMETRICA

$\{M\} = [D]\{K\}$ $[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$
 $\{K\} = \begin{bmatrix} -w_{,xx}^{(1)} \\ -w_{,yy}^{(1)} \\ -2w_{,xy}^{(1)} \end{bmatrix}$

$D_{11} w_{,xxxx}^{(1)} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy}^{(1)} + D_{22} w_{,yyyy}^{(1)} + \bar{p}_x w_{,xx}^{(1)} + \bar{p}_y w_{,yy}^{(1)} = 0$

LA SOLUZIONE È DI TIPO ARMONICO

$w^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y$

$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$

Posto $R = \bar{p}_y / \bar{p}_x$ $\rightarrow \begin{cases} R > 0 & \bar{p}_x \text{ e } \bar{p}_y \text{ A COMPRESSIONE O TRAZIONE ENTRABI} \\ R < 0 & \text{" " " UNO A COMPRESSIONE E UNO A TRAZIONE} \end{cases}$

deriva e sostituisco nell'eq., ottengo:

$\bar{p}_{x,cr} = \frac{\lambda_m^4 D_{11} + \lambda_m^2 \lambda_n^2 2(D_{12} + 2D_{66}) + \lambda_n^4 D_{22}}{\lambda_m^2 + R \lambda_n^2}$

FISSATO R e λ_m e λ_n , CONOSCENTO LA STRATIFICAZIONE DELLA PIASTRA, CALCOLO $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$.

POSSO CALCOLARE LA $\bar{p}_{x,cr}$ E DI CONSEGUENZA

TRASMETTO R , LA $\bar{p}_{y,cr}$.

carico critico: per cui coesistono conf. piana e quella deformata con m e n semonde rispettivamente lungo x e y .

PER PANNELLI CROSS-PLY SIMMETRICI MULTISTRATO CALCOLI A COMPRESSIONE SUI 4 LATI.

Consideriamo come prime le conf. piane, vedendole se è in equilibrio:

$$H_x = H_y = 0$$

$$H_{xy} = -\bar{p}_{xy}$$

$$W = 0$$

$$H_{x,x} + H_{y,y} = 0$$

$$H_{xy} + H_{y,x} = 0$$

$$H_{x,xx} = 0$$

LA SOLUZIONE PIANALE PIANO ($W=0$) IN CUI ALL'INTERNO
LA H_{xy} È COSTANTE E PARIA A $-\bar{p}_{xy}$, SODDISFA LE
EQ. D'EQUILIBRIO.

Questa configurazione è stabile?

Perturbiamo,

$$\dots -2 \bar{p}_{xy} W_{,xy}^{(1)} = 0$$

QUESTO PROBLEMA NON AMMETTE SOLUZIONE ANALITICA!
PERCHÉ LA DERIVATA MUSTA $W_{,xy}$ DEVE SOLUZIONE
ARMONICA MI FA USCIRE IL COSENO, DOVE HO
TUTTI SENI, NON POSSO RACCOLGERE E SEMPLIFICARE.

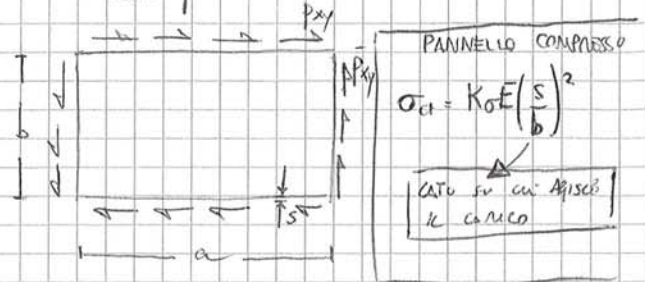
NON SIGNIFICA
INSTABILE

Bisogna cercare con una soluzione approssimata.

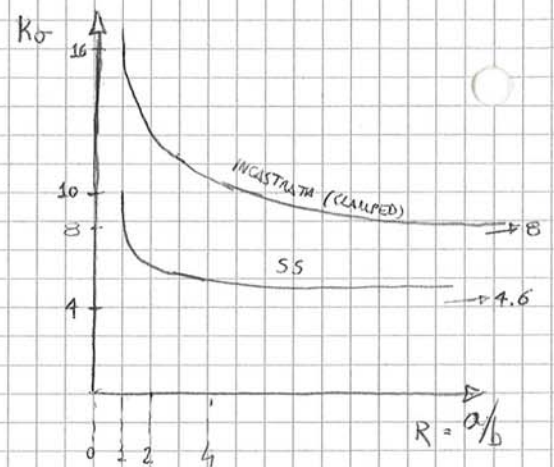
Quindi è prevedibile che per un valore di τ_{sol} le fibre compresse andranno in instabilità (mentre quelle in trazione lavorano ancora), avendo un inglobamento lungo la direzione di compressione. Analizziamo che la struttura delle formule che dà il carico critico di questo pannello è simile a quella del pannello compresso:

$$\tau_{crit} = K E \left(\frac{s}{b} \right)^2$$

↳ LATO PIÙ PICCOLO DEL PANNELLO
↳ INDICA IL PANNELLO CILINDRICO A TAGLIO



Esistono anche in questo caso dei grafici che forniscono il parametro di buckling in funzione del rapporto di forme in pianta. Come si può vedere i grafici per $R = \frac{a}{b} < 1$ non hanno senso (significa $b > a$). Abbiamo 2 curve a ricorde dei vincoli (Simply supported edges o clamped edges).



Poi accade che una volta che il pannello sollecitato a taglio

il pannello sollecitato a taglio ha un post-critico STAGNATO, cioè la configurazione di equilibrio non è più piana, ma una è anche stabile, cioè per aumentare la deformazione devo aumentare il carico.

Proprio per questo i pannelli in aeronautica vengono fatti lavorare in stato di tensione tangenziale pure. [Cosa accade per $\tau_{sol} \gg \tau_{cr}$?

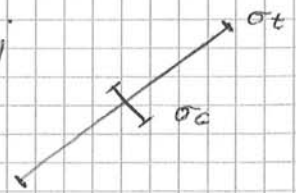
Vediamo per $\tau_{sol} \approx 5:6:7 \times \tau_{cr}$

FINO ALLA τ_{cr} LAVORANO TUTTE LE FIBRE!
A QUEL PUNTO LE σ_c ASSUMONO LA τ_{cr} , MENTRE LE σ_t ASSUMONO ANCORA.

Siamo quindi in campo di **TENSIONE DIAGONALE COMPLETO**, dove ha cura che le fibre tese continuano ad assorbire tensione, mentre le fibre compresse si sono fermate a τ_{cr} .

Essendo $\sigma_c \ll \sigma_t$ ($\tau_{sol} \gg \tau_{cr}$), assumo $\sigma_c \approx 0$!
Cioè le fibre lavorano solo lungo una diagonale.

Qual è lo stato di sollecitazione di un pannello che lavora in stato di tensione diagonale completo?



Cosa ci interessa conoscere? $\tau, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_t, \sigma_c$

Consideriamo ora $\tau'_{soll} = \tau_{cr}$ in CTTP

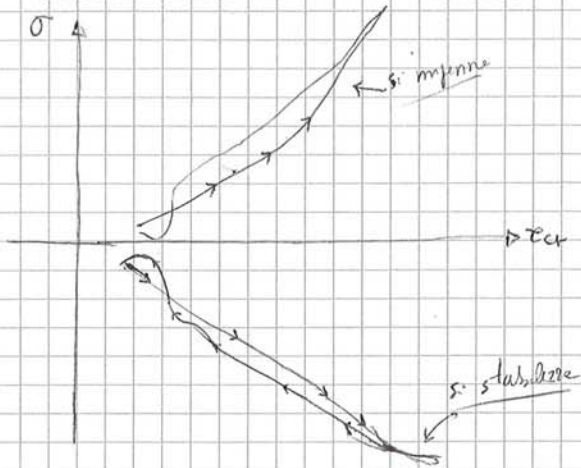
$$\begin{cases} \tau = \tau_{cr} \\ \sigma_t = \tau_{cr} \\ \sigma_c = \tau_{cr} \\ \sigma_x = \sigma_y = 0 \end{cases}$$

	τ'_{soll}	τ''_{soll}	ETDP
τ	τ_{cr}	$\Delta\tau$	$\tau_{cr} + \Delta\tau$
σ_t	τ_{cr}	$2\Delta\tau$	$\tau_{cr} + 2\Delta\tau$
σ_c	τ_{cr}	0	τ_{cr}
σ_x	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$
σ_y	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$

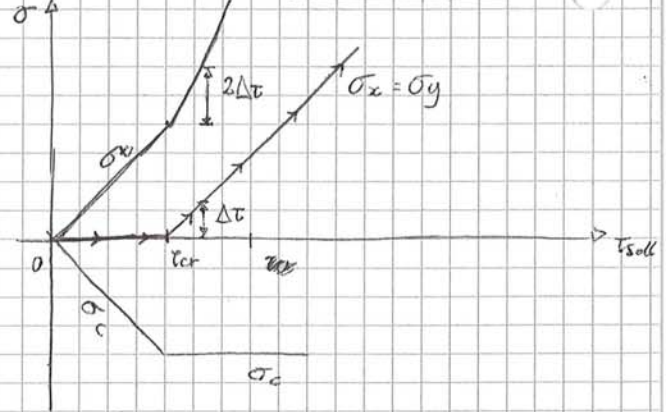
Consideriamo ora $\tau''_{soll} = \Delta\tau$ in CTDC

$$\begin{cases} \tau = \Delta\tau \\ \sigma_t = 2\Delta\tau \\ \sigma_c = 0 \\ \sigma_x = \sigma_y = \Delta\tau \end{cases}$$

ANDAMENTO DELLE TENSIONI DI UN PANNELLO SOLLECITATO A TAGLIO - CASO SPERIMENTALE



ANDAMENTO DELLE TENSIONI DI UN PANNELLO SOLLECITATO A TAGLIO - PSE



METODO AGH ELEMENTI FINITI

È un metodo numerico di approssimazione di una soluzione. Viene usato quando non si è in grado di trovare una soluzione analitica.

Si basa sulle formulazioni variazionali o differenziali, che sono rispettivamente fondate sul principio di Rayleigh-Ritz (principio della stazionarietà dell'energia potenziale totale) e dei residui pesati (principio di Galerkin). A questi due metodi viene applicata una formulazione discreta, che porta all'analisi F.E.M. (Finit Element Method) o alla formulazione variazionale.

PRINCIPIO DELLA STAZIONARIETÀ DELL'EN. POTENZIALE TOTALE

Tra tutte le configurazioni congruenti, la configurazione equilibrata è quella che rende stazionaria l'en. potenziale totale del sistema. Se esprimiamo la configurazione deformata mediante uno spostamento regolare (funzioni continue, derivate prime continue, ecc.) è assicurata automaticamente la congruenza, e applico il principio. Così tra tutti gli spostamenti compatibili con i vincoli geometrici, quella effettivamente presente è quella che rende stazionaria l'en. potenziale totale.

PROCEDIMENTO:

L'aumento del campo di spostamenti all'interno del corpo viene descritto come combinazione lineare di N funzioni delle coordinate spaziali, scelte a priori (FUNZ. BASE).

$$u(x) = f(x) \approx \sum_{m=1}^N a_m \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^N b_n \cos \frac{n\pi x}{L} + a_0$$

$$u(x) \approx \sum_{n=1}^N c_n \Phi_n(x) \quad \text{con} \quad a_m = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} f(x) dx ; b_n = \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx$$

Si sfrutta la proprietà che l'integrale di seno e coseno in che è zero per $m \neq n$ (PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ), che implica la loro indipendenza lineare. Come detto prima le funzioni base, che sono in campo di spostamento, oltre ad essere linearmente indipendenti devono soddisfare anche i vincoli esterni.

Si calcolano le deformazioni e le tensioni conseguenti.

Si calcola ~~anche~~ l'en. potenziale totale del sistema, che risulta essere funzione delle N costanti di combinazione lineare (margini del problema).

DALL'EN. $u(x)$ CALCOLO $E = E(\mathbf{c}_n, \mathbf{b}_n)$ CON a_m, b_n COSTANTI, SI PUÒ APPLICARE HOOKE

$\{\phi, x\}$ è una matrice colonna $N \times 1$ $\{\phi, x\}^T$ $1 \times N$

il prodotto $\{\phi, x\} \{\phi, x\}^T$ è una matrice $N \times N$ $[K]$

$$U_p = \frac{1}{2} \{C\}^T [K] \{C\} \quad \text{con} \quad [K] = \int_0^L EA \{\phi, x\} \{\phi, x\}^T dx$$

$$K_{ij} = \int_0^L EA \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx = \frac{\partial^2 U_p}{\partial C_i \partial C_j} \quad \text{GENERICO ELEMENTO DELLA MATRICE } [K]$$

Indicando invece con V_p il potenziale dei carichi applicati:

$$V_p = - \int_0^L \bar{p}_x(x) u(x) dx = - \{C\}^T \int_0^L \bar{p}_x \{\phi\} dx = - \{C\}^T \{P\} \quad \text{FORMA LINEARE IN } \{C\}$$

$$\text{con } \{P\} = \int_0^L \bar{p}_x \{\phi\} dx \quad \text{e} \quad P_i = \int_0^L \bar{p}_x \phi_i dx = \frac{\partial U_p}{\partial C_i}$$

Indicando con Π_p l'en. potenziale totale:

$$\Pi_p = U_p + V_p = \frac{1}{2} \{C\}^T [K] \{C\} - \{C\}^T \{P\}$$

Cercando il p.to di minimo ($d\Pi_p/d\{C\} = 0$)

$$\frac{d\Pi_p}{d\{C\}} = \frac{1}{2} \{C\}^T [K] \{C\} - \{P\} = 0$$

SISTEMA DI N EQ. IN n INCOGNITE

soluzione approssimata $\{C\} = [K]^{-1} \{P\} \Rightarrow$ da cui $\Rightarrow \hat{u}_N(x) = \{C\}^T \{\phi\}$

CASO $N=1$

Le più semplice forme di eq. indipendenti linearmente e che rispettano le cond. di continuità e di vincolo sono le potenze di x .

$$\{\phi_n(x) = x^n, n=1, \dots, N$$

$$\{u(0) = \phi_n(0) = 0$$

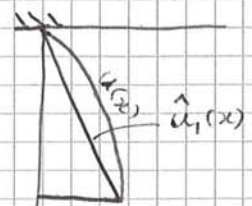
$$\{C\} \Rightarrow C_1; \quad \{\phi\} \Rightarrow \phi_1 = x \quad \text{calcolando } U_p = \frac{1}{2} EAL C_1^2$$

$$\text{con } [K] \Rightarrow K_{11} = K = EAL$$

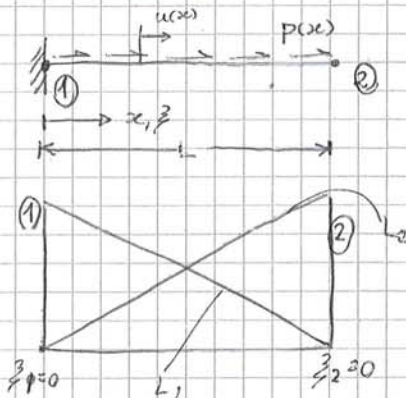
$$V_p = -\frac{1}{2} \bar{p}_0 L^2 C_1; \quad \{P\} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \bar{p}_0 L^2$$

$$\frac{d\Pi_p}{d\{C\}} = [K] \{C\} - \{P\} = 0 \Rightarrow \boxed{EAL C_1 - \frac{1}{2} \bar{p}_0 L^2 = 0}$$

$$C_1 = \frac{\bar{p}_0 L}{2EA} \Rightarrow \hat{u}_1(x) = \frac{\bar{p}_0 L}{2EA} x \quad \text{SOLUZIONE APPROSSIMATA}$$



$N=2$



2 stazioni

$$\hat{u}_2(x) = U_1 L_1^{(2)}(x) + U_2 L_2^{(2)}(x)$$

$$\hat{u}_2(\xi) = U_1 L_1^{(2)}(\xi) + U_2 L_2^{(2)}(\xi)$$

$$L_1^{(2)} = 1 - \frac{x}{L} = 1 - \xi \quad L_2^{(2)} = \frac{x}{L} = \xi$$

• I DOU NOMI DI LAGRANGE VALGONO 1 NELLA STAZIONE, 0 NELLE ALTRE

$$K_{ij} = \int_0^L EA \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx = \frac{EA}{L} \int_0^1 L_{i,\xi}^{(2)} L_{j,\xi}^{(2)} d\xi \Rightarrow [K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_i = \int_0^L \bar{p}(x) \phi_i dx = \bar{p}_0 L \int_0^1 L_i^{(2)} d\xi \Rightarrow \{P\} = \frac{1}{2} \bar{p}_0 L \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{U\} = \{P\} \Rightarrow \{U\} = [K]^{-1}\{P\} \text{ NO! } [K] \text{ non è singolare,}$$

perché non avendo applicato le cond. al contorno ($[K]$ valida qualunque siano le cond. al contorno, abbiamo solo costruito le funz. base) il sistema è come se fosse labile, non c'è en. di deformazione elastica (bensì moto di corpo rigido). Dobbiamo applicare le cond. al contorno:

$$\hat{u}_2(\xi) = U_1 L_1^{(2)}(\xi) + U_2 L_2^{(2)}(\xi) \Rightarrow u(0) = U_1 \underset{\text{val. } 1}{L_1^{(2)}(0)} + U_2 \underset{0}{L_2^{(2)}(0)} \Rightarrow \boxed{U_1 = u(0) = 0}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{U_1=0} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Devo introdurre le reazioni vincolari ($\{R\}$) per definire come sta vincolato il sistema:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$



Nel nostro caso non c'è vincolo in ②, avrà $R_2 = 0$

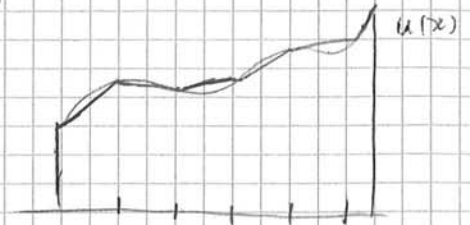
$$\begin{matrix} U_1=0 \\ R_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{scrivendole per esteso}$$

$$\begin{cases} K_{22} U_2 = P_2 \\ K_{12} U_2 = P_1 + R_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2 = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}_0 L^2}{EA} \checkmark \\ R_1 = -\bar{p}_0 L \checkmark \end{cases}$$

Confronta con il caso precedente $\{x\}$, $N=1$ / [X] di LAGRANGE ha grado $p=N-1$

$$\hat{u}_2 = U_2 L_2^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}_0 L}{EA} x$$

La soluzione
 Dato che dipende fortemente dal valore di carico, che influisce sul numero di stazioni che aumentano il grado del polinomio interpolante, mi interesso trovare un modo per approssimare la soluzione $u(x)$.
 Piuttosto che aumentare le stazioni per approssimare con polinomi di grado crescente, approssimo invece con polinomi lineari del primo grado su ogni tratto. Il che significa che posso prendere a modello d'approssimazione l'approssimazione fatta in un intervallo.



ALTRO SCHEMA: 2 TRATTI LINEARI

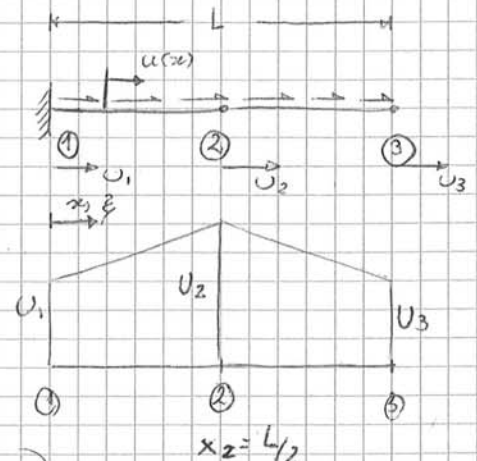
$$\textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \quad \hat{u}_2(x) = U_1 L_1^{(2)}(x) + U_2 L_2^{(2)}(x); \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\textcircled{2} \cdot \textcircled{3} \quad \hat{u}_2(x) = U_2 L_1^{(2)}(x) + U_3 L_2^{(2)}(x); \quad \frac{L}{2} < x \leq L$$

Se introduco la coordinata ξ , che cambia di valore a seconda dei tratti, posso scrivere normalizzato:

$$\hat{u}_2(\xi) = U_1 L_1^{(2)}(\xi) + U_2 L_2^{(2)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad \xi = \frac{x}{L/2}$$

$$\hat{u}_2(\xi) = U_2 L_1^{(2)}(\xi) + U_3 L_2^{(2)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad \xi = \frac{x}{L/2} - 1$$



$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= 1 - \frac{x}{L} = 1 - \xi \\ L_2^{(2)} &= \frac{x}{L} = \xi \end{aligned}$$

$$U_P = \frac{1}{2} EA \int_0^L u_{,x}^2 dx = \frac{1}{2} EA \left[\int_0^{L/2} u_{,x}^2 dx + \int_{L/2}^L u_{,x}^2 dx \right] = \frac{1}{2} \frac{EA}{L/2} \left[\int_0^1 u_{,\xi}^2 d\xi + \int_0^1 u_{,\xi}^2 d\xi \right]$$

⊗ Poiché $\hat{u}_2(\xi)$ nel primo tratto posso scrivere come:

$$\hat{u}_2(\xi) = [U_1 \quad U_2] \begin{Bmatrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{u}_{2,\xi} = [U_1 \quad U_2] \begin{Bmatrix} L_{1,\xi}^{(2)} \\ L_{2,\xi}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$u_{,\xi}^2 = u_{,\xi} \cdot u_{,\xi}^T \Rightarrow$$

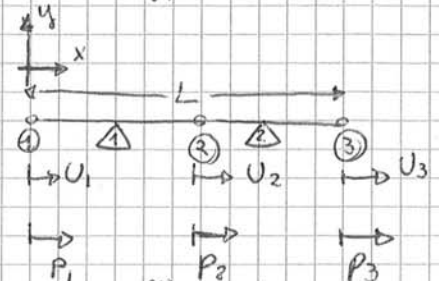
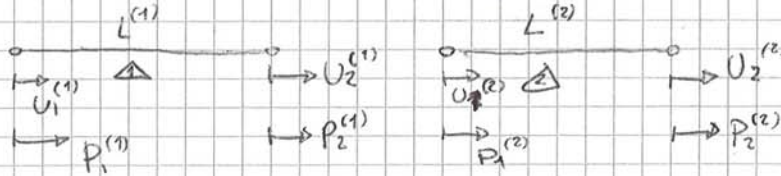
$$U_P = \frac{1}{2} \frac{EA}{L/2} \left[\int_0^1 [U_1 \quad U_2] \begin{Bmatrix} L_{1,\xi}^{(2)} \\ L_{2,\xi}^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{1,\xi}^{(2)} & L_{2,\xi}^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} d\xi + \int_0^1 [U_2 \quad U_3] \begin{Bmatrix} L_{1,\xi}^{(2)} \\ L_{2,\xi}^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{1,\xi}^{(2)} & L_{2,\xi}^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} d\xi \right]$$

Debbò costruire la soluzione:

DICENDO AL CALCOLATORE SONO STATE FATTE LE $[K]^{(e)}$, $\{U\}^{(e)}$ e $\{P\}^{(e)}$ mi costruisce le matrici e vettori complete.

Dobbiamo introdurre 2 condizioni che sono l'EQUILIBRIO ai nodi e la CONGRUENZA ai nodi. Inoltre abbiamo la DISCRETIZZAZIONE nel passaggio dal globale al locale, e poi l'ASSEMBLAGGIO nel passaggio dal locale al globale. Vediamo:

N.B. FUNZ. DI FORMA/INTERPOLAZIONE
SOTTO LE FUNZ. CASE



EQUILIBRIO ai Nodi

- ① $P_1 = P_1^{(1)} \Rightarrow P_1 = K_{11}^{(1)} U_1^{(1)} + K_{12}^{(1)} U_2^{(1)}$
- ② $P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \Rightarrow P_2 = K_{12}^{(1)} U_1^{(1)} + K_{22}^{(1)} U_2^{(1)} + K_{11}^{(2)} U_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} U_2^{(2)}$
- ③ $P_3 = P_3^{(2)} \Rightarrow P_3 = K_{12}^{(2)} U_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} U_2^{(2)}$

$$[K]^{(1)} \{U\}^{(1)} = \{P\}^{(1)}$$

$$[K]^{(2)} \{U\}^{(2)} = \{P\}^{(2)}$$

CONGRUENZA ai Nodi

$$U_1^e = U_1^{(1)}$$

$$U_2 = U_2^{(1)} = U_1^{(2)}$$

$$U_3 = U_2^{(2)}$$

STRUTTURA

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{12}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

con $E^{(1)} = E^{(2)} = E$; $A^{(1)} = A^{(2)} = A$; $L^{(1)} = L^{(2)} = L/2$; $P_1^{(1)} = P_2^{(1)} = P_1^{(2)} = P_2^{(2)} = \bar{p}_0 \frac{L}{4}$

ovvero:

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{p}_0 L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Supponiamo di voler dare le istruzioni al calcolatore:

NUM. NODI: $NN = 3$; NUM. ELEMENTI: $NE = 1 \Rightarrow 3 \times 1 = 3 \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

NUM. ELEMENTI: $NE = 2$ ciclo-fora; $\Rightarrow$ costruisce le $[K]^{(e)}$ e le assembla.

- INPUT -

GEOMETRIA RISPETTO AL SIST. DI REF. GLOBALE (STRUTTURA)
(Sist. di ref. utilizzato per disegnare le strutture)

MATRICE CONNECTIVITY
(di connettività)

per il linguaggio di programmazione

ELEMENTO	1	2
NODO 1	1	2
NODO 2	2	3

NODO	1	2	3
x	0	L/2	L
y	0	0	0

SIST. DI REF. LOCALE

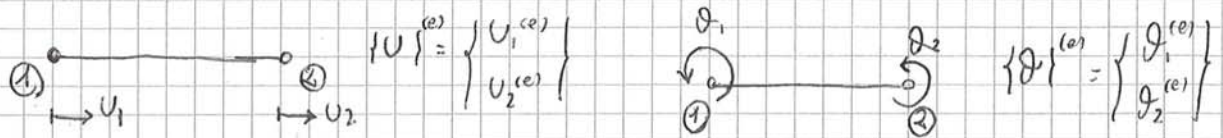
de la correlazione tra il sistema locale dei nodi e il sist. globale
è la relazione tra sistema di riferimento scelto da me e quello che usa il software

SULLA SCELTA DELLE FUNZIONI

ix FORMS

(~~For the following~~)

Abbiamo visto fino ad ora l'elemento asta, incastrato solo assialmente, che ha 2 gradi di libertà traslazionali, U_1 e U_2 . Abbiamo poi visto l'elemento "barra", incastrato con torsione con grado di libertà dell'elemento, θ_1 e θ_2 .



Come si vede il vettore dei g.d.l. nodali si chiude in modo differente, a seconda dell'elemento. Per uniformarci lo chiameremo:

$\{q\}^{(e)}$ VETTORE G.D.L. NODALI

Uguualmente le funzioni base, o di forma, ϕ , le chiameremo:

$[N]$ $\begin{cases} N \text{ FUNZIONI DI FORMA} \\ [N] \text{ MATRICE DELLE FUNZIONI DI FORMA} \end{cases}$

N.B: CASO ASTA: $N_1 = L_1^{(2)}$
 $N_2 = L_2^{(2)}$

La scelta delle funzioni di forme diventa importante per definire un criterio per decidere: gradi del polinomio interpolante, la ~~sce~~ scelta. Bisogna tenere dei parametri nodali e il modello di spostamento.

Il grado di libertà mi dice, in ogni intervallo, che grado deve avere la funzione (di lineare, quadratico, cubico, ecc.), anche se si vede che aumentando il ~~grado~~ grado del polinomio (e quindi del numero di p.ti interpolanti, pari al grado più uno) definisce i vincoli sulla funzione, rendendomi la soluzione **oscillante**.

Il modello di spostamento mi dice che, soddisfacendo certi requisiti, la soluzione numerica si avvicina a quella analitica.

Quali sono questi criteri di soddisfare?

* ELEMENTI COMPATIBILI O CONFORMI

Questi elementi il cui campo di spostamento ammette una funzione, in tutte le strutture, le continuità delle der. te fino all'ordine $R-1$, dove R è l'ordine massimo di der. zione che compare nell'espressione delle deformazioni elastiche U_p .

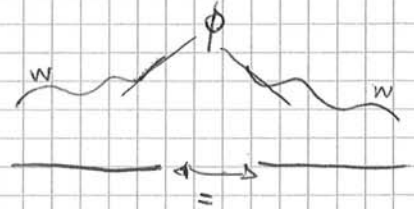
ES. U_p Per m' altra: $U_p = \frac{1}{2} EA \int_0^L u_{,x}^2 dx \Rightarrow$ DENS prima

$$\gamma = 1 \Rightarrow \gamma - 1 = \emptyset \text{ funzione u continue}$$

2 g.d.l. per ogni nodo, l'elemento trave ha 4 g.d.l.:

$$\{q\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \phi_1 \\ W_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

usando questa seconda scrittura per facilitare l'implementazione in macchine.



ovvero:

$$\{q^{(e)}\}^{(c)} = \begin{Bmatrix} \{q\}_1^{(e)} \\ \{q\}_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Avevo 4 incognite, posso approssimare con un polinomio di III grado:

$$W(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

Cond. da imporre agli estremi:

$$W=W_1; W,x=\phi_1 \text{ per } x=0; \quad W=W_2; W,x=\phi_2 \text{ per } x=L$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = W_1, \alpha_1 = \phi_1 \\ \alpha_2 = -\frac{2}{L}\phi_1 - \frac{2}{L}\phi_2 + \frac{3}{L^2}(W_2 - W_1) \\ \alpha_3 = \frac{1}{L^2}(\phi_2 - \phi_1) - \frac{2}{L^3}(W_2 - W_1 - \phi_1 L) \end{cases}$$

Quindi sostituendo i valori dei coefficienti in $W(x)$.

Avrà infine, raccogliendo le incognite nodali:

$$W^{(e)}(x) = [N]^{(e)} \{q\}^{(e)} = N_1^{(e)} W_1 + N_2^{(e)} \phi_1 + N_3^{(e)} W_2 + N_4^{(e)} \phi_2$$

$1 \times 1 \quad 1 \times 4 \quad 4 \times 1$

$$W(x) = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right) W_1 + \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \phi_1 + \left(3\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) W_2 + \left(\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \phi_2, \quad \phi = W,x$$

$\xi = x/L$ COORDINATE NATURALI

$$W(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) W_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) L \phi_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3) W_2 + (1 - \xi^2 + \xi^3) L \phi_2$$

$$= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} W_1 \\ \phi_1 \\ W_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [N]^{(e)} \{q\}^{(e)}$$

Le N in questo caso sono polinomi di Hermite, H_i , i cui indici i, j indicano i parametri complessivamente per definire, le "i" indica il grado di libertà:

$$[k]^{(e)} = \left(\frac{EJ}{L^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6L^{(e)} & -12 & 6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 4L^{(e)} & -6L^{(e)} & 2L^{(e)} \\ -12 & -6L^{(e)} & 12 & -6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & -2L^{(e)} & -6L^{(e)} & 4L^{(e)} \end{bmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA COME SEMPRE

Se calcoliamo il $\det[k]$ sarebbe uguale a zero non avendo imposto le cond. al contorno.

Vediamo il vektore dei carichi nodali:

ESPRESSIONE

② $V_p^{(e)} = -\{q\}^{(e)T} \{P\}^{(e)}$ dove essere in questa forma;

$$W_{ex} = \int_L \bar{p}_z(x) w(x) dx = -V_p^{(e)}$$

$$V_p^{(e)} = - \int_{L^{(e)}} \bar{p}_z^{(e)}(x) w^{(e)}(x) dx$$

$$\underline{L} = \{q\}^{(e)T} [N]^{(e)T}$$

$$V_p^{(e)} = - \int_{L^{(e)}} \bar{p}_z^{(e)} \{q\}^{(e)T} [N]^{(e)T} dx = -\{q\}^{(e)T} \int_{L^{(e)}} \bar{p}_z^{(e)}(x) [N]^{(e)T} dx$$

Se confronto questo risultato con l'espressione generale ②:

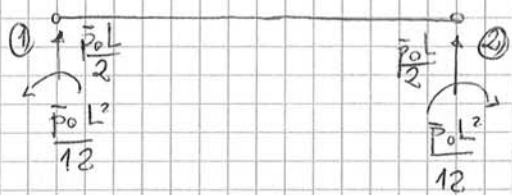
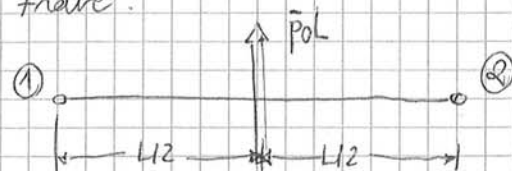
$$\{P\}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \bar{p}_z^{(e)} [N]^{(e)T} dx$$

il primo e il terzo elemento di $\{P\}^{(e)}$ sono forze, il secondo e il quarto sono momenti

Vorrei a seconda del carico $\bar{p}_z^{(e)}(x)$, facciamo il caso di carico distribuito uniformemente sulla trave:

$$\bar{p}_z^{(e)}(x) = \bar{p}_0^{(e)}$$

VERSO POSITIVO DEI MOMENTI
PER COME È STATO
CONSTATTO L'ELEMENTO:
SENSO ANTICLOCKWISE INTORNO
ALL'ASSE Y



$$\{P\}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 \\ L^{(e)}/6 \\ 1 \\ L^{(e)}/6 \end{bmatrix}$$

Abbiamo raggiunto questo risultato sfruttando un'EQUAGUANZA DEL CARICO tra il sistema continuo e del sistema a carichi concentrati e spostamenti discreti. Osserviamo che i due sistemi di carichi sono, da un p.to di vista statico, equivalenti tra loro.

RESULTANTE UGUALE ✓

— MOMENTO (RISPETTO ALL'ASSE MOLENTA) = 0
per il continuo

$M_{L/2} = 0$ per il discreto ✓