



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1505A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Giunto

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Eserc.
Prof. Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

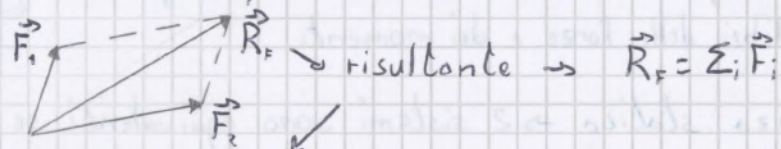
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

30/09

Statica

Forza → grandezza fondamentale della statica

↓ modifica lo stato di quiete di una massa
vettore

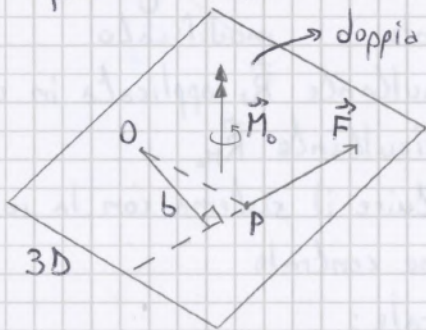


in componenti cartesiane: $R_{F_x} = \sum_i F_{i_x}$ $R_{F_y} = \sum_i F_{i_y}$ $R_{F_z} = \sum_i F_{i_z}$

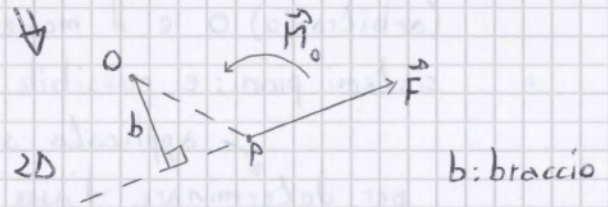
la risultante è un vettore libero → non ha automaticamente un punto di applicazione

momento di una forza

$\vec{M}_o = (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{F}$ → il momento è \perp al piano formato da \vec{F} e \vec{OP}
polo \vec{OP}



doppia punta per indicare che il vettore momento non è della stessa natura della forza



nota: \vec{M}_o "polo in O" → NON "applicato in O"
 \vec{M}_o è un vettore libero

$M_o = F \cdot b$
forza braccio

momento risultante (rispetto a O)

$\vec{R}_{M_o} = \sum_i [(\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i]$ non dipende dal polo scelto
polo comune momento "puro" o concentrato

momenti le cui forze generatrici non sono visibili → coppie perché non conviene spaccchellarle → EX. alberi in relazione nei motori elettrici

cambio di polo: $O \rightarrow O'$ trasposizione dei momenti

$\vec{R}_{M_{O'}} = \sum_i [(\vec{P}_i - \vec{O}') \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i] = \sum_i [((\vec{P}_i - \vec{O}) + (\vec{O} - \vec{O}')) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i] =$
 $= \sum_i [(\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i] + (\vec{O} - \vec{O}') \wedge \sum_i \vec{F}_i$
 $\Rightarrow \vec{R}_{M_{O'}} = \vec{R}_{M_O} + (\vec{O} - \vec{O}') \wedge \vec{R}_F$

nota: se $\vec{R}_F = \vec{0}$ il momento risultante non dipende dal polo

Equilibrio:

- Traslazione $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \begin{cases} \sum_i F_{i_x} = 0 \\ \sum_i F_{i_y} = 0 \\ \sum_i F_{i_z} = 0 \end{cases}$

- rotazione $\sum_i \vec{M}_{O_i} + \vec{C}_i = \vec{0} \begin{cases} \sum_i (M_{i_x} + C_{i_x}) = 0 \\ \sum_i (M_{i_y} + C_{i_y}) = 0 \\ \sum_i (M_{i_z} + C_{i_z}) = 0 \end{cases}$

vincoli → collegano gli elementi strutturali tra di loro (vincoli interni) o a un basamento (vincoli esterni), esercitando reazioni

2 aspetti → cinematico → limitazione del moto;

- vincoli interni → punti di elementi diversi sono obbligati ad assumere uguali componenti di spostamento/rotazione
- vincoli esterni → punti di elementi diversi sono obbligati ad assumere le componenti di spostamento/rotazione imposte dal basamento (di solito nulle)

statico → applicazione delle reazioni;

- vincoli interni → forze, momenti di reazione scambiati tra gli elementi collegati
- vincoli esterni → forze, momenti di reazione applicati dal basamento alla struttura, e viceversa

per un generico grado di libertà uno dei due termini statico e cinematico è noto e l'altro è incognito

↓ se è noto lo spostamento o la rotazione (vincolo), allora è incognita la reazione esercitata

↓ se è nota la forza o il momento (applicazione di un carico), allora il corrispondente spostamento è incognito

ordine del vincolo → numero di gradi di libertà (coincidente col numero di componenti di reazione) vincolati → vincolo semplice, doppio, triplo

Tipi di vincolo (1)

Ordine del vincolo:
Numero di gradi di libertà (coincidente col numero di componenti di reazione) vincolati: vincolo semplice, doppio, triplo, ecc.

Vincoli notevoli nel piano:

- Appoggio o carrello (1 reaz. incognita)
- Cerniera (2 reaz. incognite)
- Incastro (3 reaz. incognite)

Le componenti segnate sono da intendersi come reazioni esercitate dal basamento verso gli elementi

Tipi di vincolo (2)

- Cerniera interna (2 reaz. incognite)
- Guida prismatica interna (2 reaz. incognite)

Le componenti segnate sono da intendersi come di azione e reazione scambiate tra gli elementi

$\sigma = \sigma'$
 $V = V'$

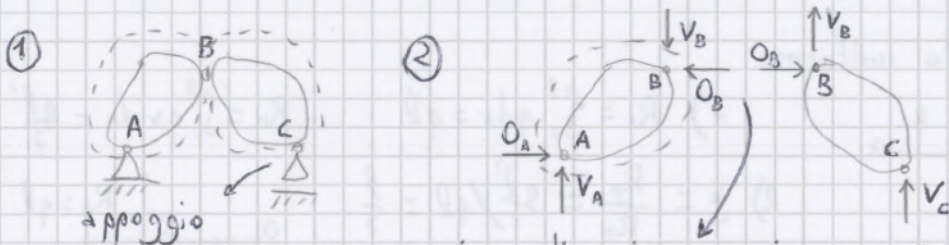
La situazione si complica nel caso di carico applicato direttamente sul vincolo

grado di iperstaticità

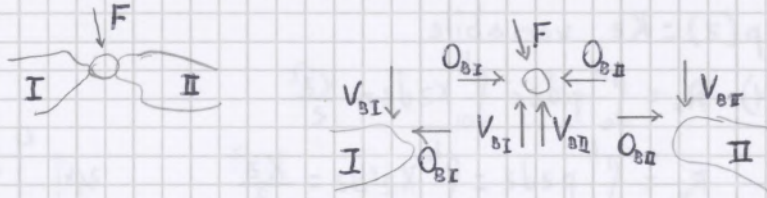
↓ obiettivi → conteggiare il numero di reazioni incognite

↓ stabilire se un problema è risolvibile con le sole equazioni della statica

↓ definizione → $h = n^{\circ} \text{ reazioni} - n^{\circ} \text{ equazioni}$



principio di azione-reazione per i vincoli interni carico sul vincolo interno (cerniera):

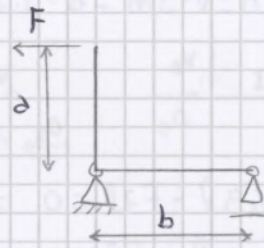
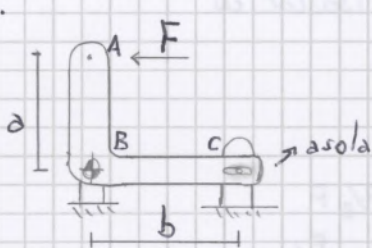


3- per ciascun elemento si scrivono 3 equazioni di equilibrio

↳ 3 possibili casi:

- a) 2 eq. di equilibrio alla traslazione + 1 eq. di equilibrio alla rotazione
- b) 2 eq. di equilibrio alla rotazione + 1 eq. di equilibrio alla traslazione
NON lungo la \perp alla retta per i 2 punti
- c) 3 eq. di equilibrio alla rotazione
↳ i 3 punti non devono essere allineati

EX.

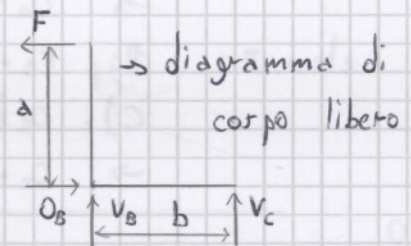


utilizzo un appoggio per far vedere che l'asola toglie un solo grado di libertà

$m=1 \quad c=1 \quad a=1$

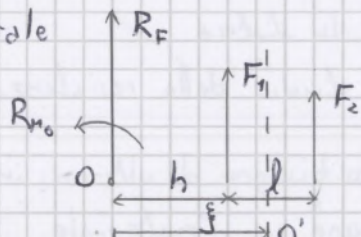
$v=3 \quad h=3-3=0 \Rightarrow$ isostatico

scelta a) $\leftarrow : F - O_B = 0$
 $\uparrow : v_B + v_c = 0$
 $B \curvearrowright : v_c b + F a = 0$



03/10 ES1.

1- Asse centrale



1) riduzione a O \rightarrow tentativo

$R_F = F_1 + F_2$

$R_{M_O} = F_1 h + F_2 (h+l)$

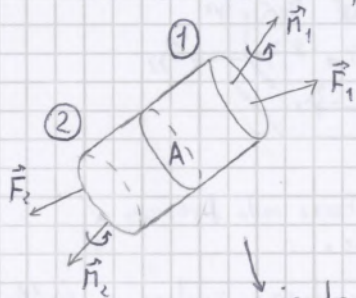
2) trasporto da O a O'

$\xi = \frac{R_{M_O}}{R_F} = \frac{F_1 h + F_2 (h+l)}{F_1 + F_2} = \frac{(F_1 + F_2) h + F_2 l}{F_1 + F_2} = h + l \frac{F_2}{F_1 + F_2}$

$\cdot F_1 = 0 \Rightarrow \xi = h+l \quad \cdot F_2 = 0 \Rightarrow \xi = h \quad \cdot F_1 = F_2 \Rightarrow \xi = h + l/2$

Tensioni \rightarrow grandezze specifiche $\rightarrow \frac{\text{forza}}{\text{area}}$

\downarrow adatte a prevedere la resistenza di un componente mediante il confronto fra la tensione applicata e la tensione limite del materiale

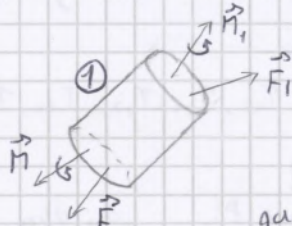
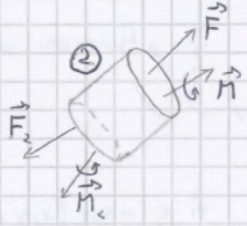


\rightarrow non sono arbitrari $\rightarrow \vec{F}_1, \vec{M}_1, \vec{F}_2, \vec{M}_2$

\downarrow l'elemento dev'essere in equilibrio

in qualche modo si ha una "trasmissione" dei carichi attraverso l'elemento

\downarrow isolo i due sottoelementi:



Forze e momenti applicati sulla sezione di rottura sono uguali

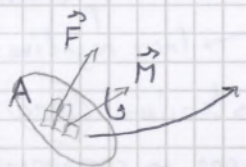
e opposti \rightarrow azione e reazione

\downarrow questo processo può essere ripetuto all'infinito

ogni zona "spezzata" deve trovarsi in equilibrio

\Rightarrow la trasmissione è quindi dovuta agli equilibri parziali

area A:



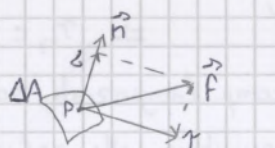
area parziale $\Delta A \rightarrow$ da questa dipendono $\Delta \vec{F}$ e $\Delta \vec{M}$
per trovare le grandezze puntuali:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \vec{f} \qquad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta A} = \vec{0}$$

ipotesi del continuo: $-\vec{f}$ vettore della tensione \rightarrow dimensioni della pressione

$-\text{momento puntuale} = 0$

per trasmettere momento \downarrow ho bisogno che ci sia una distanza fra una forza e il polo (forza \times braccio) \Rightarrow puntualmente il momento non può che essere nullo



\vec{n} versore normale

\vec{f} non necessariamente è orientato come la normale

\downarrow distinguo 2 componenti: $-\sigma$ componente normale

$-\tau$ componente tangenziale

$$\sigma^2 + \tau^2 = f^2$$

σ : analogo alla pressione \rightarrow sempre perpendicolare

\downarrow unica differenza: σ è uscente, la pressione è entrante

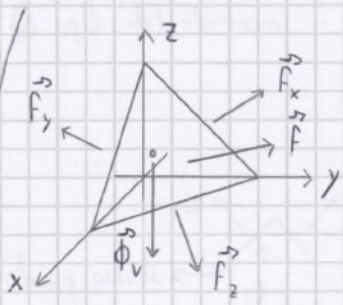
$\sigma > 0$ trazione \downarrow $\sigma < 0$ compressione

τ : rende \vec{f} non \perp alla superficie

\downarrow $\tau > 0$ o $\tau < 0$ non ha nessun significato fisico

\downarrow indicano soltanto se il verso è concorde o discorde al verso scelto convenzionalmente

$\begin{cases} dA_x = dA n_x \\ dA_y = dA n_y \\ dA_z = dA n_z \end{cases} \rightarrow dA_x \text{ è la proiezione di } dA \text{ sul piano } yz$
 \downarrow stesso principio dell'ipotenusa e i suoi cateti
 \downarrow cateti proiezioni dell'ipotenusa



$$\vec{F}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \vec{F}_y = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \vec{F}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{Bmatrix} \quad \vec{\Phi}_v: \text{ forze all'unità di volume}$$

\downarrow Ex. peso specifico

equilibrio alla traslazione:

vettorialmente: $\vec{F} dA + \vec{F}_x dA_x + \vec{F}_y dA_y + \vec{F}_z dA_z + \vec{\Phi}_v dV = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_x n_x + \vec{F}_y n_y + \vec{F}_z n_z = \vec{0}$ \leftarrow \rightarrow infinitesimo di ordine superiore rispetto alle aree

in termini scalari:

$$\begin{cases} f_{nx} - \sigma_{xx} n_x - \tau_{xy} n_y - \tau_{xz} n_z = 0 \\ f_{ny} - \tau_{xy} n_x - \sigma_{yy} n_y - \tau_{yz} n_z = 0 \\ f_{nz} - \tau_{xz} n_x - \tau_{yz} n_y - \sigma_{zz} n_z = 0 \end{cases}$$

\leftarrow tende a 0 più in fretta

$$\begin{Bmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \{F\} = [C] \{n\}$

vettore della tensione che agisce sulla superficie \leftarrow [matrice]

vettore normale alla superficie \leftarrow

$[C]$: tensore della tensione

\leftarrow simmetrico \rightarrow componenti normali sulla diagonale, tangenziali fuori diagonale
 le colonne sono i vettori di tensione agenti sulle superfici $\perp x, y, z$
 descrive completamente lo stato di tensione in P

da esso si ottiene il vettore di tensione su qualunque superficie di normale $\{n\}$

in generale \vec{F} non è \parallel a \vec{n} \rightarrow a causa di τ

esistono direzioni privilegiate, per le quali i vettori $\{F\}$ sono \perp alla superficie (e quindi $\tau=0$) \rightarrow autovettori e autovalori

$$\{F\} = [C] \{n\} \quad [A] \{v\} = \lambda \{v\} \quad ([A] - \lambda [I]) \{v\} = \{0\}$$

λ : autovalore v : autovettori

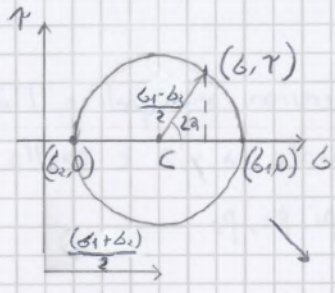
$$([C] - \lambda [I]) \{v\} = \{0\} \quad [C] \text{ è simmetrica } \Rightarrow \begin{cases} \exists 3 \text{ autovalori reali} \\ \exists 3 \text{ autovettori ortogonali} \end{cases}$$

$\leftarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
 $\leftarrow \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$

soluzione non banale se: $\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0$

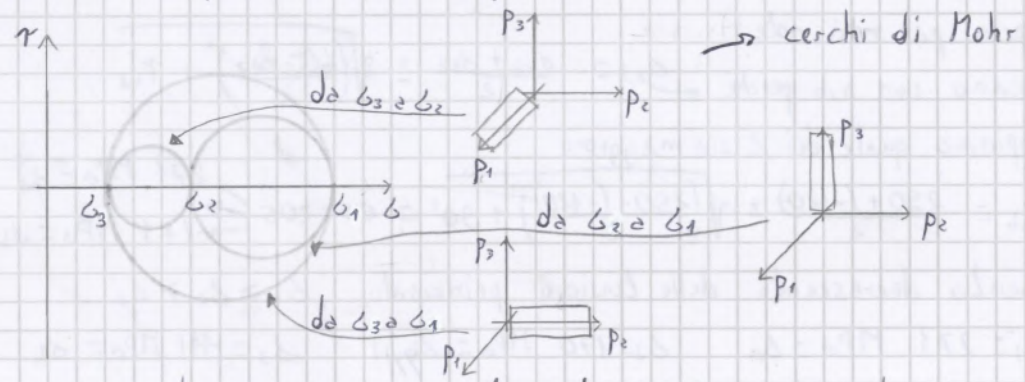
tensioni principali: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

direzioni principali: $\{v_1\} \{v_2\} \{v_3\}$

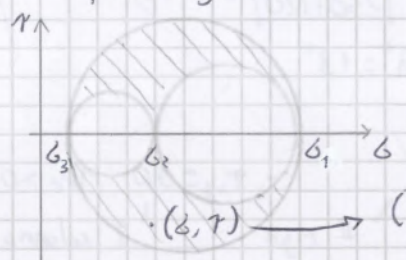


$C = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$
 media delle tensioni principali
 casi limite: - $\alpha = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma_1$
 - $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sigma = \sigma_2$
 detto cerchio di Mohr

cerchi e corrispondenti fasci di piani:



caso generale: piano non contenente un asse principale p_1, p_2, p_3
 piano genericamente obliquo

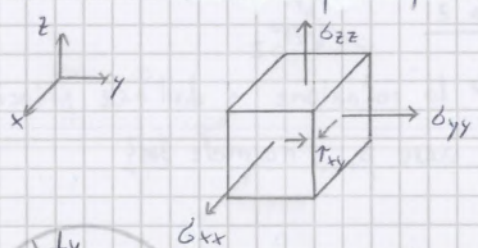


(σ, τ) è sempre dentro il cerchio $\sigma_1 - \sigma_2$ e fuori dai cerchi $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$

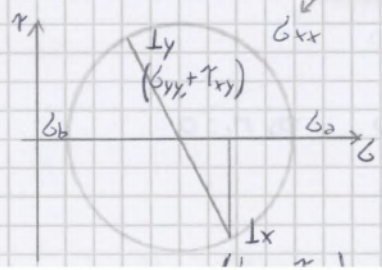
\Rightarrow nessun piano è sollecitato da una tensione $\sigma < \sigma_3$ o $\sigma > \sigma_1$
 σ_1 : massima tensione normale σ_3 : minima tensione normale
 o da una tensione tangenziale $|\tau| > \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

costruzione diretta dei cerchi di Mohr:

è possibile se è nota una direzione principale p e la sua tensione, e se sono note σ, τ su piani L che appartengono al fascio con asse p
 Ex. con z direzione principale nota

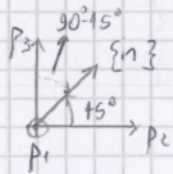


$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



\rightarrow lo giriamo // a x e a y
 σ è sempre positivo
 τ è prima positivo e poi negativo
 \Rightarrow si può trovare il raggio e il centro del cerchio

$\{n\}$ a 45° rispetto a p_2 :



$$\{n\} \cdot \{p_2\} = 45^\circ$$

$$\{n\} \cdot \{p_2\} = \cos 45$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\{n\}$ a $90^\circ - 45^\circ$ rispetto a p_3 :

$$\{n\} \cdot \{p_3\} = \sin 45 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

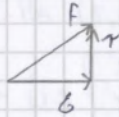
componenti di $\{F\}$: $\{F\} = [G] \{n\}$

identificato nel riferimento principale \Rightarrow anche il tensore dev'essere nel rif. principale

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 271 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & -141 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 170 \\ -141 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

calcolo di σ : $\sigma = \{n\} \cdot \{F\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 170 \\ -141 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{170 - 141}{2} = 15 \text{ MPa}$

calcolo di τ : $\tau = \sqrt{|F|^2 - \sigma^2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{170^2}{2} + \frac{141^2}{2} - 15^2} = 155 \text{ MPa}$



2- dato $[G] = \begin{bmatrix} 350 & 220 & 0 \\ 220 & -270 & 0 \\ 0 & 0 & 140 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

determinare:

- a) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e α
- b) σ, τ asse p_2 ; $\{n\}$ a 60° rispetto a p_1

a) $\tau_{xz} = \tau_{yx} = 0 \text{ MPa} \rightarrow z$ principale $\Rightarrow \sigma_{zz} = 140 \text{ MPa}$ principale

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{350 - 270}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{350 + 270}{2}\right)^2 + 220^2} = \begin{matrix} \nearrow \sigma_a = 420 \text{ MPa} \\ \searrow \sigma_b = -340 \text{ MPa} \end{matrix}$$

ordinamento decrescente: $\sigma_1 = 420 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = 140 \text{ MPa}$ $\sigma_3 = -340 \text{ MPa}$

angolo tra i riferimenti:

$$|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \frac{2 \cdot 220}{350 + 270} = 0.71 \Rightarrow \alpha^* = 17.7^\circ$$

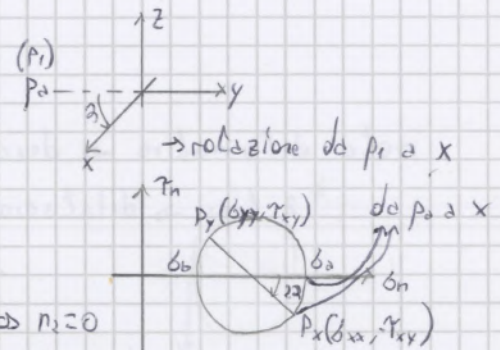
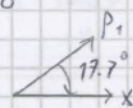
Tabella: - z principale \rightarrow I riga

- $\tau_{xy} = 220 \text{ MPa} > 0 \rightarrow$ I colonna

- $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} \rightarrow$ I caso

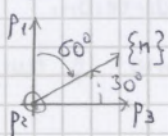
$$\Rightarrow -45^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$$

$$\alpha = -\alpha^* = -17.7^\circ$$



b) asse del fascio \bar{e} $p_2 \Rightarrow \{n\} \cdot \{p_2\} = 0 \Rightarrow n_2 = 0$

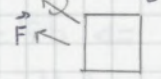
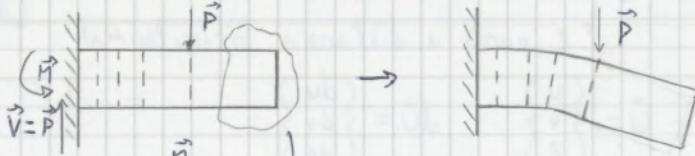
$\{n\}$ a 60° rispetto a p_1 $\{n\} \cdot \{p_1\} = \cos 60^\circ = 1/2$



$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ 0 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{1}{2}$$

interazione fra moto rigido e moto deformativo:

Ex. elemento incastrato



→ non possono essere equilibrati ⇒ \vec{M} e \vec{F} sono nulli

→ zona scarica → però ha il maggior movimento

perché è come un'appendice della zona sollecitata



zona sollecitata

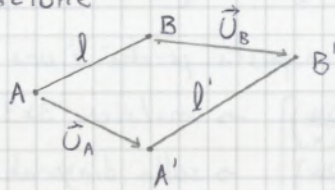
ogni "fettina" risente del moto deformativo di quella vicina (e quindi subisce un moto rigido) ed è a sua volta deformata

⇒ moto sia deformativo che rigido

zona scarica → solo moto rigido

misure della deformazione:

- dilatazione



$$l \neq l'$$

$l - l'$ non è molto utile perché può essere poco o molto in relazione alla distanza l

$$\Rightarrow \frac{l - l'}{l} \quad \text{iniziale}$$

utilizzo i differenziali:

$$\epsilon = \frac{dl - dl'}{dl} = \frac{du}{dl}$$

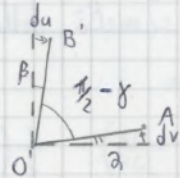
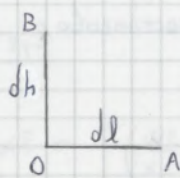
→ misura della variazione di lunghezza → dilatazione

non prende in considerazione le direzioni

in rapporto a quella iniziale

- scorrimento

si considerano sia l'angolo fra una coppia di segmenti, sia l'angolo di rotazione di uno di questi 2 segmenti



ipotesi: spostamenti piccoli

valida in materiali sufficientemente

rigidi $\alpha \approx \frac{dv}{dl} \quad \beta \approx \frac{du}{dh}$

$$\gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \gamma = \frac{dv}{dl} + \frac{du}{dh}$$

→ rapporti incrementali fra variazioni di angolo e distanza

↳ lo scorrimento è il complemento a 90° dell'angolo compreso tra i 2 segmenti sotto osservazione

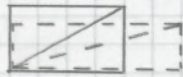
analogia con $\{F\} = [D] \{n\}$

però $\{dx\}$, oltre che a una direzione, esprime anche una lunghezza
 è come se fosse un vettore moltiplicato per un modulo

proprietà di $[E]$ analoghe a $[D]$:

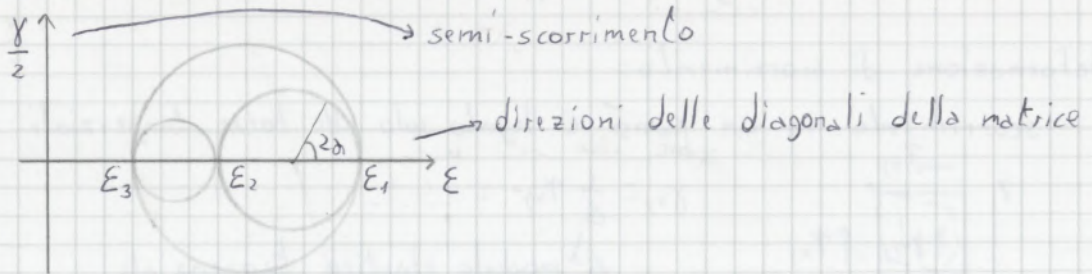
- **principalità**: autovalori \rightarrow deformazioni principali
 autovettori \rightarrow direzioni principali di deformazione
 se un segmento si trova lungo la direzione principale, potrà essere tirato o compresso, ma non varierà la sua inclinazione

EX.



\rightarrow i tali sono direzioni principali \rightarrow non cambiano orientamenti
 \rightarrow la diagonale non è una direzione principale

- cerchi di Mohr:



legame tensioni-deformazioni:

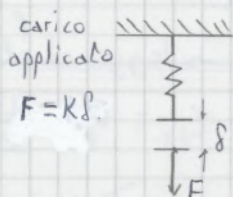
- comportamento del materiale
 - \rightarrow elastico \rightarrow reversibile
 - \rightarrow lineare \rightarrow metalli
 - \rightarrow non lineare \rightarrow gomme
 - \rightarrow anelastico \rightarrow plasticità \rightarrow una volta deformato, non riacquista la sua forma originaria
 - \rightarrow scorrimento viscoso

- caratteristiche del materiale

- \rightarrow omogeneità \rightarrow le proprietà sono identiche in tutti i punti del materiale
- \rightarrow disomogeneità \rightarrow le proprietà variano da punto a punto
- \rightarrow isotropia \rightarrow per un punto dato \rightarrow proprietà uguali in tutte le direzioni
- \rightarrow anisotropia \rightarrow le proprietà dipendono dalla direzione su cui le si valuta

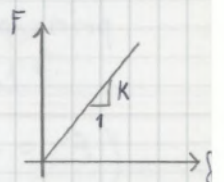
elasticità lineare:

EX. molla

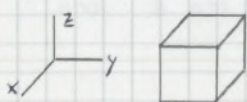


allungamento imposto
 $\delta = F \frac{1}{K}$

K: rigidezza



per un materiale $[D]$, $[E]$



- applico una tensione alla volta
- osservo l'effetto sulla deformazione

se un sistema di riferimento è principale per le tensioni, allora lo è anche per le deformazioni → perché essendo $\tau = 0$ allora $\gamma = 0$

↳ vero per i materiali isotropi

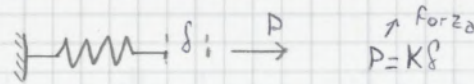
nel riferimento principale:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 + \alpha(T-T_0) \\ \epsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 + \alpha(T-T_0) \\ \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3 + \alpha(T-T_0) \end{cases}$$

energia di deformazione:

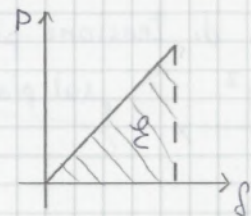
corrisponde al lavoro necessario per compiere la deformazione
se è una deformazione elastica il lavoro è reversibile

EX. molla



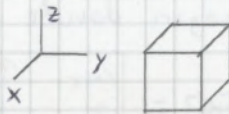
$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

↳ energia accumulata nella deformazione



per un materiale:

volume elementare

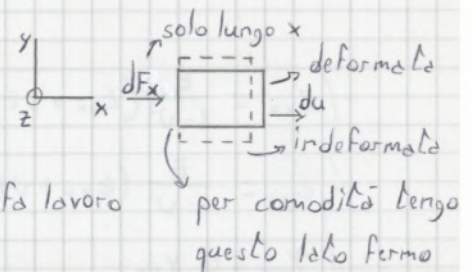


$$dV = dx dy dz$$

1- Tensioni σ , deformazioni ϵ

lungo x:

$$\sigma_{xx} \Rightarrow [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



non considero il moto rigido perché non fa lavoro

$$dF_x = \sigma_{xx} dy dz$$

$dF = \text{tensione} \times \text{area}$

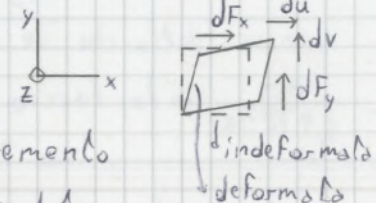
$$\begin{cases} \{dU\} = [\epsilon] \{dX\} \\ du = \epsilon_{xx} dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{1}{2} dF_x du = \frac{1}{2} \sigma_{xx} dy dz \epsilon_{xx} dx = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \quad \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx}$$

2- Tensioni τ , deformazioni γ

lungo xy:

$$\tau_{xy} \Rightarrow [\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



no moto rigido → ciò che conta è l'incremento

$$\text{da } \{dU\} = [\epsilon] \{dX\}$$

non lo spostamento assoluto

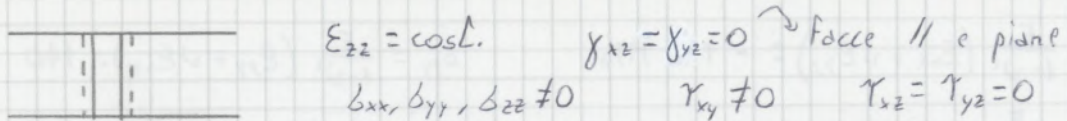
$$\left\{ \begin{matrix} du \\ dv \\ dw \end{matrix} \right\}$$

sono 2 i contributi che compiono lavoro:

$$du = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy \quad dv = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx \quad dF_x = \tau_{xy} dx dz \quad dF_y = \tau_{xy} dy dz$$

$$dE = \frac{1}{2} (dF_x du + dF_y dv) = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dx dz \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy + \tau_{xy} dy dz \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx)$$

$$\Rightarrow dE = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \quad \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \rightarrow \text{analogo a prima}$$



ES. 3 stato di deformazione

1) Dato $\begin{bmatrix} 120 & 0 & 100 \\ 0 & 30 & 0 \\ 100 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ MPa $E = 2.06 \cdot 10^5$ MPa no effetti termici
 $\nu = 0.29$

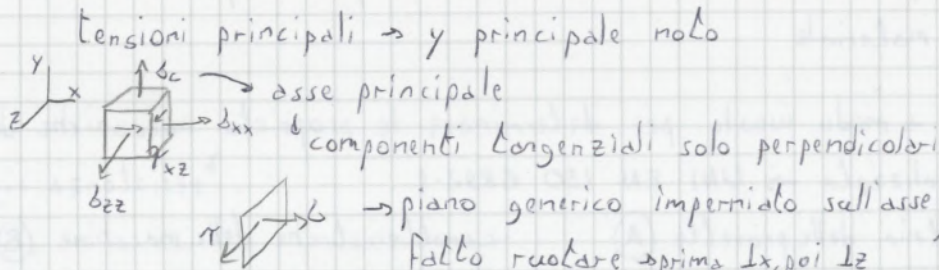
determinare $[E]$ nel riferimento xyz e in quello principale

in xyz: $\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{E} = \frac{120 - 0.29(30 + 20)}{2.06 \cdot 10^5} = 5.12 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{E} = -5.15 \cdot 10^{-5}$ $\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} = -1.14 \cdot 10^{-4}$

prevale l'effetto della tensione σ_{xx} $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7.98 \cdot 10^4$ MPa

$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{100}{7.98 \cdot 10^4} = 1.35 \cdot 10^{-3}$ \rightarrow scorrimento è l'effetto prevalente



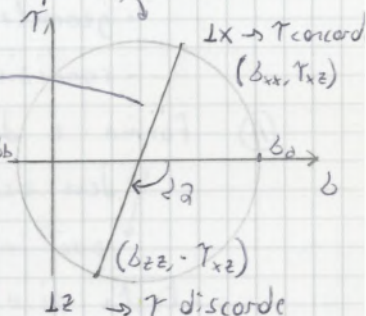
cerchio di Mohr costruito su questo diametro

$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{zz} + \sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 182 \text{ MPa} \\ -42 \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma_1 = 182$ MPa $\sigma_2 = 30$ MPa $\sigma_3 = -42$ MPa

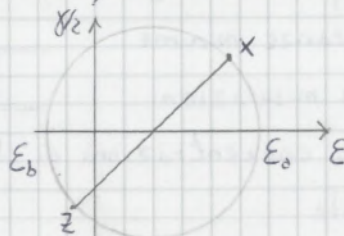
$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = 9.00 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = -5.15 \cdot 10^{-5}$ $\epsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} = -5.02 \cdot 10^{-4}$



deformazioni principali \rightarrow y deformazione principale nota

$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & \gamma_{xz}/2 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ \gamma_{xz}/2 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$



$\epsilon_{a,b} = \frac{\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2} = \begin{cases} 8.98 \cdot 10^{-4} = \epsilon_1 \\ -5.00 \cdot 10^{-4} = \epsilon_3 \end{cases}$

2) punto in stato di tensione piana

$\epsilon_{xx} = -2.22 \cdot 10^{-3}$ $\epsilon_{yy} = 2.52 \cdot 10^{-3}$ $\gamma_{xy} = 2.28 \cdot 10^{-3}$

$E = 6.90 \cdot 10^4$ MPa $\nu = 0.31$

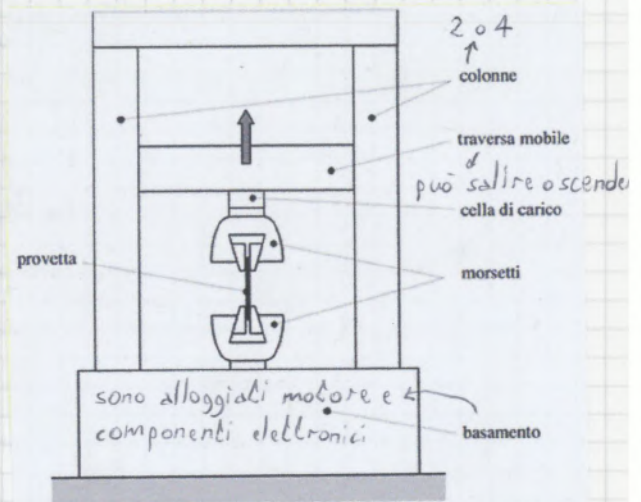
Croscire $[\sigma]$ in xyz e nel rif. principale

$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ perchè in tensione piana

ⓑ le macchine permettono di esercitare la trazione sulle provette in modo controllato, misurando:

- lo sforzo applicato
- l'allungamento della provetta

la cella di carico è un sensore che misura la forza applicata sul provino può non essere posta sul provino perché la stessa forza è trasmessa in tutte le componenti → serie meccanica



Tipi di ganasce:

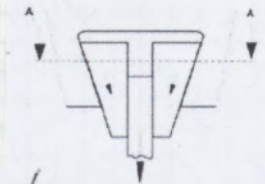
- ganasce autoserranti a cunei, aventi superfici:

- piane per provette piatte (lamiere)
 - concave per provette a sezione circolare
- autoserranti perché si chiudono da sole man mano che viene esercitata la trazione

- ganasce a filiera (smontabili per consentire l'inserimento del provino)

↓ provette a sezione circolare dotate di spallamenti

vengono appoggiate sulle ganasce
forza trasmessa per contatto diretto
però è più complicato togliere e mettere il provino → sistema dev'essere smontabile per inserire il provino



↓ possono essere tenute con un sistema idraulico per esercitare una forza maggiore

Tipi di macchine di prova:

- elettromeccaniche → azionamento della traversa mobile mediante trasmissione

↓ economiche

carico massimo 10^2 KN → solitamente sufficiente

minore velocità e versatilità nell'applicazione del carico

(sistema poco controllabile → non sono realizzabili prove di tipo ciclico
inerzia della trasmissione o simulazione di urti)

- idrauliche → azionamento della traversa mobile mediante cilindri

↓ delle idrauliche ma in realtà viene utilizzato l'olio

costose → componentistica richiede grande precisione

carico massimo di 10^3 KN → non c'è inerzia meccanica della trasmissione
maggiore velocità e versatilità (cicli) nell'applicazione del carico

- allungamento dopo rottura (%) $\rightarrow A = 100 \frac{L_u - L_0}{L_0}$

L_0, L_u : distanza iniziale e finale fra

2 riferimenti tracciati sul provino prima di eseguire la prova
la quota parte della deformazione elastica non influisce su questa misura perché eseguita a provino rotto

- strizione (%) $\rightarrow Z = 100 \frac{S_0 - S_u}{S_0}$ S_0 : sezione iniziale

S_u : sezione ristretta in cui avviene la rottura

↳ più il materiale si deforma plasticamente, più S_u è piccola

materiali duttili - caso con snervamento

prima di arrivare alla rottura si ha una deformazione plastica sufficientemente elevata

• duttilità \rightarrow capacità di essere ridotto in fili

• snervamento

↳ la curva ha un massimo

e poi delle oscillazioni \rightarrow avviene alla fine della deformazione elastica

superiore: $F_{eH} (R_{eH})$ inferiore: $F_{eL} (R_{eL})$ e: end H: high L: low

↳ è quello che ci interessa perché segna la fine del tratto elastico

↳ vogliamo che il materiale si comporti elasticamente

incrudimento \rightarrow plasticizzazione uniforme \rightarrow picco in $F_m (R_m)$

↳ deformazione plastica normalmente è isocora

↳ se aumenta la lunghezza assiale diminuisce la sezione

ma nonostante la diminuzione di sezione, la tensione aumenta così tanto da compensarla $\rightarrow F$ aumenta

\Rightarrow il materiale riesce a opporre una resistenza sempre più grande

↳ incrudimento (strain hardening) \rightarrow rafforzamento prodotto dallo sforzo

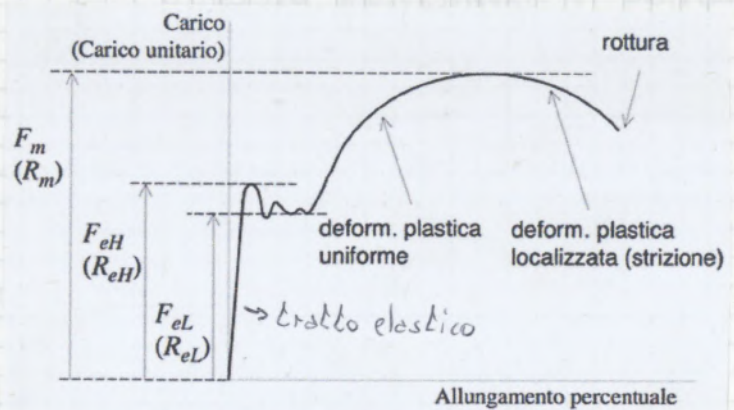
oltre F_m la tensione non ce la fa più \rightarrow non riesce a compensare la perdita di area

↳ lo sforzo si concentra su piccole deformazioni locali \rightarrow strizione

in realtà la tensione aumenta, però, non riuscendo a compensare la perdita di area, la forza (indicata come carico) diminuisce sul grafico

possiamo vedere l'oscillazione di F causata dallo snervamento perché la macchina impone uno spostamento, non una forza

si riesce a vedere con che forza reagisce il provino



esempi di proprietà meccaniche di materiali metallici:

Materiale	$R_{ch} (R_{p0.2})$ (MPa)	R_m (MPa)	A %	
acciai per carpenteria	S235	≥ 235	≥ 360	≥ 26
	S275	≥ 275	≥ 430	≥ 23
	S355	≥ 355	≥ 510	≥ 21
acciai da bonifica	C30	325	540	20
	C40	370	590	18
	41Cr4	540	740	14
	39NiCrMo3	540	740	13
ghise grigie	GJL-100	-	100	-
	GJL-200	-	200	-
	GJL-300	-	300	-
ghise sferoidali	GJS-350-22	230	350	22
	GJS-500-7	370	500	7
	GJS-700-2	420	700	2

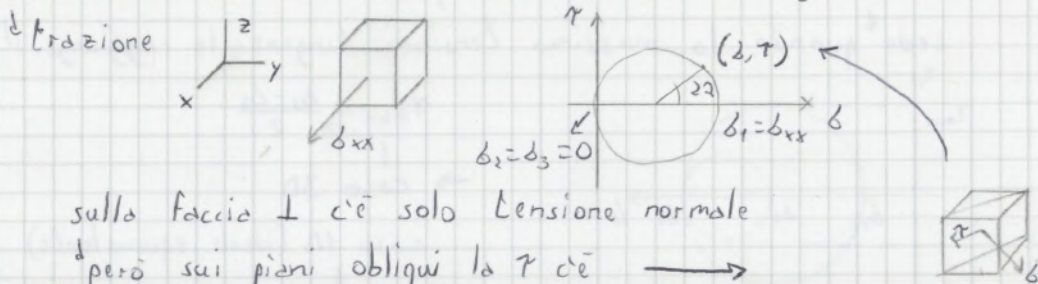
da notare:

- valori indicati sono sempre quelli minimi
- man mano che cresce la resistenza, diminuisce l'allungamento
- passando da materiali a resistenza minore a resistenza maggiore il margine tra limite elastico e di rottura si riduce

- per le ghise il margine tra i 2 limiti è nullo \rightarrow allungamento \sim nullo
- per aumentare la duttilità delle ghise si usano le ghise sferoidali

Trazione, flessione \rightarrow tensione principale lungo l'asse \rightarrow rottura \perp all'asse del gesso
 torsione \rightarrow tensione principale obliqua \rightarrow rottura obliqua del gesso \rightarrow

il materiale cede dove la tensione è più forte \rightarrow materiale fragile
 per un materiale duttile la rottura non è così chiara perché la deformazione plastica influenza la forma della zona di rottura \rightarrow la modifica
 \downarrow
 cede a causa dello scorrimento dovuto alle tensioni tangenziali



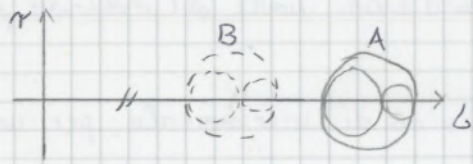
Ex, in un acciaio posto a torsione la superficie di rottura è \perp all'asse perché lì τ è massima \Rightarrow

ipotesi di cedimento:

il problema è confrontare lo stato di tensione agente nel punto più sollecitato (3 valori: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) e la tensione limite del materiale (valore unico: σ_{lim})
 non possono essere semplicemente sommati perché non sono vettori

R_{ch} o $R_{p0.2}$ per materiali duttili o R_m per materiali fragili
 soluzione: dovrei fare una disegualianza fra tensioni e σ_{lim} ma non è possibile \rightarrow tensioni non sono numeri
 si sostituiscono le 3 tensioni principali con un unico valore (scalare, è comunque una tensione) di tensione "ideale" (perché non è lo stato di tensione

in caso di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ elevate, ma vicine fra loro, il comportamento è fragile anche se il materiale è usualmente duttile



→ alta triassialità
 → τ è piccola → non porta allo scorrimento plastico

variare tutte e 3 le tensioni di un uguale valore corrisponde a uno stato idrostatico → tensione uguale in ogni direzione

↓ casi A e B differiscono per una tensione idrostatica

duttile → approccio alternativo basato sull'energia elastica

energia di deformazione = E di variazione volume + E di variazione di forma



↓ energia di distorsione

il materiale cede quando l'energia di distorsione

raggiunge il valore limite

M.B. non tutta l'energia, solo quella di distors.

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \rightarrow \text{media quadratica}$$

Ogni parentesi rappresenta il diametro di uno dei cerchi di Mohr

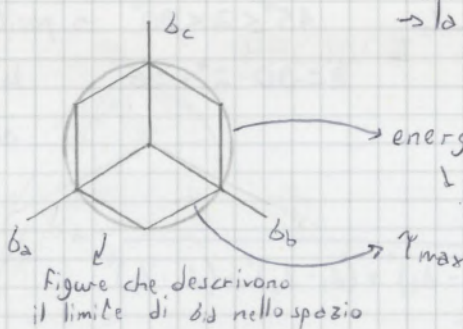
- Tutte le tensioni σ influiscono

- essendo tutte differenze, l'aggiunta di una quantità uguale su σ non influisce
 ↓ stessa limitazione di prima → valida solo per rotture con scorrimento

con questo approccio non è necessario conoscere l'ordine delle tensioni normali

quale dei 2 approcci si utilizza?

confronto tra le ipotesi: materiali duttili
 → τ_{max} → Tresca
 → E distorsione → von Mises
 i 3 assi sono i valori delle tensioni principali:



→ la normale uscente è il bisettore

uguali componenti in tutte le direzioni

↓ cilindro con il bisettore come asse

→ τ_{max} → prisma a sezione esagonale iscritto nel cilindro
 il bisettore è l'asse

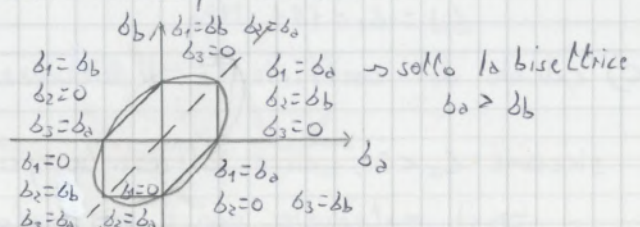
Figure che descrivono il limite di σ_{id} nello spazio

per certe combinazioni di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le 2 superfici coincidono

⇒ in generale l'ipotesi τ_{max} è più restrittiva (più conservativa)

la differenza fra le 2 ipotesi è comunque modesta

in tensione piana ($\sigma_c = 0$):



2- un punto di 41Cr4 bonificato presenta il seguente stato tensoriale

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 125 \\ 0 & 0 & 0 \\ 125 & 0 & 380 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{determinare } C_s$$

a) $\sigma_{yy} = 0$ MPa principale perché $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$

$$\sigma_{\text{arb}} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 417 \text{ MPa} = \sigma_1 \\ -37 \text{ MPa} = \sigma_3 \end{cases} \Rightarrow \sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

$$|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \right| = 0.65 \Rightarrow \alpha^* = 16.7^\circ$$

$\{y$ principale \rightarrow II riga

$\tau_{xz} > 0 \rightarrow$ I colonna

$\sigma_{xx} < \sigma_{zz} \rightarrow$ I caso

$$-45 \leq \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha = -\alpha^* = -16.7^\circ$$

b) $\sigma_{id} = ?$ acciaio 41Cr4 bonificato \nearrow dalle tabelle l'allungamento % a rottura vale $A \approx 14\% > 10\% \Rightarrow$ duttile

abbiamo due scelte per σ_{id} :

$$\sigma_{id}^{TR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 417 - (-37) = 454 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = 437 \text{ MPa}$$

c) $C_s = ?$ $C_s^{TR} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}^{TR}} = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{id}^{TR}} \rightarrow$ da tabella $\Rightarrow C_s^{TR} = \frac{800}{454} = 1.76 > 1.5$ accettabile

$$C_s^{VM} = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{id}^{VM}} = \frac{800}{437} = 1.83 > 1.5 \text{ accettabile}$$

σ_{TR} è più sicuro perché garantisce un C_s minore o uguale a VM

3- dati relativi all'esercizio 3a dell'esercitazione 2

a) si ricavano $\sigma_1 = 408$ MPa, $\sigma_2 = 342$ MPa, $\sigma_3 = 18$ MPa

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 408 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

determinare $R_{p0.2}$ tale che $C_s = 1.5$ (materiale duttile)

b) $\sigma_{id}^{TR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 408 - 18 = 390$ MPa

$$\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(408 - 342)^2 + (408 - 18)^2 + (342 - 18)^2} = 362 \text{ MPa}$$

c) $C_s^{TR} = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{id}^{TR}} \Rightarrow R_{p0.2} = C_s \cdot \sigma_{id}^{TR} = 1.5 \cdot 390 = 585$ MPa

$$C_s^{VM} = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{id}^{VM}} \Rightarrow R_{p0.2} = C_s \cdot \sigma_{id}^{VM} = 1.5 \cdot 362 = 543$$
 MPa

4- dati relativi all'esercizio 3b dell'esercitazione 2

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \\ 0 & 50 & 150 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

materiale fragile \nearrow determinare R_m tale che $C_s = 3$

a) $\sigma_1 = 165$ MPa $\sigma_2 = 0$ MPa $\sigma_3 = -15$ MPa

b) $\sigma_{id} = ?$ $\sigma_{id} = \sigma_1 = 165$ MPa

c) $C_s = \frac{R_m}{\sigma_{id}} \Rightarrow R_m = C_s \cdot \sigma_{id} = 3 \cdot 165 = 495$ MPa

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$: componenti della velocità di rotazione secondo le direzioni del riferimento
 ↳ proiezioni della velocità angolare su x, y, z

I_{ii} = momenti d'inerzia rispetto all'asse del corpo preso in considerazione

I_{ij} = momenti centrifughi → momenti di massa → massa x lunghezza²
 ↳ legano componenti di K_i e ω_j (diverse direzioni)

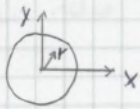
↳ legano componenti di K_i e ω_i (stessa direzione)

il caso delle aree differisce per 2D (xy) → aree, NON masse

$J_{xx} = \int_A y^2 dA$ $J_{yy} = \int_A x^2 dA$ → momenti d'inerzia

$J_{xy} = \int_A xy dA$ → momento centrifugo → momenti di area → lunghezza⁴
 ↳ prodotto d'inerzia

nel caso di sezione circolare:



$J_p = \int_A r^2 dA$ → momento d'inerzia polare
 r: coordinata radiale $r^2 = x^2 + y^2$

per rendere questi calcoli più semplici:

sistemi di riferimento:

- generico → OXY con origine O

- baricentrico → Gxy con origine coincidente col baricentro

⇒ è necessario trovare il baricentro

↳ un aiuto può essere un asse di simmetria

↳ il baricentro si trova sicuramente su quest'asse



$J_y = \int_A x dA = \int_{A_1} x dA + \int_{A_2} x dA = 0 \Rightarrow x_G = \frac{J_y}{A} = 0 \Rightarrow G \text{ è sull'asse } y$

hanno lo stesso valore assoluto ma segni opposti

il momento statico di metà figura ha stesso modulo e segno opposto dell'altra metà

se esistono 2 assi di simmetria G sta sull'intersezione → Ex. rettangolo

- sistema di riferimento principale d'inerzia → se $J_{xy} = \int_A xy dA = 0$

analogia col sistema principale delle tensioni ↙

- sistema di riferimento centrale principale

$G \equiv O$ $J_{xy} = 0$

$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_1} xy dA + \int_{A_2} xy dA = 0$

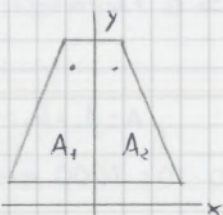
y è la stessa, x è opposta

⇒ con un asse di simmetria il momento centrifugo

rispetto a quell'asse è 0

⇒ un asse di simmetria è un asse principale d'inerzia

↳ riferimento è principale

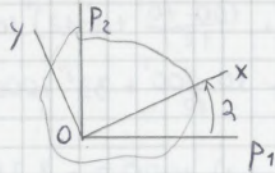


30/10

ricerca del tensore principale d'inerzia:

tensore d'inerzia per le aree $[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_{yy} \end{bmatrix}$ diagonale: effetti lungo l'asse
 → riferimento generico

riferimento principale $[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$ → momenti principali d'inerzia
 P_1, P_2 assi principali J_1, J_2



→ origine non devessere per forza il baricentro
 → α a partire dal riferimento principale

$$\begin{cases} x = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \\ y = -p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha \end{cases}$$

$$J_{xx} = \int_A y^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A p_1^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A p_2^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1 p_2 dA =$$

$$= \sin^2 \alpha J_2 + \cos^2 \alpha J_1 \quad \text{momento centrifugo nel rif. principale} \Rightarrow = 0$$

$$J_{yy} = \int_A x^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A p_1^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A p_2^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1 p_2 dA =$$

$$= \cos^2 \alpha J_2 + \sin^2 \alpha J_1$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha)(-p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha) dA =$$

$$= -\cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1^2 dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A p_2^2 dA + (-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \int_A p_1 p_2 dA =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha (J_1 - J_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_{xx} = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha \\ J_{yy} = J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha \\ J_{xy} = (J_1 - J_2) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad \text{trasformazione: } \alpha \rightarrow 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

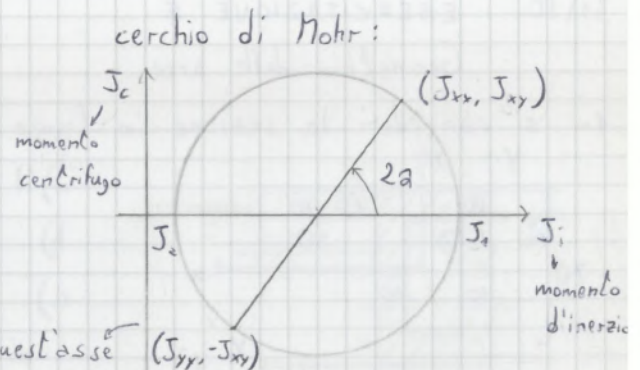
$$\Rightarrow \begin{cases} J_{xx} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \\ J_{yy} = \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \\ J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

siamo nel piano → 1 solo cerchio
 e valori principali

siccome nel tensore abbiamo $-J_{xy}$, quest'asse $(J_{yy}, -J_{xy})$
 è da considerarsi con i valori inversi

$$J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad |\tan 2\alpha| = \left| \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right|$$

α angolo tra p_1 e x → in questo modo è più facile leggerlo sul cerchio di Mohr
 perché l'asse p_1 è dato dall'asse J_1



momenti statici S_x, S_y : $S_{x_i} = A_i Y_{G_i}$ $S_{y_i} = A_i X_{G_i}$

$$S_x = \sum_{i=1}^3 S_{x_i} = A_1 Y_{G_1} + A_2 Y_{G_2} + A_3 Y_{G_3} = 82500 \text{ mm}^3$$

$$S_y = \sum_{i=1}^3 S_{y_i} = A_1 X_{G_1} + A_2 X_{G_2} + A_3 X_{G_3} = 52500 \text{ mm}^3 \quad A = 2100 \text{ mm}^2$$

baricentro: $X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{52500}{2100} = 25 \text{ mm}$ $Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{82500}{2100} = 39.29 \text{ mm}$

$\Rightarrow G: (25, 39.29)$

b) del. $G_i = (x_{G_i}, y_{G_i})$

$$\begin{cases} x_{G_1} = X_{G_1} - X_G \\ y_{G_1} = Y_{G_1} - Y_G \end{cases} \quad G_1: \begin{cases} X_{G_1} = 20 - 25 = -5 \text{ mm} \\ Y_{G_1} = 35 - 39.29 = -4.29 \text{ mm} \end{cases}$$

$$G_2: \begin{cases} x_{G_2} = X_{G_2} - X_G \\ y_{G_2} = Y_{G_2} - Y_G \end{cases} \quad G_2: \begin{cases} X_{G_2} = 55 - 25 = 30 \text{ mm} \\ Y_{G_2} = 65 - 39.29 = 25.71 \text{ mm} \end{cases}$$

del. $(G_i \xi_i \eta_i)$ i momenti $J_{\xi_i \xi_i}, J_{\eta_i \eta_i}, J_{\xi_i \eta_i}$

$$J_{\xi_1 \xi_1} = \frac{40 \cdot 70^3}{12} = 1.143 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{\eta_1 \eta_1} = \frac{40^3 \cdot 70}{12} = 3.733 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_{\xi_2 \xi_2} = -\frac{20 \cdot 50^3}{12} = -2.083 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_{\eta_2 \eta_2} = -\left(\frac{20^3 \cdot 50}{12}\right) = -3.333 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{\xi_3 \xi_3} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 2.5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{\eta_3 \eta_3} = \frac{30^3 \cdot 10}{12} = 2.250 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

per cerchi: $\frac{\pi d^4}{64}$
per i rettangoli: $\frac{b \cdot h^3}{12}$ o $\frac{h \cdot b^3}{12}$

il cubo va messo alla lunghezza ortogonale d'asse

i momenti centrifughi sono nulli perché ξ_i e η_i sono assi di simmetria

del. J_{xx}, J_{yy}, J_{xy} rif. G_{xy}

$$J_{xx_i} = J_{\xi_i \xi_i} + A_i Y_{G_i}^2 \quad \Rightarrow J_{xx} = \sum_{i=1}^3 J_{xx_i} = J_{\xi_1 \xi_1} + J_{\xi_2 \xi_2} + J_{\xi_3 \xi_3} + A_1 Y_{G_1}^2 + A_2 Y_{G_2}^2 + A_3 Y_{G_3}^2 =$$

$$J_{yy} = J_{\eta_1 \eta_1} + J_{\eta_2 \eta_2} + J_{\eta_3 \eta_3} + A_1 X_{G_1}^2 + A_2 X_{G_2}^2 + A_3 X_{G_3}^2 = 6.775 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \quad = 1.168 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

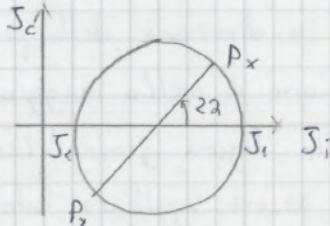
$$J_{xy_i} = J_{\xi_i \eta_i} + A_i X_{G_i} Y_{G_i} \quad \Rightarrow J_{xy} = \sum_{i=1}^3 J_{xy_i} = J_{\xi_1 \eta_1} + J_{\xi_2 \eta_2} + J_{\xi_3 \eta_3} + A_1 X_{G_1} Y_{G_1} + A_2 X_{G_2} Y_{G_2} + A_3 X_{G_3} Y_{G_3} = 2.7 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

c) $J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \begin{cases} J_1 = 1.288 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ J_2 = 5.58 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{cases}$ sempre positivi

$$|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right| = 1.1 \quad \Rightarrow \alpha^* = \frac{1}{2} \arctan 1.1 = 23.8^\circ$$

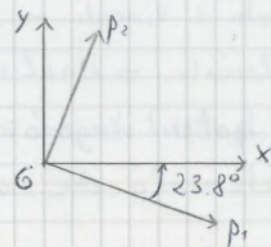
$J_{xy} > 0, J_{xx} > J_{yy}$

I rigo I caso

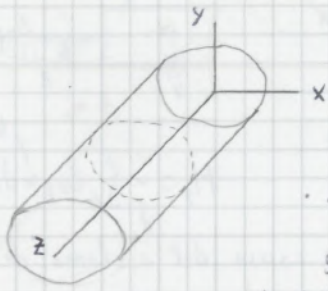


$\Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 45^\circ$

α : da p_1 a x $\alpha = \alpha^* = 23.8^\circ$



conseguenze delle assunzioni:



→ riferimento avente assi xy contenuti nel piano della figura generatrice e origine nel baricentro di quest'ultima

• asse z traiettoria del baricentro durante il moto di generazione → linea d'asse del solido

• tutte le sezioni normali a z sono sezioni rette del solido, identiche alla figura generatrice

• assenza di carichi sulla superficie laterale, dimensioni trasversali piccole

⇒ $\sigma_{xx} = 0$ $\sigma_{yy} = 0$ $\tau_{xy} = 0$ → $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = [\sigma]$

sono nulle perché non devono equilibrare

carichi esterni dal momento che i carichi sono applicati solo alle basi

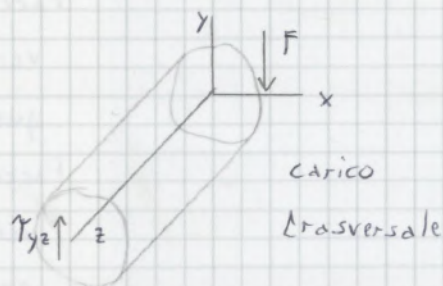
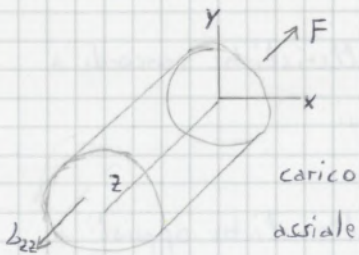
sono nulle su tutta la superficie di contorno ^{ipotesi 2}

la sezione può essere considerata una superficie piana perché le sue dimensioni sono minime (rispetto a z) → ipotesi 1b

⇒ sono nulle anche all'interno

possono essere presenti le tensioni σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} → generalmente funzioni di x,y

sono necessarie per equilibrare i carichi esterni



caratteristiche di sollecitazione:

è molto più comodo lavorare con funzioni a un'unica variabile

↪ equivalenti statici delle distribuzioni di tensione sulla retta

↪ trasformo le tensioni in una forza risultante

descrivono la situazione in modo sintetico (dipendono solo da z)

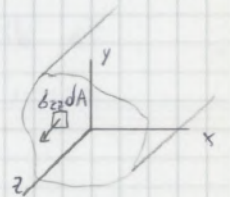
componenti della risultante

- Forza normale (sforzo normale) →

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

azione di trazione (>0) o di compressione (<0)

assiale dell'elemento, in direzione z



- forze di taglio (tagli)

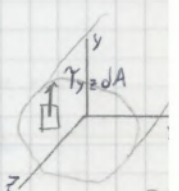
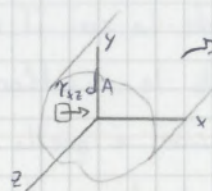
componenti x e y

azione di cesoimento

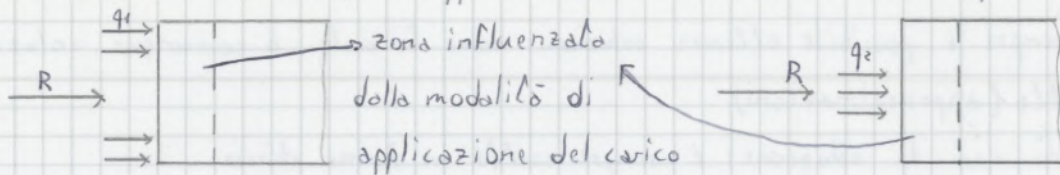
trasversale

$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA$$



EX. diverse modalità di applicazione di un carico assiale a pari risultante R



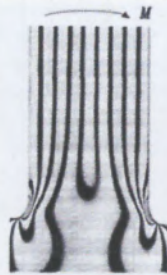
1- applicato sulla zona esterna della sezione 2- applicato sulla zona centrale della sezione
 nella zona vicina alla sezione caricata la distribuzione delle tensioni è diversa in 1 e 2
 e allontanandosi da essa, la distribuzione delle tensioni diventa uguale nei 2 casi
 e corrispondente alla soluzione del solido di Saint Venant

conseguenze importanti del principio:

- le modalità di applicazione di carichi e vincoli hanno influenza locale
- analogamente, le non-conformità all'ipotesi sulla geometria (EX. fori) causano alterazioni solo locali rispetto alla soluzione

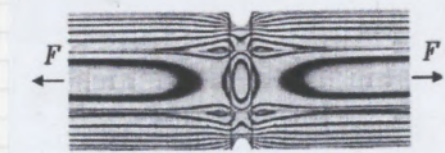
conferme sperimentali del principio: metodo fotoelastico

- modello della struttura realizzato in materiale trasparente
- particolari fenomeni a cui è soggetta la luce che attraversa un materiale sottoposto a sforzi → frange indicano l'andamento delle sollecitazioni



→ elemento soggetto a flessione e incastrato

variazione di sezione in un elemento soggetto a trazione



la traiettoria è deviata alla base

sforzi perturbati solo nella sezione

⇒ gli effetti svaniscono a breve distanza (dell'ordine di grandezza delle dimensioni trasversali della sezione)

relazioni tra caratteristiche di sollecitazione e tensioni:

procedura per determinarle:

principio di St. Venant

- 1- si assume il campo di spostamenti corrispondente al caso di interesse
 comportamento estensionale, flessionale
- 2- derivando opportunamente gli spostamenti si ottengono le deformazioni
- 3- applicando la legge elastica (ipotesi 3) dalle deformazioni si ottengono le tensioni
- 4- si calcolano le caratteristiche di sollecitazione come equivalenti statici dei campi di tensione, integrando queste ultime

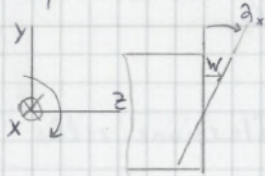
osservazioni: in questo modo si costruiscono le formule per σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} in

← funzione di N , T_x , T_y , M_x , M_y , M_z

nell'uso pratico si opera alla rovescia: note le caratteristiche si usano le formule per calcolare le tensioni

2. comportamento flessionale \rightarrow attorno a x o y \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{piano } zx \\ \text{piano } yz \end{array} \right.$

1- spostamento



raggio \uparrow angolo \uparrow
 $w = y \alpha_x$
 corda \approx arco

- rotazione attorno all'asse x (del proprio baricentro)
- considerando ogni sezione generica, sposta il riferimento in modo che l'asse x passi per il baricentro della sezione
- la sezione resta piana
- w varia a seconda della distanza dal baricentro
- per un angolo α_x piccolo l'arco di circonferenza \approx alla corda

2- deformazioni

la coordinata z è contenuta nell'angolo (perché α_x dipende da z)

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial (y \alpha_x)}{\partial z} = y \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} = y K_x$$

K_x : è una curvatura

\downarrow
 reciproco del raggio del cerchio osculatore in un punto

3- tensioni

\uparrow T non la considero

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} + \alpha(T - T_0) \Rightarrow \sigma_{zz} = E \cdot \epsilon_{zz} = E y K_x$$

non è più costante \rightarrow varia da punto a punto nella sezione

dipende da y (y) e da z (K_x)

4- equivalenti statici

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = E K_x \int_A y dA = E K_x S_x \Rightarrow N = 0$$

$\int_{z=0}$ \rightarrow rotazione attorno all'asse baricentrico

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = \int y^2 E K_x dA =$$

$$= E K_x \int_A y^2 dA = E K_x J_{xx}$$

\uparrow è comparso un momento d'inerzia di II ordine momento centrifugo

$$M_y = - \int_A x \sigma_{zz} dA = - E K_x \int x y dA = - E K_x J_{xy}$$

utilizziamo xy centrale (baricentrico + principale d'inerzia) $\Rightarrow M_y = 0$

\Rightarrow l'asse di rotazione della sezione e l'asse del momento flettente

coincidono \Rightarrow flessione retta

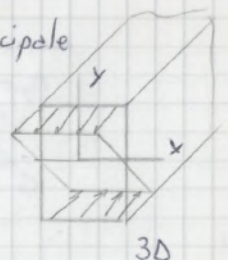
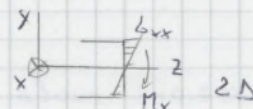
\downarrow perché il rif. è principale

$$K_x = \frac{M_x}{E J_{xx}} \Rightarrow \sigma_{zz} = E y K_x = E y \frac{M_x}{E J_{xx}} = y \frac{M_x}{J_{xx}}$$

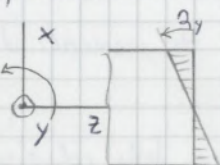
σ_{zz} dipende da y e da z (M_x dipende da z)

$y=0 \Rightarrow \sigma_{zz}=0 \rightarrow$ asse neutro

asse x



1- spostamento piano xz

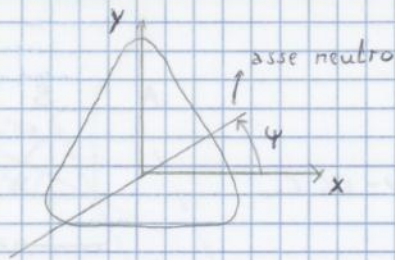


$$w = -x \alpha_y$$

in modo tale che gli spostamenti verso l'interno siano negativi e quelli verso l'esterno siano positivi

2- deformazioni

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -x \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} = -x K_y$$



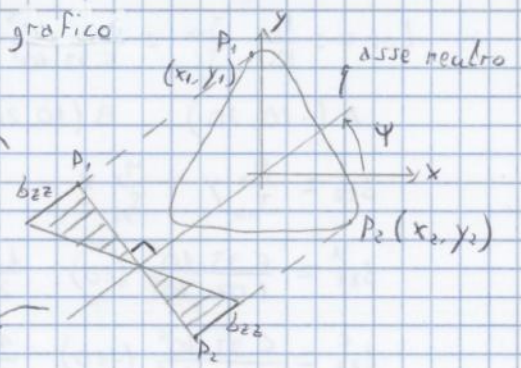
se un problema rappresentare le tensioni perché ci vorrebbe un diagramma 3D

⇒ ribaltiamo il grafico

↓
vista dall'alto

perpendicolarmente all'asse neutro
troviamo le 2 tensioni maggiore e minore → $\sigma_{zz, \min}$ e $\sigma_{zz, \max}$

la pendenza dell'asse neutro dipende dai momenti flettenti e da quelli d'inerzia

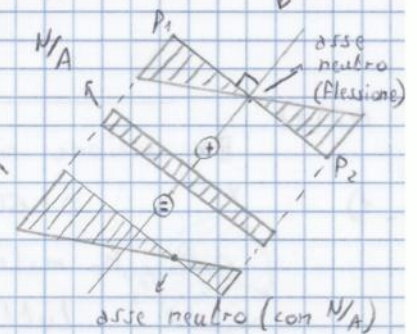


compresenza della forza normale N: $\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_{xx}} - \frac{M_y x}{J_{yy}}$

è come aggiungere una costante al caso precedentemente analizzato

delle tensioni ← semplice sommatoria

l'asse neutro viene spostato dall'azione della forza normale

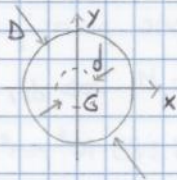


caso particolare: sezione circolare

qualunque sia la coppia

di assi xy: $J_{xx} = J_{yy} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$

nel caso di corona circolare $d \neq 0$



⇒ la flessione non è mai deviata

$\frac{J_{xx}}{J_{yy}} = 1 \Rightarrow \tan \psi = \tan \psi \rightarrow$ asse del momento = asse neutro

tensioni sempre simmetriche

nel caso dei cerchi di Mohr:

J_c

→ J_i

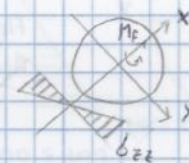
$J_c = J_0 = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$

siccome i momenti d'inerzia

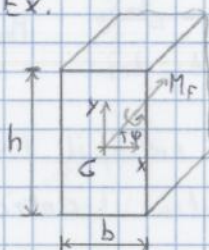
sono uguali per qualsiasi riferimento, il cerchio

di Mohr è sempre collassato in un punto ⇒ $J_c = 0$

qualsiasi sia il sistema baricentrico considerato



EX.



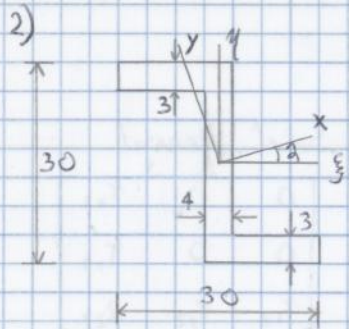
$b = 20 \text{ mm}$ $h = 40 \text{ mm}$

$M_f = 8.00 \cdot 10^5 \text{ Nm}$ $\psi = 30^\circ$

Trovare l'andamento di σ_{zz} e i valori max e min

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 1.07 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \frac{hb^3}{12} = \frac{20^3 \cdot 40}{12} = 2.67 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

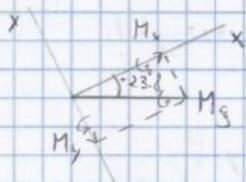


$$\begin{cases} J_{\xi\xi} = 2.327 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta\eta} = 6.89 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \\ J_{\xi\eta} = -8.95 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \end{cases} \quad \begin{cases} J_{xx} = 2.722 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ J_{yy} = 2.95 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \\ \alpha = -23.8^\circ \end{cases}$$

valori nel riferimento principale

$$M_\xi = 2.00 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \rightarrow \text{risultante}$$

componenti M_x e M_y :

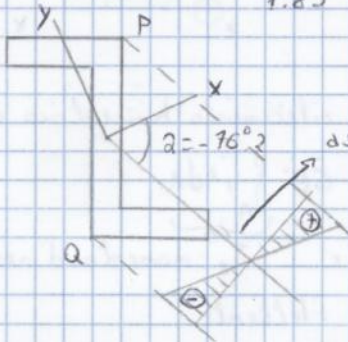


$$\begin{cases} M_x = M_\xi \cos \alpha = 1.83 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \\ M_y = M_\xi \sin \alpha = -0.81 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \end{cases}$$

$$b_{22} = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$

asse neutro: $b_{22} = 0 \Rightarrow y = \frac{M_y}{J_{yy}} \cdot \frac{J_{xx}}{M_x} x = \tan \psi \cdot x$

$$\tan \psi = \frac{-0.81 \cdot 2.722}{1.83 \cdot 0.295} = -4.08 \Rightarrow \psi = -76.2^\circ$$



$$\begin{cases} \xi^p = 2 \text{ mm} & \xi^q = -2 \text{ mm} \\ \eta^p = 15 \text{ mm} & \eta^q = -15 \text{ mm} \end{cases}$$

$$x^p = \xi^p \cos 23.8^\circ + \eta^p \sin 23.8^\circ = 7.88 \text{ mm}$$

$$y^p = \xi^p \sin 23.8^\circ + \eta^p \cos 23.8^\circ = 12.91 \text{ mm}$$

$$\Delta_{22}^p = \frac{1.83 \cdot 10^3}{2.722 \cdot 10^4} 12.91 - \frac{-0.81 \cdot 10^3}{2.95 \cdot 10^3} 7.88 = 303 \text{ MPa}$$

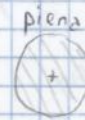
$$\Delta_{22}^q = -303 \text{ MPa}$$

11/11

3 - comportamento torsionale

2 casi \rightarrow sezione circolare \rightarrow piena o cava

soluzioni in forma chiusa



sezione non circolare \rightarrow soluzioni non in forma chiusa

esistono formule approssimative per torsioni, ecc... se la

parete è solida



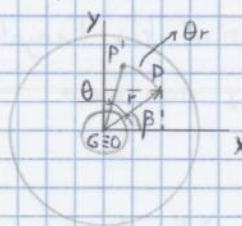
aperte

chiusa

\rightarrow sia per sezioni aperte che chiuse

sezioni circolari:

1 - spostamenti \rightarrow ogni sezione ruota mantenendo l'asse di rotazione comune



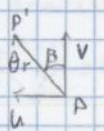
coordinate xy e $r\theta$

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

la sezione ruota intorno a $G=O$ di un angolo θ (piccolo), restando piana

corda \approx arco

$\theta r \approx$ arco



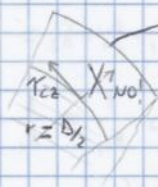
$$\begin{cases} u = \theta r \sin \beta = -\theta y \\ v = \theta r \cos \beta = \theta x \\ w = 0 \end{cases}$$

θ è funzione di z

- perché r e centrifuga, u è centripeta

dall'inizio alla fine del cilindro ritroviamo lo stesso M_z
 G costante lungo z perché il materiale è omogeneo e J_p costante
 perché la sezione è costante $\Rightarrow \theta - \theta_1 = \frac{M_z}{G J_p} L$

osservazione: condizioni al contorno su τ_{rz}, τ_{yz}



la superficie laterale è scarica

τ_{rz} non ha una componente radiale $\rightarrow \tau_{rz}$ circonferenziale
 altrimenti ci dovrebbe essere una componente sulla
 superficie laterale (per ipotesi è scarica)

$\Rightarrow \tau_{rz}$ rispetta l'ipotesi sul carico

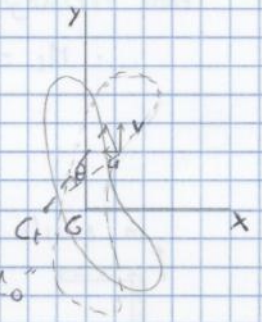
sezione non circolare:

differenze fondamentali rispetto al caso circolare:

- la rotazione avviene intorno a C_t (generalmente diverso dal baricentro)
 - esiste una componente di spostamento w
- \Downarrow ingobbamento della sezione

c'è anche una componente di
 spostamento radiale
 \Downarrow viola l'ipotesi sul carico
 tensioni tangenziali

$$\begin{cases} u = -\theta(y - y_c) \\ v = \theta(x - x_c) \\ w = \theta w(x, y) \end{cases}$$



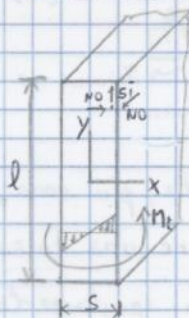
funzione di "ingobbamento"

attraversano il contorno \rightarrow grazie a w si riesce a rispettare l'ipotesi sul carico

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

sezione a parete sottile aperta:

caso fondamentale: rettangolo



momento torcente M_t

non M_z perché rotazione avviene attorno a C_t (non a G)

distribuzione $\tau = \tau_{yz}$ parallela al lato maggiore

(altrimenti si dovrebbe avere una componente sul lato scarico
 variabilità con x antisimmetrica $\rightarrow \tau_{yz}$ deve generare un momento

$$\tau_{yz, \text{picco}} = \pm \frac{M_t}{J_t} s$$

$$J_t = \frac{1}{3} s^3 l \quad \text{se } s \ll l$$

(non è un vero momento d'inerzia

$$\text{altrimenti } J_t = \frac{1}{3} s^3 (l - 2 \cdot 0.35)$$



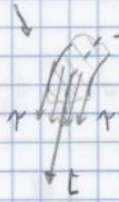
valori di picco
 uguali e opposti

nei paraggi delle estremità τ_{yz} genera

una componente sul lato scarico \rightarrow problema

\rightarrow si elimina 0.35 in modo da non tener conto di questa zona





linea medio \rightarrow se lo spessore \bar{e} piccolo le tangenti al bordo interno ed esterno sono praticamente uguali e quindi anche alla linea medio

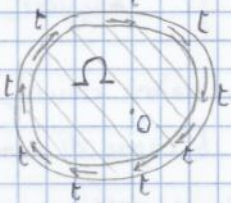
\Rightarrow possiamo supporre che tutte le tensioni interne siano uguali le sostituisco con una risultante t (Flusso di τ attraverso s)

$$T = \int_s \tau ds \approx \tau s \quad \text{supponiamo } \tau \text{ costante nello spessore}$$

τ media

analogia con i fluidi: condizioni di contorno \leftrightarrow pareti impermeabili
(tangenza) \downarrow \vee tangente alle pareti
se ci fosse una componente non tangenziale il fluido passerebbe attraverso le pareti

se incompressibili: fluido \leftrightarrow torsione
portata costante \leftrightarrow flusso t costante \rightarrow rispetto al profilo qualsiasi sezione scelgo, t \bar{e} lo stesso \leftarrow della sezione in intensità, non direzione (data dalla linea medio)

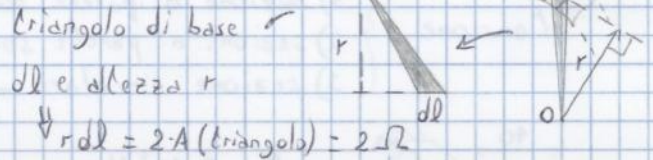


equivalenti statici:
- forza (taglio) t $dF = t d\vec{l}$ $F = \int_C t d\vec{l} = \vec{0}$ integrate di linea per una linea chiusa
 \bar{e} quello che ci aspettiamo perché \leftarrow forza risultante nulla
parliamo di torsione \rightarrow momento (non forza)

- momento (torcente) \rightarrow polo O qualsiasi

$$M_t = \int_C r t dl = t \int_C r dl = t \cdot 2\Omega$$

Ω area interna \rightarrow racchiusa dalla linea medio

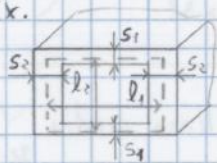


$$\Rightarrow t = \frac{M_t}{2\Omega} \quad \text{anche l'area vuota entra in gioco dal punto di vista strutturale}$$

$$\Rightarrow \text{tensione } \tau = \frac{t}{s} = \frac{M_t}{2\Omega s} \quad s \text{ (eventualmente) variabile}$$

$\tau \propto \frac{1}{s} \rightarrow$ a differenza della sezione aperta, più la sezione chiusa \bar{e} spessa, minore \bar{e} la tensione

Ex.



$$\rightarrow \Omega = l_1 l_2 \quad \tau_1 = \frac{M_t}{2\Omega s_1} \quad \tau_2 = \frac{M_t}{2\Omega s_2}$$

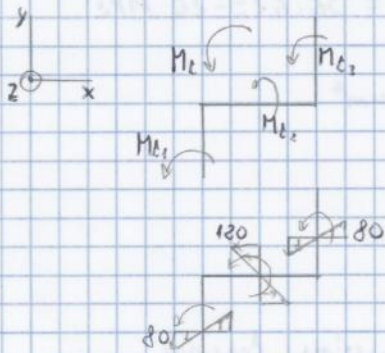
rigidezza torsionale \rightarrow gradiente di torsione



\rightarrow tratto dz soggetto a M_t
energia elastica: $dE = \frac{1}{2} M_t d\theta$
energia elastica \leftarrow a livello macroscopico
non dice cosa succede localmente

$$J_e(\text{sezione}) = \sum_i J_{e,i} = J_{e,1} + J_{e,2} + J_{e,3} = 4482 \text{ mm}^4$$

calcolo $\tau_{z5,i}^{\max} = \frac{M_{t,i}}{J_e} s_i$ $\tau_{z5,1}^{\max} = 80 \text{ MPa}$ $\tau_{z5,2}^{\max} = 120 \text{ MPa}$ $\tau_{z5,3}^{\max} = 80 \text{ MPa}$

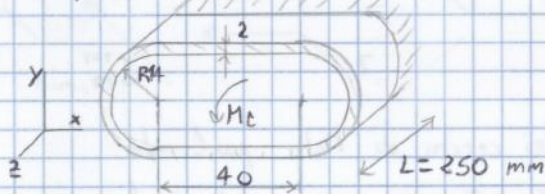


→ momento torcente viene scomposto in momenti più piccoli, ciascuno applicato su un rettangolino
 ⇒ affinché ci sia questo momento torcente le tensioni devono variare di segno all'interno della sezione dello stesso rettangolo

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{GJ_e} L \quad \theta' = \frac{M_t}{GJ_e} = \frac{d\theta}{dz} \quad \Delta\theta = \frac{9 \cdot 10^4}{7.89 \cdot 10^4 \cdot 4482} 600 = 0.153 \text{ rad} \approx 9^\circ$$

non è una rotazione importante rispetto alla struttura stessa

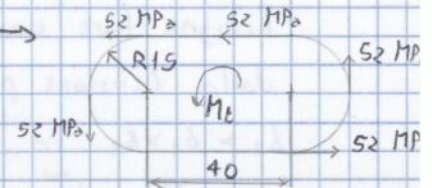
2) parete sottile chiusa



$M_t = 410 \text{ Nmm}$ $G = 3 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

a) $\tau = ?$ b) $\Delta\theta = ?$

linea media →

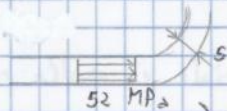


Ω : area racchiusa dalla linea media

$$\Omega = 40 \cdot 30 + \pi 15^2 = 1907 \text{ mm}^2$$

calcolo $\tau_{z5,i} = \frac{M_t}{2\Omega s}$ costante lungo lo spessore

la nostra sezione ha spessore costante ⇒ τ costante



$$\tau_{z5} = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 1907 \cdot 2} = 52 \text{ MPa} = \text{cost}$$

→ τ costante all'interno della sezione

calcolo J_e : $J_e = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{s}} = \frac{4\Omega^2}{\sum_i \frac{L_i}{s_i}} = \frac{4 \cdot 1907^2}{2 \cdot \frac{40}{2} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 15}{2}} = 1.670 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

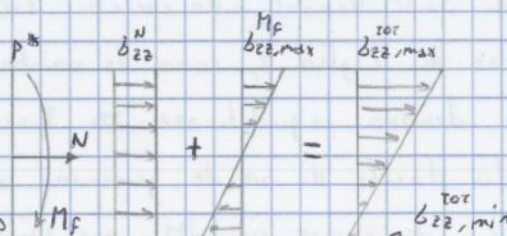
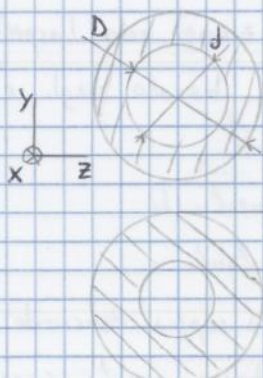
$$\Delta\theta = \frac{M_t}{GJ_e} L = \frac{4 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^4 \cdot 1.670 \cdot 10^5} \cdot 250 = 0.0193 \text{ rad} = 1.1^\circ$$

3) sezione circolare cava

$D = 60 \text{ mm}$ $d = 20 \text{ mm}$ Fragile → $R_m = 300 \text{ MPa}$

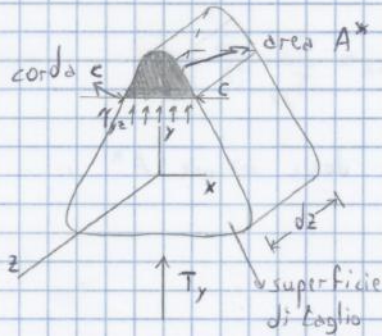
$N = 6.5 \cdot 10^4 \text{ N}$ $M_f = 1.1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$ $M_t = 8.4 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$

coefficiente di sicurezza (CS)?



→ azione del $M_f + N$

P): $M_x + dM_x - M_x - T_y dz = 0 \Rightarrow T_y = \frac{dM_x}{dz}$ → la derivata della funzione momento flettente è la funzione taglio

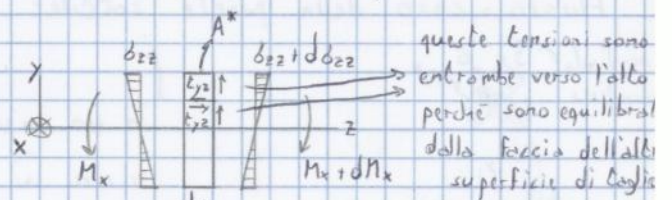
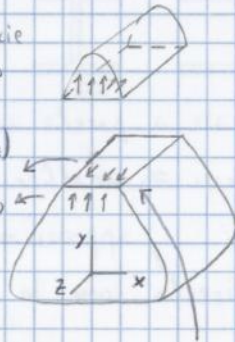


la corda separa la sezione A* dal resto della sezione A

flusso di T_{yz} attraverso c: $T_{yz} = \int_c \tau_{yz} dc$

mi interessa valutare l'equilibrio parziale

se ci sono le tensioni (T_{yz}) su questa faccia, ci devono essere anche sulla faccia zx



queste tensioni sono entrambe verso l'alto perché sono equilibrate dalla forza dell'altre superficie di taglio

lungo l'asse z le tensioni aumentano di un $d\sigma_{zz}$ → da cosa è equilibrato?

viene equilibrato dalle tensioni tangenziali → riassunte con T_{yz}

equilibrio z (assiale) della zona superiore (A*):

→: $\int_{A^*} (\sigma_{zz} + d\sigma_{zz}) dA - \int_{A^*} \sigma_{zz} dA - T_{yz} dz = 0$

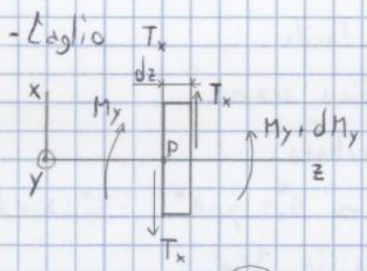
flessione: $\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y \Rightarrow d\sigma_{zz} = \frac{1}{J_{xx}} \frac{dM_x}{dz} y dz = \frac{1}{J_{xx}} T_y y dz \rightarrow y, J_{xx}$ costanti rispetto a z

⇒ $\frac{T_y}{J_{xx}} \int_{A^*} y dA dz - T_{yz} dz = 0$

S_x^* ← momento statico di A* rispetto a x → se fosse di A sarebbe 0

⇒ $T_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{J_{xx}}$

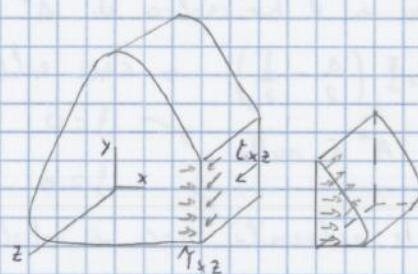
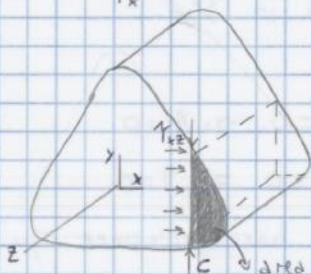
↳ flusso delle tensioni "entranti" nella corda



P): $M_y + dM_y - M_y + T_x dz = 0 \Rightarrow T_x = -\frac{dM_y}{dz}$

il taglio è la derivata del momento flettente

flusso attraverso c: $T_{xz} = \int_c \tau_{xz} dc$



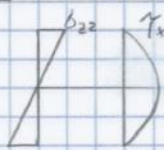
J_{yy} x costanti rispetto a z

flessione: $\sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}} x \Rightarrow d\sigma_{zz} = -\frac{1}{J_{yy}} \frac{dM_y}{dz} x dz$

⇒ $d\sigma_{zz} = -\frac{1}{J_{yy}} (-T_x) x dz = \frac{T_x}{J_{yy}} x dz$



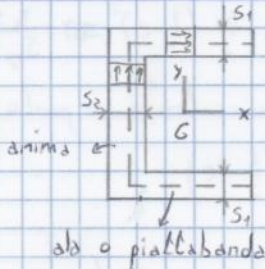
b_{zz} → infatti più la linea di corda si avvicina all'asse neutro della flessione maggiore è la quantità di b_{zz} che dev'essere inclusa nell'integrale



→ il fatto che le tensioni non siano massime nello stesso punto è positivo

$$\int_{A^*} b_{zz} dA$$

- sezione a "C":

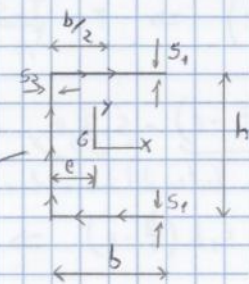


ala o piattabanda

indica il verso convenzionale di τ positiva

ci si dimentica di x e y

→ in realtà gli spigoli non sono vivi e le ali sono leggermente inclinate verso il baricentro → questione tecnologica
→ si condensa il tutto nella linea di mezzaria per semplicità



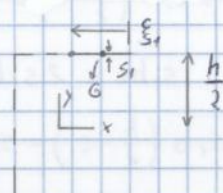
e: quota che indica il baricentro rispetto alla linea di mezzaria
condizione su e:

$$s_2 h e = 2 s_1 b \left(\frac{b}{2} - e \right)$$

$$S_y(\text{anima}) = S_y(\text{piattabande})$$

- taglio T_y : → $\tau = \frac{T_y S_x^*}{J_{xx} \cdot s}$

piattabanda superiore: →

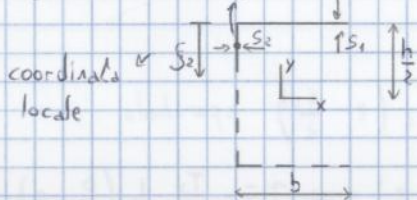


$$S_x^* = s_1 \xi_1 \frac{h}{2}$$

$$\xi_1 = 0 \Rightarrow S_x^* = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$\xi_1 = b \Rightarrow S_x^* = s_1 \frac{bh}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T_y b h}{2 J_{xx}}$$

anima:



coordinate locale

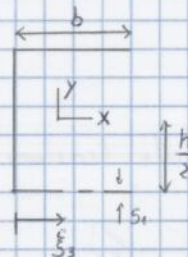
$$S_x^* = \frac{s_2 b h}{2} + s_2 \xi_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{\xi_2}{2} \right)$$

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow S_x^* = \frac{s_2 b h}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T_y b h s_1}{2 J_{xx} s_2}$$

$$\xi_2 = \frac{h}{2} \Rightarrow S_x^* = \frac{s_2 b h}{2} + \frac{s_2 h^2}{8} \Rightarrow \tau = \frac{T_y}{J_{xx} s_2} \left(\frac{s_1 b h}{2} + \frac{s_2 h^2}{8} \right)$$

$$\xi_2 = h \Rightarrow S_x^* = \frac{s_2 b h}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T_y b h s_1}{2 s_2 J_{xx}}$$

piattabanda inferiore:



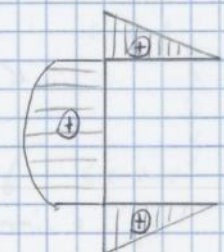
→ soltanto la piattabanda superiore porta un contributo a S_x^*

$$S_x^* = \frac{s_1 b h}{2} + s_1 \xi_3 \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{s_1 b h}{2} - s_1 \xi_3 \frac{h}{2}$$

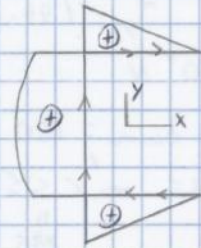
$$\xi_3 = 0 \Rightarrow S_x^* = \frac{s_1 b h}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T_y b h}{2 J_{xx}}$$

$$\xi_3 = b \Rightarrow S_x^* = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

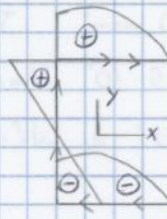
distribuzione locale delle tensioni dovute a T_y



caso T_y :

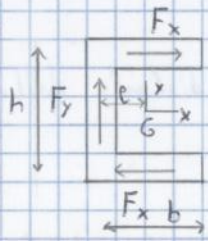


caso T_x :



a quale punto ridurre la distribuzione di tensione τ dovuta al taglio?

T_y :



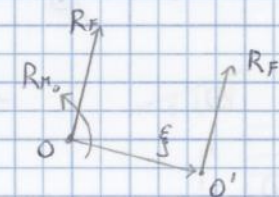
$$F_x = \int_A \tau dA = \frac{1}{2} \frac{T_y b h}{2 J_{xx}} \underbrace{b h}_{\text{area}} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{centro}} \rightarrow \text{distribuzione è un triangolo}$$

$$F_y = T_y$$

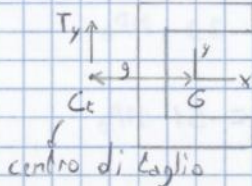
rispetto a G: $R_F = T_y$

$$R_{m_G} = -(F_y e + F_x h)$$

$$\frac{R_{m_G}}{R_F} = \left(T_y e + \frac{1}{4} \frac{T_y b^2 h^2}{J_{xx}} \right) \frac{1}{T_y} \rightarrow \text{valore negativo}$$



\rightarrow rispetto al baricentro è a sinistra



centro di taglio

\Rightarrow affinché gli sforzi di taglio abbiano la distribuzione trovata, è necessario che T_y sia applicata nel centro di taglio \rightarrow altrimenti entrano in gioco gli effetti torsionali

(torsione di una sezione a parete sottile)

T_x : la distribuzione è simmetrica

$\rightarrow R_F = 0 \Rightarrow$ il C_G rimane sulla linea dell'asse x

il centro di taglio coincide con il centro di torsione

punto attorno al quale la sezione ruota quando sottoposta a torsione

sintesi [D] Saint Venant:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{yz} \\ 0 & 0 & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & b_{zz} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \gamma_{yz}, \gamma_{xz}: \text{ dovute a torsione e taglio} \\ b_{zz}: \text{ dovute a trazione e flessione} \end{array}$$

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & \gamma_{yz} \\ 0 & 0-\lambda & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & b_{zz}-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \text{voglio trovare gli autovalori}$$

$$= -\lambda [-\lambda (b_{zz}-\lambda) - \gamma_{yz}^2] + \gamma_{xz} (-(-\lambda) \gamma_{xz}) = 0$$

$$-\lambda [\lambda^2 - b_{zz} \lambda - (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)] = 0$$

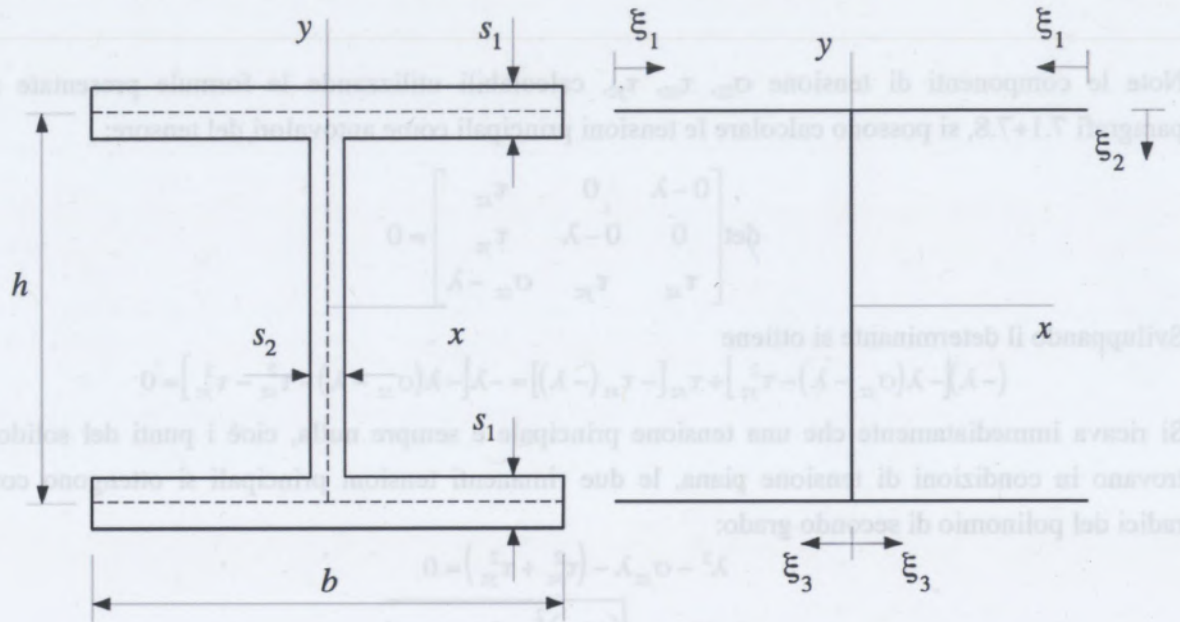
$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \frac{b_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_{zz}}{2}\right)^2 + (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}$$



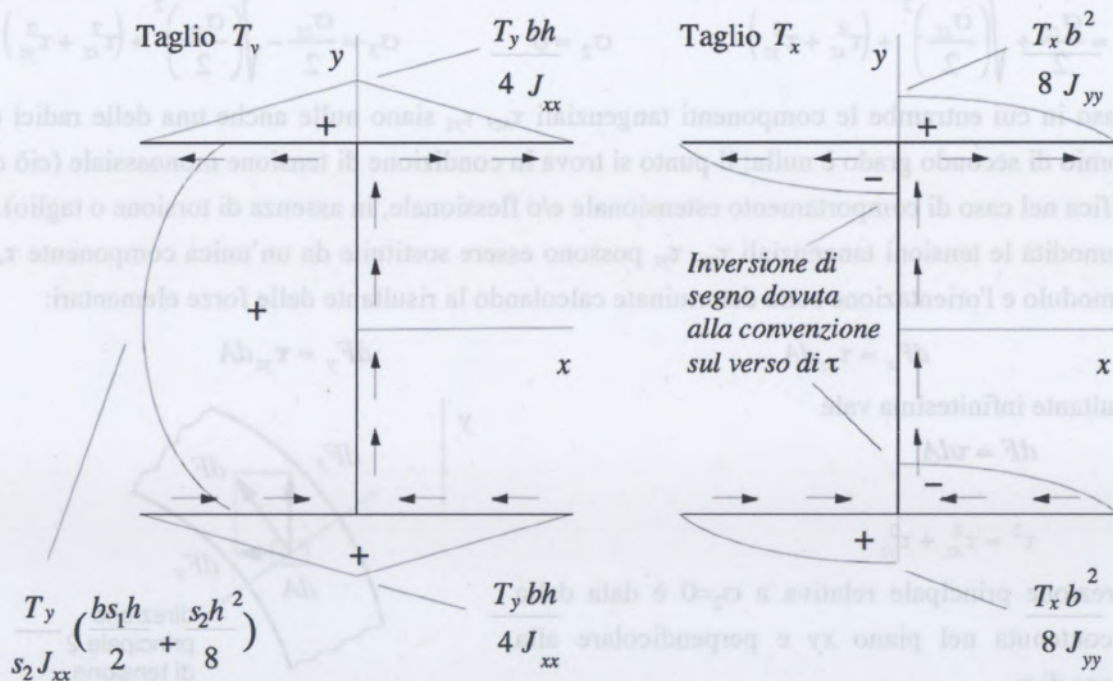
CONTINUAZIONE SU DISPENSE

$\rightarrow \lambda_1, \lambda_3$ hanno segni opposti

Sezione a parete sottile a doppio T sottoposta a forze di taglio T_y e T_x .



Con procedimento analogo a quello impiegato per la sezione a C si ottengono gli andamenti della tensione tangenziale illustrati nelle figure seguenti.



In conclusione di questi esempi, si fa notare che ciascuna componente di taglio T_x o T_y può causare entrambe le tensioni tangenziali τ_{xz} , τ_{yz} ; i valori massimi (in modulo) di tensione si raggiungono dove il profilo interseca l'asse normale a quello in direzione del quale agisce il taglio.

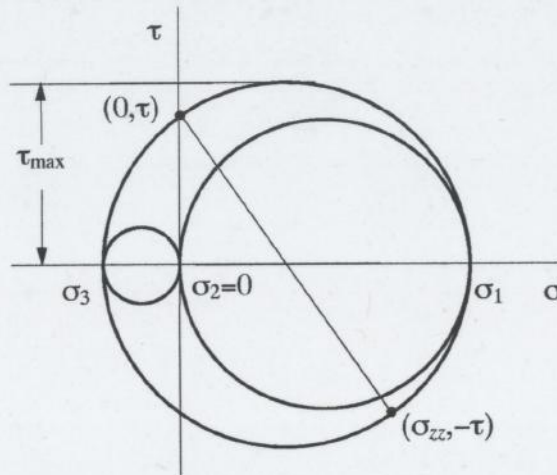
7.9. Tensioni principali e ipotesi di cedimento

Per le ipotesi effettuate, il tensore della tensione agente in un qualsiasi punto di una sezione del solido di Saint Venant assume la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Solido di St. Venant

piani perpendicolari tra di loro e appartenenti al fascio che ha in comune la direzione principale 2. Il primo piano è quello della sezione del solido (piano xy) su cui agiscono le componenti (σ_{zz}, τ) , il secondo piano è parallelo a z e su esso agisce la sola τ . Si hanno quindi gli elementi per costruire il cerchio passante per σ_1, σ_3 ; i cerchi rimanenti vengono tracciati ricordando che $\sigma_2=0$.



Come già mostrato in precedenza, la massima tensione tangenziale agisce su un piano del fascio avente in comune la direzione principale 2 ed è pari al raggio del cerchio passante per σ_1, σ_3 :

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Utilizzando questi risultati si possono calcolare le tensioni ideali, le cui formule sono state ottenute al par. 4.2 in funzione delle tensioni principali, direttamente in termini di σ_{zz} e τ .

Materiali fragili

Ipotesi della massima tensione normale:

$$\sigma_{id} = \sigma_1 = \frac{\sigma_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Materiali duttili

Ipotesi della massima tensione tangenziale:

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}$$

Ipotesi dell'energia di distorsione:

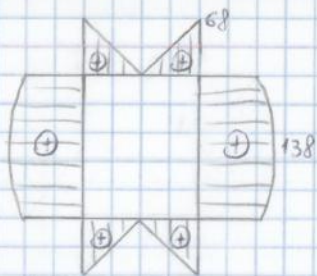
$$\sigma_{id}^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3$$

Ponendo, per semplicità di notazione, $a = \frac{\sigma_{zz}}{2}$, $b = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2}$, si ottiene l'espressione:

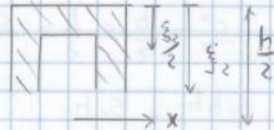
$$\sigma_{id}^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 - (a+b)(a-b) = a^2 + 3b^2 = \left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + 3\left[\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2\right] = \sigma_{zz}^2 + 3\tau^2$$

Si ricava quindi:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau^2}$$



parte laterale:



$$S_x^* = \frac{bsh}{2} + 2s \epsilon_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{\epsilon_2}{2} \right)$$

contributo della parete superiore

max in $\epsilon_2 = h/2$

$$\tau = \frac{T_x S_x^*}{2S_{x+s}} = 138 \text{ MPa}$$

è come se fossero 2

sezioni a C \rightarrow C + D

Torsione:



essendo la sezione chiusa, il flusso di τ si deve conservare

$$\Omega = 48 \cdot 98 = 4704 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega s} = 57 \text{ MPa}$$

non è molto influente perché le sezioni chiuse sopportano bene le torsioni per il fatto che il flusso è continuo

fff \rightarrow taglio - si accumulano
fff \rightarrow torsione

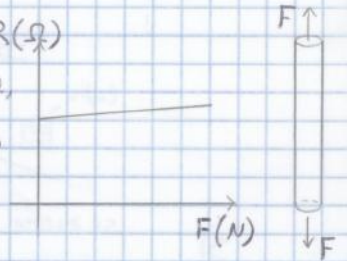
25/11

Estensimetria elettrica a resistenza

$$R(\frac{\Omega}{s})$$

principio fisico \rightarrow un conduttore filiforme, sottoposto a trazione, varia la propria resistenza elettrica in modo proporzionale alla trazione esercitata

quindi se il conduttore è reso solidale alla struttura è possibile conoscere la deformazione misurando la resistenza elettrica



applicazioni:

- analisi sperimentale delle sollecitazioni \rightarrow su oggetti di ogni tipo \rightarrow Ex. sci
le deformazioni sono piccole (mm) \rightarrow dalle deformazioni è possibile conoscere le tensioni applicate
- costruzione di trasduttori di grandezze meccaniche (forza, coppia, pressione, ...)
 \rightarrow Ex. utilizzati nelle bilance

relazione fra variazione di resistenza e deformazione

resistenza di un conduttore filiforme $R = \frac{\rho l}{A}$ ρ : resistività l : lunghezza
 A : sezione

variazione relativa di R: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A}$ \rightarrow somma di 3 contributi

$\frac{\Delta \rho}{\rho}$: variazione di resistività $\frac{\Delta l}{l}$: dilatazione longitudinale $\rightarrow \epsilon$

$\frac{\Delta A}{A}$: variazione relativa di sezione trasversale
 \rightarrow dovuta al modulo di Poisson

\rightarrow a trazione si ha anche una deformazione trasversale

effetti della temperatura → durante le misurazioni può variare la T:

- condizioni ambientali → Ex. riscaldamento solare
- funzionamento del componente in prova → Ex. macchina termica
- effetto Joule nell'estensimetro stesso

↳ queste variazioni influenzano la misura secondo 3 meccanismi:

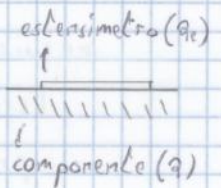
- variazione del fattore di scala → $\frac{\Delta R}{R} = K \epsilon \rightarrow K = K(T)$
- variazione della resistenza elettrica dell'estensimetro
- dilatazione termica differenziale estensimetro/componente
estensimetro e componente si dilatano in modo diverso

previsione degli effetti di temperatura

- il valore di K_T del fattore di scala a temperatura $T \neq T_0$ (ambiente) viene stimato con la formula $K_T = K [1 + \beta_K (T - T_0)]$
coefficiente di temperatura del fattore di scala

- la variazione di resistenza dell'estensimetro alla temperatura T viene stimata con: $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_T = \beta (T - T_0)$
coefficiente di temperatura della resistenza

- un estensimetro incollato su un componente strutturale è costretto a dilatarsi termicamente come quest'ultimo (perché molto più rigido):



α → coefficiente di dilatazione termica del componente

α_e → coefficiente di dilatazione termica dell'estensimetro

⇒ l'estensimetro subisce una dilatazione differenziale $\epsilon_a = (\alpha - \alpha_e)(T - T_0)$
data dalla differenza di estensioni fra componente e estensimetro

⇒ considerando i 3 contributi:

$$\frac{\Delta R}{R} = K_T \epsilon + K_T (\alpha - \alpha_e)(T - T_0) + \beta (T - T_0)$$

unico contributo che ci interessa → gli altri sono disturbi

$$\epsilon = \frac{\Delta R/R}{K_T} - \frac{[\beta + K_T (\alpha - \alpha_e)] (T - T_0)}{K_T} \rightarrow \text{voglio far sparire questo termine}$$

⇒ moltiplico e divido per K (perché K_T non è costante)

si aggiunge e sottrae $K(\alpha - \alpha_e)$ all'interno della parentesi quadra

$$\Rightarrow \epsilon = \left\{ \frac{\Delta R/R}{K} - \frac{[\beta + K(\alpha - \alpha_e)] (T - T_0)}{K} - \frac{(K_T - K)(\alpha - \alpha_e)(T - T_0)}{K} \right\} \frac{K}{K_T}$$

misura grezza ϵ' deformazione apparente ϵ_a

perché sembra che ci sia, ma in realtà è dovuta solo alla T

≈ 0

si cerca un estensimetro il cui $\alpha_e \approx \alpha$
usando materiali opportuni $K_T \approx K$
⇒ il prodotto è trascurabile

il polimero isola facilmente ma disperde male il calore

⇒ nei componenti metallici non c'è problema di dispersione di calore ⇒ R basso
i polimeri isolano bene ⇒ resistenza alta

III - dimensioni → intervallo di valori $10^{-1} - 10^2$ mm → criteri di scelta:

- gradiente di deformazione elevato, materiale omogeneo → griglia corta

le deformazioni sono molto puntuali ⇒ ho bisogno di estensimetri precisi

- deformazione lineare o uniforme, materiale disomogeneo → griglia lunga

uso la griglia lunga in modo da poter misurare meglio le deformazioni

2 - supporto → isola la griglia dal componente su cui è applicato l'estensimetro

- in resina poliammidica (spessore 10^{-2} mm)

↳ deformazione massima: 5000 $\mu\text{m/m}$

↳ temperatura massima sopportata: 200°C

- in resina epossidica, fibra di vetro → per casi più critici

↳ deformazione e temperature sopportate superiori

3 - terminali → collegano elettricamente la griglia estensimetrica al circuito



a filo



a piazzola



terminali

→ in ogni caso devono essere saldati ai cavi su basi di ancoraggio in modo che il carico sui cavi non solleciti la griglia
base di ancoraggio → si saldano da una parte e dall'altra i fili dell'estensimetro e i cavi che lo collegano al macchinario

4 - adesivo

↳ cianoacrilato → applicazione semplice, presa rapida

↳ $T_{max} < 100^\circ\text{C}$ e durata non elevata

risente dell'invecchiamento → dopo un certo tempo, anche a causa dell'umidità, tende a staccarsi

↳ epossidico → applicazione più complessa → è necessario un trattamento termico

↳ $T_{max} \approx 250 - 300^\circ\text{C}$, durata elevata → poco sensibile all'invecchiamento

5 - protettivo → per proteggere l'estensimetro da urti o altro

↳ resine (siliconiche) inglobanti l'installazione

copertura in gomma

scudi metallici → per forti urti e/o abrasioni

- perché non deve effettuare nessun tipo di misura → deve solo compensare all'errore
- 2 resistenze di completamento grazie ai segni opposti di I e II
- $$\Rightarrow \sum \varepsilon = \varepsilon_I - \varepsilon_{II} = \varepsilon + \varepsilon_a - \varepsilon_a = \varepsilon \Rightarrow \text{misura pulita} \rightarrow \text{deformazione apparente cancellata}$$
- anche se l'autocompensazione dell'estensimetro non funziona
 il compensatore rileva la stessa deformazione apparente dell'estensimetro di misura (la T dev'essere la stessa → non deve variare da punto a punto)

realizzazioni di trasduttori di forza, coppia, spostamento, ecc...

- 2 o 4 estensimetri:
- 2 estensimetri + 2 resistenze di completamento → mezzo ponte
 - 4 estensimetri → ponte completo → è il migliore

la maggiore complicazione (e il costo) di un circuito con più estensimetri attivi ha lo scopo di:

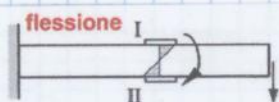
- aumentare il segnale a vantaggio della misura: miglior rapporto segnale/rumore
- rendere il sistema selettivo, cioè sensibile a una sola causa meccanica (Ex. forza assiale, momento flettente, ecc...) sfruttando i segni + e -
- nei casi in cui voglio misurare solo un certo tipo di sollecitazione
- rendere il sistema lineare (si nota dalla relazione per U esatta)

collegamenti a mezzo ponte (rari):

gli estensimetri devono essere adiacenti, non opposti

$$\Rightarrow \sum \varepsilon = \varepsilon_I - \varepsilon_{II}$$

- stessa orientazione, su facce opposte ($\varepsilon, -\varepsilon$):



le deformazioni misurate hanno segni opposti

ma grazie al segno - si compensano

$$\sum \varepsilon = \varepsilon_I - \varepsilon_{II} = \varepsilon + \varepsilon_a - (-\varepsilon + \varepsilon_a) = 2\varepsilon$$

niente errore e segnale raddoppiato

non ci devono essere T diverse sulle 2 facce

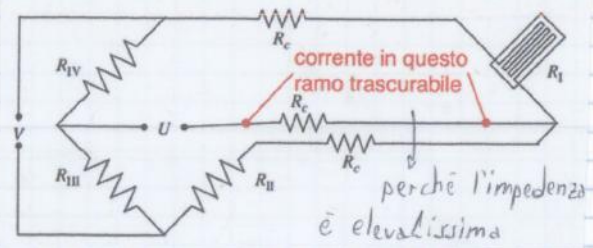
- stessa faccia, orientazioni ortogonali (nei casi in cui l'altra faccia non sia disponibile) → ($\varepsilon, -\nu\varepsilon$):



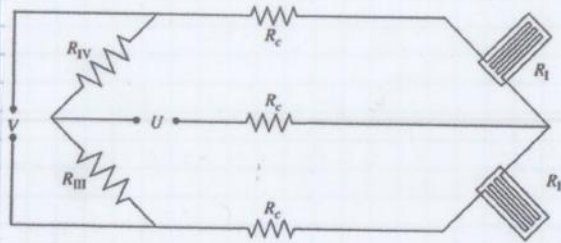
$$\sum \varepsilon = \varepsilon_I - \varepsilon_{II} = \varepsilon + \varepsilon_a - (-\nu\varepsilon + \varepsilon_a) = (1 + \nu)\varepsilon$$

anche in questo caso la deformazione apparente viene cancellata

- 1/4 ponte, collegamento a 3 fili
 corretto perché le ϵ_x dei cavi sui lati adiacenti si elidono
 perché R_c è in serie con R_0

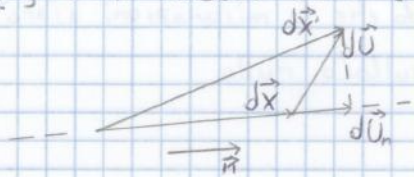


- 1/2 ponte, collegamento a 3 fili
 corretto anche nel caso di mezzo ponte



uso ed elaborazione delle misure:

premessa: dilatazione lungo una direzione generica
 non so a priori quali siano le direzioni principali su pezzi di forma complicata
 è possibile mettere in relazione la dilatazione lungo una direzione generica $\{n\}$ e il tensore della deformazione $[E]$



→ parliamo da questo diagramma, ottenuto precedentemente studiando le deformazioni
 $d\vec{X} + d\vec{U} = d\vec{X} + d\vec{U} + d\vec{X}$
 (traslazione viene elisa)

la componente di spostamento incrementale parallela a $\{n\}$ è data da

$$dU_n = \{n\}^T \{dU\} = \{n\}^T [E] \{dX\}$$

scrivendo il segmento vettore $\{dX\} = \{n\} dX$, e dividendo per dX (perché voglio una misura relativa), si ottiene la dilatazione ϵ in direzione $\{n\}$

come:
$$\epsilon = \frac{dU_n}{dX} = \frac{\{n\}^T [E] \{n\} dX}{dX} = \{n\}^T [E] \{n\}$$

↳ analogia con: $\{F\} = [\Delta] \{n\} \rightarrow \delta = \{n\}^T [\Delta] \{n\}$
 ↳ stesso per tensioni e deformazioni

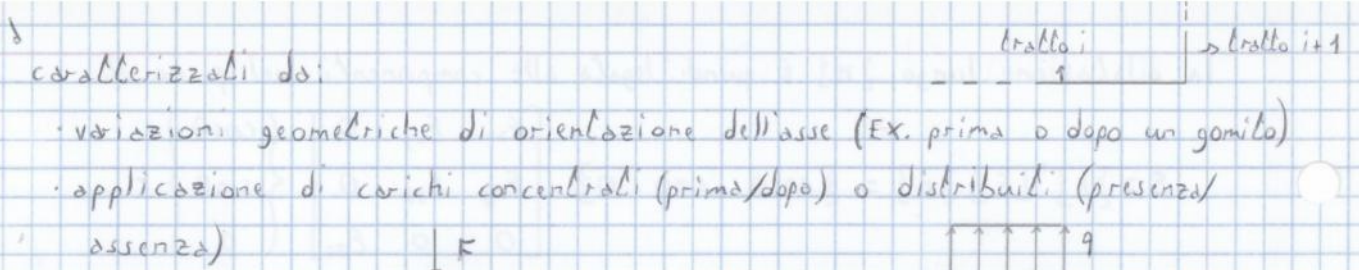
la risultante ϵ è utile per la misura dell'estensimetro

caso di tensione piana:

↳ la superficie dev'essere piana, altrimenti non riesco a incollare l'estensimetro nel piano il versore direzione può essere scritto come $\{n\} = \{\cos\theta, \sin\theta, 0\}$

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{tensore di deformazione nel caso di tensione piana}$$

↳ deformazione puramente trasversale (Poisson)

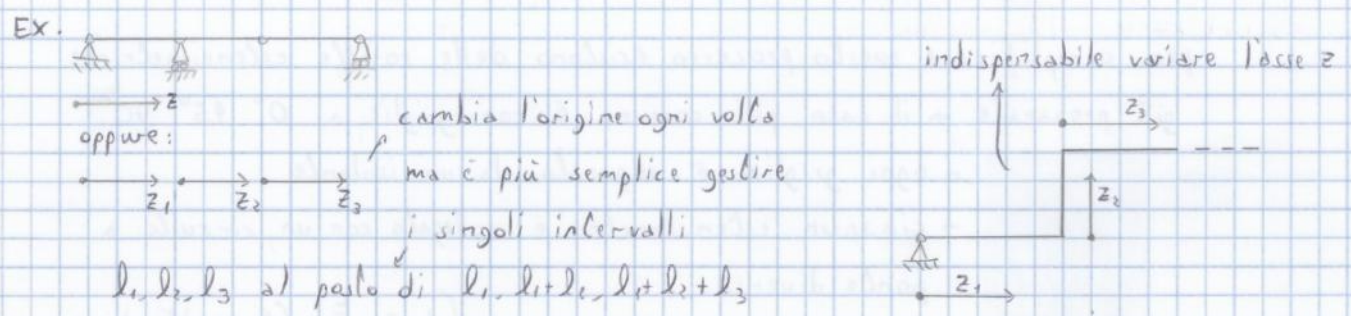


• vincoli esterni e interni
 ⇒ i tratti non sono necessariamente dei tratti fisici → semplicemente sono zone in cui il comportamento è diverso

coordinata assiale:

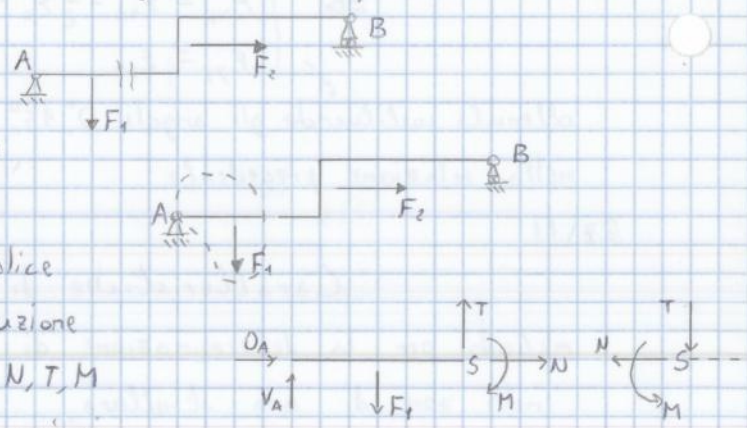
è necessario adottare una coordinata (z) assiale, unica per tutta la struttura oppure relativa al singolo tratto, a seconda di come risulta più comodo, con lo scopo di:

- definire i bracci (variabili) di momento flettente
- definire la quantità di carico distribuito in gioco (se presente)



per ogni tratto è necessario realizzare un diagramma di corpo libero:

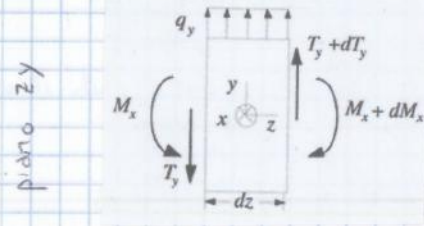
- interrompo la struttura in una sezione generica
- racchiudo una delle 2 substrutture in una linea di distacco che la isola dal resto → scelgo la più semplice
- segno sulla sezione (S) di interruzione le caratteristiche di sollecitazione N, T, M
 - le componenti segnate indicano le azioni sulla sub-struttura considerata applicate dall'altra sub-struttura (non considerata) per azione e reazione hanno la stessa intensità sull'altra sub-struttura
- impongo l'equilibrio della sub-struttura considerata tra caratteristiche di sollecitazione in S, carichi applicati e reazioni



ammettiamo ora anche la presenza di carico distribuito trasversale

valgono sempre le tensioni di Saint-Venant, ma rappresentano una misura approssimata
 sono comunque le tensioni più influenti

in generale le perturbazioni sono effetti secondari → puramente locali



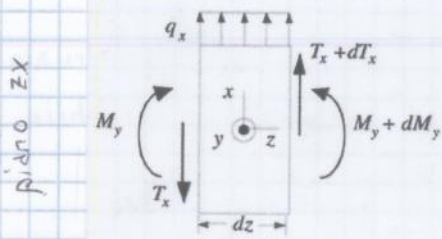
l'incremento del taglio equilibra l'incremento di M (dM_x)

$$\uparrow: T_y + dT_y - T_y + q_y dz = 0 \quad \text{considero la risultante sull'asse centrale}$$

$$\curvearrowright: M_x + dM_x - M_x - (T_y + dT_y) dz - (q_y dz) \frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT_y}{dz} = -q_y \quad \frac{dM_x}{dz} = T_y$$

infinitesimi di II ordine sono trascurabili



$$\uparrow: T_x + dT_x - T_x + q_x dz = 0$$

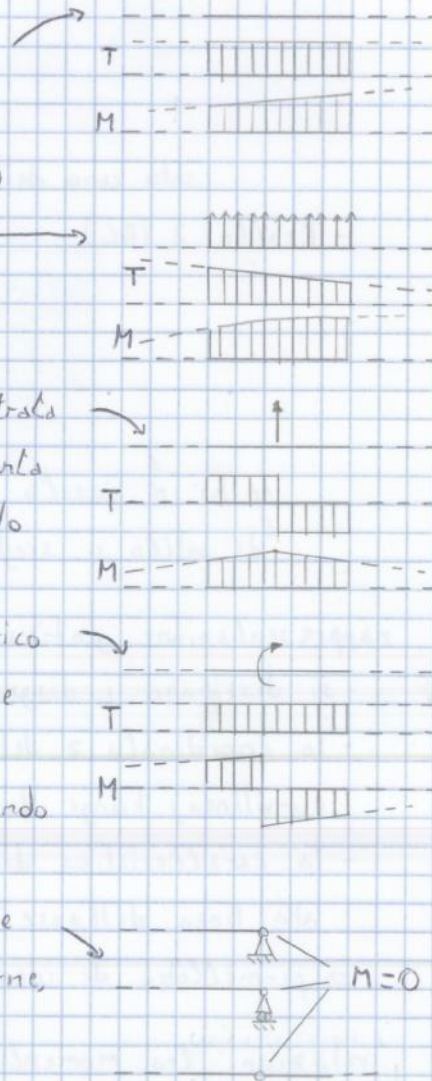
$$\curvearrowright: M_y + dM_y - M_y + (T_x + dT_x) dz + (q_x dz) \frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT_x}{dz} = -q_x \quad \frac{dM_y}{dz} = -T_x$$

l'unica cosa che cambia è il verso del momento

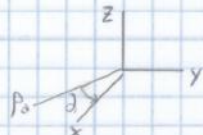
proprietà dei diagrammi:

- se non ci sono carichi trasversali il diagramma di taglio è costante (perché è l'integrale di q) e quello del momento è lineare (integrale del taglio)
- se agiscono carichi trasversali uniformemente distribuiti il diagramma del taglio è lineare e quello del momento è parabolico
- in corrispondenza di una forza trasversale concentrata (carico o reazione) il diagramma del taglio presenta una discontinuità (pari alla forza stessa!) e quello del momento cambia pendenza
- in corrispondenza di un momento concentrato (carico o reazione) il diagramma del taglio non varia e quello del momento presenta una discontinuità (pari al momento concentrato stesso!), mantenendo la stessa pendenza (perché il taglio è costante)
- in corrispondenza degli appoggi di estremità, delle cerniere esterne di estremità, delle cerniere esterne, il diagramma del momento si annulla (salvo che siano applicati momenti concentrati)

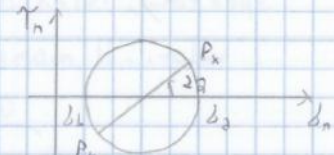
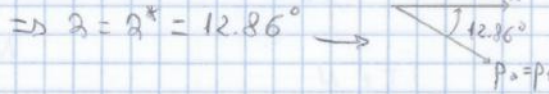


• determino α : $|\tan(2\alpha^*)| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = 0.482 \Rightarrow \alpha^* = \frac{1}{2} \arctan 0.482 = 12.86^\circ$

σ_{zz} principale



$\tau_{xy} < 0, \sigma_{xx} > \sigma_{yy}$
 $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$



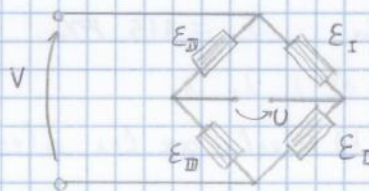
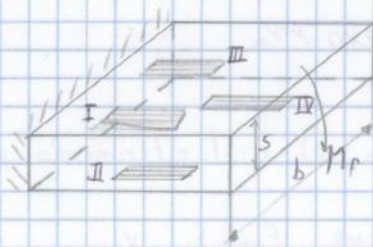
2) piastra a sezione rettangolare $\rightarrow b = 20 \text{ mm}, s = 10 \text{ mm}$

acciaio $\rightarrow E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad \nu = 0.29$

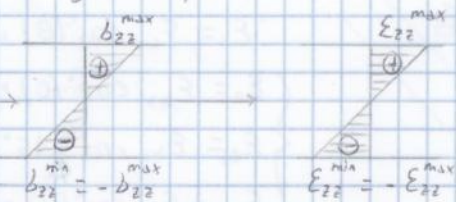
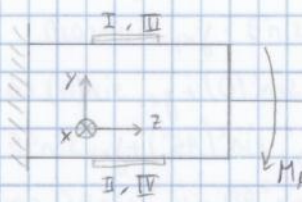
momento flettente $M_f = 10^5 \text{ Nmm}$

4 estensimetri ($K = 1.9$) \rightarrow in un ponte completo a $V = 5 \text{ V}$

$K_T \cong K$



bisogna capire come sono distribuite le tensioni



$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_I = \epsilon_{zz}^{\max} = \epsilon_{III} \\ \epsilon_{II} = \epsilon_{zz}^{\min} = -\epsilon_{zz}^{\max} = \epsilon_{IV} \end{cases}$

$\epsilon_{zz}^{\max} = \frac{M_f}{J_{xx}} \cdot \frac{s}{2} \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \Rightarrow \epsilon_{zz}^{\max} = \frac{\sigma_{zz}^{\max}}{E} = \frac{M_f}{E J_{xx}} \cdot \frac{s}{2} = \frac{6 M_f s}{E b s^3} = 1456 \mu\text{m/m}$

perché σ_{zz} è l'unica tensione presente $J_{xx} = \frac{s^3 \cdot b}{12}$

$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_I = \epsilon_{III} = 1456 \mu\text{m/m} \\ \epsilon_{II} = \epsilon_{IV} = -1456 \mu\text{m/m} \end{cases}$

ϵ' libera con la anche del parametro legato a T

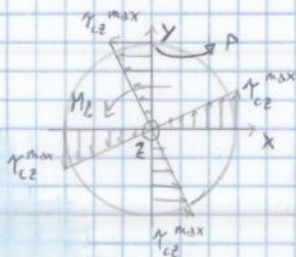
$\epsilon = (\epsilon' - \epsilon_a) \frac{K}{K_T} \quad K \cong K_T \Rightarrow \epsilon' = \epsilon + \epsilon_a$

$U = K \frac{V}{4} \epsilon_{tot} = K \frac{V}{4} (\epsilon'_I - \epsilon'_{II} + \epsilon'_{III} - \epsilon'_{IV})$

$\Rightarrow U = K \frac{V}{4} [(\epsilon_I + \epsilon_a) - (\epsilon_{II} + \epsilon_a) + (\epsilon_{III} + \epsilon_a) - (\epsilon_{IV} + \epsilon_a)] = K \frac{V}{4} (\epsilon_I - \epsilon_{II} + \epsilon_{III} - \epsilon_{IV}) =$
 $= K \frac{V}{4} (4 \epsilon_{zz}^{\max}) = K V \epsilon_{zz}^{\max} = 1.9 \cdot 5 \cdot 1456 \cdot 10^{-6} = 13.8 \text{ mV}$

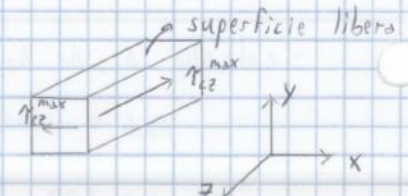
EX. 4 della scheda:

2 momenti torcenti opposti applicati a un cilindro \rightarrow

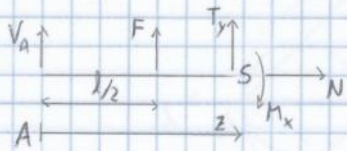


$\tau_{tz}^{\max} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$
 $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$

in P:



Tratto ②: $\frac{l}{2} \leq z \leq l$



$\rightarrow: N=0$

$\uparrow: T_y + V_A + F = 0 \Rightarrow T_y = -V_A - F = \frac{1}{2}F + \frac{C}{l}$

$\curvearrowright: M_x + V_A z + F(z - \frac{l}{2}) = 0 \Rightarrow M_x = -V_A z - F(z - \frac{l}{2})$

$\Rightarrow M_x = (\frac{1}{2}F + \frac{C}{l})z + \frac{Fl}{2}$

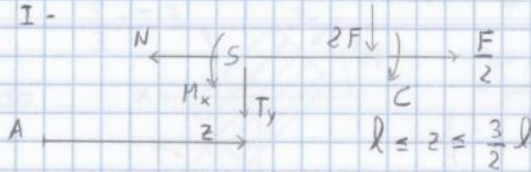
$z = \frac{l}{2} \Rightarrow M_x = \frac{3}{4}Fl + \frac{C}{l} \rightarrow$ stesso del tratto 1 $\Rightarrow M_x$ è continuo

$z = l \Rightarrow M_x = Fl + C$

Tratto ③:

si può fare in 2 modi:

I -



$\leftarrow: N - F/2 = 0 \Rightarrow N = F/2$

$\downarrow: T_y + 2F = 0 \Rightarrow T_y = -2F$

$\curvearrowright: M_x - 2F(\frac{3}{2}l - z) - C = 0 \Rightarrow M_x = 2F(\frac{3}{2}l - z) + C$

$z = l \Rightarrow M_x = Fl + C$

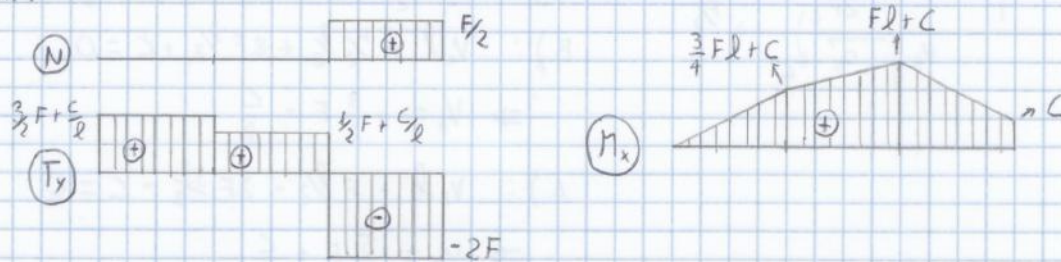
$z = \frac{3}{2}l \Rightarrow M_x = C$

nel punto in cui è applicato il momento concentrato, M_x è uguale allo stesso

II - prendo un nuovo asse z_2 in modo che $0 \leq z_2 \leq \frac{l}{2}$ \rightarrow parte dal vincolo B

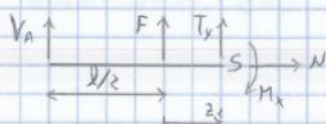
si ottiene esattamente lo stesso risultato

diagrammi:



\Rightarrow si nota che si hanno le maggiori sollecitazioni nel vincolo B

Tratto ②: metodo II $\rightarrow 0 \leq z_2 \leq \frac{l}{2}$



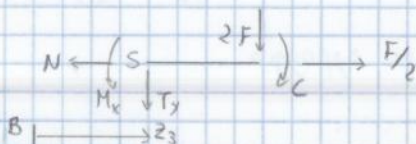
cambia solo l'equilibrio per M_x

$\curvearrowright: M_x + V_A(\frac{l}{2} + z_2) + Fz_2 = 0 \Rightarrow M_x = (\frac{3}{2}F + \frac{C}{l})(\frac{l}{2} + z_2) - Fz_2$

$z_2 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{3}{4}Fl + \frac{C}{l}$

$z_2 = \frac{l}{2} \Rightarrow M_x = Fl + C$

Tratto ③: metodo II $\rightarrow 0 \leq z_3 \leq \frac{l}{2}$



$\curvearrowright: M_x - 2F(\frac{l}{2} - z_3) - C = 0$

$z_3 = 0 \Rightarrow M_x = Fl + C$

$z_3 = \frac{l}{2} \Rightarrow M_x = C$

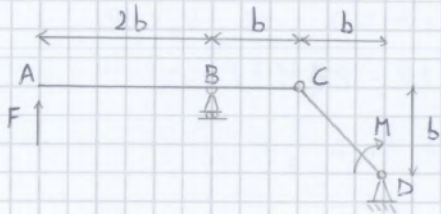
il risultato

è esattamente

IDENTICO a prima

04/12

3- due elementi, carichi concentrati

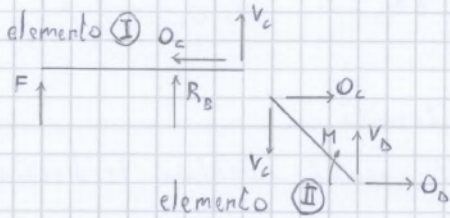


cerniere appoggi

$$h = \sqrt{3}m = 2c + 1a - 3m = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = -1$$

⇒ situazione iperstatica

esprimere le reazioni e M in funzione di F



ⓐ: ← : $O_c = 0$

ⓐ: $R_B b + F 3b = 0 \Rightarrow R_B = -3F$

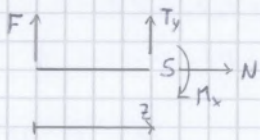
ⓑ: $V_c b - F 2b = 0 \Rightarrow V_c = 2F$

ⓑ: → : $O_D + O_c = 0 \Rightarrow O_D = 0$

ⓑ: ↑ : $V_D - V_c = 0 \Rightarrow V_D = V_c = 2F$

ⓑ: ⓐ: $M + O_c b - V_c b = 0 \Rightarrow M = V_c b = 2Fb$

Tratto AB: $0 \leq z \leq 2b$



→ : $N = 0$

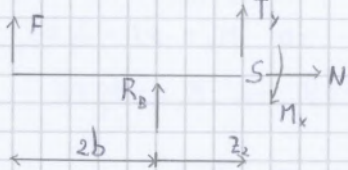
↑ : $T_y + F = 0 \Rightarrow T_y = -F$

ⓐ: $M_x + Fz = 0 \Rightarrow M_x = -Fz$

$z=0 \Rightarrow M_x = 0$

$z=2b \Rightarrow M_x = -2Fb$

Tratto BC: $0 \leq z_2 \leq b$



→ : $N = 0$

↑ : $T_y + F + R_B = 0 \Rightarrow T_y = 2F$

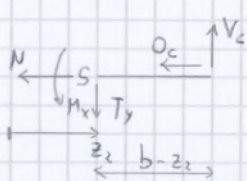
ⓐ: $M_x + R_B z_2 + F(2b + z_2) = 0$

$M_x = -2Fb - Fz_2 - R_B z_2 = -2Fb + 2Fz_2$

$z_2=0 \Rightarrow M_x = -2Fb$

$z_2=b \Rightarrow M_x = 0$

alternativa: $0 \leq z_2 \leq b$



→ : $N + O_c = 0 \Rightarrow N = 0$

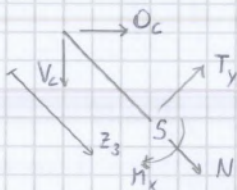
↓ : $T_y - V_c = 0 \Rightarrow T_y = V_c = 2F$

ⓐ: $M_x + V_c(b - z_2) = -2F(b - z_2)$

$z_2=0 \Rightarrow M_x = -2Fb$

$z_2=b \Rightarrow M_x = 0$

Tratto CD: $0 \leq z_3 \leq \sqrt{2}b$



↘ : $N + O_c \frac{1}{\sqrt{2}} + V_c \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N = -V_c \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}F$

↗ : $T_y + O_c \frac{1}{\sqrt{2}} - V_c \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow T_y = V_c \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}F$

ⓐ: $M_x + O_c \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 - \frac{V_c}{\sqrt{2}} z_3 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{V_c}{\sqrt{2}} z_3 = \sqrt{2}F z_3$

$z_3=0 \Rightarrow M_x = 0$

$z_3 = \sqrt{2}b \Rightarrow M_x = 2Fb$

nelle cerniere il momento è sempre = 0

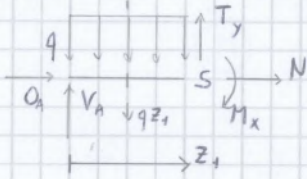
↳ a meno che non ci sia un momento concentrato

II: $\uparrow: V_b - V_a = 0 \Rightarrow V_b = V_a = \frac{3}{2} ql$

B): $O_b l = 0 \Rightarrow O_b = 0$

$\rightarrow: O_b - O_a = 0 \Rightarrow O_b = 0 \Rightarrow O_a = 0$

Tratto AB: $0 \leq z_1 \leq l$



$\rightarrow: N = 0$

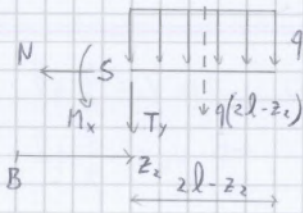
$\uparrow: T_y + V_A - qz_1 = 0 \Rightarrow T_y = qz_1 - V_A = qz_1 + \frac{3}{2} ql$

$\curvearrowright: M_x + V_A z_1 - qz_1 (\frac{z_1}{2}) = 0 \Rightarrow M_x = qz_1^2 \frac{1}{2} + \frac{3}{2} ql z_1$

$z_1 = 0 \Rightarrow T_y = \frac{3}{2} ql \quad M_x = 0$

$z_1 = l \Rightarrow T_y = \frac{5}{2} ql \quad M_x = \frac{1}{2} ql^2 + \frac{3}{2} ql^2 = 2ql^2$

Tratto BC: $0 \leq z_2 \leq 2l$



$\leftarrow: N = 0$

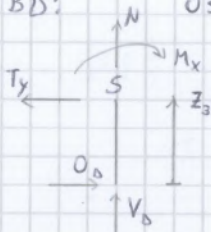
$\downarrow: T_y + q(2l - z_2) = 0 \Rightarrow T_y = -2ql + qz_2$

$\curvearrowright: M_x - q \frac{(2l - z_2)^2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = \frac{1}{2} q(2l - z_2)^2$

$z_2 = 0 \Rightarrow T_y = -2ql \quad M_x = 2ql^2$

$z_2 = 2l \Rightarrow T_y = 0 \quad M_x = 0$

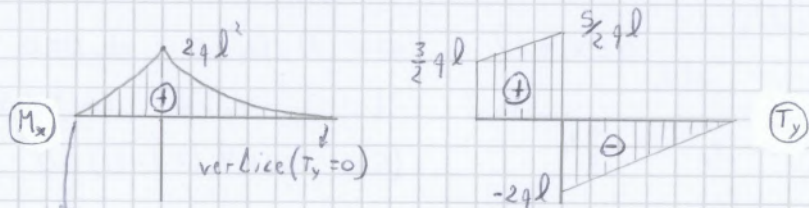
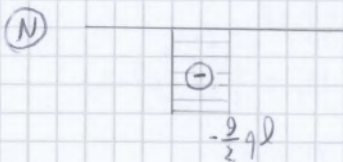
Tratto BD: $0 \leq z_3 \leq l$



$\leftarrow: T_y - O_b = 0 \Rightarrow T_y = 0$

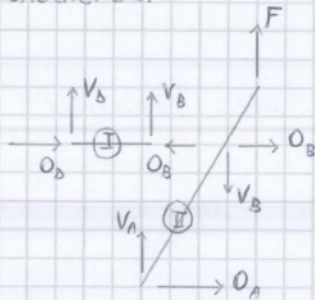
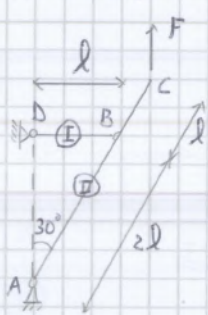
$\uparrow: N + V_b = 0 \Rightarrow N = -V_b = -\frac{3}{2} ql$

$\curvearrowright: M_x - O_b z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0$



non è il vertice perché la derivata in questo punto è $\neq 0$ (della parabola) $T_y = \frac{3}{2} ql$

6- 2 elementi, carichi concentrati:



$O_A = -\frac{F\sqrt{3}}{2}$

$V_A = -F$

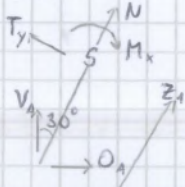
$O_B = \frac{F\sqrt{3}}{2}$

$V_B = 0$

$O_b = \frac{F\sqrt{3}}{2}$

$V_b = 0$

Tratto AB: $0 \leq z_1 \leq 2l$

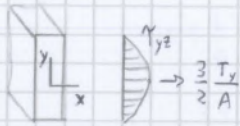


$\uparrow: N + O_A \cos 60^\circ + V_A \cos 30^\circ = 0$

$N = -O_A \cos 60^\circ - V_A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} F \frac{1}{2} + F \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} F$

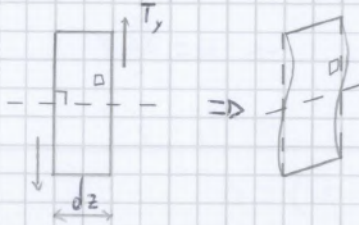
$\leftarrow: T_y - O_A \sin 60^\circ + V_A \sin 30^\circ = 0$

piano zy: → per il piano zx cambia solo qualche segno
 effetto del taglio:

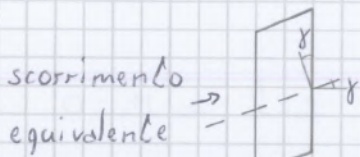


$$\gamma_{yz} = \frac{T_{yz}}{G} \rightarrow \text{diversi } \gamma \Rightarrow \text{diversi scorrimenti}$$

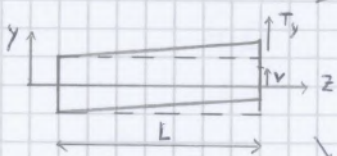
considerando una sezione di larghezza dz:



- per effetto dell'azione trasversale di taglio, ciascuna sezione scorre rispetto alla precedente
- l'asse dell'elemento si inclina, e non risulta più normale alla sezione



- per effetto dei diversi γ , la sezione si deforma in modo irregolare (ondulato)



↳ si considera una deformazione equivalente
 lo scorrimento è maggiore a livello baricentrico, e minore verso la periferia

completivamente ne risulta questa deformazione
 v: spostamento trasversale relativo

$$v = \frac{\chi T_x L}{GA} \quad \chi: \text{fattore di deformabilità al taglio}$$

$$v = \gamma L \leftarrow \gamma = \frac{\chi T_x}{GA}$$

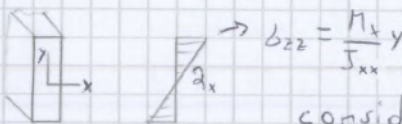
↳ corregge lo scorrimento equivalente

dipende dalla forma della sezione → si trovano in tabella

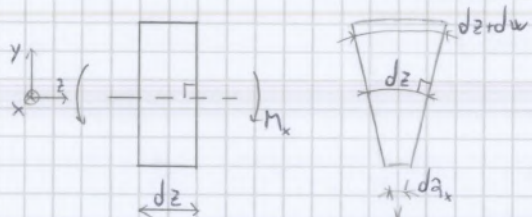
nel caso rettangolare $\chi \approx 6/5$ →

le deformazioni causate dal taglio sono piccole rispetto a quelle causate dalla flessione (tranne nel caso di travi "tozze", di dimensione assiale non molto maggiore a quelle trasversali) ⇒ sono trascurabili

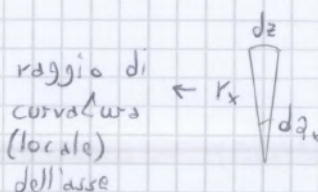
effetto del momento:



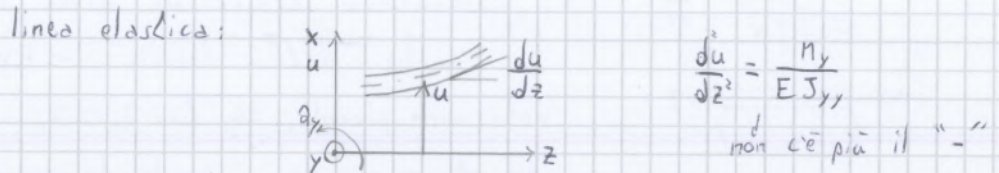
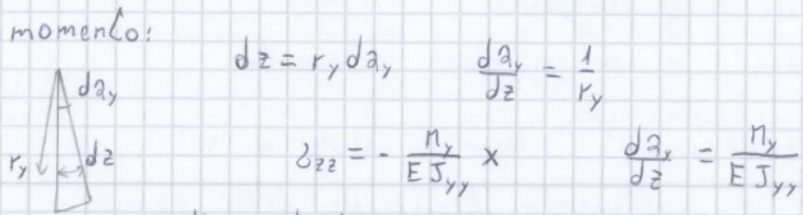
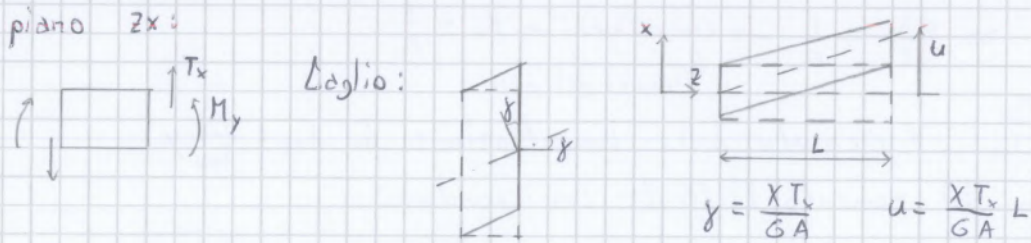
considerando una sezione di larghezza dz:



- la generica sezione ruota rimanendo piana e ortogonale all'asse
- la "fibre" assiali si allungano o si accorciano in base alla corrispondente loro dilatazione E_{zz}



↳ solo quelle a livello baricentrico non variano di lunghezza (asse neutro) ⇒ tensioni nulle
 si curvano ⇒ sono approssimabili ad archi di circonferenza



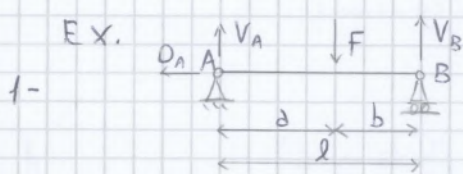
11/12

Procedimenti abbreviati per la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione strumenti:

- sfruttare valori già noti \rightarrow EX. $M=0$ in una cerniera
- sfruttare le proprietà di derivazione-integrazione di T e M
- sfruttare i "gradini" dei diagrammi di T e M in corrispondenza di forze o momenti concentrati

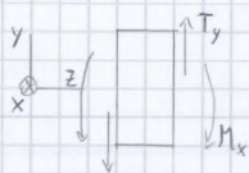
- se esistono tralci o sbalzo, partire da questi \rightarrow tralci privi di reazioni vincolari \rightarrow non ho bisogno di reazioni vincolari per determinare N, M, T

- sfruttare le simmetrie

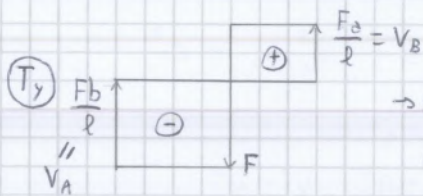


B \downarrow : $V_A = \frac{Fb}{l}$

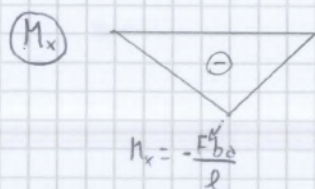
A \uparrow : $V_B = \frac{Fa}{l}$



\rightarrow il taglio e il momento in che direzione sono?
dipende se considero la faccia positiva o quella negativa



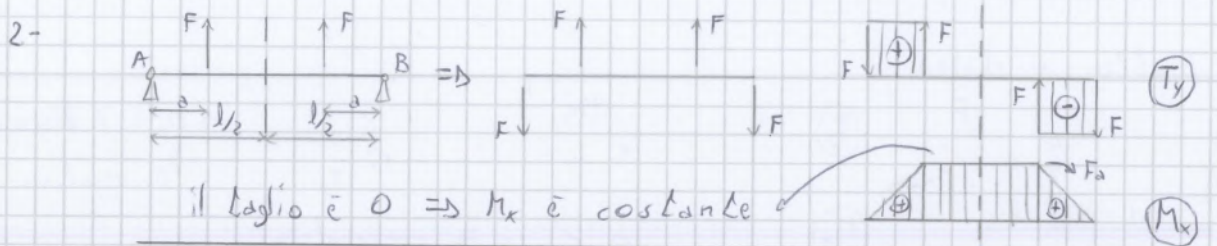
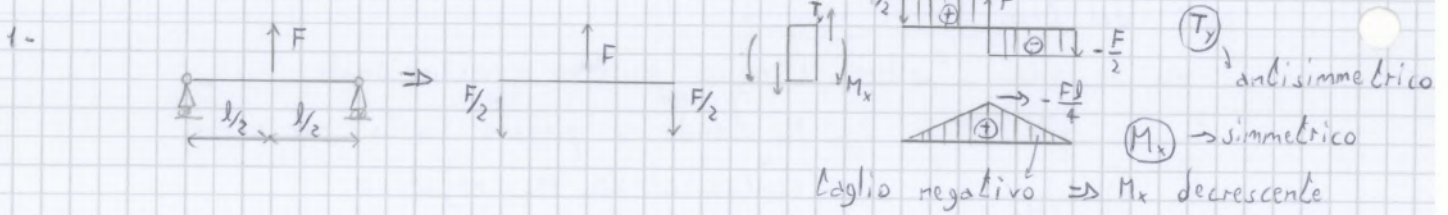
\rightarrow riesco a costruire il diagramma di taglio semplicemente utilizzando le forze agenti perpendicolari all'asse del componente



\rightarrow so già che nei 2 vincoli A e B $M=0$
 \rightarrow il taglio è discontinuo dove è applicata F
 \rightarrow il momento cambierà la pendenza

struttura e carico simmetrici $\Rightarrow N, M$ simmetriche, T antisimmetrica

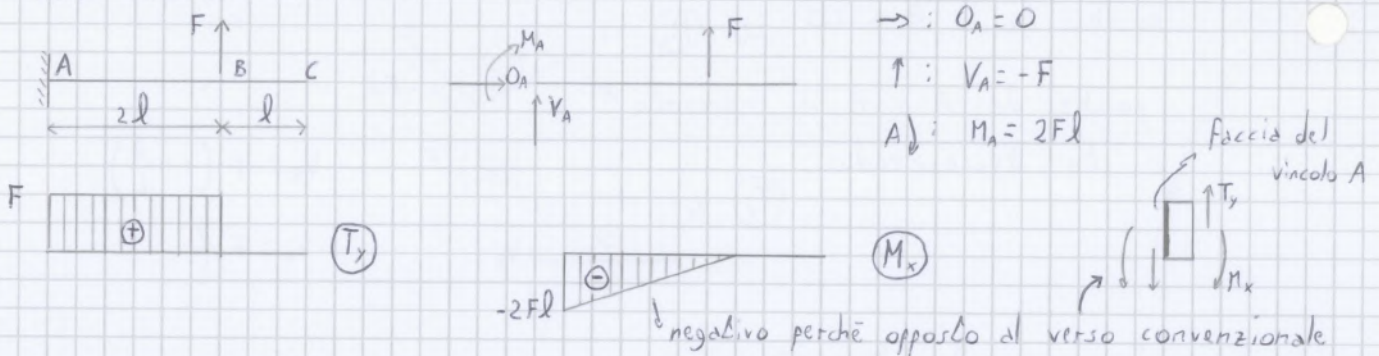
EX. carico simmetrico



12\12

ESERCITAZIONE 11

1) linea elastica



AB:

$$0 \leq z_1 \leq 2l \quad \uparrow: T_y + V_x = 0 \Rightarrow T_y = -V_x = F$$

$$S): M_x + M_A + V_A z_1 \Rightarrow M_x = -M_A - V_A z_1 = -2Fl + Fz_1$$

$$z_1 = 0 \Rightarrow M_x = -2Fl \quad z_1 = 2l \Rightarrow M_x = 0$$

BC: è scarico \rightarrow è però il tratto che si sposta di più \rightarrow puro moto rigido perché è in colera a tutta la struttura

linea elastica:

AB:
$$a_x = \int \frac{M_x(z_1)}{EJ_{xx}} dz_1 = -\frac{2Fl}{EJ_{xx}} z_1 + \frac{Fz_1^2}{2EJ_{xx}} + C_1$$

$$v(z_1) = -\int a_x(z_1) dz_1 = \frac{Fl}{EJ_{xx}} z_1^2 - \frac{F}{6EJ_{xx}} z_1^3 - C_1 z_1 + C_2$$

condizioni note \rightarrow in A: $a_x = 0 \quad v = 0 \rightarrow$ perché è un incastro $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

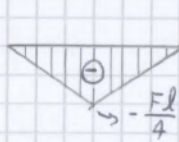
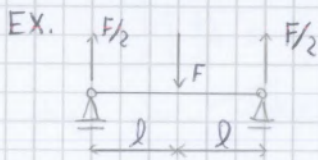
in B:
$$a_x(z_1 = 2l) = -\frac{4Fl^2}{EJ_{xx}} + \frac{2Fl^2}{EJ_{xx}} = -\frac{2Fl^2}{EJ_{xx}}$$

$$v(z_1 = 2l) = 4 \frac{Fl^3}{EJ_{xx}} - \frac{4}{3} \frac{Fl^3}{EJ_{xx}} = \frac{8}{3} \frac{Fl^3}{EJ_{xx}}$$

BC:
$$a_x(z_2) = \int \frac{M_x(z_2)}{EJ_{xx}} dz_2 = C_3 \quad \Rightarrow a_x(z_2 = 0) = C_3 = -\frac{2Fl^2}{EJ_{xx}} \Rightarrow a_x(z_2) = -\frac{2Fl^2}{EJ_{xx}}$$

$$v(z_2) = -\int a_x(z_2) dz_2 = -C_3 z_2 + C_4 \Rightarrow v(z_2 = 0) = C_4 = \frac{8}{3} \frac{Fl^3}{EJ_{xx}} \Rightarrow v(z_2) = +\frac{2Fl^2}{EJ_{xx}} z_2 + \frac{8Fl^3}{3EJ_{xx}}$$

continuità in B



$(M_x) \rightarrow$ dovendo rispettare la simmetria, q_x a metà del tratto è nulla

\Rightarrow in l : $q_x = 0 \Rightarrow$ posso studiare solo una metà

16/12

Condizioni di vincolo normale

caso isostatico: N° incognite = N° equazioni

è sempre risolvibile?

in termini algebrici \rightarrow sistema di equazioni lineari

incognite \rightarrow reazioni

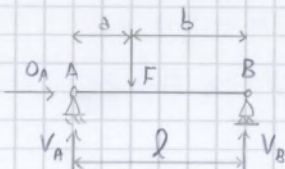
termini noti \rightarrow carico

matrice coefficienti \rightarrow forma struttura, disposizioni vincoli

EX.

1 elemento

1-

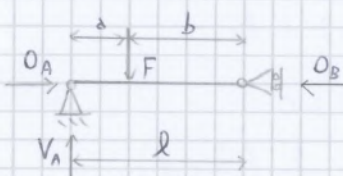


\rightarrow : $O_A = 0$
 \uparrow : $V_A + V_B = F$
 A): $V_B l = F \cdot a$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fa \end{Bmatrix}$$

è caso risolvibile $\rightarrow \det[J] = l \neq 0$

modifica appoggio in B:



\rightarrow : $O_A - O_B = 0$
 \uparrow : $V_A = F$
 A): $0 = +Fa$
 impossibile!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fa \end{Bmatrix}$$

matrice singolare $\rightarrow \det[J] = 0$

\Rightarrow il sistema non ha soluzioni, nonostante sia isostatico

usando altre equazioni:

\rightarrow : $O_A - O_B = 0$

\uparrow : $V_A = F$

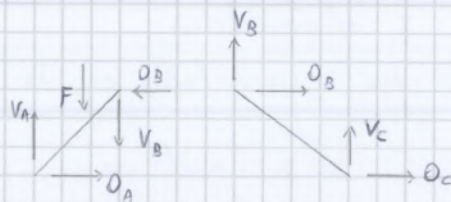
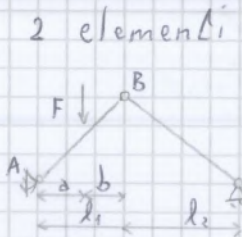
B): $V_A l = Fb \rightarrow V_A = F \frac{b}{l}$ ma $\frac{b}{l} \neq 1 \Rightarrow$ impossibile

\rightarrow combinazione lineare $\Rightarrow \det[J] = 0$

\Rightarrow con qualsiasi sistema di equazioni non esistono soluzioni

perché i vincoli non sono disposti in modo tale da equilibrare la struttura

2- 2 elementi



AB:

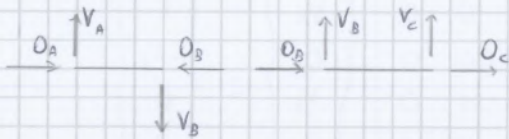
\rightarrow : $O_A - O_B = 0$

\uparrow : $V_A - V_B = F$

A): $-O_B h + V_B l_1 = -Fa$

sistema risolvibile

caso anomalo:

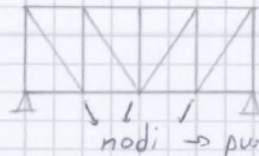
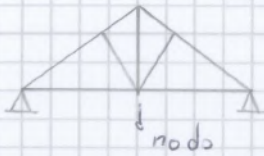


se pongo $O_A = K$ $O_C = -K$

$\rightarrow: O_B = O_A = K$ $\rightarrow: O_B = -O_C = K$ verificato
e anche $V_A = V_B = V_C = 0$

\Rightarrow situazione in cui posso avere reazioni vincolari $\neq 0$ equilibrate che rispettano le equazioni di equilibrio \Rightarrow caso anomalo

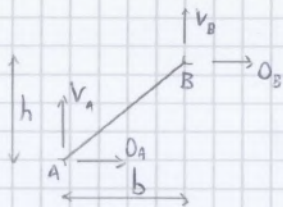
Strutture reticolari



nodi \rightarrow punto in cui si incontrano 3 o più aste

elementi strutturali: aste

- ipotesi:
- elementi rettilinei
 - cerniere agli estremi
 - carichi: forze soltanto negli estremi



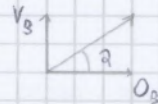
in A, B: $M_x = 0$ \rightarrow perché sono cerniere senza momenti concentrati applicati

"tratto" unico su AB, andamento M_x lineare perché non ho carichi distribuiti

$\Rightarrow M_x = 0$ su tutto AB $\Rightarrow T_y = \frac{dM_x}{dz} = 0$

A): $O_B h - V_B b = 0$

$\frac{V_B}{O_B} = \frac{h}{b}$



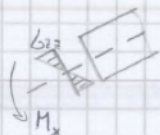
$\tan \alpha = \frac{V_B}{O_B} = \frac{h}{b}$

la risultante della reazione vincolare è puramente assiale

\Rightarrow asta: elemento che lavora soltanto in trazione o compressione nella sezione, tutto il materiale lavora sotto lo stesso σ

$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$ costante $\rightarrow = \sigma_{amm}$ (tensione ammissibile) \rightarrow limite di sicurezza

\Rightarrow efficienza! \rightarrow conosco la sezione minima dell'asta \rightarrow risparmio materiale
al contrario: flessione



$\sigma_{zz,max} = \frac{M_x}{J_{xx}} y_{max} = \sigma_{amm}$

\rightarrow scelgo il materiale in base alla tensione massima che

però tutto il materiale interno \leftarrow deve sopportare subisce tensioni minori \rightarrow non viene sfruttato \Rightarrow meno efficiente

in realtà:

- rettilinei: si
- saldate (o viti) agli estremi \approx incastri interni
- carichi applicati \rightarrow estremi \rightarrow però c'è sempre il peso proprio distribuito