NUMERO: 1494A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bergamin

MATERIA: Analisi Matematica I, Prof.Serra

ANALISI MATEMATICA 1

TEOREMI

	ASSIOMA DI COMPLETEZZA	5a	ND
	BOLZANO-WEIERSTRASS	14a	D
	PERMANENZA DEL SEGNO (LIMITI)	18b	D
	CONFRONTO (LIMITI)	19b	D
	ESISTENZA DEGLI ZERI	22b	D
x	VALORI INTERMEDI	24a	D
x	WEIERSTRASS	24b	D
	REGOLE DI DERIVAZIONE	30a	D
x	FERMAT	33b	D
x	ROLLE	34b	D
x	LAGRANGE	35b	D
x	MONOTONIA E SEGNO DERIVATA	36b	D
x	DE L'HOPITAL	39b	D
	TAYLOR	41b	ND
	SVILUPPO CON RESTO DI LAGRANGE	42a	ND
	MASSIMI MINIMI E FLESSI NEGLI SVILUPPI	45b	D
	DIFFERENZA TRA PRIMITIVE	46a	D
x	MEDIA INTEGRALE	50b	D
x	FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE	51a	D
	CONFRONTO (INTEGRALI IMPROPRI)	54b	D
	CONFRONTO ASINTOTICO	55a	D
	FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA	59b	ND
x	CAUCHY	62b	ND

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 146

LIMITI NOTEVOLI E SEMI NOTEVOLI

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \begin{pmatrix} a=e \\ \lim = 1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \begin{pmatrix} a=e \\ \lim = 1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \quad \forall \alpha > 0$

$\lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$\lim_{x\to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log x = 0 \quad \forall \alpha > 0$

SIMBOLI DI LANDAU

$\sin x \sim x \qquad \sin x = x + o(x)$

$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

DERIVATE

$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$

$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad y_0 = f(x_0)$

INTEGRALI

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\quad \int e^x dx = e^x + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\quad \int \log(x) dx = x\log(x) - x + c$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ $\quad \int \cos x\, dx = \sin x + c$

$\int tg\, x\, dx = -\log|\cos x| + c$ $\quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + c$

INTEGRALI IMPROPRI

	$\frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha < 1$
$x \to 0$	DIVERGE	DIVERGE	CONVERGE
$x \to \infty$	CONVERGE	DIVERGE	CONVERGE

NUMERI COMPLESSI

FORME

$z = (x, y)$ $\quad z = x + iy$

$z = (\rho, \theta)$ $\quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$

CON $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \to \theta$

MODULO E COGNUGATO

$z = x + iy$ $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\bar{z} = x - iy$

PROPRIETA

$\overline{(\bar{z})} = z$ $\quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$|z| = |\bar{z}|$ $\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z^n| = |z|^n$ $\quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

INSIEMI

$A=\{1;2;3;b;c\}$ $B=\{2;1;c\}$

SIMBOLI: $2 \in A$ $\in$: APPARTIENE

$4 \notin A$ $\notin$: NON APPARTIENE

$B \subset A$ $\subset$: INCLUSO, SOTTOINSIEME

OPERAZIONI: $A=\{1;2;3;4;5\}$ $B=\{4;5;6\}$

UNIONE $\cup$

$A \cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

A B

// $A \cup B$

INSIEME DELLE X TALE CHE X APPARTIENE AD A OPPURE APPARTIENE A B

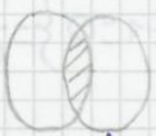
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

X APPARTIENE AD $A \cup B$ SE E SOLO SE X APPARTIENE AD A OPPURE APPARTIENE A B

$A \cup B=\{1;2;3;4;5;6\}$

INTERSEZIONE $\cap$

$A \cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$



// $A \cap B$

INSIEME DELLE X TALI CHE X APPARTIENE AD A E A B

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$

X APPARTIENE AD $A \cap B$ SE E SOLO SE X APPARTIENE AD A E A B

$A \cap B=\{4;5\}$

SOTTRAZIONE $\setminus$

$A \setminus B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

INSIEME DELLE X TALI CHE X APPARTIENE AD A E NON APPARTIENE A B

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

X APPARTIENE AD $A \setminus B$ SE E SOLO SE X APPARTIENE AD A E NON APPARTIENE A B

PROPOSIZIONI A PIU VARIABILI: PER RENDERE COMPLETE LE PROPOSIZIONI A PIÚ VARIABILI SONO NECESSARI TANTI QUANTIFICATORI QUANTE SONO LE VARIABILI.

$\exists x, \exists y \mid x+y=1$ ESISTE UNA PER CUI ESISTE UNA Y TALE CHE SOMMANDO X E Y OTTENIAMO 1

$\forall x, \forall y \mid x+y=1$ PER OGNI X QUALSIASI Y PRENDIAMO LA SOMMA DI X E DI X DA 1

$\exists x, \forall y \mid x+y=1$ ESISTE UNA X PER CUI QUALSIASI Y PRENDIAMO LA SOMMA DI X E Y FA 1

$\forall x, \exists y \mid x+y=1$ PER OGNI X ESISTE UNA Y TALE CHE SOMMANDO X E Y OTTENIAMO 1

ANALIZZANDO L'ULTIMO CASO

$\forall x, \exists y \mid x+y=1$ PROPOSIZIONE VERA

MA $\exists y, \forall x \mid x+y=1$ PROPOSIZIONE FALSA

L'ORDINE DEI QUANTIFICATORI È SIGNIFICATIVO.

NEGAZIONE PROPOSIZIONI QUANTIFICATE

PREPOSIZIONE , $\forall x, \exists y \mid x+y=1$ VERO

NEGAZIONE $\exists x, \forall y \mid x+y \neq 1$ FALSO

LA NEGAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE VERA È FALSA E VICEVERSA

$P(x)$ = PROPRIETA CARATTERISTICA

$NOT(\forall x\ P(x))$ OGNI BANCO È LIBERO (NEGATA)

ESISTE UN BANCO NON LIBERO $\exists x\ NOT P(x)$

$NOT(\exists x\ P(x))$ ESISTE UN BANCO LIBERO (NEGATA)

QUALSIASI BANCO NON È LIBERO $\forall x\ NOT P(x)$

PER NEGARE BISOGNA CAMBIARE IL/I QUANTIFICATORE/I E LA NEGAZIONE PASSA DAVANTI ALLA PROPRIETÀ

ES $NOT(\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall \rho\ P(x,y,z,\rho)) = \exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists \rho\ NOT P(xyz\rho)$

I NUMERI REALI SONO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON I PUNTI DI UNA RETTA: PER OGNI NUMERO REALE CORRISPONDE UN PUNTO SULLA RETTA E PER OGNI PUNTO SULLA RETTA CORRISPONDE UN NUMERO REALE.

FRA DUE NUMERI REALI CADE SEMPRE UN NUMERO RAZIONALE ($\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$)

DIMOSTRAZIONE: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists\, q \in \mathbb{Q} \mid x<q<y$

SE LA DISTANZA TRA X E Y È GRANDE q È FACILMENTE INDIVIDUABILE

MA SE LA DISTANZA È PICCOLA (LA DISTANZA È SEMPRE POSITIVA)

$y-x>0$

PRENDO UN NUMERO $n\in\mathbb{N} \mid n(y-x)>1$

$ny-nx>1$

ESISTE UN NUMERO $k \mid nx<k<ny$

$x<\frac{k}{n}<y \quad q=\frac{k}{n}$

CURIOSITÀ: QUALSIASI NUMERO PUÒ ESSERE SCRITTO IN DUE MODI:

$1=0{,}9999\bar{9} \quad 10{,}06=10{,}05\bar{9}$

$57=56{,}\bar{9}$

DIMOSTRAZIONE

$x=0{,}\bar{9} \quad 10x=9{,}\bar{9} \quad 9{,}\bar{9}=9+0{,}\bar{9} \quad 10x=9+0{,}\bar{9} \quad 10x=9+x$

$10x-x=9 \quad 9x=9 \quad x=1$

$x=0{,}\bar{9}=1$

DEFINIZIONE: SIA $A \subset \mathbb{R}$, SI DICE CHE A È LIMITATO DALL'ALTO O SUPERIORMENTE SE

$\exists M \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\forall x \in A \quad x \leq M$ (MAGGIORANTE)

DEFINIZIONE: SIA $A \subset \mathbb{R}$, SI DICE CHE A È LIMITATO DAL BASSO O INFERIORMENTE SE

$\exists m \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\forall x \in A \quad x \geq m$ (MINORANTE)

SE UN INSIEME AMMETTE MAGGIORANTI O MINORANTI CE NE SONO INFINITI

ESEMPI

$(0,1)$ $M = 2, 7, 50, 90$ $m = -1, 0, -30, -470$

$\mathbb{N}$ NON CI SONO M $m = 0, -1, -15, -7000$

DEFINIZIONE: SE UN MAGGIORANTE M DI $A \subset \mathbb{R}$ APPARTIENE AD A, M SI CHIAMA MASSIMO DI A $\max(A)$

DEFINIZIONE: SE UN MINORANTE m DI $A \subset \mathbb{R}$ APPARTIENE AD A, m SI CHIAMA MINIMO DI A $\min(A)$

DIMOSTRAZIONE: L'INSIEME $[0,1)$ NON HA UN MASSIMO

UN MAGGIORANTE M È $\max(A)$ SE $M \in A$ E $\nexists x \in A \mid x > M$

$0 \leq M < 1 \quad \nexists x \mid M < x < 1 \quad x = \frac{M+1}{2} \quad M < \frac{M+1}{2} < 1$

ESISTE UN x MAGGIORE DI M QUINDI M NON È $\max(A)$

DEFINIZIONE: SIA $A \subset \mathbb{R}$ LIMITATO DALL'ALTO, IL MINORE DEI MAGGIORANTI DI A SI CHIAMA ESTREMO SUPERIORE DI A $\sup(A)$

CARATTERIZZAZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE

$A \subset \mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORMENTE $s \in \mathbb{R}$ È $\inf(A)$ SE:

1) $\forall x \in A \quad x \leq s$ $\quad s$ È UN MAGGIORANTE (M)

2) $\forall r < s \quad \exists x \in A \mid r < x$ $\quad s$ È IL PIÙ PICCOLO M

SE $\sup(A)$ ESISTE E $\sup(A) \in A$ ALLORA $\sup(A) = \max(A)$

$\forall r<1 \quad \exists \frac{n}{n+1} \in A \mid r < \frac{n}{n+1}$

$\frac{n}{n+1} > r \quad n > rn + r \quad n - rn > r \quad n(1-r) > r \quad n = \frac{r}{1-r}$

SE $r = \frac{9}{10} \quad r < \frac{n}{n+1}$ CON $n > 9$

$n > \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{9}{1} = 9 \quad n > 9$

SE $s=1$ s È IL MASSIMO DI A: FALSO

PER ESSERE IL MASSIMO DI A s DEVE:

ESSERE L'ESTREMO SUPERIORE DI A: DIMOSTRATO

ESSERE APPARTENENTE AD A: FALSO

TEOREMA: ASSIOMA DI COMPLETEZZA

OGNI SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORMENTE HA L'ESTREMO SUPERIORE

OGNI SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ LIMITATO INFERIORMENTE HA L'ESTREMO INFERIORE

$\mathbb{R}$ È UN INSIEME COMPLETO

$\mathbb{Q}$ NON È UN INSIEME COMPLETO

ESEMPIO

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \quad \sup(A) = \sqrt{2}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \quad \sup(B)$ NON ESISTE PERCHÉ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

PER SAPERE SE UN NUMERO y È UN'IMMAGINE MI CHIEDO SE

$\exists x \in X \mid f(x) = y$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{y} \quad \forall y \neq 0$ È IMMAGINE

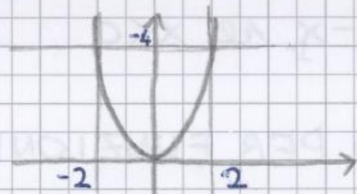
y SI CHIAMA IMMAGINE DI x

x SI CHIAMA CONTROIMMAGINE DI y

PER LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE, OGNI x PUÒ AVERE AL MASSIMO UNA IMMAGINE, MA OGNI y PUÒ AVERE PIÙ CONTROIMMAGINI

$f(x) = x^2 \quad x = 2 \quad y = 4$

$y = 4 \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 2$



$f^{-1}(x) =$ INSIEME DELLE CONTROIMMAGINI DI f

$f^{-1}(x) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$

$B \subset Y \quad f^{-1}_B(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$f(x) = x^2 \quad f^{-1}(x)$ HA 2 ELEMENTI SE $x > 0$
1 ELEMENTO SE $x = 0$
0 ELEMENTI SE $x < 0$

$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$

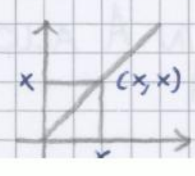
$f([1,2]) = \{f(x) \mid x \in [1,2]\} = [1,4]$

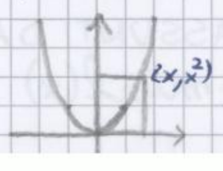
$f^{-1}([1,4]) = \{x \in dom f \mid f(x) \in [1,4]\} = [-2,1] \cup [1,2$

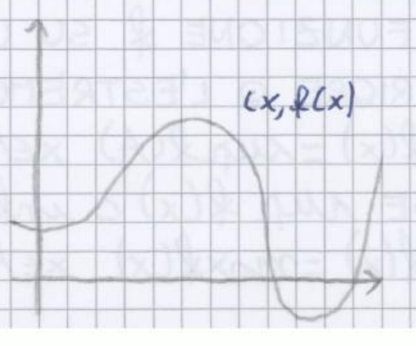
$f^{-1}(f(A)) \supseteq A \quad \supseteq$

DEFINIZIONE: DATA UN FUNZIONE $f: X \to Y$, SI DEFINISCE GRAFICO IL SOTTOINSIEME DI $X \times Y$ COSÌ DEFINITO: $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in dom(f)$

$f(x) = x \qquad f(x) = x^2$







SE $A = \overset{dom\, f}{\mathbb{R}}$ ALLORA SI SONO DEFINITI:

$\sup f$ $\max f$ $\inf f$ $\min f$

ESERCIZIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

DIMOSTRARE CHE $\sup f = \infty$ E QUINDI $\nexists M \; \forall x \mid f(x) \leq M$

CALCOLARE $\operatorname{Im} f$ $\inf f$

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE:

M SIA UN MAGGIORANTE: FALSO

PER ESSERE UN MAGGIORANTE

$\forall x \in dom\, f$ $f(x) \leq M$ $x^2 \leq M$

SE PRENDO $x = \sqrt{M+1}$ $(\sqrt{M+1})^2 \leq M$ $M+1 \leq M$ FALSO

FATTO GENERALE QUINDI:

$f(x)$ NON HA MAGGIORANTI E QUINDI $\sup f = +\infty$

CALCOLARE $\inf f$

0 È UN MINORANTE DI f MA PER ESSERE $\inf f$ DEVE:

ESSERE IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI: VERO

$\forall x \in dom\, f$ $f(x) \geq 0$

DIMOSTRAZIONE: $\forall i > 0$ $\exists f(x) < i$ VERO

SE PRENDO $x = \sqrt{\frac{i}{2}}$ $f(x) = x^2 = \frac{i}{2}$ $\frac{i}{2} < i$

$\inf f = 0$

0 È ANCHE $\min f$?

PER ESSERE $\min f$ 0 DEVE APPARTENERE A $\operatorname{Im} f$: FALSO

0 È SOLO $\inf f$, $\min f$ NON ESISTE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2x+3$

$\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ SE È VERO, ALLORA SE:

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1+3 = 2x_2+3 \quad 2x_1 = 2x_2 \quad x_1 = x_2$ INIETTIVA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

$\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad 2 \neq -2 \quad f(x_1) = 4 \quad f(x_2) = 4 \quad 4 = 4$

$x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) = f(x_2)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ NON È INIETTIVA

$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

$\forall x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad 2 \neq 3 \quad f(x_1) = 4 \quad f(x_2) = 9 \quad 4 \neq 9$

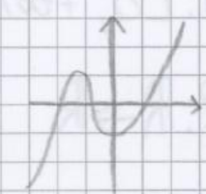
$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ INIETTIVA

QUALSIASI FUNZIONE NON INIETTIVA SI PUÒ RENDERE INIETTIVA CAMBIANDO L'INSIEME DI PARTENZA (RESTRIZIONE).

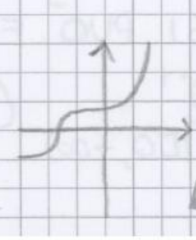
DEFINIZIONE: SI DICE CHE UNA FUNZIONE $f \; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ BIIETTIVA SE È SIA SURIETTIVA CHE INIETTIVA.

SUL GRAFICO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



f È SURIETTIVA SE E SOLO SE OGNI RETTA ORIZZONTALE TAGLIA IL GRAFICO DI f IN ALMENO UN PUNTO



f È INIETTIVA SE E SOLO SE OGNI RETTA ORIZZONTALE TAGLIA IL GRAFICO DI f IN AL PIÙ UN PUNTO

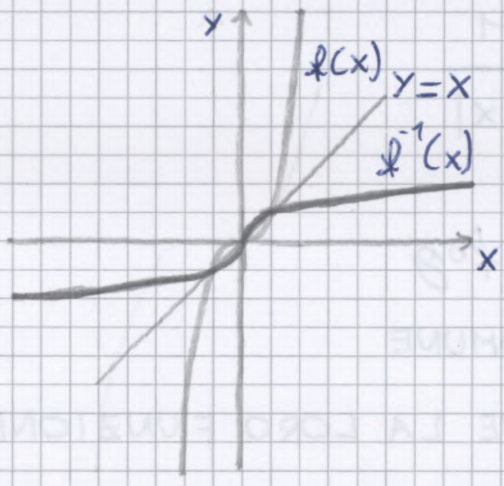
GRAFICO FUNZIONI INVERSE

$G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in dom(f)\}=\{(x,y)\mid f(x)=y\}$

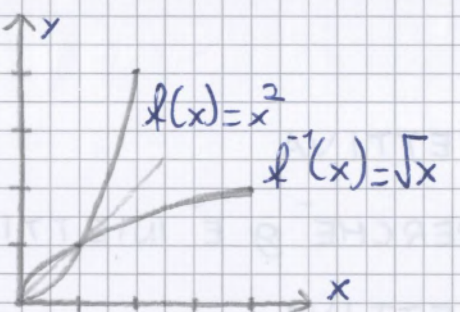
$(x,y)\in G(f)$ $f(x)=y$ SE INIETTIVA

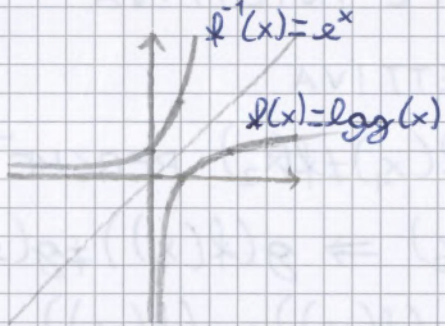
$f^{-1}(y)=x$ $(y,x)\in G(f^{-1})$

$f(x)=x^3$ $(2,8)\in G(f)$ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ $(8,2)\in G(f^{-1})$



IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INVERSA DI f È SIMMETRICO AL GRAFICO DELLA FUNZIONE f RISPETTO LA RETTA $y=x$





DA UNA FUNZIONE $f(x)$ PER TROVARE LA FUNZIONE INVERSA BISOGNA ESPLICITARE x

$f(x)=\frac{1}{x}=y$ $y=\frac{1}{x}$ $x=\frac{1}{y}$ $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=e^x=y$ $y=e^x$ $x=\log y$ $f^{-1}(x)=\log x$

$f(x)=\sqrt[3]{\log x-4}=y$ $\log x-4=y^3$ $\log x=y^3+4$ $x=e^{y^3+4}$

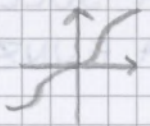
$f^{-1}(x)=e^{x^3+4}$

FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI

DEFINIZIONE: SIA f UNA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E I UN INSIEME $I \subset \mathbb{R}$

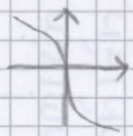
f SI DICE CRESCENTE ~~SE~~ NELL'INSIEME I SE:

$\forall x_1, x_2 \quad x_1 > x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2)$



f SI DICE DECRESCENTE ~~SE~~ NELL'INSIEME I SE:

$\forall x_1, x_2 \quad x_1 > x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$



DEFINIZIONE: SIA f UNA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f SI DICE MONOTONA SE È SEMPRE CRESCENTE O SEMPRE DECRESCENTE IN UN INTERVALLO

OSSERVAZIONE: SE f È STRETTAMENTE MONOTONA ALLORA f È INIETTIVA MA UNA f PUÒ ESSERE INIETTIVA MA NON MONOTONA.

DEFINITIVAMENTE VERA PERCHÈ, DATO CHE LA FUNZIONE $\sin n$ VARIA DA -1 A 1, DI SICURO CON $n \geq 2000$ a_n È SEMPRE POSITIVA

$N=2000$ N VIENE CHIAMATA SOGLIA

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad 0, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

$P(n): |a_n| < \frac{1}{100}$ VERA $\forall n \geq 100$ $N=100$

$P(n)$ È SEMPRE VERA: FALSO
$P(n)$ È SEMPRE FALSA: FALSO
$P(n)$ È DEFINITIVAMENTE VERA: VERO
$P(n)$ È DEFINITIVAMENTE FALSA: FALSO

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

È VERO CHE LA DISTANZA DA a_n A 1 È MINORE DI $\frac{1}{1000}$ DEFINITIVAMENTE?

$P(n): |1-a_n| < \frac{1}{1000}$ $P(n)$ È VERA DEFINITIVAMENTE?

$|1-a_n| < \frac{1}{1000}$

$-\frac{1}{1000} < 1-a_n < \frac{1}{1000}$ $\qquad -\frac{1}{1000} < 1-a_n$ SEMPRE VERA

$1-a_n < \frac{1}{1000}$ DEFINITIVAMENTE VERA?

DEVO TROVARE N TALE CHE $1-a_n < \frac{1}{1000}$ VERA $\forall n \geq N$

a_n SEMPRE MINORE DI 1
$1-a_n$ SEMPRE MAGGIORE DI 0
$-\frac{1}{1000}$ NEGATIVO
$1-a_n$ SEMPRE MAGGIORE DI UN QUANTITÀ NEGATIVA

$1-\frac{n}{n+1} < \frac{1}{1000}$ $\quad \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n+1} < \frac{1}{1000}$ $\quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$ $\quad n+1 > 1000$

$n > 999$ $\quad N=999$

SE AL POSTO DI 1000 AVESSI MESSO QUALSIASI ALTRO NUMERO PIÙ GRANDE O PIÙ PICCOLO LA PROPRIETÀ SAREBBE RIMASTA DEFINITIVAMENTE VERA

SE $\frac{3}{5n} < \varepsilon$ ALLORA ANCHE $\frac{3n}{2+5n^2} < \varepsilon$

$\frac{3}{5n} < \varepsilon \quad 3 < 5n\varepsilon \quad n > \frac{3}{5\varepsilon} \quad N = \frac{3}{5\varepsilon}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE : CONVERGE A l

$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ $\forall M$ a_n È DEFINITIVAMENTE $> M$

$\forall M \ \exists N \mid \forall n \geq N \quad a_n \geq M$

SI DICE CHE : DIVERGE A $+\infty$

$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ $\forall M$ a_n È DEFINITIVAMENTE $< M$

$\forall M \ \exists N \mid \forall n \geq N \quad a_n \leq M$

SI DICE CHE : DIVERGE A $-\infty$

IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE PUÒ NON ESISTERE

$\lim_{n \to \infty} a_n$ NON ESISTE

$a_n = (-1)^n \quad a_n = \sin(n)$

ESEMPIO

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid |a_n - 0| < \varepsilon$

$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad N = \frac{1}{\varepsilon}$

DEFINIZIONE: SI DICE CHE a_n È CRESCENTE SE:

$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

DEFINIZIONE: SI DICE CHE a_n È DECRESCENTE SE:

$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$

DEFINIZIONE: SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE È LIMITATA DALL'ALTO SE:

$\sup_n a_n < +\infty$

$\exists M \in \mathbb{R} \mid a_n \leq M \quad \forall n$

DIMOSTRAZIONE: NEL CASO a_m CRESCENTE $\sup_n a_n = l$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \mid \forall n \geq N \quad |a_n - l| < \varepsilon$

$|a_n - l| < \varepsilon \qquad -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \qquad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$a_n < l + \varepsilon$ OVVIA PERCHÈ: $\forall n \quad a_n < l$ DATO CHE $\sup_n a_n = l \quad l < l + \varepsilon$ QUINDI $a_n < l + \varepsilon$ SEMPRE

$l - \varepsilon < a_n$

$\exists a_N \mid l - \varepsilon < a_N \quad a_N$ ESISTE PERCHÈ SE NON ESISTESSE $l - \varepsilon$ SAREBBE UN MAGGIORANTE E QUINDI l NON SAREBBE IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI

$l - \varepsilon < a_N$ MA ESSENDO CRESCENTE $a_N \leq a_m \quad \forall n \geq N$

$l - \varepsilon < a_N < a_m$

$l - \varepsilon < a_m \quad \forall n \geq N \quad l - \varepsilon < a_m$ VERA DEFINITIVAMENTE

ESEMPIO

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ QUESTA SUCCESSIONE È CRESCENTE E LIMITATA

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182$

$a_m = (-1)^n$

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1 \quad a_5 = -1 \quad a_6 = 1 \quad a_7 = -1 \quad a_8 = 1$

$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 1$

$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = -1$

DA UNA SUCCESSIONE NE POSSO PRENDERE INFINITE ALTRE (ESTRAZIONE SOTTOSUCCESSIONI)

$\exists\, a_{n_3}\ (n_3 > n_2)$ $a_{n_3} > a_{n_2}$ PERCHÉ a_{n_2} NON È UN PICCO

$\exists\, a_{n_4}\ (n_4 > n_3)$ $a_{n_4} > a_{n_3}$ PERCHÉ a_{n_3} NON È UN PICCO

LA SOTTOSUCCESSIONE TROVATA È UNA SOTTOSUCCESSIONE STRETTAMENTE CRESCENTE E QUINDI MONOTONA

ESISTONO SUCCESSIONI CHE NON HANNO IL LIMITE:

$a_n = (-1)^n$ NON HA LIMITE

DUE SUE SOTTOSUCCESSIONI CONVERGONO A VALORI DIFFERENTI

$a_{2n} = 1\ \forall n$ $a_{2n} \to 1$

$a_{2n+1} = -1\ \forall n$ $a_{2n+1} \to -1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid \forall n \geq N\ |a_n - l| < \varepsilon$

NEGAZIONE $\forall l\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \mid \exists n \geq N\ |a_n - l| \geq \varepsilon$

TEOREMA: (BOLZANO-WEIERSTRASS)

OGNI SUCCESSIONE LIMITATA HA UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE

DIMOSTRAZIONE: SIA a_n UNA SUCCESSIONE LIMITATA

1 ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE a_{n_k} DI a_n MONOTONA CRESCENTE

2 TUTTE LE SUCCESSIONI MONOTONE HANNO LIMITE

$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \sup_k a_{n_k}$

a_n È LIMITATA E DI CONSEGUENZA ANCHE a_{n_k}, QUINDI:

$\sup_k a_{n_k}$ È FINITO, QUINDI:

$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \sup_k a_{n_k}$ IL LIMITE È FINITO

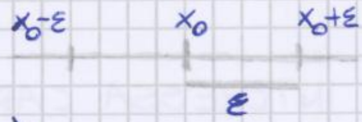
LIMITI DI FUNZIONI

DEFINIZIONE: SI DICE INTORNO DI x_0 DI RAGGIO ε, L'INTERVALLO $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ CON $x_0 \in \mathbb{R}$ E $\varepsilon > 0$ ($I_\varepsilon(x_0)$)

CARATTERISTICHE DEGLI INTORNI:

· SONO INTERVALLI APERTI E SIMMETRICI RISPETTO A x_0

$I_\varepsilon(x_0) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$



DATI DUE INTORNI DI x_0: $I_\varepsilon(x_0)$, $I'_\varepsilon(x_0)$

$I_\varepsilon(x_0) \cap I'_\varepsilon(x_0) = I''_\varepsilon(x_0)$ È UN INTORNO DI x_0

$I_\varepsilon(x_0) \cup I'_\varepsilon(x_0) = I''_\varepsilon(x_0)$ È UN INTORNO DI x_0

DEFINIZIONE: SI DICE INTORNO DI $+\infty$ OGNI INTERVALLO APERTO DEL TIPO:

$I(+\infty) = (a, +\infty)$

DEFINIZIONE: SI DICE INTORNO DI $-\infty$ OGNI INTERVALLO APERTO DEL TIPO:

$I(-\infty) = (-\infty, a)$

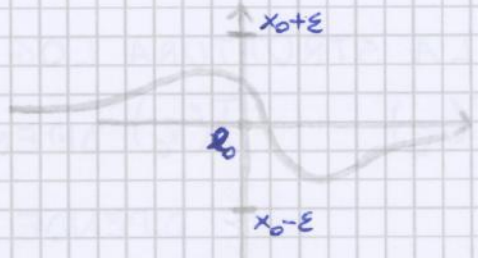
OGNI INTERVALLO APERTO CONTIENE UN INTORNO DI OGNI SUO PUNTO

$\forall x \in (a, b) \; \exists \, I(x) \mid I(x) \in (a, b)$

LO STESSO NON SI PUÒ DIRE DEGLI INTERVALLI CHIUSI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad I_\varepsilon(l)$ $\quad l \in \mathbb{R}$ $\quad \varepsilon > 0$

$f(x) \in I_\varepsilon(l)$ VUOL DIRE CHE LA DISTANZA TRA $f(x)$ E l NON SUPERA ε



ALTRI LIMITI ANALIZZATI CON LA DEFINIZIONE

$\lim_{x \to 2} 2x+4=10$

$\forall \varepsilon \ \exists \delta \mid 0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-10|<\varepsilon$

$|f(x)-10|<\varepsilon \quad |2x+4-10|<\varepsilon \quad |2x-6|<\varepsilon \quad 2|x-3|<\varepsilon$

$|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$

IL LIMITE NON È 10 PERCHÉ $|f(x)-10|<\varepsilon$ NON È VERIFICATA IN UN INTORNO DI 2 MA IN UN INTORNO DI 3

$\lim_{x \to 0} e^x=1$

$\forall \varepsilon \ \exists \delta \mid 0<|x-0|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

$0<|x-0|<\delta \quad 0<|x|<\delta \quad -\delta<x<\delta \quad x\neq 0$

$|f(x)-1|<\varepsilon \quad |e^x-1|<\varepsilon \quad -\varepsilon<e^x-1<\varepsilon \quad 1-\varepsilon<e^x<1+\varepsilon$

$\log(1-\varepsilon)<x<\log(1+\varepsilon)$

$\log(1-\varepsilon)<0$

$\log(1+\varepsilon)>0$

$\log(1-\varepsilon)<0<\log(1+\varepsilon) \quad 0\in(\log(1-\varepsilon),\log(1+\varepsilon))$

DENTRO L'INTERVALLO $(\log(1-\varepsilon),\log(1+\varepsilon))$ C'È UN INTORNO DI 0 DATO CHE $0\in(\log(1-\varepsilon),\log(1+\varepsilon))$ È QUINDI IL LIMITE È VERIFICATO

DEFINIZIONE: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x_0 \in dom(f)$ SE:

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ SI DICE CHE f È CONTINUA IN x_0

QUESTA AFFERMAZIONE DICE 3 COSE:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ESISTERE
2. $f(x_0)$ DEVE ESISTERE
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ E $f(x_0)$ DEVONO ESSERE UGUALI

$x^2 > M \qquad M > 0$

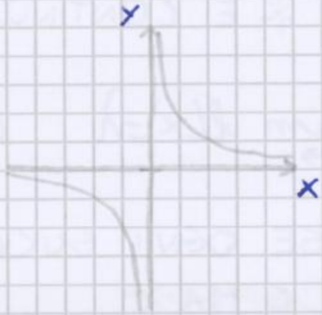
$|x| > \sqrt{M}$ MA $x \to +\infty$ QUINDI $x > 0$

$x > \sqrt{M} = N$

QUINDI

$\forall x > \sqrt{M} \Rightarrow x^2 > M$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$



$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ NON ESISTE

MA

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$

DEFINIZIONE: SI CHIAMA INTORNO DESTRO DI x_0 OGNI INTERVALLO:

$[x_0, x_0 + \delta) \quad \delta > 0 \quad I^+_\delta(x_0)$

DEFINIZIONE: SI CHIAMA INTORNO SINISTRO DI x_0 OGNI INTERVALLO

$(x_0 - \delta, x_0] \quad \delta > 0 \quad I^-_\delta(x_0)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\forall I(+\infty) \ \exists I^+(0) \mid \forall x \in I^+(0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$ $+\infty)$

$0 < |x - x_0| < \delta$

$\forall M \quad \exists \delta \quad \mid \forall x > M \quad \Rightarrow f(x) > M$

$f(x) > M \quad \frac{1}{x} > M \quad x > \frac{1}{M} = \delta$

$0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > M$ CON $\delta = \frac{1}{M}$

CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

f CONTINUA IN UN PUNTO x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

SE NON È VERO:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ MA $f(x) \neq l$ O $x_0 \notin dom(f)$

x_0 È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE.

DEFINISCO UNA NUOVA FUNZIONE

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \neq x_0 \\ l & se\ x = x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \bar{f}(x) = \bar{f}(x_0)$$

$f(x)$ NON È CONTINUA

$\bar{f}(x)$ È CONTINUA

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{MA } 0 \notin dom(f)$$

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & se\ x \neq 0 \\ 1 & se\ x = 0 \end{cases}$$

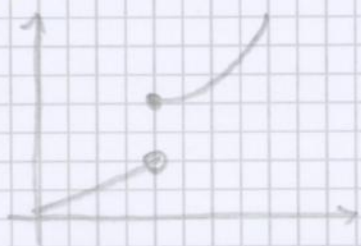
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ NON È CONTINUA

$\bar{f}(x)$ È CONTINUA

2) $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ESISTONO, SONO FINITI MA SONO DIVERSI TRA LORO

QUINDI

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ NON ESISTE



COROLLARIO n°1: SE ESISTE UN INTORNO DI c DOVE $f(x) \geq 0$ E $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ALLORA $l \geq 0$

DIMOSTRAZIONE: SE FOSSE $l < 0$ PER IL TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$\exists I(c) \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$ $f(x) < 0$ ASSURDO

APPLICAZIONE

$f(x) \leq g(x)$ $\quad \lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$

$f(x) - g(x) \leq 0$ $\quad \lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) \leq 0$

SIA $f(x) > 0$ $\forall x \in I(c)$ E $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $l \geq 0$

ALLORA $l \geq 0$

ESEMPIO

$f(x) = x^2$ $\quad f(x) > 0$ $\forall x \in I(0) \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ CIOÈ $l \geq 0$

COROLLARIO n°2: SE f È CONTINUA IN x_0 E $f(x_0) \neq 0$

ALLORA ESISTE UN INTORNO DI x_0 $(I(x_0))$ TALE CHE $\forall x \in I(x_0)$ $f(x)$ HA LO STESSO SEGNO DI x_0

DIMOSTRAZIONE: NEL CASO $f(x_0) > 0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ CONTINUITÀ f

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$

$\exists (I(x_0))$ $\forall x \in I(x_0)$ $f(x) > 0$ $\quad$ TEOREMA PERMANENZA SEGNO

ESERCIZIO

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 6$ $\exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ $f(x) < 7$?

$\lim (f(x) - 7) = -1$ $\exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ $f(x) - 7 < 0$ $\quad f(x) < 7$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

E DATO CHE LA FUNZIONE È PARI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+1}$$

$$x+1 \geq \sin x > x \geq x-1 \qquad \frac{x^2}{2} \leq x^2+1 \leq 2x^2 \quad \text{PER } x \text{ GRANDI MA } x\to\infty$$

$$\frac{x+1}{\frac{x^2}{2}} \geq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \geq \frac{x-1}{2x^2} \qquad x+1 \leq 2x \qquad x-1 \geq \frac{x}{2}$$

$$\frac{2x}{\frac{x^2}{2}} \geq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \geq \frac{\frac{x}{2}}{2x^2} \qquad \frac{4}{x} \geq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \geq \frac{1}{4x} \quad \text{PER } x \text{ GRANDI}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x} = 0 \quad \text{QUINDI} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+1} = 0$$

COROLLARIO: SIA f LIMITATA IN UN INTORNO DI c
SIA $g \mid \lim_{x\to c} g(x) = 0$

ALLORA: $\lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = 0$

DIMOSTRAZIONE:

f LIMITATA IN $I(c)\setminus\{c\}$ QUINDI:

$\exists M \mid |f(x)| \leq M \quad \forall x \in I(c)\setminus\{c\}$

OSSERVIAMO CHE $(g(x)f(x)) \to 0$ SE E SOLO SE $|g(x)f(x)| \to 0$

TEOREMA: SOMME, PRODOTTI, QUOZIENTI, POTENZE DI FUNZIONI CONTINUE, DOVE ESISTONO, SONO FUNZIONI CONTINUE.

$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ PROPRIETÀ DEI LIMITI

$\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$. CONTINUITÀ f E g

FORME INDETERMINATE: SITUAZIONI IN CUI IL LIMITE È SCONOSCIUTO

$+\infty-\infty \quad \infty\cdot 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ DIMOSTRATO $\left(\frac{0}{0}\right)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot \sin x = 0 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = \infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-4}{3x^2+2x+6} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2})}{3\cancel{x^2}(1+\frac{2}{3x}+\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\,\frac{\overbrace{(1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2})}^{\to 1}}{\underbrace{(1+\frac{2}{3x}+\frac{2}{x^2})}_{\to 1}} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x} =$

$\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad (1^\infty)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (1^\infty)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x - \quad \frac{a}{x} = \frac{1}{y} \quad x \to \pm\infty \quad y \to \pm\infty$

$\lim_{y \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y \to \pm\infty} \left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^a = \left(\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^a$ PERCHE LA POTENZA E UNA FUNZIONE CONTINUA

$\left(\underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{e}\right)^a = e^a$

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (1^\infty)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \frac{1}{x} = y \quad x = \frac{1}{y} \quad x \to 0 \quad y \to \pm\infty$

$\lim_{y \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$\lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\underbrace{\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e}\right)$ PERCHE $\log_a$ CONTINUA

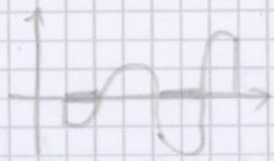
$\log_a e = \frac{1}{\log a} \quad \Big($ SE $a = e$ E QUINDI $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \left(\frac{0}{0}\right)$ LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad y = a^x - 1 \quad x = \log_a(y+1) \quad x \to 0 \quad y \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{y} \log_a(y+1)\right)^{-1} = \lim_{y \to 0} \left(\log_a (y+1)^{\frac{1}{y}}\right)^{-1} = \left(\lim_{y \to 0} \log_a (x+1)^{\frac{1}{x}}\right.$

DIMOSTRAZIONE: $f(a)<0<f(b)$



DEFINISCO $A=\{x\in[a,b] \mid f(x)<0\}$

A: $\neq\emptyset$ PERCHÉ $a\in A$

È LIMITATO $A\subset[a,b]$

CHIAMO $c=\sup A$ $c\in\mathbb{R}$ $c\in[a,b]$

ESISTE UNA SUCCESSIONE $x_n\in A \mid x_n\to c$

f È CONTINUA QUINDI

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n))=\lim_{x\to c}(f(x))=f(c)$$

$x_n\to c$ $f(x_n)\to f(c)$ $f(x_n)<0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n)\leq 0$$

$$f(c)=\lim_{x\to\infty} \overset{f(x_n)}{x\to}$$

$f(c)\leq 0$ TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO

MOSTRO CHE $f(c)<0$ È IMPOSSIBILE

SE $f(c)<0$ PERMANENZA DEL SEGNO

$\exists I(c) \mid \forall x\in I(c)$ $f(x)<0$

IMPOSSIBILE PERCHÉ NESSUN $f(x)$ PUÒ ESSERE MINORE DI ZERO SE $x>c$ PERCHÉ $c=\sup A$

QUINDI $f(c)=0$

OSSERVAZIONE: NELLE STESSE IPOTESI SE f.

SE f È STRETTAMENTE MONOTONA, QUINDI INIETTIVA ALLORA f HA UN UNICO ZERO.

TEOREMA (DEI VALORI INTERMEDI): SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA

SE f ASSUME DUE VALORI α E β

ALLORA f ASSUME TUTTI I VALORI FRA α E β

DIMOSTRAZIONE: SUPPONGO $\alpha<\beta$

$\exists\, x_\alpha, x_\beta \in [a,b] \mid f(x_\alpha)=\alpha \quad f(x_\beta)=\beta$

SIA $x_\alpha < x_\beta$

PRENDO $\alpha<\gamma<\beta$ E DIMOSTRO CHE:

$\exists c\in(x_\alpha,x_\beta) \mid f(c)=\gamma$

CHIAMO $g:[x_\alpha,x_\beta]\to\mathbb{R} \quad g(x)=f(x)-\gamma$ CONTINUA

$g(x_\alpha)=f(x_\alpha)-\gamma=\alpha-\gamma<0$

$g(x_\beta)=f(x_\beta)-\gamma=\beta-\gamma>0$

PER IL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$\exists c\in(x_\alpha,x_\beta) \mid g(c)=0$

$g(c)=0$

$g(x)=f(x)-\gamma$

$g(c)=f(c)-\gamma=0$

$f(c)=\gamma$

COROLLARIO: SIA I UN INTERVALLO DI $\mathbb{R}$

SE $f:I\to\mathbb{R}$ E' CONTINUA

ALLORA $f(I)=\mathrm{Im}f$ E' UN INTERVALLO

$f(x_{m_K}) = y_{m_K} \to l$

$x_{m_K} \to c$ f È CONTINUA QUINDI:

$f(x_{m_K}) \to f(c)$

$f(c) = l = \sup f = \max f$ $\quad$ l FINITO

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{e^{-x} + x^2 \cos^2 x - 3}{e^{x^2} + \log^2(|x|+1)} \quad f:[0,4] \to \mathbb{R} \text{ CONTINUA}$$

f IN $[0,4]$ PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS HA UN max E UN min

f CONTINUA SU $[a,b]$ ALLORA:

$f([a,b])$ È CHIUSO E LIMITATO

$f([a,b]) = [\min f, \max f] = [\inf f, \sup f]$

COROLLARIO: SIA I UN INTERVALLO E $f: I \to \mathbb{R}$

f STRETTAMENTE MONOTONA SE E SOLO SE f È INIETTIVA

COROLLARIO: SIA I UN INTERVALLO E $f: I \to \mathbb{R}$

SE f È CONTINUA E INIETTIVA

ALLORA f^{-1} È CONTINUA

PROPRIETÁ

- $f \sim g$ $x \to c$ SE E SOLO SE $f = g + o(g)$

$f = g + o(g)$ $f = g + h$ E $\lim_{x \to c} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

ESEMPIO

$3x^2 = o(x)$ $x \to 0$ PERCHÉ $\lim_{x \to 0} \frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} 3x = 0$

$f(x) = x + 3x^2 = x + o(x)$ PER $x \to 0$

$f \sim g$ $x \to c$ $\Leftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$ $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$

$f - g = o(g)$ $f = g + o(g)$

- $o(f) = \alpha o(f) = o(\alpha f)$ $\forall \alpha \neq 0$
- $x^k = o(x^n)$ $k > n$ PER $x \to 0$
- $x^k = o(x^n)$ $k < n$ PER $x \to \infty$

ALGEBRA DEGLI O PICCOLI

$x \to 0$

$x^n \cdot o(x^k) = o(x^{k+n})$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^n o(x^k)}{x^{k+n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^n} o(x^k)}{x^k \cancel{x^n}} = 0$ ANCHE PER $+\infty$

$o(x^n) o(x^k) = o(x^{k+n})$

$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n) o(x^k)}{x^{k+n}} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^n) \cdot o(x^k)}{x^n \cdot x^k} = 0$ ANCHE PER $+\infty$

$[o(x^n)]^k = o(x^{kn})$

$\lim_{x \to 0} \frac{(o(x^n))^k}{x^{kn}} = \lim_{x \to 0} \frac{(o(x^n))^k}{(x^n)^k} = 0$ ANCHE PER $+\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^2)}{9x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^2}}{9\cancel{x^2}}=\frac{2}{9}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)^2\sin^3(2x)}{(\sqrt[3]{1-4x^2}-1)\log(1+3x^5)}=$$

$e^t-1=t+o(t)$ $t\to 0$ $t=x^2$ $x\to 0$

$e^{x^2}-1=x^2+o(x^2)$

$(e^{x^2}-1)^2=(x^2+o(x^2))^2=x^4+2x^2o(x^2)+o(x^4)=x^4+o(x^4)$

$\sin t=t+o(t)$ $t\to 0$ $t=2x$ $x\to 0$

$\sin 2x=2x+o(x)$

$\sin^3(2x)=(2x+o(x))^3=8x^3+o(x^3)+3(2x)^2o(x)+3(2x)(o(x^2))=8x^3+o(x^3)$

NUMERATORE:

$(x^4+o(x^4))(8x^3+o(x^3))=8x^7+o(x^7)$

$(1+t)^\alpha-1=\alpha t+o(t)$ $t\to 0$ $t=-4x^2$ $x\to 0$ $\alpha=\frac{1}{3}$

$(1-4x^2)^{\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{3}(-4x^2)+o(x^2)=-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)$

$\log(1+t)=t+o(t)$ $t\to 0$ $t=3x^5$ $x\to 0$

$\log(1+3x^5)=3x^5+o(x^5)$

DENOMINATORE:

$(-\frac{4}{3}x^2+o(x^2))(3x^5+o(x^5))=-4x^7+o(x^7)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)^2\sin^3(2x)}{(\sqrt[3]{1-4x^2}-1)\log(1+3x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^7+o(x^7)}{-4x^7+o(x^7)}=\lim_{x\to 0}-\frac{8\cancel{x^7}}{4\cancel{x^7}}=-2$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\cos x}$$

$e^t=1+t+o(t)$ PER $t\to 0$ $t=\cos x$

$e^{\cos x}=1+\cos x+o(\cos x)$ FALSO PERCHÉ:

$t\to 0$ $t=\cos x$ $\cos x\to 1$ INVECE DEVE TENDERE A 0

PROPRIETÀ: SIA $\lim_{x\to} \lim_{x\to c} f(x)=0$

ALLORA $f=o(1)$ PER $x\to c$

DIMOSTRAZIONE

$f=o(1)$ PER $x\to c$

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{1}=0 \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to c} f(x)=0$

ESEMPIO

$f(x)=7+o(1)$

$f(x)-7=o(1)$

$\lim_{x\to c} f(x)-7=0 \quad \lim_{x\to c} f(x)=7$

OSSERVAZIONE: POSSIAMO ESPRIMERE LA CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE ANCHE CON I SIMBOLI DI LANDAU

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ f È CONTINUA

$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$

$f(x)-f(x_0)=o(1)$

$f(x)=f(x_0)+o(1)$ f È CONTINUA

FUNZIONI INFINITE E INFINITESIME

DEFINIZIONE:

SE $f(x)=o(1)$ PER $x\to c$ $\lim_{x\to c} f(x)=0$

ALLORA f SI DICE INFINITESIMA

DEFINIZIONE:

SE $(f(x))^{-1}=o(1)$ PER $x\to c$ $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=0 \quad \lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty$

ALLORA f SI DICE INFINITA

FATTORIALE

$k!$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\quad$ K FATTORIALE

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k = k(k-1)(k-2)\ldots 2 \cdot 1 = k \cdot (k-1)!$$

$$0! = 1$$

IL RISULTATO DEL FATTORIALE RAPPRESENTA IL NUMERO DI COMBINAZIONI DIVERSE POSSIBILI CON K ELEMENTI

COEFFICIENTE BINOMIALE

$\binom{n}{k}$ $\quad n, k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1!\cancel{(n-1)!}} = n$$

IL RISULTATO DEL COEFFICIENTE BINOMIALE RAPPRESENTA IL NUMERO DI COMBINAZIONI POSSIBILI DIVERSE CON n OGGETTI ORDINATI IN GRUPPI DA K ELEMENTI

COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZATO

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{SE } \alpha = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{SE } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$f(x)=f(x_0)+o(1)$ ESPRESSIONE CONTINUITÀ IN x_0 O PICCOLI

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ ESPRESSIONE DERIVABILITÀ IN x_0

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right)=0$$

$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=o(x-x_0)$ PER $x\to x_0$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ PER $x\to x_0$

ESPRESSIONE DERIVABILITÀ IN x_0 O PICCOLI

$h=x-x_0$ PER $x\to x_0$ $h\to 0$ $x=x_0+h$

$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$ PER $h\to 0$

ESEMPIO

$f(x_0)=7$ $f(x)=7-5(x-x_0)+o(x-x_0)$

f È DERIVABILE IN x_0 E $f(x_0)=-5$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ È UNA RETTA

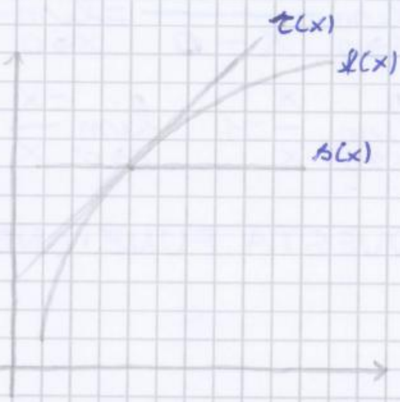
DEFINIZIONE: LA RETTA $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ SI CHIAMA RETTA TANGENTE AL GRAFICO f IN $(x_0, f(x_0))$

ESISTE UNA SOLA RETTA TANGENTE

$f(x)=r(x)+o(x-x_0)$ PER $x\to x_0$

RENDE UNICA

CIÒ CHE LA È CHE SI DIFFERENZIA DAL GRAFICO PER UNA QUANTITÀ CHE È $o(x-x_0)$. ESISTONO INFINITE RETTE CHE SI DIFFERENZIANO DAL GRAFICO PER ALTRE QUANTITÀ O PICCOLE DI QUALCOSA.



$f(x)=r(x)+o(x-x_0)$

$f(x)=s(x)+o(1)$

$r(x)$ RETTA TANGENTE

- $D(f(x_0)g(x_0)) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ PER $h \to 0$
$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$ PER $h \to 0$

$$f(x_0+h)g(x_0+h) = (f(x_0)+f'(x_0)h+o(h))(g(x_0)+g'(x_0)h+o(h)) =$$
$$f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)h+f'(x_0)g(x_0)h+f'(x_0)g'(x_0)h^2+o(h) =$$
$$f(x_0)g(x_0)+(f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0))h+o(h)$$
$$D(f(x)g(x)) = f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$$

- $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)^2}$

g

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - f(x_0+}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{h(g(x_0+h)\cdot g(x_0))}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{h(g(x_0+h)\cdot g(x_0))}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0)(f(x_0+h)-f(x_0)) - f(x_0)(g(x_0+h-g(x_0)))}{h(g(x_0+h)\cdot g(x_0))}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0)\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) - f(x_0)\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)}{g(x_0+h)g(x_0)}\right) =$$
$$= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- SE f DERIVABILE IN x_0 E g DERIVABILE IN $f(x_0)$

$D(g\circ f) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ $\quad x-x_0 \to 0$
$g(x) = g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0)$ $\quad y-y_0 \to 0$

$x = x_0+h$ $\quad h = x-x_0$ $\quad y = y_0+i$ $\quad i = y-y_0$

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E $A \subset \mathbb{R}$

SE f È DERIVABILE IN OGNI PUNTO DI A SI DICE CHE f È DERIVABILE IN A

SE f È DERIVABILE IN OGNI PUNTO DEL SUO DOMINIO SI DICE CHE È DERIVABILE

NEL RAPPORTO INCREMENTALE SI INTRODUCE LA VARIABILE x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

QUINDI AL VARIARE DI x_0 VARIA IL RAPPORTO INCREMENTALE E QUINDI LA LIMITE CHE RAPPRESENTA LA DERIVATA QUINDI SI DEFINISCE UNA NUOVA FUNZIONE:

$f'(x)$ FUNZIONE DERIVATA DI f

$f'(x)$ DI FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ $\quad f'(x)$ = FUNZIONE DERIVATA

POTENZE

$f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$f(x+h) = (x+h)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha \quad h \to 0 \qquad (1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t) \quad t \to 0$

$x^\alpha\left(1+\alpha\frac{h}{x}+o(h)\right) = x^\alpha\left(1\right) + \alpha x^{\alpha-1} h + o(h)$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$f(x) = \sin x$

$f(x+h) = \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \qquad h \to 0$

$= \sin x(\cos h) + \cos x(\sin h)$

$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \qquad t \to 0$

$\sin t = t + o(t) \qquad t \to 0$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2} D(e^x) - \frac{1}{2} D(e^{-x})$$

$$D(e^x) = e^x$$

$$D(e^{-x}) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$$

$$D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$f'(x) = \cosh(x)$$

cos

$$f(x) = \sinh(x) \qquad f'(x) = \sinh(x)$$

FUNZIONI INVERSE

$$f(x) = \arctan(x) \qquad f(y) = tg\, y \qquad f'(y) = 1 + tg^2 y$$

$$f^{-1}(x) = \arctan x$$

$$D(\arctan(x)) = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + tg^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \arcsin(x) \qquad f(y) = \sin(y) \qquad f'(y) = \cos(y)$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$D(\arcsin(x)) = \frac{1}{f'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

SIA f DERIVABILE PER $x>x_0$ E PER $x<x_0$

SE $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ E f È CONTINUA IN x_0

ALLORA f È DERIVABILE IN x_0

USO DELLA DERIVATA PER RICERCA max min

$f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$ SI CHIAMA MINIMO LOCALE PER f

SE $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x$ IN UN INTORNO DI x_0

$x_0 \in A$ SI CHIAMA MINIMO LOCALE FORTE PER f

SE $f(x_0) < f(x)$ $\forall x$ IN UN INTORNO DI x_0

DEFINIZIONE: SIA f DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0 E DERIVABILE IN x_0

SE $f'(x_0)=0$

ALLORA SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO CRITICO PER f

TEOREMA (DI FERMAT): SIA f DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0 E DERIVABILE IN x_0

SE x_0 È UN MASSIMO O UN MINIMO LOCALE PER f

ALLORA x_0 È UN PUNTO CRITICO PER f

DIMOSTRAZIONE: NEL CASO x_0 MASSIMO LOCALE

$\exists I(x_0) \mid f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I(x_0)$

ANALIZZO LA DERIVATA PER $x > x_0$ $x \in I(x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \frac{f(x)-f(x_0) \leq 0}{x-x_0 > 0} \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad \frac{\forall x \in I(x_0)}{x > x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$ TEOREMA PERMANENZA SEGNO

$f'_+(x_0) \leq 0$

DOVE SI CERCANO I MASSIMI O MINIMI LOCALI

- FRA I PUNTI CRITICI
- AGLI ESTREMI DEL DOMINIO
- TRA I PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI DERIVABILI

TEOREMA (ROLLE): SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
SE f CONTINUA IN $[a,b]$
SE f DERIVABILE ALMENO IN (a,b)
SE $f(a)=f(b)$

ALLORA $\exists c\in(a,b) \mid f'(c)=0$

DIMOSTRAZIONE

PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS f HA UN MASSIMO E UN MINIMO IN $[a,b]$

CASO 1

SE IL MASSIMO E IL MINIMO CADONO ENTRAMBI AGLI ESTREMI DI $[a,b]$

ALLORA f È COSTANTE IN $[a,b]$ E OGNI $c\in(a,b)$ $f'(c)=0$

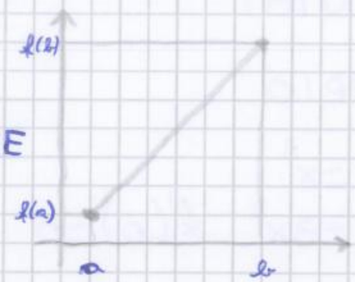
CASO 2

SE ALMENO UNO TRA MASSIMO E MINIMO CADE IN (a,b) QUEL PUNTO LO CHIAMO c E PER IL TEOREMA DI FERMAT $f'(c)=0$

NEGO LE IPOTESI

SE $f(a)\neq f(b)$

LA FUNZIONE ~~NON~~ PUÒ NON PRESENTARE PUNTI CRITICI



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 146

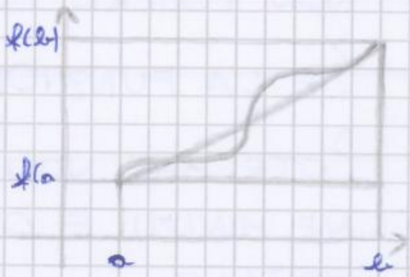
TEOREMA (LAGRANGE): SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

SE f CONTINUA IN $[a,b]$

SE f DERIVABILE ALMENO IN (a,b)

ALLORA $\exists c\in(a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TRA $f(a)$ E $f(b)$



CI SARÀ UN PUNTO C DI CUI UNA RETTA CON QUESTO COEFFICIENTE ANGOLARE SARÀ LA RETTA TANGENTE

DIMOSTRAZIONE: SIA $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ (GIRARE LA TESTA)

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

g È CONTINUA IN $[a,b]$

g È DERIVABILE IN (a,b)

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a})=f(a)$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)-0=f(a)$$

SI APPLICA ROLLE A g

$\exists c\in(a,b) \mid g'(c)=0$

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+g'(x)$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+g'(c) \qquad g'(c)=0$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

TEOREMA (MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA)

SIA f DERIVABILE IN UN INTERVALLO I

f È CRESCENTE SE E SOLO SE $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

SE $f' > 0 \ \forall x \in I$

ALLORA f È STRETTAMENTE CRESCENTE IN I

f È DECRESCENTE SE E SOLO SE $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$

SE $f' < 0 \ \forall x \in I$

ALLORA f È STRETTAMENTE DECRESCENTE IN I

DIMOSTRAZIONE: $f \nearrow \implies f'(x) \geq 0$

SIA $x \in I$ $h > 0$

$x + h > x$ $f(x+h) \geq f(x)$ PERCHÉ CRESCENTE

$$\frac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0$$

TEOREMA PERMANENZA SEGNO

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad f'_+(x) \geq 0$$

LA FUNZIONE È DERIVABILE QUINDI $f'_+(x) = f'(x)$

$f'(x) \geq 0$

DIMOSTRAZIONE: $f'(x) \geq 0 \implies f \nearrow$

SIANO $x_1 < x_2$ $[x_1, x_2] \subset I$

TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in (x_1, x_2) \mid \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ $c \in (x_1, x_2) \subset I$ ALLORA $f'(c) \geq 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$$

INTERVALLI DI MONOTONIA, SEGNO $f'(x)$

$f'(x) \geq 0 \quad f \nearrow$

$f'(x) < 0 \quad f \swarrow \searrow$

QUINDI PER CAPIRE IL COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE STUDIAMO $f'(x) \geq 0$

f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
f'	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	x_0	x_1	x_2	x_3	

x_0, x_2 MASSIMI

x_1, x_3 MINIMI

ESEMPIO

$f(x) = (x^2-3)e^x$

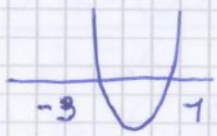
$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \qquad f$ DERIVABILE IN $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x = e^x(x^2+2x-3)$

$e^x(x^2+2x-3) \geq 0 \qquad e^x > 0 \ \forall x$

$x^2+2x-3 \geq 0$

$x^2+2x-3 = 0 \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 = \begin{cases} -3 \\ +1 \end{cases}$



$x^2+2x-3 \geq 0 \quad x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
f'	$+$	$-$	$+$
	-3	1	

$x = -3$ MASSIMO

$x = 1$ MINIMO

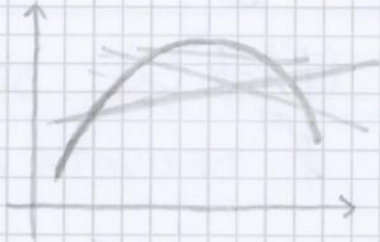
$\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ NON ESISTE

NON CONTINUA QUINDI NON C^1

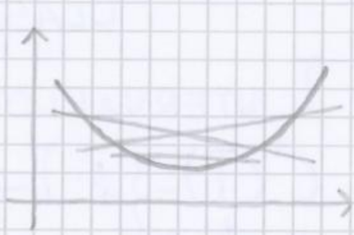
FUNZIONI CONVESSE O CONCAVE

DEFINIZIONE: $f: I \to \mathbb{R}$ I INTERVALLO

SE $\forall a, b \in I$ IL GRAFICO DI f È SOPRA ALLA RETTA PASSANTE PER $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$
ALLORA f SI DICE CONCAVA



SE $\forall a, b \in I$ IL GRAFICO DI f È SOTTO ALLA RETTA PASSANTE PER $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$
ALLORA f SI DICE CONVESSA



RETTA PASSANTE PER $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad f \text{ È CONCAVA}$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad f \text{ È CONVESSA}$$

SE f È DERIVABILE E CONCAVA IN I
ALLORA $\forall x_0 \in I$ IL GRAFICO DI f È SOTTO ALLA TANGENTE IN $(x_0, f(x_0))$

SE f È DERIVABILE E CONVESSA IN I
ALLORA $\forall x_0 \in I$ IL GRAFICO DI f È SOPRA ALLA TANGENTE IN $(x_0, f(x_0))$

USO DERIVATE NEI LIMITI

TEOREMA (DE L'HOPITAL)

$f, g : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R} \qquad c = \begin{cases} x_0 \\ x_0^{\pm} \\ \pm\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

f, g DERIVABILI IN $I(c) \setminus \{c\}$ E $g'(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ CON $l \in \mathbb{R}$ O $l = \pm\infty$

ALLORA

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin(5x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{5\cos(5x)} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{1}{2}$$

SE SI APPLICASSE DE L'HOPITAL

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{2x + \cos x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + \cos x}{2 - \sin x}$ NON ESISTE

DE L'HOPITAL NON PUÒ ESSERE APPLICATO PERCHÈ

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{2x + \cos x}$ NON È UNA FORMA $\dfrac{0}{0} \quad \dfrac{+\infty}{+\infty} \quad \dfrac{-\infty}{-\infty}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 146

APPROSSIMAZIONE LOCALE DI FUNZIONI

APPROSSIMAZIONE: SOSTITUIRE A FUNZIONI COMPLICATE DELLE FUNZIONI SEMPLICI MOLTO SIMILI

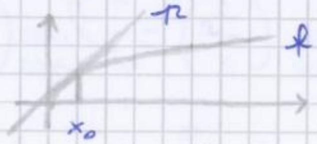
LOCALE: VICINO A UN PUNTO

FUNZIONI SEMPLICI: POLINOMI

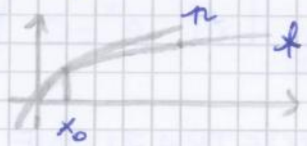
p POLINOMIO APPROSSIMA f VICINO A x_0

$f - p \to 0$ PER $x \to x_0$ $\quad f - p = o(1)$

$\frac{f-p}{x-x_0} \to 0$ PER $x \to x_0$ $\quad f - p = o(x - x_0)$



$\frac{f-p}{(x-x_0)^n} \to 0$ PER $x \to x_0$ $\quad f - p = o(x-x_0)^n$



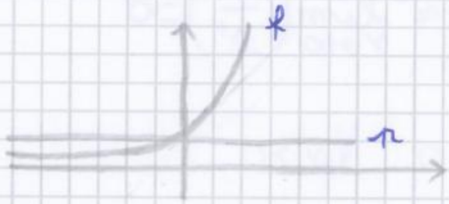
ESEMPI

$f(x) = e^x \quad x_0 = 0$

VOGLIO APPROSSIMARE $f(x)$ IN x_0 CON UN POLINOMIO DI GRADO 0

$e^x - c = o(1) \quad x \to 0$

$c = 1 \quad e^x - 1 = o(1) \quad x \to 0$



VOGLIO APPROSSIMARE $f(x)$ IN x_0 CON UN POLINOMIO DI GRADO 1

$e^x - (ax + c) = o(x) \quad x \to 0$

$a = 1 \quad c = 1 \quad e^x - (x+1) = o(x) \quad x \to 0$

$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=$ RETTA TANGENTE

$n=2$

$$T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

TEOREMA (TAYLOR): SIA f DERIVABILE n VOLTE E $x_0 \in \mathbb{R}$

ESISTE UN UNICO POLINOMIO DI GRADO $\leq n$ TALE CHE

$f(x)=p(x)+o((x-x_0)^n)$

QUESTO POLINOMIO È IL POLINOMIO DI TAYLOR $T_n(x)$

$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$

(SVILUPPO DI TAYLOR DI f DI ORDINE n CENTRATO IN x_0)

(SE $x_0=0$ SVILUPPO DI MACLAURIN DI f)

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

ESEMPIO

$f(x)=e^x \qquad x_0=1 \qquad n=2$

$$f(x)=e+o(1)$$
$$=e+e(x-1)+o((x-1))$$
$$=e+e(x-1)+\frac{1}{2}e(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

$f(x)=e^x \qquad x_0=0$ (MACLAURIN) $\quad n=2$

$$f(x)=1+o(1)$$
$$=1+x+o(x)$$
$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

Sviluppi di Maclaurin notevoli ($x_0 = 0$)

- $f(x) = e^x \quad f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = e^x$

  $f(0) = 1 \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = 1$

  $$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^{n+1})$$

- $f(x) = \log(1+x) \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} \quad f'(0) = 1$

  $f(0) = 0 \quad f''(x) = -(1+x)^{-2} \quad f''(0) = -1$

  $f'''(x) = +2(1+x)^{-3} \quad f'''(0) = 2 \cdot 1 = 2$

  $f^k(x) = (k-1)!(1+x)^k \cdot (-1)^{k-1}$

  $f^k(0) = (k-1)!\,(-1)^{k-1}$

  $$\frac{f^k(0)}{k!} = \frac{\cancel{(k-1)!}(-1)^{k-1}}{k\cancel{(k-1)!}} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

  $$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

- $f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x) \quad f'(0) = 1$

  $f(0) = 0 \quad f''(x) = -\sin(x) \quad f''(0) = 0$

  $f'''(x) = -\cos(x) \quad f'''(0) = -1$

  $f^{IV}(x) = \sin(x) \quad f^{IV}(0) = 0$

  $$f(x) = \sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n-1})$$

  $$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0x^{2n+2} + o(x^{2n+2})$$

  $$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

SE $\alpha = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

ALGEBRA DEGLI SVILUPPI

$f = r_n + o(x^n)$

$g = q_n + o(x^n)$

SOMMA

$$f \pm g = r_n \pm q_n + o(x^n)$$

PRODOTTO

$$f\, g = (r_n + o(x^n))(q_n + o(x^n)) = r_n\, q_n + o(x^n)$$

IN $r_n q_n$ BISOGNA CONTROLLARE SOLO I TERMINI DI GRADO $\leq n$

ESEMPIO

SVILUPPO DI ORDINE 3 DI $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \qquad \sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x \cdot \sin(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

SVILUPPO DI ORDINE 3 DI $f(x) = tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$$

$$f(x) = tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t)$$

$$\frac{1}{1 + (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3))} = 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^3) = 1 \mp \left(\frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3)$$