NUMERO: 1492A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Artusio

MATERIA: Calcolo Numerico + Eserc. Prof.Baratella

29/09/14

CALCOLO NUMERICO paola.baratella@polito.it

Esame: Scritto con 5 es (teo + es), Matlab
orale facoltativo
28/01 16/02

Materiale: Metodi e algoritmi MONEGATO - CLUT
Lab SCUDERI - CLUT

Risoluzione sist lineari, eq diff, $\int$ ... approssimata

ARITMETICA

Nel calcolatore la rappr di un numero non è infinita ma limitata al numero di byte. Ha precisione finita.
Noi usiamo aritmetica in base 10

$N = 10$ $\quad a = 1{,}234567 = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \dots$

$0 \le a_i \le 9 \qquad a = a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2}$

$N = 2$ $\quad 0 \le a_i \le 1$ in base binaria

$(10{,}01)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 2{,}25$

Più grande è la base, più breve la rappresentazione del numero. Però in binario l'aritmetica è molto semplice.
Prendo un oggetto fisico che può assumere due stati diversi.

- Prendo un numero intero a cui vengono dedicati 32 bit.

0	1	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0

31 ... 0 $\qquad a = 1000$

Il primo bit rappresenta il segno (0 +)

- Numeri reali con floating point normalizzata → rappr univoca

$a = \boxed{0{,}1273} \cdot 10^{2}$ → caratteristica q $\quad$ no $a = 12{,}73$

mantissa p ↓ base

$N^{-1} \le |p| < 1$
↓
$1/10$

Il numero deve avere cifra significativa subito dopo la virgola cioè $|p| = 0{,}xxx$

In binario $N = 2 \quad \pm 0{,}1xxx \cdot 2^q$

Con 64 bit

segno

1	q	24

31 ... 0

7 cifre per la caratt. ↓ modulo di p

- Se do più cifre a q posso scrivere numeri più grandi (ordine di grandezza)
- se a mantissa p aumenta la precisione

più cifre decimali ← con cui rappresento il numero.

$$e.r. = \frac{|a - fl(a)|}{|a|} = \frac{|p - \bar{p}|N^q}{|p|N^q} = \frac{|p-\bar{p}|}{|p|} \leq \frac{1}{2}N^{-t}N = \frac{1}{2}N^{1-t}$$

→ max errore relativo commesso

Queste quantità sono PRECISIONI DI MACCHINA, caratteristiche fisiche. È un limite alla precisione del calcolo.

Tra due numeri reali sull'asse reale ce n'è sempre un terzo. Nella macchina no, i numeri sono un numero finito. Ogni numero macchina rappresenta infiniti numeri uomo.

Non sempre arrot è meglio del tronc (prima metà mantissa → stesso risultato, stesso errore).

$\boxed{\text{ES}}$

$a = 12{,}235436$

$N = 10$ $\quad t = 4$ $\quad$ arrot.

- Rappr macchina $fl(a)$

$a = 0{,}12235436 \cdot 10^2$

$fl(a) = 0{,}1224 \cdot 10^2$

- Prec macchina $\quad prec = \frac{1}{2}N^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

$$\begin{array}{rl} p = & 0{,}12235436 \quad + \\ & 0{,}00005 \quad = \\ \hline & 0{,}122|40436 \end{array}$$

30/09/14

PRECISIONE DI MACCHINA

$$eps = \begin{cases} \text{TRONC} & N^{1-t} \\ \text{ARROT} & \frac{1}{2}N^{1-t} \end{cases}$$ se p è troppo lunga

⇓

$$\max_{a \in \mathbb{R}} \frac{|a - fl(a)|}{|a|}$$

Se invece è q ad essere troppo lunga (esponente)

⇒ OVERFLOW (esponente positivo)

UNDERFLOW (esponente negativo) → num più piccolo che si può scrivere

$|p-\bar{p}| = 0,00345 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \Rightarrow$ 2 cifre significative

le cifre sign sono minori dei numeri decimali.

Def: se $\frac{|x-\bar{x}|}{|x|}$ errore relativo $\leq \frac{1}{2} 10^{-k} \Rightarrow \bar{x}$ ha almeno k cifre significative.

$$\frac{|x-\bar{x}|}{|x|} = \frac{|pN^q - \bar{p}N^q|}{|pN^q|} \leq \frac{1}{2} 10^{-k}$$

$$|p-\bar{p}| \leq |p| \frac{1}{2} 10^{-k} < \frac{1}{2} 10^{-k} \quad \text{perché} \quad N^{-1} \leq |p| < 1$$

OPERAZIONI MACCHINA

Somme e moltiplicazioni sono eseguite dai circuiti, il resto dal software.

$a + b$

$a \rightarrow fl(a)$
$b \rightarrow fl(b)$ } numeri macchina

$fl(a) + fl(b)$

$a = 1,02735 \cdot 10^4$ $\quad$ $t = 6$

$b = 0,12345 \cdot 10^0$

numero macchina $\rightarrow fl(a) = 0,102735 \cdot 10^5$

$\rightarrow fl(b) = 0,12345 \cdot 10^0$

$fl(a) + fl(b) =$

$$\begin{array}{r} 10273,5 \\ 0,12345 \\ \hline 10273,62345 \end{array}$$

$\rightarrow$ non é un numero macch troppe cifre nella mantissa

operazione macchina

$fl(a) \oplus fl(b) = fl[fl(a) + fl(b)] =$

$= 0,102736 \cdot 10^5$

Potrebbe succedere che anche se $b \neq 0$ si ha $a + b = a$ per questioni di troncamento.

$\Rightarrow$ Devo ordinare i numeri in ordine crescente per non perdere il contributo dei numeri piccoli devono essere verificate entrambe per avere cancellazione numerica.

$\boxed{ES}$ $N = 10$ $t = 5$ arrot

$a = 1,234567 \cdot 10^2$

$b = 0,735721 \cdot 10^2$

Non prevedo cancellazione, la ① non è verificata

$fl(a) = 0,12346 \cdot 10^3$

$fl(b) = 0,73572 \cdot 10^2$

$$\begin{array}{r} 123,46 \quad - \\ 73,572 \\ \hline 49,888 \end{array} \; p$$

$eps = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \Rightarrow 4$ c.s.

$a - b = 0,498846 \cdot 10^2$ $\bar{p}$

$|p - \bar{p}| = 0,000034 = 0,34 \cdot 10^{-4} \Rightarrow 4$ c.s. $\Rightarrow$ no canc.

$\boxed{ES}$ $N = 10$ $t = 6$ arrot.

$a = 0,123456 \cdot 10^2$

$b = 0,123 \cdot 10^2$

$fl(a) \equiv a$ $fl(b) \equiv b$

$|p - \bar{p}| = 0 \Rightarrow$ no canc

CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA

La sottrazione può amplificare gli errori dei dati.

Studiare il condizionamento di un problema significa vedere quanto è sensibile alle perturbazioni sui dati.

Se è molto sensibile si dice che è mal condizionato.

Sul calcolatore non si lavora mai con numeri veri ma con i float.

La somma é mal condizionata se $|x_1 + x_2| \approx 0$, $k \to \infty$
cioé $x_1 \approx -x_2$ - Quindi é la sottrazione di numeri simili.
Se gli operandi sono numeri macchina non ci sono δx_1 e δx_2 quindi non si può avere cancellazione numerica.

Moltiplicazione

É sempre ben condizionata

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \to x_1 x_2$

errore relativo moltiplicaz

infinitesimo di ordine superiore $\to \approx 0$

$$\frac{|(x_1+\delta x_1)(x_2+\delta x_2) - (x_1 x_2)|}{|x_1 x_2|} = \frac{|x_1 \delta x_2 + x_2 \delta x_1 + \delta x_1 \delta x_2|}{|x_1 x_2|} \approx$$

$$\approx \frac{|x_1 \delta x_2 + x_2 \delta x_1|}{|x_1 x_2|} \leq \frac{|\cancel{x_1} \delta x_2|}{|\cancel{x_1} x_2|} + \frac{|\cancel{x_2} \delta x_1|}{|x_1 \cancel{x_2}|} = \left|\frac{\delta x_2}{x_2}\right| + \left|\frac{\delta x_1}{x_1}\right|$$

errore nei dati

Avrei $k_1 = k_2 = 1$

In generale

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sviluppo di Taylor

$$\frac{|f(x+\delta x) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|\cancel{f(x)} + \delta x f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2} f''(x) + \ldots - \cancel{f(x)}|}{|f(x)|} \leq$$

$$\leq |x| \frac{|\delta x|}{|x|} \cdot \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| + |x| \cdot \frac{|\delta x|^2}{2|x|} \cdot \frac{|f''(x)|}{|f(x)|}$$

costante di condizionamento

$\boxed{ES}$ $f(x) = e^x$

$$\frac{|e^{x+\delta x} - e^x|}{|e^x|} = \frac{|\cancel{e^x} + \delta x e^x + \frac{\delta x^2}{2} e^x - \cancel{e^x}|}{e^x} = \frac{|e^x|\left(\delta x + \frac{\delta x^2}{2} + \ldots\right)}{e^x} \approx$$

$$\approx |x| \underbrace{\frac{|\delta x|}{|x|}}$$

costante di condizionamento

moltiplico e divido per $|x|$

errore relativo sui dati

Ben condizionato se x é piccolo

Mal condizionato se x é grande

Se $\delta \approx x^2$ e' errore relativo e' grande.

$$\frac{|f(x+\Delta x, \delta+\Delta\delta) - f(x,\delta)|}{|f(x,\delta)|}$$

Questo problema rimane in tutti e due i casi (algoritmo stabile e non)

$\boxed{\text{ES}}$ $x^2 - 2bx + \varepsilon = 0$ $\quad |\varepsilon| \ll |b|$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\varepsilon}}{2} = b \pm \sqrt{b^2 - \varepsilon}$$

$$\sqrt{b^2 - \varepsilon} \approx b$$

se $b>0$, $b<0$ { ho cancellazione numerica su una delle due soluzioni in entrambi i casi

$$\boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}} \qquad \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Se $b>0$ $\quad x_1 = b + (\sim b)$

$x_2 = \dfrac{\varepsilon}{x_1}$ quella che non va bene la ricavo con la formula

ERRORI

$\boxed{\text{ES}}$ $x \longrightarrow \sin x = \sum_0^{\infty} (-1)^n$ problema analitico $f(x)$

$\Downarrow$ errore 1

$\sum_0^{N} (-1)^n$ problema numerico $f_1(x)$ (non posso andare a ∞ ma devo fermarmi a N)
↳ commetto un errore

ERRORE DEL METODO o errore di troncamento $\{\varepsilon_1 = |f(x) - f_1(x)|\}$

Passando in macchina $x \longrightarrow \bar{x} = fl(x)$

quindi calcolo $f_1(\bar{x})$

errore 2 $\Rightarrow \{\varepsilon_2 = |f_1(x) - f_1(\bar{x})|\}$ dipende dal condizionamento di $f_1(x)$, é grande se é mal. cond.

$\{\varepsilon_3 = |f_1(\bar{x}) - y^*|\}$ dipende dalla stabilità dell'algoritmo

Per l'arrotondamento vale $eps = \frac{|p-\bar{p}|}{|p|} \leq \frac{1}{2} N^{1-t}$

$N = 2 \quad t = 24$ arrotondamento

$eps = \frac{1}{2} 2^{-23} = 2^{-24}$

6) La cancellazione numerica consiste nella perdita di cifre significative dovuta ad operazioni di sottrazione. Si verifica quando le prime cifre delle mantisse dei due numeri sono simili e almeno uno dei due numeri non è un numero macchina.

8) $N = 10 \quad t = 4$ arrot

$eps = \frac{1}{2} N^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0{,}0005$

$\frac{|y^* - fl(\bar{x})|}{|fl(\bar{x})|} = 10^{-1} = 0{,}1 > eps \Rightarrow$ algoritmo instabile

9)

$$\begin{array}{r} 0{,}2987521 \cdot 10^2 \\ 0{,}2985314 \cdot 10^2 \\ \hline 0{,}0002207 \end{array} \qquad t = 4 \qquad \begin{array}{r} 0{,}2988 \; - \\ 0{,}2985 \\ \hline 0{,}0003 \end{array}$$

10) $N = 10 \quad t = 6$ arrot

$eps = \frac{1}{2} N^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$

$a = 21{,}1346897 \rightarrow a = 0{,}211346897 \cdot 10^2 \rightarrow fl(a) = 0{,}211347$

$b = -21{,}1312345 \rightarrow b = -0{,}211312345 \cdot 10^2 \rightarrow fl(b) = -0{,}211312$

$a \oplus b = 0{,}000035$ si è verificata cancellazione numerica.

11) $y = x_1 + x_2 \qquad x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$

Studiare il condizionamento

$$\frac{|\cancel{x_1} + \delta x_1 + \cancel{x_2} + \delta x_2 - \cancel{x_1} - \cancel{x_2}|}{|x_1 + x_2|} = \frac{|\delta x_2 + \delta x_1|}{|x_1 + x_2|} \leq \frac{|\delta x_1|}{|x_1|} \cdot \underbrace{\frac{|x_1|}{|x_1 + x_2|}}_{k_1} + \frac{|\delta x_2|}{|x_2|} \cdot \underbrace{\frac{|x_2|}{|x_1 + x_2|}}_{k_2}$$

con k_1 e k_2 grandi se $|x_1 + x_2| \approx 0 \rightarrow$ mal condizionato se $x_1 \approx -x_2$

18) $a = 112,378 = 0,112378 \cdot 10^3$ $N = 10$ $t = 6$ arrot

$b = -112,256 = -0,112256 \cdot 10^3$

$fl(a) = 0,112378 \cdot 10^3$

$fl(b) = -0,112256 \cdot 10^3$

$a \oplus b = 0,000122 \cdot 10^3$ no cancellazione

19) $N = 10$ $t = 5$ arrot

$a = 0,23372 \cdot 10^{-4}$

$b = -0,23121 \cdot 10^{-4}$

$a \oplus b = 0,00251 \ 10^{-4}$ no cancellazione

20) $N = 10$ $t = 8$ arrot

$eps = \frac{1}{2} N^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$

$fl(1 + eps) > 1$ perché eps é la max precisione con cui lavora il calcolatore.

21) $a = 0,2134517$

$b = 0,2133813$

$N = 10$ $t = 5$

$fl(a) = 0,21345$

$fl(b) = 0,21338$

$a \ominus b = 0,00007$ si ha cancellazione

22) Non si può stabilire corrispondenza biunivoca tra i punti della retta reale e i numeri macchina perché questi ultimi sono finiti, mentre i numeri reali sono infiniti.

23) $a = 86,7654 \cdot 10^2 = 0,867654 \cdot 10^4$

$b = -0,867321 \cdot 10^4$ $N = 10$ $t = 6$

$a \oplus b = 0,000333$ no cancellazione

$eps = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 0,000005$

24) Si può ridurre la cancellazione numerica aumentando lo spazio dedicato alle cifre di mantissa.

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0,7 & 1 \end{bmatrix}$ invariato $\qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 1,69 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} 1,7 \\ 0,5 \end{bmatrix} \rightarrow$ mal condizionato

Sembra che siano le perturbazioni su b il problema, ma in realtà il condizionamento dipende solo da A.

dim: perturbo solo b $\quad Ax = b + \delta b \quad \Rightarrow \quad x + \delta x$ soluzione cambiata

$A(x+\delta x) = b + \delta b$

$\Rightarrow A\delta x = \delta b$ perché $Ax = b$

$\Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b$ perturbazione sul risultato (errore assoluto)

$\frac{\|f(x+\delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq k \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ (errore relativo)

‰

[Def: NORMA DI VETTORE $\|v\|$ dice quanto è grande un vettore

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deve soddisfare

- $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ è la norma 1

$\|v\|_2 = \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}$ è la norma 2

$\|v\|_\infty = \max |x_i|$ è la norma ∞

Per i vettore $\forall$ norma è equivalente ai fini della convergenza. Date due norme qualunque $\|v\|_1$ e $\|v\|_2$

$\exists\, m, M : m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2 \quad \forall v$

Def: NORMA DI MATRICE $\|A\|$

$\|A\|: A \in \mathbb{R}^{n\times n} \rightarrow \|A\| \in \mathbb{R}$ che soddisfa

- $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|cA\| = |c| \cdot \|A\| \quad \forall c \in \mathbb{C}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- compatibili, cioè $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ righe

$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ colonne

$$\frac{\|\delta x\|}{\|A\|\cdot\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|}{\|b\|}$$ ancora vera se divido

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}_{k(A)} \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

il condizionamento dipende solo dalla matrice A, non da b.
k è il numero di cond della matrice, è legato alla norma, non è unico.

Matlab: » c_1 = cond(A, 1)
» c_2 = cond(A)
» c inf = cond(A, inf)

Se $k(A) = 10^1$ e $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \simeq 10^{-15} \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 10^{-14}$ perdo 1 cifra

se $k(A) = 10^6 \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 10^{-9} \rightarrow$ perdo molte più cifre

Non è un problema di cancellazione ma di condizionamento

Metodi diretti - METODO DI GAUSS

Dato un sistema lineare, ne ho uno equivalente se cambio l'ordine delle eq o sostituisco a una di queste una comb lineare delle altre.
il più semplice è il diagonale.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \dots = b_1 \\ \quad \ddots \\ \qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_1/a_{11} \\ \vdots \\ x_n = b_n/a_{nn} \end{array}\right\} x_i = b_i/a_{ii} \quad i = 1, \dots n$$

$\Rightarrow$ n operazioni (costo computazionale)

Poi ho il sistema triangolare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$k=1$ — 1ª colonna

$i = 2, \dots n$ — i = righe → la prima riga non viene modificata

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$a_{ij} = a_{ij} + m_{i1} \cdot a_{1j}$$

$j = 2 \dots n$ → il primo non lo calcolo perché so già che fa zero.

$$b_i = b_i + m_{i1} \cdot b_1$$

ottengo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \overline{a}_{22} \dots & \overline{a}_{2n} \\ 0 & \overline{a}_{32} \dots & \overline{a}_{3n} \\ \vdots & & \\ 0 & \overline{a}_{n2} \dots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \\ \overline{b}_n \end{pmatrix}$$

Ora lavoro sulla seconda colonna

$$m_{32} = -\frac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{22}}$$

$$III \to III + m_{32}\, II$$

$$\overline{\overline{a}}_{32} = \overline{a}_{32} - \frac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{22}} \cdot \overline{a}_{22} = 0$$

$$\overline{\overline{a}}_{3j} = \overline{a}_{3j} - \frac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{22}} \cdot \overline{a}_{2j}$$

poi $m_{42} = -\frac{\overline{a}_{42}}{\overline{a}_{22}} \dots$

$$\overline{\overline{b}}_3 = \overline{b}_3 - \frac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{22}} \cdot \overline{b}_2$$

$k=2$ — 2ª colonna

$i = 3, \dots n$

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}}{a_{22}}$$

$$a_{ij} = a_{ij} + m_{i2} \cdot a_{2j}$$

$$b_i = b_i + m_{i2}\, b_2$$

ottengo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \vdots & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

i = righe

k = colonne

L'algoritmo generale è

$k = 1, \dots, n-1$ (sull'ultima colonna non devo mettere zeri)

$i = k+1, \dots, n$ → inizio dalla seconda riga della prima colonna

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

Se avessi trovato uno zero avrei dovuto scambiare l'ordine delle equazioni. In posizione pivot (a_{kk}) devo mettere l'elemento a_{rk} più grande della colonna, cioè tale che $|a_{rk}| \geq |a_{ik}|$ $\forall$ $i = k, \dots, n$.

Il pivot rientra in tutti gli $m_{ik} = \frac{\quad}{a_{kk}}$ e quindi determina il resto della matrice. Se è piccolo deriva da sottrazione di numeri simili e quindi risente da cancellazione numerica. a_{kk} deve essere preciso e quindi non troppo piccolo.
Nell'algoritmo prima di lavorare sulle singole righe inserisco

» if $|a_{kk}| = \max |a_{ik}|$

(else) pivoting

$i = k+1, \dots n$

Questo è il pivoting parziale.

```
>> A = [        ]
   b = [        ]
   x = A\b
```

→ attiva Gauss con pivoting parziale in automatico su Matlab

ES

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$k = 1$ no pivoting

$$\text{pivot} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→ la prima riga non è stata scambiata

→ scambio la 4^a con la 2^a

Il vettore pivot contiene info sugli scambi di righe effettuati

$m_{31} = -1/2 \qquad m_{41} = 1/2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Questo serve perché

↱ scambio la prima riga con la terza

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

scambia le righe della matrice a cui viene applicata, moltiplicando da sinistra. Se moltiplico da destra scambio le colonne.

Un altro tipo di matrice utile è **M**

$$M_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & 1 \end{pmatrix} = I + m_{43}\, e_4 e_3^T$$

↳ matrice con un solo elemento non nullo

$$M_{43} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ m_{43}\cdot 9+13 & m_{43}\cdot 10+14 & m_{43}\cdot 11+15 & m_{43}\cdot 12+16 \end{pmatrix}$$

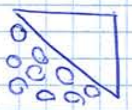
Serve per realizzare le combinazioni lineari tra le righe.

$$M_{n1} \cdots M_{31} M_{21} P_1^I \cdot A \Rightarrow \begin{array}{ccccc} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & & & \\ 0 & x & & & \\ 0 & x & & & \end{array}$$

questo prodotto di matrici (permutazione + moltiplicazioni) crea gli zeri della prima colonna. Applicandolo anche alle colonne successive si ottiene un sistema triangolare

$$M_{n,n-1} P^{n-1} \cdots \Big[\overbrace{M_{n3} \cdots M_{43} P_3}^{M_3} \Big[\overbrace{M_{n2} \cdots M_{42} M_{32} P_2}^{M_2} \Big[\overbrace{M_{n1} \cdots M_{31} M_{21} P_1^I}^{M_1} A = U$$

matrice triangolare superiore



$$\begin{array}{cccc} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} m_{21} & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Casi in cui non si fa il pivoting
- Non si fa il pivoting se A é simmetrica e a diagonale dominante: gli elem sn già giusti $\hookrightarrow |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$
- A simmetrica e definita positiva non richiede pivoting

9/10/14

FATTORIZZAZIONE DI GAUSS

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \det(A) \neq 0$

$\exists L, U, P \; : \quad PA = \underset{\Delta\nabla}{LU}$

usata per risolvere $Ax = b \quad \Rightarrow PAx = Pb \qquad L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

si può usare anche per fare l'inversa di una matrice A^{-1}

$(PA)^{-1} = (LU)^{-1}$

$A^{-1} \cdot P^{-1} = U^{-1} L^{-1}$

$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P$

Def:
- matrice simmetrica $A^T = A$
- diagonale dominante $\forall i \; |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$
- simmetrica definita positiva $\forall x \neq 0 \quad \underbrace{x^T A x}_{\text{numero}} > 0$

FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKI

Se la matrice A é simm def positiva non é nec pivoting $\rightarrow$ P non c'é

$A = LU$

Teo: $\exists L_1 : A = L_1 L_1^T$

si dimezzano i calcoli - il costo computazionale é $n^3/6$

dim: $A = L\overset{\nabla}{U} = L \cdot \overset{\text{diagonale}}{D} U_1$

$(LDU_1) = (LDU_1)^T = U_1^T D^T L^T \qquad \left(A^T = A \text{ perché la matrice é simmetrica} \right)$

$L = U_1^T \rightarrow U_1 = L^T$

$\Rightarrow A = LDL^T$

$\forall y \neq 0 \quad y^T LDL^T y > 0$

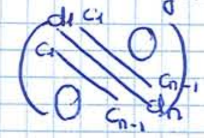
$(L^T y)^T D (L^T y) > 0 \Rightarrow D$ definita positiva

$d_{ii} > 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \exists D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$

$A = LD^{1/2} \cdot D^{1/2} \cdot L^T = L_1 L_1^T$

$L_1 = LD^{1/2}$

$\boxed{ES}$ A tridiagonale, simmetrica, diagonale dominante



non la memorizzo con n^2 elementi quasi tutti nulli.
Prendo 3 vettori per mem le 3 diagonali.

$A = LU$

$\underline{k=1}$ $m_{21} = -\frac{c_1}{d_1}$

$c_1 \Rightarrow c_1 - \frac{c_1}{d_1} d_1 = 0$

$d_2 \Rightarrow d_2 - \frac{c_1}{d_1} c_1 = d_2 - \frac{c_1^2}{d_1} = \bar{d}_2$

$c_2 \Rightarrow c_2 - \frac{c_1}{d_1} \cdot 0 = c_2$ non cambia

$$\rightarrow \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & d_2 & c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_3 & c_3 \\ 0 & 0 & c_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

$\underline{k=2}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \\ 0 & \bar{d}_2 & c_2 & \ddots \\ 0 & 0 & \bar{d}_3 & \ddots \\ 0 & 0 & c_3 & \ddots \end{pmatrix}$$

matrice che ottengo alla fine del secondo passaggio

$m_{32} = -\frac{c_2}{\bar{d}_2}$

$\bar{d}_3 = d_3 - \frac{c_2}{\bar{d}_2} c_2 = d_3 - \frac{c_2^2}{\bar{d}_2}$

$c_2 = c_2 - \frac{c_2}{\bar{d}_2} \bar{d}_2 = 0$

$c_3 = c_3 - \frac{c_2}{\bar{d}_2} \cdot 0 \quad c_3$

$k = 1, \dots n-1$

$d_{k+1} = d_{k+1} - \frac{c_k^2}{d_k}$

le c non cambiano, le d sì $\rightarrow$ nasce una matrice bidiagonale.

$b_{k+1} = b_{k+1} - \frac{c_k b_k}{d_k}$

$4(n-1)$ è il costo computazionale

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dx^{(k+1)} = -Cx^{(k)} + b$$

in $x^{(0)}$ metto quello che voglio, quindi parto dal vettore nullo così nel primo step riduco i calcoli.

Scrivendo il sistema esplicitamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots \qquad = b_n \end{cases}$$

il metodo consiste nel calcolare le nuove $x_i^{(k+1)}$ sulla base delle precedenti $x_i^{(k)}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow Dx^{(k+1)} = -Cx^{(k)} + b$$

13/10/14

Metodo di Jacobi

Condizione suff per $\overset{\text{convergenza}}{\text{Jacobi}}$ $\rightarrow$ $\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ matrice dominante

$$\forall i \quad \frac{\sum |a_{ij}|}{a_{ii}} < 1$$

$$B = -D^{-1}C = -\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & & \frac{a_{1j}}{a_{11}} \\ & \ddots & \\ \frac{a_{nj}}{a_{nn}} & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\max\left(\sum |a_{ij}|\right) = \max \sum_{j=1} a_{ij} + a_{ii}$$

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) < 1$$ al variare della riga

↳ perché è a diagonale dom

poiché $\|B\| > \rho(B)$

$\Rightarrow \rho(B) < 1$

$\Rightarrow$ il metodo di Jacobi è convergente se la matrice è a diagonale dominante.

$\|x - x^{(k)}\| \leq toll \cdot \|x\|$

Però x non lo conosco.
Ma se converge $x^{(k+1)}$ è migliore di $x^{(k)}$, quindi il vero test è $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq toll \cdot \|x^{(k+1)}\|$

$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-1} = 1$

$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty \leq 10^{-1}$?

$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \max\left(\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right|, \left|0 + \frac{1}{4}\right|, \left|\frac{3}{4} - \frac{13}{16}\right|\right) =$

$= \max\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4} \not\leq 10^{-1}$ no!

È necessaria altra iterata

METODO DI GAUSS - SEIDEL

A viene scomposta in C + D diverse dal metodo di Jacobi

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ è triangolare inferiore con diagonale

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$ $D(x)^{k+1} = -Cx^{(k)} + b$

Applicabile se A non è singolare (no zeri su diagonale).
Per la convergenza $\rho(B) < 1$.
Le cond suff sono:
- A diagonale dominante
- A simmetrica definita positiva

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} \dots a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{b_i - \sum\limits^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

→ nella prima metto $x^{(k)}$
→ calcolato prima, uso le nuove appr
→ appr vecchie, non ho ancora calcolato quelle nuove
Ho scomposto la sommatoria in due parti
→ tutte nuove

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 334

Verifico il criterio di Sylvester → se i minori principali sono a det > 0 ⇒ A é simmetrica definita positiva

$\det(A_1) = 3 > 0$

$\det(A_2) = 3(1-\alpha) - 1 = 2 - 3\alpha > 0 \rightarrow \alpha < \frac{2}{3}$

$\det(A) = 2 \cdot (2-3\alpha) + 2(-6) = 4 - 6\alpha + 12 = -8 - 6\alpha > 0$

$\alpha < -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha < -\frac{4}{3}}$ é simm def positiva

G.S. é sicuramente convergente

Sono questi i soli valori per cui é conv?
↳ cond nec. e suff

$\Rightarrow \rho(B) < 1$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -D^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3(1-\alpha)} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{3(1-\alpha)} & \frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3(1-\alpha) & -2/1-\alpha \\ 0 & -1/3(1-\alpha) & -2/1-\alpha \end{pmatrix}$$

B é singolare.

Calcolo autovalori $\lambda_i = 0, 0, \frac{7}{3(1-\alpha)}$

$\rho(B) < 1$

$$\left|\frac{7}{3(1-\alpha)}\right| < 1 \rightarrow \frac{7}{3} < |1-\alpha| \begin{cases} 1-\alpha > \frac{7}{3} \rightarrow \alpha < -\frac{4}{3} \\ 1-\alpha < -\frac{7}{3} \rightarrow \alpha > \frac{10}{3} \end{cases}$$

cond suff

valori in più

il metodo di Jacobi é invece

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & 0 & \frac{2}{1-\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{22} = 0{,}100 \cdot 10^1 - 0{,}110^5 \cdot 0{,}100 \cdot 10^1 = 1 - 10\,000 = -9999 =$
$= -0{,}9999 \cdot 10^4$

$$\begin{array}{r} 0{,}9999 \; + \\ 0{,}0005 \\ \hline 1{,}0004 \end{array}$$

$b_2 = 0{,}200 \cdot 10^1 - 0{,}10^5 \cdot 0{,}100 \cdot 10^1 = 0{,}100 \cdot 10^5$

$x_2 = 1$
$x_1 = 0$

14/10/14

APPROSSIMAZIONE

Scelgo una classe di funzioni in cui cercare la funz approssimante (polinomi, exp...). Con quale criterio, in seguito, scelgo un elemento piuttosto che un altro?
Sono spazi lineari ($\alpha x + \beta y \in$ spazio).
Se il fenomeno ha andam continuo in un intervallo chiuso, approssimo con un polinomio:

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$\Pi_n = \{P_n\}$ è la classe dei polinomi
ha dimensione $\dim \Pi_n = n + 1$

Per teo Weierstrass $\|f - P_N\|_\infty < \varepsilon$ posso appr con polinomio di grado suff elevato.

$\|f - P_N\|_\infty \downarrow \max_{a<x<b} |f - P_N|$

Ci possono però essere funzioni che hanno discontinuità → non appr con polinomio → ricorro a funz razionali

$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$
↳ con zero in *

oppure se la funz è continua ma periodica uso un polinomio trigonometrico.

$$T_N = a_0 + \sum_1^N a_k \cos kx + \sum_1^N b_k \sin kx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 334

Questo è il più forte.

Se conoscessi tutta la funzione e non solo in alcuni punti

$$\min_{f \in F} \left(\max_{a<x<b} |f(x) - f_n(x)| \right)$$ per ogni x dell'intervallo

Per i minimi quadrati in continuo:

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx = \min$$

Si spera che al crescere della dim dello spazio si appr meglio.

$f_n \in \mathbb{F}_n$

$\forall x, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\|f_n(x) - f(x)\|$ devo definire una norma

<u>Def</u>: NORMA DI FUNZIONE

$\| \; \| : f \in \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{F}$ spazio funzionale

è un funzionale (opera su funzioni).

$\| \; \|_1 = \int_a^b |f| dx$

$\| \; \|_2 = \left[\int_a^b f^2 dx \right]^{1/2}$

$\| \; \|_\infty = \max_{a<x<b} |f(x)|$ $\qquad$ se $\to 0$ $\qquad$ convergenza uniforme (tutti x)

<u>Prop</u>: $\|f\| \geq 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$\|f\alpha\| = |\alpha| \|f\|$

$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Non tutte le norme di funzione sono equivalenti.

Se misuro distanza in $\| \; \|_1$ converge ma se misuro magari in $\| \; \|_\infty$ non converge.

$\| \; \|_\infty$ è la più forte, implica le altre.

$\ell_j(x)$: $\ell_j(x_i) = 0 \quad i \neq j$

$\ell_j(x_i) = 1 \quad j = i$

uno per ogni punto

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$\ell_0(x) = \frac{\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}_{\text{soddisfo lo zero}}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} =$$

$$= \frac{\prod_{j\neq 0}(x-x_j)}{\prod_{j\neq 0}(x_0-x_j)}$$

salto x_i

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots\dots(x_i-x_n)} =$$

pol di grado n

$$= \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)} \qquad i = 0, \dots n$$

È il polinomio fondamentale di Lagrange

$$P_n(x) = \sum_0^n \ell_i(x)\, y_i$$

$$= \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \dots + \ell_n(x)y_n$$

$$P_n(x_0) = \underbrace{P_0(x_0)}_{1} y_0 + \underbrace{P_1(x_0)}_{=0} y_1 + \dots + \underbrace{P_n(x_0)}_{=0} y_n = y_0$$

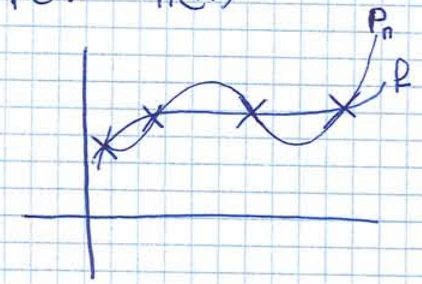
è il polinomio interpolante che nel punto x_0 vale esattamente y_0

$\ell_i(x)$ è la base dello spazio Π_n.

$P_n(x) = \sum c_j \varphi_j(x)$ ↳ base — ogni polinomio può essere scritto a partire dalla base (c.l.)

È una base lagrangiana → origina il valore preciso in certi punti

$f(x) - P_n(x)$?



$f - P_n = 0$ nei punti

al di fuori quanto vale errore?

POLINOMI DI TCHEBYCHEFT

L'errore non si alza tanto

$T_n(x) \equiv \omega_n(x)$ scelgo come nodi gli zeri del polinomio $\omega_n(x)$

$T_n(x) = \cos n\theta$ quindi varia solo tra -1 e 1.

$|\cos n\theta| \leq 1$

$$e^{i\theta n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_0^n \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta =$$

$$= \cos^n\theta + i\sin\theta\cos^{n-1}\theta = \dots = P_n(\cos\theta) + iQ_n(\sin\theta)$$

$\binom{n}{k}$ combinazioni pescando k elementi su n senza mai ripeterli

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\Rightarrow \cos n\theta = P_n(\underbrace{\cos\theta}_{x}) = P_n(x)$$

il coeff di grado max è 2^{n-1} $\cos^n\theta$

Se prendo i nodi come zeri del polinomio:

$T_n(x) = \cos n\theta = 0$

$\cos n\theta = 0 \qquad n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$

$$x_k = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \qquad k = 0, \dots n-1$$

Sono i nodi di Tchebycheft

$\omega_{n+1} = (x-x_0)\dots(x-x_n)$

$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1}$

$\Rightarrow \omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$

Se uso Tchebycheft

$$= \frac{1}{2^n}\frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi(x))$$

$$|E| \leq \frac{1}{2^n}\frac{\overbrace{|T_{n+1}|}^{\leq 1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi(x))$$

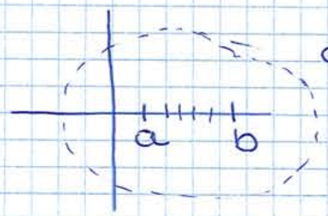
Teo: $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$? $\forall x$ condiz suff.

consideriamo $f(z)$ $z \in \mathbb{C}$

se i poli di $f(z)$ sono abbastanza lontani da a, b allora c'è convergenza.

$\Downarrow$

dist (poli, $[ab]$) $> b-a$

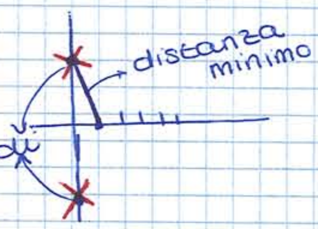


ES

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2+2)}$$

$x_0 = 0{,}5$ $x_1 = 0{,}75$ $x_2 = 1$

con un numero di nodi sempre > poli



$\|f - P_n\|_\infty \to 0$

$\lim f(x) - P_n(x) = 0$ $\forall x$?

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z^2+2)}$$

$z^2 + 2 = 0 \to z = \pm i\sqrt{2}$

$z = 0$ no! perché $\exists \lim \frac{\sin z}{z} = 1 \to z = 0$ non è un polo

$d([a,b], i\sqrt{2}) = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow$ converge aggiungendo nodi

su $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \Rightarrow b-a = \frac{3}{2} = d \Rightarrow$ non so se converge o no

Def: $f \in C^1[ab] \Rightarrow$ convergenza con Tchebychef

ES $f(x) = \cos x$ con $0{,}3$, $0{,}4$ $0{,}5$ $0{,}6$

calcolare il valore del polinomio in $x = 0{,}44$ e errore

$\Rightarrow$ grado 3

$$P_3(x) = \sum_0^3 \ell_i(x) \cos x_i$$

$$\ell_0(x) = \frac{(x-0{,}4)(x-0{,}5)(x-0{,}6)}{(0{,}3-0{,}4)(0{,}3-0{,}5)(0{,}3-0{,}6)}$$

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{8} + 3}{2}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3}{2}$$

Vado a interpolare su questi nodi

$$P_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} \dots \qquad P_1(t) = \dots \qquad P_2(t) = \dots$$

$$f(t_0) = \sqrt{1+t_0}$$
$$f(t_1) = \sqrt{1+t_1}$$
$$f(t_2) = \sqrt{1+t_2}$$

$$P_2 = \sum_0^2 \ell_i(t)\, f(t_i)$$

→ Stimare l'errore nel punto 1,7

$$E(1{,}7) = \frac{T_3(1{,}7)}{2^2} \cdot \frac{1}{3!} f'''(\xi(1{,}7)) \qquad \text{con } T_3 = 2^2 \cos^3\theta \dots$$
$$\omega = (x - x_0) \dots$$

$$|E(1{,}7)| \le \frac{T_3(1{,}7)}{4} \cdot \frac{1}{6} \max_{1 \le x \le 2} |f'''(x)|$$

dato che

$$f = \sqrt{1+x}$$
$$f' = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$
$$f'' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$$
$$f''' = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

$$\frac{3}{8} \cdot 2^{-5/2}$$

Abbiamo in questo modo una stima dell'errore (sempre pessimistica)

DIFFERENZE DIVISE (DI NEWTON)

$x_i, y_i \qquad y_i = f(x_i)$

chiamo differenza divisa di ordine 1

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

e quindi

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

la differenza di ordine 2 e' invece

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 334

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''}{2!}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n f^n(x_0)}{n!} + (x-x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Abbiamo trovato il polinomio di Taylor che é un caso particolare di Newton calcolato in un punto.

$\boxed{ES}$ $f(0) = 1$ $f(1) = 1$ $f'(1) = 2$ $f''(1) = 0$ $f(2) = 3$

Punto	f(x)				
0	1				
1	1	0			
1	1	2	$\frac{2-0}{1-0} = 2$		
1	1	2	$0/2! = 0$	$\frac{0-2}{1-0} = -2$	
2	3	2	$\frac{2-2}{2-1} = 0$	$\frac{0-0}{2-1} = 0$	$\frac{0+2}{2-0} = 1$

Gli elementi sulla diagonale servono per scrivere il polinomio

$$P_4(x) = 1 + (x-0)\cdot 0 + (x-0)(x-1)\cdot 2 + (x-0)(x-1)(x-1)(-2) +$$
$$+ (x-0)(x-1)(x-1)(x-1)\cdot 1$$

É una combinazione lineare di

$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$

$\boxed{ES}$ $f(1) = 2$ $f'(1) = 0$ $f(2) = 3$ $f'(2) = 1$
$f'''(2) = 0$ $f(3) = 1$

1	2					
1	2	0				
2	3	1	1			
2	3	1	0	-1		
2	3	1	0	0	1	
3	1	-2	-3	-3	$-3/2$	$-5/4$

Prendo gli elementi sulla diagonale

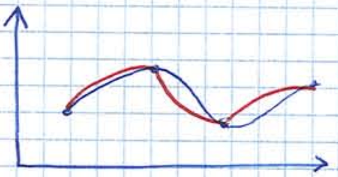
$$P_5(x) = 2 + 0(x-1) + 1(x-1)^2 - 1(x-1)^2(x-2) + (x-1)^2(x-2)^2 +$$
$$-\frac{5}{4}(x-1)^2(x-2)^3$$

$$E_5(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)\cdot f[x,1,1,2,2,2,3]\cdot \frac{f^{VI}(\xi(x))}{6!}$$

se $f \in C^6$

→ formule di derivazione numerica

Le splines sono polinomiali a tratti, archi di cubiche.



così non è continua la derivata

Quindi chiedo che abbia anche derivata seconda continua

Def: data una partizione di $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \dots x_N = b$ in N sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$

di ampiezza $h_i = x_{i+1} - x_i$

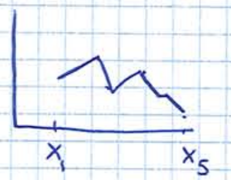
Una spline di ordine d S_d è una polinomiale a tratti tale che in ogni $[x_{i-1}, x_i]$ S_d è un polinomio di grado esattamente d e su tutto $[a b]$ $S_d \in C^{d-1}[a,b]$

$\Rightarrow S_d(x_i^-) = S_d(x_i^+)$ $\quad i = 1, \dots N-1$ è continua

$\Rightarrow S_d^{(k)}(x_i^-) = S_d^{(k)}(x_i^+)$ $\quad k = 0, \dots d-1$

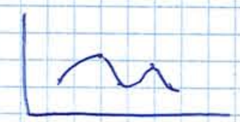
$\boxed{ES}$ $d = 1$ unione rette

deve essere continua $\in C^0[ab]$



$d = 2$ unione archi parabole

deve essere $C^1 \rightarrow$ stessa derivata prima



Abbiamo dei punti e vogliamo costruire la spline.

$S_3(x): a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad [x_{i-1}, x_i]$

N sottointervalli $\Rightarrow 4N$ parametri da determinare

Deve essere interpolante $\quad S_3(x_i) = f(x_i) \quad N+1$ cond

$S_3^{(k)}(x_i^-) = S_3^{(k)}(x_i^+) \quad k = 0, 1, 2$

$i = 1 \dots N-1$

$3(N-1)$ condiz

$$- \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})\Big] (x - x_{i-1}) + y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \qquad i = 1 \ldots N$$

N espressioni per ogni sottointervallo

Devo trovare le M (le continuità sono già imposte, sfrutto continuità derivata prima).

$S_3'(x_i^-) = S_3'(x_i^+) \qquad i = 1 \ldots n-1$ in ogni equazione ho 3 incognite

$\quad \| \qquad\qquad \|$

$M_{i-1}, M_i \qquad M_i, M_{i+1}$

È un'eq lineare

$$\frac{-3(x_1 - x_0)^2 M_0 + 3(x - x_0)^2 M_1}{6h_1} + \ldots = \frac{-3(x_2 - x_1)^2 M_1 + 3(x_1 - x_1)^2 M_2}{6h_2} + \ldots$$

In generale

$$h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) M_i + h_{i+1} M_{i+1} = \ldots$$

La matrice dei coeff è

$$\begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{M_0} \\ \vdots \\ \cancel{M_N} \end{pmatrix}$$

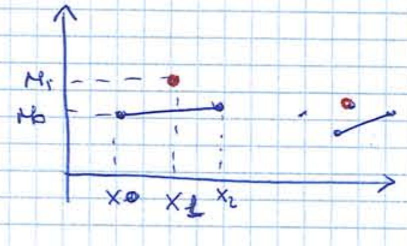
se la spline è naturale a priori sono zero
⇓
risolvibile

le eq sono $N-1$ ma ci sono $N+1$ incognite

⇒ 2 condizioni in più sugli estremi

Not a knot

Ho il sistema di $N-1$ eq in $N+1$ inc.



Ignora il nodo 1 e il penultimo ⇒ sistema spareggiato $N-3$ e $N-1$

però aggiungo

$$S_3(x_1) = y_1$$

$$S_3(x_{N-1}) = y_{N-1}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 334

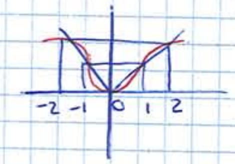
$$S'' = \begin{cases} x + 1 \\ -x + 1 \end{cases}$$

$S''(0^-) = 1 \qquad S''(0^+) = 1 \qquad$ continua $\forall k$

$\Rightarrow$ $k = 1$ è una spline

$\boxed{ES}$

$f(x) = |x| \qquad [-2, 2]$



Interpolare su 5 nodi equidistanti.

$\Rightarrow$ Polinomio di interpolazione di grado 4 con Newton

-2	2				
-1	1	-1			
0	0	-1	0		
1	1	1	1	$1/3$	
2	2	1	0	$-1/3$	$-1/6$

$$P_4 = 2 - (x+2) + \frac{1}{3}(x+2)(x+1)x - \frac{1}{6}(x+2)x(x^2-1)$$

$$P_4 = \frac{7}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^4$$

$\Rightarrow$ Spline naturale

$\boxed{\text{PAG 158}}$

M_0, M_1, M_2, M_3, M_4

$M_i = S''(x_i)$

$M_0 = M_4 = 0$

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 = 0 \\ M_1 + 4M_2 + M_3 = 12 \\ M_2 + 4M_3 = 0 \end{cases}$$

$= 6\left(\frac{0-1}{1} - \frac{1-2}{1} - \frac{1}{6}0\right) = -1 - (-1) = 0$

$6\left(\frac{1-0}{1} - \frac{0-1}{1} \cdot 1 + 1\right) = 12$

$6\left(\frac{2-1}{1} - \frac{1-0}{1} - 0\right) = 6(1-1) = 0$

In $[1, 2]$

$$S_3 = -\frac{(2-x)^3}{7} + 2(x-1) + 8\,\frac{2-x}{7}$$

$\Rightarrow C_0 \Rightarrow c_0 = e^{C_0}$

$c_1 =$

$y = 0{,}343\, e^{0{,}685x}$

Adottando il modello $y = c_0 x^{c_1}$

$\ln y = \ln c_0 + \underbrace{\ln x^{c_1}}_{c_1 \ln x}$

$Y = C_0 + c_1 X$

$\ln x = X$	0	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 4$	$\ln 5$
$\ln y = Y$	$\ln 0{,}5$	$\ln 1{,}7$	....		

$$\begin{pmatrix} 5 & 4{,}79 \\ 4{,}79 & 6{,}21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}93 \\ 7{,}56 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema ricavo c_0 e c_1

$\Rightarrow y = 0{,}5\, x^{1{,}75}$

Quale dei due è meglio?

Guardo la somma dei minimi quadrati.

$\boxed{ES}$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

$y = c_0 + c_1 \sin 2\pi x + c_2 \cos 2\pi x$

cambia la matrice $\Rightarrow$ sistema 3×3

$$\varepsilon^2 = \sum_0^4 [y_i - (c_0 + c_1 \sin 2\pi x_i + c_2 \cos 2\pi x_i)]^2 \quad \min$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_0} = 2\sum_0^4 [\quad](-1) = 0$$

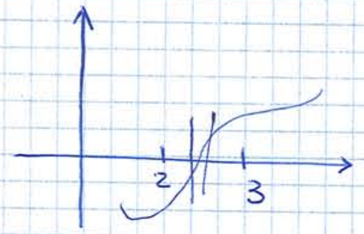
$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_1} = 2\sum [\quad](-\sin 2\pi x_i) = 0$$

Se la derivata è piccola ha questo andamento

è vicino a una radice doppia → sono difficili da trovare.

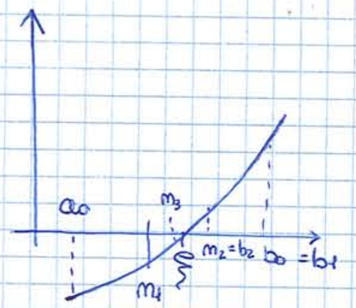
METODI ITERATIVI PER RISOLVERE EQ. NON LINEARI

Metodo di bisezione



28/10/14

ξ vera soluzione



$$m_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$m_1 \sim \xi$$

$|e_1| = |\xi - m_1| < \frac{b_0 - a_0}{2}$

se sono uguali vuol dire che la radice vera non si trova in questo sottointervallo

$f(a_0) \cdot f(m_1) > 0$ confronto i segni per individuare la radice

$\Rightarrow [m_1, b_0] = [a_1, b_1]$ nella nuova iterata avrò $a_1 = m_1$ $b_1 = b_0$

$$m_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \sim \xi$$

metà di $[a_1, b_1]$

$$|e_2| = \left| m_2 - \xi \right| < \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

$f(a_1) \cdot f(m_2) < 0$ hanno segno diverso → la radice si trova in questo sottointervallo

$a_2 = a_1$ $\quad b_2 = m_2$

$$m_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$$|e_3| = |m_3 - \xi| < \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^3}$$

...

$\Rightarrow$ Si moltiplica per p il num di dec. corr. a ogni iterata.

Il metodo di bisezione è lineare e la costante C vale $\frac{1}{2}$.

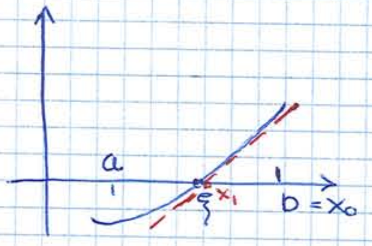
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\xi - x_{n+1}|}{|\xi - x_n|^p} = \text{cost}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}}{\left(\frac{b_0-a_0}{2^n}\right)^p_{p=1}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p=1 \qquad C=\frac{1}{2}<1}.$$

Dimezzo l'errore a ogni iterata.

METODI DI LINEARIZZAZIONE

Ho funzione di cui cerco lo zero



Linearizzo localmente f $\rightarrow$ appr con retta nell'intervallo

Scelgo retta tangente a f in a o in b

Metodo delle tangenti / Newton - Raphson

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$ retta tangente in x_0

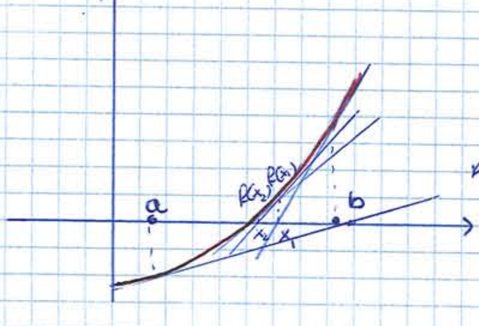
il suo zero è

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Ora cerco tangente in $(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) = 0$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2$$



se avessi preso l'altro estremo sarei andata subito fuori dall'intervallo [ab]

$x_n \to \xi \Rightarrow \eta \to \xi$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim \frac{|f''(\eta)|}{|2f'(x_n)|} = \underbrace{\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right|}_{\text{numero}}$$

$f'(\xi) \neq 0$ e $f''(\xi) \neq 0 \Rightarrow$ il metodo ha ordine 2

- se $f'(\xi) = 0$ la radice è doppia
  sia f che f' si annullano
  $\lim = \infty \Rightarrow$ è di ordine inferiore a 2
- se $f''(\xi) = 0$ non si annulla derivata prima
  $\lim = 0 \Rightarrow$ è di ordine superiore a 2

Per dimostrare quando converge guardo quando errore $\to 0$

dim:

$$|e_{n+1}| = |e_n|^2 \cdot \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}\right|$$

se $\left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right| \leq M \quad \forall x \in I_\xi$ rapporto limitato in intorno di ξ

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|^2 \cdot \frac{1}{2} M = |e_n|^2 \cdot K$$

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n|^2 K \\ &\leq (|e_{n-1}|^2 K)^2 K = |e_{n-1}|^4 K^3 \\ &\leq (|e_{n-2}|^2 K)^4 K^3 = |e_{n-2}|^8 K^7 \\ &\ \ \dots \\ &\leq |e_0 K|^{2n+1} \cdot \frac{1}{K} = |e_0 K|^{2n+1} \cdot \frac{1}{K} \end{aligned}$$

converge quando $\lim_{n\to\infty} |e_0 K|^{2n+1} \cdot \frac{1}{K} \to 0$ se $e_0 K < 1$

→ Se e_0 è piccolo converge e se c'è la condizione sulle derivate.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

se $f \in C^2$ se $f'(\xi) \neq 0$ e $f''(\xi) \neq 0 \Rightarrow$ ordine 2

Suppongo che $f(\xi) = 0 \quad f'(\xi) = 0 \dots f^{(\mu-1)}(\xi) = 0$

radice di molteplicità μ

30/10/14

METODO DI NEWTON

Se non conosco quante derivate si annullano (μ):

$$f(x) = (x-\xi)^{\mu} h(x) \quad : \quad h(\xi) \neq 0$$

$$f'(x) = \mu (x-\xi)^{\mu-1} h(x) + (x-\xi)^{\mu} h'(x)$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\xi)^{\mu} h}{(x-\xi)^{\mu-1}\left[\mu h(x) + (x-\xi) h'(x)\right]}$$

Newton su $g = f/f'$ $\rightarrow$ ordine 2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)/f'(x_n)}{\left(f'(x_n)^2 - f(x_n) f''(x_n)\right)/\left[f'(x_n)\right]^2}$$

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f$$

$$y'' = -p(x) \underset{f'(x_n)}{y'} - q(x) y + \underset{f(x_n)}{f}$$

Test tolleranza

1) $f(\xi) = 0$

$|f(x_n)| < f_{toll}$

non funziona se nello zero la derivata è molto grande.

2) $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < x_{toll}$

facilmente superabile se la radice è quasi doppia

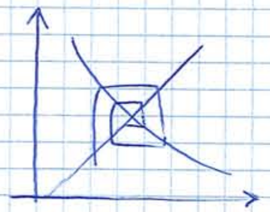
Metodo iterativo generale / DEL PUNTO FISSO

Costruito di volta in volta

$f(x) = 0$

$\Rightarrow x = g(x)$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$



$\Rightarrow |g'| < 1$ converge

ordine di convergenza del metodo $x_{n+1} = g(x_n)$ è α
se la prima derivata di g che non si annulla in ξ è "α".

se $g'(\xi) \neq 0 \Rightarrow$ ordine 1

dim:

$$e_{n+1} = \xi - x_{n+1} = g(\xi) - g(x_n) = g(\xi) - \left[g(\xi) + (\xi + x_n)\, g'(\xi) + \frac{(x_n-\xi)^2}{2} g''(\xi) + \dots + \frac{(x_n-\xi)^l}{l!} g^{l}(\eta)\right]$$

$$e_{n+1} = -\left[e_n\, g'(\xi) + \frac{e_n^2}{2} g''(\xi)\right]$$

se $g'(\xi) \neq 0$

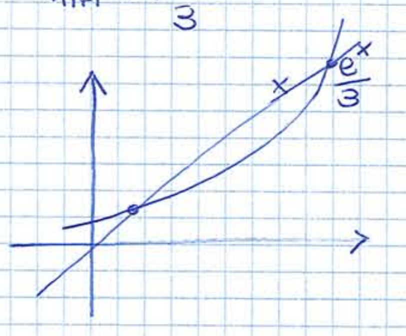
$$\lim \left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = g'(\xi) \to \text{ordine } 1$$

$\boxed{ES}$

$e^x - 3x = 0$ con punto fisso

$x = \frac{e^x}{3}$

$x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{3}$



ho due radici
$0 < \xi_1 < 1$
$1 < \xi_2 < 2$

vedo se la conv è soddi verificando la condizione sulla derivata prima

$\Rightarrow |g'| = \left|\frac{e^x}{3}\right| < 1$

$e^x < 3 \to x < \ln 3 = 1,1..$ per ξ_2 non va bene

Converge più rapidamente del secondo

$|e_{n+1}| \le |e_0| m^n$

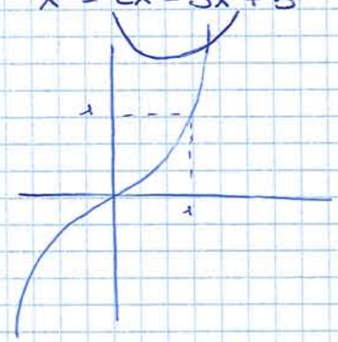
↳ più piccolo nel terzo caso

$\boxed{\text{ES}}$ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$

- bisezione appr un centesimo

Guardo graficamente

$x^3 = 2x^2 - 3x + 5$



$\xi \in (1,2)$

$m_1 = 1,5$

$f(1,5)\, f(1) \gtrless 0\ ?$

$m_2 = 1,75$

quante iterazioni devo fare?

$$e_n < \frac{b_0 - a_0}{2^n} < 0,01$$

$$\frac{1}{2^n} < 0,01 \Rightarrow 2^n > \frac{1}{0,01} \rightarrow n = 6,..$$

- Newton

$x^2 - A = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - A)}{2x_n}$$

$x_0 = A$

$A = 2 \quad x_0 = 2 \quad x_1 = 1,5 \quad x_2 = 1,42$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)} = \sqrt{\rho(A)^2}$

$A^T = A$ se simmetrica

$\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

$A^2 = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$

ρ = max autovalori di A

$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (4-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 + 16 - 8\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

$\lambda_{1,2} = 5 ; 3$

$\rho = \max(\lambda_1, \lambda_2) = 5$

$\Rightarrow \|A\|_2 = 5$

$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 16 - 1 = 15$

calcolo autovalori $\begin{pmatrix} \frac{4}{15}-\lambda & 1/15 \\ 1/15 & \frac{4}{15}-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{4}{15}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{225} = 0$

$\frac{16}{225} + \lambda^2 - \frac{8}{15}\lambda - \frac{1}{225} = 0$

$\lambda_1 = \frac{1}{3} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{5}$

$\rho = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{3}$

$K = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix}$

Gauss pivoting parziale

23/10/14

$$\left\| \int_a^b \frac{p''}{(1+p')^{3/2}} \right\| = \text{curvatura di funzioni}$$

Se si costruisce la spline cubica S_3 interpolata su $f \in C^2$ e che soddisfa una delle quattro condizioni allora:

$\| S_3^p - f^p(x) \| = o(h^{2-p})$

h è il max $|x_i - x_{i-1}|$ e $p = 0, 1, 2$ (derivate)

In questo caso maggiore è il grado della funzione spline, maggiore è la convergenza del polinomio rispetto alla funzione da interpolare.
Infatti non solo $S_3 \to f$ ma anche le sue derivate prima e seconda lo fanno se $h \to 0$ (aumentando il numero di punti).
In generale non si usa il metodo dell'interpolazione nel caso di dati sperimentali perché, essendo affetti da errore, la funzione non deve passare necessariamente nei punti ma basta che approssimi con il minor scarto.

SCARTO QUADRATICO MEDIO E MINIMI QUADRATI

Data una serie n-esima di dati (x_i, y_i) $i = 0, \dots n$ si definisce una funzione $f_n(x)$ tale che:

$f_n(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$

nodi non distinti

$\sum_{i=0}^{m} [f_n(x_i) - y_i]^2$ sia minima

$m > n$ può darsi che f_n non abbia corrispondenza biunivoca: ad un valore di x_i possono corrispondere più valori y_i dato che questo può essere affetto da errori.

Dobbiamo quindi ricavare da (x_i, y_i) [x_i con $i = 0, \dots n$ e y_i con $i = 0, \dots m$], le φ_i (con $i = 0, \dots n$) in modo tale che

$$f_n = \sum_0^n c_k \varphi_k : \underbrace{\sum^m (f_n(x_i) - y_i)^2}_{\varepsilon^2} \text{ sia minimo}$$

Affinché ε^2 sia minimo deve essere $\frac{d\varepsilon^2}{dc_{\cancel{0}k}} = 0$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_0} = 2 \sum_0^m [f_n(x_i) - y_i] \cdot \underbrace{\frac{\partial f_n(x_i)}{\partial c_0}}_{= \varphi_0(x_i)}$$

perché $f_n(x_i) = c_0\varphi_0 + \dots + c_n\varphi_n$ ma la derivata è riferita a c_0 quindi rimane solo $\varphi_0(x_i)$

Si vede che $B = A^T \cdot A$. Inoltre essendo le colonne di A linearmente indipendenti, allora la combinazione lineare delle colonne di A (cioè il prodotto $A^T \cdot A$) sarà a sua volta una combinazione lineare e quindi B è simmetrica definita positiva. È necessario però che $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$ siano linearmente indipendenti e quindi siano di ordine diverso (se φ_i e φ_k sono polinomi di grado 2 non sono l.i. perché avrebbero la stessa base $\Rightarrow$ colonne non l.i.).

Se considero come φ_i delle funzioni polinomiali:

$f_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \dots + c_n x^n$

e voglio trovare i c_i in modo da soddisfare i minimi quadrati:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_0} = 2 \sum_0^m \left[\sum_0^n c_k x_i^k - y_i \right] \cdot 1 = 0 \qquad \text{poiché } \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial c_0} = 1 \\ \dfrac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_1} = 2 \sum_0^m \left[\sum_0^n c_k x_i^k - y_i \right] x_i = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_n} = 2 \sum_0^m \left[\sum_0^n c_k x_i^k - y_i \right] x_i^n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_0^n c_k \left[\sum_0^m x_i^k \cdot 1 \right] = \sum_0^m y_i \cdot 1 \\ \sum_0^n c_k \left[\sum_0^m x_i^k \cdot x_i \right] = \sum_0^m y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_0^n c_k \left[\sum_0^m x_i^k x_i^n \right] = \sum_0^m y_i x_i^n \end{cases}$$

$\boxed{\text{ES}}$ Dati i punti $(0,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,0)$ $(3,-1)$ calcolare $f_n(x) = c_0 + c_1 x$ per avere minimi quadrati

Ho 4 punti x_i $(0,1,2,3)$, è di primo ordine $\rightarrow$ ho solo 2 incognite, c_0 e c_1. B sarà 2×2 $(n=1 \quad m=4)$

$$B = \begin{pmatrix} m+1 & \sum_0^m x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3+2+1 \\ 3+2+1 & 9+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sum_0^m y_i \\ \sum_0^m y_i x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+3+0-1 \\ 1\cdot0 + 1\cdot2 + 1\cdot3 + 2\cdot0 + (-1)3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$BC = D \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 \cong -1 \\ c_0 \cong 3 \end{matrix}$$

$f_n(x) \cong 3 - x$

Se f_n di grado 2 B sarebbe 3×3, B è di ordine $n+1$ dove n è l'ordine della funzione $f_n(x)$

Trascuro l'errore $O(h^2)$ e ricavo soluz appr x_1

la matrice del sistema è la Jacobiana (derivate parziali)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ -f_n(x^{(0)}) \end{pmatrix}$$

vettore delle incognite, è $x_1^{(1)}$ e non ξ_1 perché ho trascurato $O(h^2)$

$$J|_{x_0} (x^{(1)} - x^{(0)}) = -f(x^{(0)})$$

L'algoritmo è

$x^{(0)}$

$J^{(0)}, \quad f(x^{(0)})$

poi risolvo $J^0 h^{(0)} = -f(x^0)$

$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}$

$J^{(1)} h^{(1)} = -f(x^1)$

$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)}$

...

$(x^1 - x^0) = -J_{x_0}^{-1} f(x^{(0)})$ analogo di $\frac{f}{f'}$

Esiste anche l'analogo del punto fisso

$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$

$\boxed{\text{ES}}$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & \sin x_2 \\ -\cos x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risolvo $J^{(n)} h^{(n)} = -f(x^n)$

$x^{(n+1)} = x^{(n)} + h^{(n)}$

Vedo graficamente dove cade la radice

$x_2 = \frac{\sin x_1}{2}$

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos 1 - 1 \\ 1 - \sin 1 \end{pmatrix}$$

Risolvo $J^{(0)} h^{(0)} = - f^{(0)} \Rightarrow h^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ ? \end{pmatrix}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}720 \\ 0{,}775 \end{pmatrix}$$

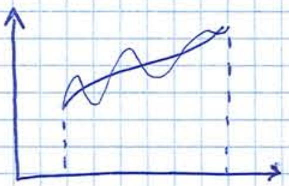
Tutte le funzioni $f_0, f_1 \dots f_n$ devono essere C^2

- Se le funzioni non fossero derivabili ho delle varianti: nella J invece che mettere le derivate metto i rapporti incrementali tra punti vicini.
- Se il sistema è di grandi dimensioni, J è pesante da calcolare: la mantengo ferma per un po' di iterazioni poi la aggiorno.

» fzero (f', [ab])
solve

CALCOLO DI INTEGRALI

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Formule di quadratura interpolatoria su n nodi

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)$$ somma pesata di vari punti di f

Conosco la f in punti distinti, costruisco il polinomio interpolante e ne calcolo l'integrale.

$(x_i, f(x_i)) \quad i = 1, \dots, n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) f(x_i) + \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi_{(x)})$$

nella forma di Lagrange

$$\int_a^b f = \sum_1^n \int_a^b l_i(x) f(x_i) + \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi(x))\,dx$$

Teo: $\exists\, \eta : \int_a^b fg = f(\eta) \int_a^b g$

$g > 0$ sempre

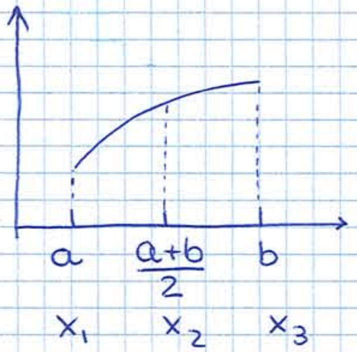
lo applico all'errore perché $\overbrace{(x-a)(x-b)}^{g} < 0$ sempre

$$R_2 = f''(\eta) \cdot \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) = -\frac{f''(\eta)}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{6}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$Err = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

FORMULA DI SIMPSON



3 nodi equidistanti

Faccio il polinomio, che è una parabola

$$\underbrace{\int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}}_{l_0} f(a) + \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +$$

$$+ \int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)} f(b) + \int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{3!} f'''(\xi(x))\,dx$$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{3 \cdot 2}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{90} f^{(IV)}(\eta)$$

Nelle formule di N-C il gdp è $n-1$ se n è pari, è n se n è dispari.

$\Rightarrow$ Conviene usare quelle con n dispari

$$\int_a^b x^2 = \frac{b^3-a^3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{b-a}{2}\left[a^2+b^2\right]$$

no → la formula integra esattamente solo fino a polinomi di grado 1. NON ha gdp = 2

Analizzando gli errori

$$Q_n(f) = \sum_1^n w_i f(x_i)$$

$$|I - Q_2| = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \qquad \text{trapezi}$$

$$|I - Q_3| = -\frac{f^{IV}(\xi)}{90}(b-a)^5 \qquad \text{Simpson}$$

$$\lim_{n\to\infty} |I - Q_n| = 0 \,?$$

Aggiungendo nodi il gdp aumenta? errore diminuisce?

condizione sufficiente per la convergenza è

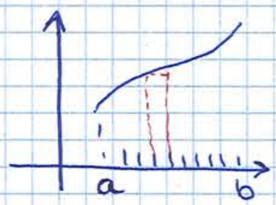
$$\sum_1^n |w_i| \leq \text{cost non dipendente da } n$$

⇒ la successione delle formule di Newton - Cotes non converge (la cond non è soddisfatta), diverge.

Formula dei trapezi composta

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_0^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{ampiezza dei sottointervalli}$$



Suddivido in sottointervalli poiché l'integrale è additivo.

$$= \sum_0^{N-1}\left[\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_i)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\Big(\underbrace{f(x_0) + f(x_N)}_{\text{compaiono solo una volta}}\Big) + \frac{h}{2}\cdot 2\underbrace{\sum_1^{N-1} f(x_i)}_{\text{due volte}} - \sum_0^{N-1}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

$$Err = -\frac{h^3}{12}\sum_0^{N-1} f''(\xi_i)$$

$$\text{Se } g \in C^0([a,b]) \Rightarrow \exists \xi : g(\xi) = \frac{\sum_1^N g(x_i)}{N}$$

↑ media

$$\Rightarrow \exists \eta : -\frac{h^3}{12} N f''(\eta)$$

$$Err = -\frac{(b-a)^3}{N^3\cdot 12}\cancel{N} f''(\eta) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$$

Metodo dei polinomi ortogonali - FORMULE GAUSSIANE

zeri = nodi

$\{P_n\}$ $n = 0, 1 \dots$ classe di pol. ortogonali in $[ab]$ rispetto a una funzione peso $p(x)$ se:

$$\int_a^b p(x) P_n P_m = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

In $[-1, 1]$ $p(x) \equiv 1$

$$\int_0^1 P_n P_m = \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases} \qquad \text{Legendre}$$

$P_0 = K_{0,0}$

$P_1 = K_{1,0} + K_{1,1} x^1$

$P_n = K_{n,n} x^n + K_{n-1} x^{n-1}$

Per ortogonalizzare il polinomio

$$\int_{-1}^1 P_0 P_1 = 0 = \int_{-1}^1 K_{0,0} \cdot (K_{1,0} + K_{1,1} x) = 0$$

$$K_{0,0}(2K_{1,0} + 0) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \forall K_{0,0} \\ K_{1,0} = 0 \end{matrix}$$

$\forall K_{1,1}$

Il primo polinomio ha $\forall K_{0,0}$, il secondo è $P_1 = K_{1,1} x$

P_2 ha $K_{2,2}$ qualunque e poi altri coeff.

Per normalizzarli posso imporre

$$\int_{-1}^1 P_0 P_1 = 1 \qquad K_{0,0} \text{ in modo univoco}$$

La funzione peso in generale è

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \qquad [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n P_m = \begin{cases} \neq 0 & n = m \\ = 0 & n \neq m \end{cases} \qquad \text{Jacobi}$$

se $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ Legendre

2) $? = k_2(A) \quad = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(5-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow 5 + \lambda^2 - \lambda - 5\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$\rho = 3 + 2\sqrt{2}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho} = 2{,}41$

(A^{-1}) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$(5-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3 + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow k_2 = \|A\|_2^2 = 5{,}81$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad ? = k_1(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$\|A\|_1 = 6$ massimo della somma dei valori assoluti delle colonne

$\det A = 3 \cdot 2 = 6$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_1 = 2$

$k_1 = 12$

$\sum_{i}^{n} |w_i| \leq C$ per le Gaussiane

$\boxed{ES}$ $\int_{-1}^{1} \sin(3x+1)\,dx$

$p(x) = 1$ non ci sono singolarità

I polinomi ortogonali a $p(x) = 1$ sono quelli di Legendre. $\alpha = \beta = 0$

$\simeq \sum w_i \sin(3x_i + 1)$

» [z,p] = plege(n)

Se l'intervallo non è $[-1,1]$:

$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\,(1+x^5)\,dx$

guardo le singolarità agli estremi → è debolmente singolare perché la derivata prima non è continua in zero.
Non uso un polinomio ma le formule pesate.
Lo mando in $[-1,1]$ con trasformazione

$t = \alpha x + \beta$

$\begin{cases} -1 = \beta \\ 1 = \alpha + \beta \end{cases}$ $\alpha = 2$, $\beta = -1$

$t = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{t+1}{2}$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{t+1}{2}} \cdot \left(1 + \left(\frac{t+1}{2}\right)^5\right) \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1}\,(P_5(t))\,dt$

$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ sono i pesi di Jacobi

$P_n^{(0,1/2)}(t)$ in base al peso $\sqrt{t+1}$ (non c'è $(1-x)^\alpha$)

$2n - 1 \geq 5 \rightarrow n \geq 3$

Nodi di $P_3^{(0,1/2)}$

$\boxed{ES}$ $\int_{-1}^{1} \sqrt{3+2x}\,(x^3+1)\,dx$

?= formula da usare

$3 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \notin [-1,1]$ è regolare nell'intervallo

$\Rightarrow$ Legendre $p(x) = 1$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE

- Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$x \geq a$

$y' = A(x)y + b(x)$ lineare

$$\left.\begin{array}{l} y' = A(x)y^2 + b(x) \\ y' = A(x)\sin y + b(x) \end{array}\right\} \text{non lineare}$$

un'eq di ordine superiore al primo si può ricondurre a un sistema del primo.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ $\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y'(a) = y'_0 \end{cases}$ due condiz iniziali

$z_1 = y \qquad z_2 = y'$

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 + p(x)z_2 + q(x)z_1 = f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1(a) = y_0 \\ z_2(a) = y'_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_1 = f_1(x, z_1, z_2) \\ z'_2 = f_2(x, z_1, z_2) \\ z_1(a) = z_{10} \\ z_2(a) = z_{20} \end{cases}$$

$y' = f(x, y)$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, z_1, z_2) \\ f_2(x, z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

vettore di incognite

- Problemi al contorno

$$\begin{cases} f(x, y', y'') = 0 & a < x < b \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ matrice simmetrica

$? = K_\infty$

$K_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

$\|A\|_\infty = 5$

$\det A = 1 - 16 = -15$

$A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$K_\infty = \frac{5}{3}$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $? = K_1 = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$

$\|A\|_1 = 3$

$\det A = -1 + 2 = 1$

$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_1 = 3$

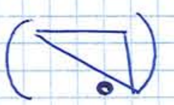
$K_1 = 9$

6) $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

$? = M_{54}$ tale che $M_{54} \cdot A = U$

dove U é triangolare superiore

$M_{54} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 & 1 \end{pmatrix}$ $-\frac{9}{4} \cdot 4 + 9 = 0$

$U =$ 

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 334

6) $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

a) condiz suff Gauss-Seidel

A simmetrica definita positiva

Criterio di Sylvester

$\det(A_1) = 10 > 0$

$\det(A_2) = 10 \cdot 2 - 4 = 16 > 0$

$\det(A) = 10(12-1) - 2(12-5) + 5(2-10) = 56 > 0$

Sono tutti positivi

$\Rightarrow$ condizione verificata

b) Prime due iterate

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i = 1, 2 \dots n$$

$x^{(0)} = (0,0,0)^T$ approssimazione iniziale

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{17 - 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0}{10} = \dfrac{17}{10} & k=0 \quad i=1 \\[2ex] x_2^{(1)} = \dfrac{5 - 2 \cdot \frac{17}{10} - 1 \cdot 0}{2} = \dfrac{4}{5} & k=0 \quad i=2 \\[2ex] x_3^{(1)} = \dfrac{12 - 5 \cdot 17/10 - 1 \cdot 4/5}{6} = \dfrac{9}{20} & k=0 \quad i=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{17 - 2 \cdot 4/5 - 5 \cdot 9/20}{10} = \dfrac{263}{200} & k=1 \quad i=1 \\[2ex] x_2^{(2)} = \dfrac{5 - 2 \cdot \frac{263}{200} - 1 \cdot \frac{9}{20}}{2} = \dfrac{24}{25} & k=1 \quad i=2 \\[2ex] x_3^{(2)} = \dfrac{12 - 5 \cdot \frac{263}{200} - 1 \cdot \frac{24}{25}}{6} = \dfrac{893}{1200} & k=1 \quad i=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = 1,1359 \\ x_2^{(3)} = 0,992 \\ x_3^{(3)} = 0,8881 \end{cases}$$

c) $? = \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \max\left(\left| \frac{263}{200} - \frac{17}{10} \right|, \left| \frac{24}{25} - \frac{4}{5} \right|, \left| \frac{893}{1200} - \frac{9}{20} \right| \right) =$$

$$= \max(0,385,\ 0,16,\ 0,294) = 0,385$$