NUMERO: 1491A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Arcero

MATERIA: Statistica + Eserc. Prof.Vicario

A.A. 2014-2015 STATISTICA

FOGLIO N. 1: EVENTI E PROBABILITA'

Esercizio 1.
Chiara e Marco acquistano insieme uno dei 50 biglietti di una pesca di beneficienza. Ci sono 50 premi in palio di cui 7 piacciono a Chiara e 5 piacciono a Marco, ma uno solo piace ad entrambi.
Si calcoli la probabilità con cui il premio piacerà:

a) a Chiara;
b) a Marco;
c) ad entrambi;
d) ad almeno uno dei due;
e) a nessuno dei due;
f) ad uno solo dei due.

(Risposta: a) 7/50 - b) 1/10 - c) 1/50 - d) 11/50 - e) 39/50 - f) 1/5)

Esercizio 2.
In una città di provincia vengono venduti tre quotidiani di qui in poi denominati con A, B e C. Il quotidiano A è letto dal 20% della popolazione, il quotidiano B dal 16% e il quotidiano C dal 14%. Inoltre l'8% della popolazione legge entrambi i quotidiani A e B, il 5% legge entrambi i quotidiani A e C e il 4% legge entrambi i quotidiani B e C. Il 2% legge tutti e tre i quotidiani.
Calcolare:

a) la probabilità che una persona di quella città legga almeno un quotidiano;
b) la probabilità che una persona di quella città non legga alcun quotidiano;
c) la probabilità che una persona di quella città legga un solo quotidiano.

(Risposta: a) 0,35 – b) 0,65 – c) 0,22)

Esercizio 3.
Si lancia un dado truccato, in cui la probabilità che esca il numero 4 e la probabilità che esca il numero 6 sono il doppio delle altre.

a) Scrivere uno spazio di probabilità che descriva opportunamente la situazione.
b) Calcolare la probabilità che esca un numero dispari.
c) Calcolare la probabilità che esca un numero maggiore di 3.

(Risposta: a) le probabilità sono 1/8 e 1/4 - b) 3/8 - c) 5/8)

Esercizio 4.
Un gioco consiste nel lanciare contemporaneamente 3 dadi equilibrati ed annotare il punteggio minimo ottenuto con i tre lanci.
Determinare la probabilità che tale punteggio minimo:

a) sia uguale a 6
b) sia superiore a 1
c) Sia pari a 1.

(Risposta: a) 1/216 - b) 125/216 - c) 91/216)

N.B.
Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 1 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione – problemi svolti ed esercizi)

Foglio 2

E. n° 1:

Dati: ~~RDF~~ A = "dal I fornitore" B = "dal II fornitore" ? : $\mathbb{P}(B|\bar{F})$

F = "il regolatore funziona"

$\mathbb{P}(B|\bar{F}) = \frac{\mathbb{P}[B\bar{F}]}{\mathbb{P}[\bar{F}]} = \frac{\mathbb{P}[\bar{F}|B]\mathbb{P}[B]}{1-\mathbb{P}[F]}$

$\mathbb{P}[A] = 0{,}6 \quad \mathbb{P}[B] = 0{,}4$

$\mathbb{P}(F|A) = 0{,}95 \quad \mathbb{P}(F|B) = 0{,}8$

$\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[F|A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[F|B]\mathbb{P}[B] =$

$= 0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}89$

$\mathbb{P}[B|\bar{F}] = \frac{(1-\mathbb{P}[F|B])\mathbb{P}[B]}{1-\mathbb{P}[F]} = \frac{(1-0{,}8)0{,}4}{0{,}11} = 0{,}727$

N.B: $\mathbb{P}[\bar{F}|B] = 1-\mathbb{P}[F|B]$ ma $\mathbb{P}[B|\bar{F}] \neq 1-\mathbb{P}[B|F]$

② Dati: A = "Sopravvive" C = "parto cesareo" ? : $\mathbb{P}[A|\bar{C}]$

$\mathbb{P}[A|C] = 0{,}96 \quad \mathbb{P}[C] = 0{,}2$

$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|C]\mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[A|\bar{C}]\mathbb{P}[\bar{C}]$

$\mathbb{P}[A] = 0{,}98$

$\rightarrow \mathbb{P}[A|\bar{C}] = \frac{\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A|C]\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[\bar{C}]} =$

$= \frac{0{,}98 - 0{,}96 \cdot 0{,}2}{0{,}8} = 0{,}985$

③ Dati: E = "lo studente conosce la rx" ? : $\mathbb{P}[E|I]$

I = " " sceglie la rx esatta"

$\mathbb{P}[E|I] = \frac{\mathbb{P}[I|E]\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[I|E]\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[I|\bar{E}]\mathbb{P}[\bar{E}]} =$

$\mathbb{P}[I|\bar{E}] = \frac{1}{3} \quad \mathbb{P}[I|E] = 1$

$= \frac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[E] + \frac{1}{3}[1-\mathbb{P}[E]]} = \frac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[E] + \frac{1}{3} - \frac{\mathbb{P}[E]}{3}} = \frac{\mathbb{P}[E]}{\frac{2}{3}\mathbb{P}[E] + \frac{1}{3}}$

es. se $\mathbb{P}[E] = 0{,}5$ $\mathbb{P}[E|I] = 0{,}75$

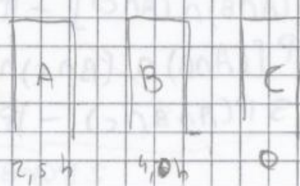
es. se $\mathbb{P}[E] = 0{,}8$ $\mathbb{P}[E|I] = 0{,}92$

es. se $\mathbb{P}[E] = 0{,}2$ $\mathbb{P}[E|I] = 0{,}429$

④ Dati: A_1 = "Sceglie A al I giro" B_1, B_2, C_1, C_2 ? : $\mathbb{P}[L]$

A_2 = " " A " " giro"

L = "impiega al max 4 h x liberarsi"



incompatibilità

$\mathbb{P}[L] = \mathbb{P}[C_1 \cup (A_1 \cap C_2) \cup (B_1 \cap C_2)] =$

$= \mathbb{P}[C_1] + \mathbb{P}[A_1 \cap C_2] + \mathbb{P}[B_1 \cap C_2] =$

$= \mathbb{P}[C_1] + \mathbb{P}[C_2|A_1]\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[C_2|B_1]\mathbb{P}[B_1] \qquad \mathbb{P}[C_2|A_1] = \mathbb{P}[C_2|B_1] = \frac{1}{2}$

somma dadi

$\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[x+y \leq 5] = \frac{10}{36} \quad \mathbb{P}[B_1] = \mathbb{P}[x+y \geq 10] = \frac{6}{36} \quad \mathbb{P}[C_1] = \mathbb{P}[5 < x+y < 10] = \frac{20}{36}$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}[\overline{(A_1 \cup B_1)}] = 1-\mathbb{P}[A_1 \cup B_1]$

$\mathbb{P}[L] = \frac{20}{36} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10^{5}}{36} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6^{3}}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

⑤ $\mathbb{P}(E|T_0) = \frac{\mathbb{P}(E \cap T_0)}{\mathbb{P}(T_0)} = \frac{\mathbb{P}(R_1 T_0)}{\mathbb{P}(T_0)} = \mathbb{P}(R_1|T_0) = p = 0{,}07 \quad R_0 = \bar{R_1} \quad \mathbb{P}[T_1] = 0{,}6 \quad \mathbb{P}[T_0] = 0{,}4$

$\mathbb{P}[E|T_1] = \mathbb{P}[R_0|T_1] = q = 0{,}05$ (se $q=p$ il canale si dice simmetrico)

a) $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E|T_0]\mathbb{P}[T_0] + \mathbb{P}[E|T_1]\mathbb{P}[T_1] = p \cdot 0{,}4 + q \cdot 0{,}6 = 0{,}058$

b) $\mathbb{P}[\bar{E_1}\bar{E_2}\bar{E_3}] \overset{\text{indipendenza}}{=} \mathbb{P}[\bar{E_1}]\mathbb{P}[\bar{E_2}]\mathbb{P}[\bar{E_3}] = (\mathbb{P}[\bar{E}])^3 = (1-\mathbb{P}[E])^3 = (1-0{,}058)^3 = 0{,}8359$

c) $\mathbb{P}[E|T_A] = 1-\mathbb{P}[\bar{E}|T_A] = 1-\mathbb{P}[R_A|T_A] = 1-\mathbb{P}[(R_0' \cap R_0'')|(T_0' \cap T_0'')] =$

$= 1 - \frac{\mathbb{P}[R_0' \cap R_0'' \cap T_0' \cap T_0'']}{\mathbb{P}[T_0' \cap T_0'']} \overset{\text{indipendenza trasmissioni}}{=} 1 - \frac{\mathbb{P}[R_0' \cap T_0']\mathbb{P}[R_0'' \cap T_0'']}{\mathbb{P}[T_0']\mathbb{P}[T_0'']} = 1-\underbrace{\mathbb{P}[R_0'|T_0']}_{1-p}\mathbb{P}[R_0''|T_0'']$

$= 1-(\mathbb{P}[R_0'|T_0'])^2 = 1-(1-p)^2 = 1-(1-0{,}07)^2 = 0{,}1351$

Esercizio 6 X

Dati $P(A) = 0.5$ e $P(B) = 0.6$, calcolare $P(A \cup B)$ sapendo che $P(B \mid A) = 0.4$.

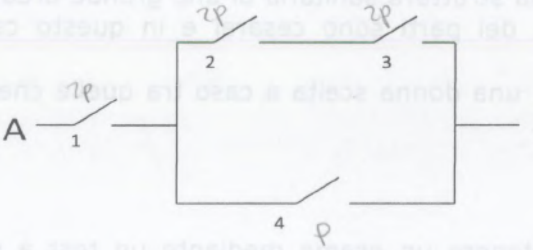
(Risposta: 0.9)

Esercizio 7 X

Le probabilità che uno dei relè nella figura sottostante non si chiuda quando dovrebbe sono $2p$ per i relè 1, 2 e 3 e p per il relè 4. Si assuma che tutti i relè funzionino in modo indipendente.

Qual è la probabilità che passi corrente tra gli estremi A e B del circuito?

(Risposta: $(1-2p)(1-4p^2+4p^3)$)



Esercizio 8 X

Siano date due urne U_1 ed U_2 contenenti la prima 3 palline bianche e 2 nere, la seconda 2 bianche e 3 nere. Si lancia una moneta, avente P(T) = 0.4. Se viene testa si effettuano estrazioni con reimmissione dall'urna U_1, se viene croce si effettuano estrazioni, sempre con reimmissione, però dall'urna U_2.

Indicato con B_j l'evento "alla *j*-esima estrazione la pallina estratta risulta bianca", calcolare:

a) $P(B_j)$, con $j = 1, 2, 3$

b) $P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$

c) $P(U_1 \mid B_1 \cap B_2)$

(Risposta: a) tutti 12/25 - b) 13/25 – c) 3/5)

Esercizio 9 X

Si considerino 3 eventi *A,B,C* tali che $P(A) = \frac{1}{10}$, $P(B) = \frac{8}{10}$, $P(C) = \frac{9}{10}$.

a) E' vero che la probabilità che si verifichi almeno uno tra gli eventi *A*, B^c, C^c è inferiore a $\frac{3}{5}$?

b) Se gli eventi *A,B,C* sono indipendenti, quanto vale $P(A \cup B^c)$? E quanto $P(A \cup B^c \cup C^c)$?

(Risposta: a) vero - b) 7/25 – 44/125)

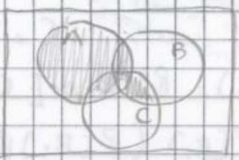
N.B.
Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 1 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione – problemi svolti ed esercizi)

N.B. A e B indipendenti $\Rightarrow$ $A \overset{\text{indipendente}}{\perp\!\!\!\perp} B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp \bar{B}$

E. p 30

① $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $A \cup AB = A$ $AB \cup A\bar{B} = A$ $A \cup B = AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B$

$A \cup BC = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



② a) $S = \{(Y,N,N), (N,Y,N), (N,N,Y), (Y,Y,N), (Y,N,Y), (N,Y,Y), (Y,Y,Y), (N,N,N)\}$ b) $A = \{(Y,Y,N), (Y,N,Y), (N,Y,Y), (Y,Y,Y)\}$

③ Dati: 4R, 3S, 1D A: Scelgo D ?: P[A], P[B]

Scelgo 3 libri B: Scelgo 2R e 2S a) $P[A] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0{,}375$

b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = 0{,}125 + 0{,}1428 + 0{,}166 =$

$\frac{42 + 48 + 56}{336} =$

LAB 2

9 $\boxed{3}$ 0 2 $\boxed{2}$ 3 → 32 3 · Stem_unit + 2* leaf_unit = 3 (10 leaf_unit) + 2 leaf_unit = 32*leaf_unit

diagrammi a torta → no ordinamento ($\alpha_i \sim$ frequenza relativa)

diagramma a barre → ordinamento ∈ non) → ≠ dall'istogramma xk lì i valori sono classi in base a criteri quantitativi (Umin.)

Graph → Bar chart → [seleziono l'attributo sul quale costruire il grafico]

Graph

variabile di tipo sconnesso

Diagramma di Pareto (la curva nera è la cumulata): Stat → Quality Tools → Pareto chart → [selezionare variabile] è 1 istogramma già ordinato per frequenze decrescenti

A volte quando ci sono molte altre opzioni con valori x molto bassi, possiamo scegliere un opzione speciale x mettere # ~~altri~~ fuori nella categoria "altro" in fondo (anche se questa categoria avrà % più in tot + alta di # le altre)

raggruppamento ideale

Istogrammi: 1) usare numero di classi (M) ~ quantità di dati (n): $M = 1 + \frac{10}{3} \log_{10} n$

2) Non è permesso saltare alcun dato (le classi devono raccogliere # i dati)

3) ogni elemento ∈ ad 1 solo classe

4) Possibilmente ampiezza classi =

Graph → Histogram → [selezionare la variabile] Per modificare il nr delle classi selezionarle → tasto dx → edit bars → binning → number intervals (scrivere il numero

Misurare la density: Graph → histogram → scale → Y-scale type → density

La density è permette di ottenere la frequenza relativa moltiplicando l'ordinata (densità) della classe per l'ampiezza (Δx) dell'intervallo (posso leggere la frequenza nell'A)

Per fare classi di ampiezza ≠: selez. le barre → tasto dx → edit bars → binning → cutpoint → midpoints positions (e scrivere i nuovi valori) → conviene usare anche la d → (frequenza relativa) density

f assoluta : m_i f relativa : $\frac{m_i}{N}$ → numero dati densità $d_i = \frac{f_i}{a_i}$ → ampiezza classe i-esima

'By variables': aggiungo a altra variabile secondo la quale fare i grafici basati sulla prima

Foglio 3

① Dati: 100 D, 80 O $\mathbb{P}[O]=0,8$ $\mathbb{P}[X=6]=0,5$ $\mathbb{P}[X_i|X\neq 6]=0,1$?: $F_X(x)$, $\mathbb{E}[X]$, $var[X]$, $\mathbb{P}[X\leq 2]$, $\mathbb{P}[X\geq 5]$

$X(S)=\{1,2,...,6\}$

a) $f_X(x) = \mathbb{P}(X=k)$ $(\forall x \notin S\ f_X(x)=0)$ $f_X(k) = \mathbb{P}[\overset{1/6\ \forall k}{X=k|O}]\mathbb{P}[O] + \mathbb{P}[\underset{0,5 \to k=6 \quad 0,1 \to k\neq 6}{X=k|\bar{O}}]\mathbb{P}[\bar{O}]$

per $k\leq 5$ $f_X(k) = \frac{1}{6}\cdot 0,8 + 0,1\cdot 0,2 = 0,153$ $f_X(k) = \frac{1}{6}\cdot 0,8$ ~~+0,5·0,9~~ $+ 0,5\cdot 0,2 = 0,233$ per $k=6$ $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} f_X(k)k = \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}[X=k] = 0,153\cdot 1 + 2\cdot 0,153 + ... + 0,233\cdot 6 = 0,153\cdot 5! + 0,233\cdot 6 = 3,7$ $var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ $0,153(1+4+9+16+25) + 0,233\cdot 6 = 16,83$ $var[X] = 16,83 - (3,7)^2 = 3,14$ $\sigma = \sqrt{var[X]} = \sqrt{3,14} = 1,77$

b) $\mathbb{P}[X\leq 2] = \mathbb{P}[X\leq 2|O]\mathbb{P}[O] + \mathbb{P}[X\leq 2|\bar{O}]\mathbb{P}[\bar{O}] = \mathbb{P}[X=1] + \mathbb{P}[X=2] = 0,153 + 0,153$

$\mathbb{P}[X\geq 5] = \mathbb{P}[X=5] + \mathbb{P}[X=6] = 0,153 + 0,233$

② Dati: $S' = \{1,2,3,4,4\}$ X = "Somma nr estratti" ?: S, $f_X(k)$

Si estraggono 2 palline senza reimmissione

a) $S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(3,3),(3,2),(3,1),(4,1),(4,2)...\}$

b) Per $i,j=1,2,3$ $i\neq j$ $\mathbb{P}[(i,j)] = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ se $i=1,2,3$ $j=4$ $\mathbb{P}\{(i,j)\} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{10}$

se $i=4$ $j=1,2,3,4$ $\mathbb{P}[(i,j)] = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $(S) = \{3,4,5,6,7,8\}$ $f_X(3) = \mathbb{P}[X=3] = \mathbb{P}[(1,2)] + \mathbb{P}[(2,1)] = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$ $\mathbb{P}[X=4] = \mathbb{P}[(1,3)] + \mathbb{P}[(3,1)] = \frac{1}{10}$

$\mathbb{P}[X=5] = \frac{2}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ $\mathbb{P}[X=7] = \frac{1}{5}$ $f_X(6) = \frac{1}{5}$

c) $F_X(x) = \mathbb{P}[X\leq x]$ se $x<3$ $F_X(x)=0$ se $x \leq x < 4$ $F_X(x) = \mathbb{P}[X=3] = \frac{1}{10}$

$4\leq x<5$ $F_X(x) = \mathbb{P}[X=3] + \mathbb{P}[X=4]$ $5\leq x<6$ $F_X(x) = \mathbb{P}[X<6] = \frac{1}{2}$

$6\leq x<7$ $F_X(5) = \mathbb{P}[X\leq 5] = \frac{1}{2}$ $7\leq x<8$ $F_X(7) = \frac{9}{10}$ $x\geq 8$ $F_X(8) = \mathbb{P}[X\leq 8] = 1$

d) $\mathbb{E}[X] = 3\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{3}{10} + 6\cdot\frac{2}{10} + ... = 5,6$ $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=3}^{8} k^2 f_X(k) = 9\cdot\frac{1}{10} + 16\cdot\frac{1}{10} + 25\cdot\frac{3}{10} + 36\cdot\frac{2}{10} + 49\cdot\frac{2}{10} + 64\cdot\frac{1}{10} = 33,4$ $var[X] = (5,6)^2 + 33,4$

→ valori del punto b) → $f_X(k)$ di densità

e) $\mathbb{P}[X\geq 7] = \mathbb{P}[X=7] + \mathbb{P}[X=8] = \frac{3}{10}$ $\mathbb{P}[3<X\leq 5] = \mathbb{P}[X=4] + \mathbb{P}[X=5] = \frac{2}{5}$

③ Dati: $X \sim f_X(x) = K\exp(-|x|)$?: K, $F_X(x)$, $\mathbb{E}(2X-1)$, $var[2X-1]$

a) $K\,|\,f_X(x)$ densità $f_X(x)\geq 0 \iff Ke^{-|x|}\geq 0 \to K\geq 0 \wedge \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty}$ ~~f(x)dx~~ $\underbrace{Ke^{-|x|}}_{pari}dx = 1 = \int_{-\infty}^{0} Ke^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} Ke^{-x}dx = 2\int_{0}^{+\infty} Ke^{-x}dx = 2\left[-Ke^{-x}\right]_{0}^{+\infty}$

A.A. 2014-2015 STATISTICA

FOGLIO N. 4: MODELLI DI VARIABILI CASUALI DISCRETE

Esercizio 1

I passeggeri di un piccolo volo aereo sono 20. Di questi, 3 trasportano sostanze non consentite.
Il controllo da parte del personale di vigilanza prevede di ispezionare 4 passeggeri.
Qual è la probabilità che almeno uno degli ispezionati abbia con sé sostanze proibite?
(Risposta: 0.509)

Esercizio 2

La probabilità che una lampadina fluorescente sia difettosa è 0.10.

1. Le lampadine vengono impacchettate in confezioni "family" da c=8 pezzi ciascuna.
   a) Calcolare la probabilità che in una confezione vi siano al più 2 lampadine difettose.
   b) Una consegna di lampadine ad un grande rivenditore specializzato consiste in una fornitura di f=150 confezioni e l'intera consegna viene rifiutata se due o più confezioni contengono più di 2 lampadine difettose; calcolare la probabilità che una consegna sia accettata.
2. Rispondere ora ai punti a e b supponendo che la confezione "family" contenga c=20 pezzi e che la fornitura sia di f=20 confezioni.
3. Si supponga che vi sia un'altra ditta produttrice di lampadine fluorescenti che afferma che in ogni sua scatola di lampadine (s=50 lampadine ciascuna) che consegna ai negozi ve ne sono 2 difettose. Calcolare la probabilità che tra le 4 lampadine acquistate da un avventore e prese da una stessa scatola, al più una sia difettosa.
4. Rispondere ora al punto 3. supponendo che la scatola contenga s=20 lampadine.

(Risposta: 1a) 0.9619 - 1b) 0.0205 (approx.Poiss 0.0221) 2a) 0.6769 - 2b) 0.0043 - 3) 0.9951 (approx.Binom 0.9909) - 4) 0.9684)

Esercizio 3

Un'urna contiene 3 palline rosse, 4 bianche e 5 nere. Si fanno estrazioni successive, con reinserimento, di una pallina dall'urna.

1. Con quale probabilità, facendo 5 estrazioni, si ottengono 3 palline nere?
2. Con quale probabilità la prima pallina nera viene estratta al terzo tentativo?
3. Stimare quante estrazioni sono necessarie affinché la frequenza con cui si ottiene una pallina nera si discosti dalla probabilità di ottenerla in una singola estrazione meno di ε=0.01, con una probabilità non inferiore a 0.9 (si usi il corollario della disuguaglianza di Tchebjcheff).
4. Ripetere il punto precedente nel caso in cui ε=0.1 e confrontare i risultati ottenuti.

(Risposta: 1) 0.246 - 2) 0.1418 - 3) 24306 - 4) 244)

$+\binom{8}{1}p^1(1-p)^7+\binom{8}{2}p^2(1-p)^6 = \dots = 0{,}9619$

si può approssimare con Poisson

2b) Y = # confez. con + di 2 lampadine difettose $Y\sim Bin(f,q)$ $q=\mathbb{P}[X>2]$

$\mathbb{P}[\text{"accettato"}] = \mathbb{P}[Y<2] = \mathbb{P}[Y=0]+\mathbb{P}[Y=1] = \binom{150}{0}q^0(1-q)^{150}+\binom{150}{1}q^1(1-q)^{149} \simeq 0{,}0205$

Approx a Poisson → $\tilde{Y}\sim Pois(\lambda)$ $\lambda=mp$ $\mathbb{P}[\tilde{Y}<2]=\mathbb{P}[\tilde{Y}=0]+\mathbb{P}[\tilde{Y}=1] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}+e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}=$

$= e^{-\lambda}(1+\lambda) = 0{,}0221$

2) c=20 pezzi f=20 confezioni $X\sim Bin(c,p)$ $\mathbb{P}[X\le 2]=\binom{20}{0}p^0(1-p)^{20}+\binom{20}{1}p^1(1-p)^{19}+$

$+\binom{20}{2}p^2(1-p)^{18}=0{,}6769$ → non si può approx con Poisson

$\mathbb{P}[\text{"accettato"}]$: $\mathbb{P}[Y<2]=\mathbb{P}[Y=0]+\mathbb{P}[Y=1] = \binom{20}{0}q^0(1-q)^{20}+\binom{20}{1}q^1(1-q)^{19}=\dots=0{,}0043$

3) $X\sim \mathcal{I}(50,2,4) \rightarrow \mathbb{P}[X\le 1]=\mathbb{P}[X=0]+\mathbb{P}[X=1]$ $\overset{N}{S}=50$ pezzi $\overset{K}{d}=2$ r s $\overset{n}{c}=4$

$\frac{\binom{2}{0}\binom{48}{4}}{\binom{50}{4}}+\frac{\binom{2}{1}\binom{48}{3}}{\binom{50}{4}}$ $n<<N$ $\left(\frac{n}{N}=\frac{4}{50}=0{,}08\right)\overset{0,1}{<}$ → approx binomiale (indipendenza prove)

$\tilde{X}\sim Bin(n,p)=Bin\left(n,\frac{K}{N}\right)=Bin\left(4,\frac{1}{25}\right)$ $\mathbb{P}[\tilde{X}\le 1]=$

$=\mathbb{P}[\tilde{X}=0]+\mathbb{P}[\tilde{X}=1]=\binom{4}{0}p^0(1-p^4)+\binom{4}{1}p^1(1-p)^3=0{,}9909$

4) $N=20$ $X\sim\mathcal{I}(20,2,4)$ $\mathbb{P}[X\le 1)=\frac{\binom{2}{0}\binom{18}{4}}{\binom{20}{4}}+\frac{\binom{2}{1}\binom{18}{3}}{\binom{20}{4}}=0{,}9684$ → no approx Bin $\left(\frac{n}{N}=0{,}2\right)$

③ Date: 3R, 4B 5N ?: , n

1) S = "estraz. N" $p=\frac{5}{12}$ X_n = #N in n estraz. → $X_n\sim Bin(n,p)$

$n=5$ $\mathbb{P}[X=3]=\binom{5}{3}p^3(1-p)^2=\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2=0{,}246$

2) Y = # palline da estrarre prima di 2N $Y=Y'-1$ $Y\sim G(p)$ $p=\frac{5}{12}$

Y' = # estraz. necessarie x ottenere 2N $\mathbb{P}(Y'=3)=\mathbb{P}(Y=2)=p(1-p)^2=\frac{5}{12}\left(\frac{7}{12}\right)^2=0{,}1418$

3) $\frac{X_n}{n}=f$ (frequenza con cui esce N in n estrazioni) $\mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right]\ge 0{,}9$

$\mathbb{P}[|X-\mu_X|<t\sigma_X]\ge 1-\frac{1}{t^2}$ ⇒ $\varepsilon=t\sigma_X \rightarrow \mathbb{P}[|X-\mu_X|<\varepsilon]\ge 1-\frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$ $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right]=$

$=\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_n]=\frac{1}{n}\cdot np=p$ $\sigma_X^2=Var\left[\frac{X_n}{n}\right] \rightarrow Var\left[\frac{X_n}{n}\right]=\frac{Var[X_n]}{n^2}=\frac{1}{n^2}np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}$

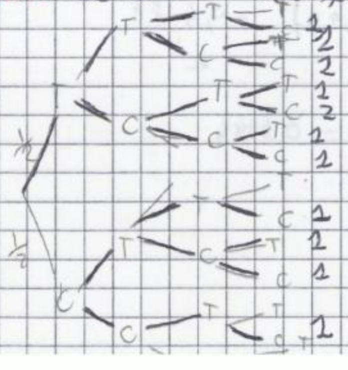
$\mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right]\ge 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\ge 0{,}9$ $1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\ge 0{,}9 \rightarrow \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\le 0{,}1$

$\rightarrow n\ge\frac{p(1-p)}{0{,}1\varepsilon^2}=\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}}{0{,}1(0{,}01)^2}=24306$

4) $n\ge\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}}{0{,}1(0{,}1)^2}=243{,}05\simeq 244$

Es. n°3 p. 48

Date: $n=4$ volte X = "# volte che a T segue C" ?: , $\mathbb{E}[X]$, $Var[X]$



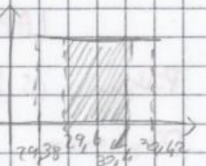
$f_X(x)=\begin{cases}5/16 & x=0\\ 10/16 & x=1\\ 1/16 & x=2\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

$\mathbb{E}=\sum_{x=0}^{2}x\,f_X(x)=0\cdot\frac{5}{16}+$

$+1\cdot\frac{10}{16}+\frac{2}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$Var[X]=\frac{10}{16}+\frac{4}{16}-\frac{9}{16}=\frac{5}{16}$

Foglio 5



① Dati: F_1 = "Il prod. proviene dal I fornitore" $\mathbb{P}[F_1]=0,7$?: $\mathbb{P}[\bar{S}]$

F_2 = " 〃 〃 〃 〃 II 〃 " $\mathbb{P}[F_2]$

S = " 〃 〃 soddisfa le specifiche" X_1 = "caratteristica prodotto da F_2) $X_1 \sim U((a,b))$

$\mathbb{E}[X_1]=29,9$ $Var[X_1]=0,09$ X_2 = " 〃 〃 〃 F_2) ~~$X_2 \sim U((a,b))$~~

$X_2 \sim U((29,5,\ 30,5))$ limiti di specifica = 29,6 − 30,4

$\mathbb{P}[S] = \mathbb{P}[S|F_1]\,\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[S|F_2]\,\mathbb{P}[F_2]$ dove $\mathbb{P}[S|F_1] = \mathbb{P}[29,6 \le X_1 \le 30,4]$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 29,9 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 0,09 \end{cases} \quad \cancel{(b-a)^2} \quad b>a\ ! \quad a = 29,38 \quad b = 30,42 \quad X_1 \sim U((29.38,\ 30,42))$$

$$\mathbb{P}[S|F_1] = \frac{30,4-29,6}{30.42-29,38} = 0,77 \qquad \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$\mathbb{P}[S|F_2] = \mathbb{P}[29,6 \le X_2 \le 30,4] = \frac{30,4-29,6}{30,5-29,5} = 0,8$$

$$\mathbb{P}[S] = 0,77 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,78 \qquad \mathbb{P}[\bar{S}] = 1 - \mathbb{P}[S] = 0,22$$

② Dati: $X_1 \sim N(2,1,\ 0.04)$ in cm $\Rightarrow \mu_1 = 2,1$ cm ?: $\mathbb{P}[2 \le X_1 \le 2,3]$ ~~#~~ μ_2, σ_2^2

$\sigma_1^2 = 0,04$ → Standardizzo X usare i quantili della normale standard

1) $$\mathbb{P}[2 \le X_1 \le 2,3] = \mathbb{P}\left[\frac{2-2,1}{\sqrt{0,04}} \le \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1} \le \frac{2.3-2,1}{\sqrt{0,04}}\right) \sim Z \sim N(0,1) = \mathbb{P}[-0,5 \le Z \le 1]$$

$$\underset{\mathbb{P}[Z\le 1]}{\Phi(1)} - \underset{\mathbb{P}[Z\le -0,5]}{\Phi(-0,5)} = \Phi(1) - (1-\Phi(0,5)) = = \Phi(1) + \Phi(0,5) - 2 =$$

tabole

$$= 0,8413 + 0,6915 - 1 = 0,5328$$

2) $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\mathbb{P}[X_2 < 2.1] = 0,8413$ $\mathbb{P}[X_2 > 1,8] = 0,9772$

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left[\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2} < \frac{2,1-\mu_2}{\sigma_2}\right] = 0,8413 = \mathbb{P}\left[Z < \frac{2,1-\mu_2}{\sigma_2}\right] = \Phi\left(\frac{2.1-\mu_2}{\sigma_2}\right) = 0,8413 \\ \mathbb{P}\left[\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2} > \frac{1.8-\mu_2}{\sigma_2}\right] = 0,9772 = \mathbb{P}\left[Z > \frac{1,8-\mu_2}{\sigma_2}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{1,8-\mu_2}{\sigma_2}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2.1-\mu_2}{\sigma_2} = 1 \rightarrow 2.1 - \mu_2 = \sigma_2 \rightarrow \mu_2 = 2 \quad \sigma_2^2 = 0,01 \\ = \Phi\left(\frac{\mu_2-1,8}{\sigma_2}\right) = 0,9772 \Rightarrow \frac{\mu_2-1.8}{\sigma_2} = 2 \rightarrow \mu_2 - 1,8 = 2\sigma_2 \end{cases} \Rightarrow X_2 \sim N(2,\ 0,01)$$

tabella

③ Dati: $\mu = 65$ mm $X = d$ delle valvole $\sim N(\mu,\sigma^2)$?: $\mathbb{P}(|X-\mu| > 1,5\sigma)$

$\mathbb{P}[X > 59,5] = 0,84$ ~~$\mathbb{P}$~~ $\mathbb{P}(X > 68 \mid X > \mu + \frac{\sigma}{2})$

1) $$\mathbb{P}(|X-\mu| > 1,5\sigma) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > 1,5\right) = \mathbb{P}(|Z| > 1,5) = \mathbb{P}(Z > 1,5) + \mathbb{P}(Z < -1,5) =$$

$$\Phi(-1,5) + 1 - \Phi(1,5) = 1 - \Phi(1,5) + 1 - \Phi(1,5) = \ldots = 0,1336$$

2) Ci serve σ $$0,84 = \mathbb{P}[X > 59,5] = \mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{59,5-65}{\sigma}\right] = \mathbb{P}\left[Z > -\frac{5,5}{\sigma}\right] =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left[Z < -\frac{5,5}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{5,5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5,5}{\sigma}\right) \rightarrow \frac{5,5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,84) = 0,995$$

$$\sigma = \frac{5,5}{0,995} = 5,5276 \rightarrow \sigma^2 = 30,5548 \quad \text{quindi} \quad \mu + \frac{1}{2}\sigma = 65 + \frac{5,5276}{2} = 67,76 < 68$$

$$\mathbb{P}[X > 68 \mid X > 67,76] = \frac{\mathbb{P}[(X>68) \cap (X > 67,76)]}{\mathbb{P}(X > 67,76)} = \frac{\mathbb{P}[X>68]}{\mathbb{P}[X>67,76]} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{68-65}{5,5276}\right]}{\mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1}{2}\right]} = \frac{\mathbb{P}[Z > 0,54]}{\mathbb{P}[Z > 0,5]} = \frac{1-\Phi(0,54)}{1-\Phi(0,5)} = \frac{0,2946}{0,3085} = 0,9549$$

3) Y = nr valvole con $63,5 < \cancel{X} < 66,5$ $Y \sim Bin(m,p)$ · $m = 12$

A.A. 2014-2015 STATISTICA

FOGLIO N. 5 : MODELLI DI VARIABILI CASUALI CONTINUE

Esercizio 1 X

Un supermercato riceve un prodotto da due diversi fornitori F1 e F2 nelle percentuali rispettivamente del 70% e 30%. I limiti di specifica (= *valori minimo e massimo per una caratteristica del prodotto entro i quali quest'ultimo è considerato essere secondo le prescrizioni*) sono 29.6 e 30.4. La misura di tale caratteristica segue una distribuzione uniforme per entrambi i fornitori: per F1 ha media e varianza μ_1=29.9 e σ_1^2=0.09; per F2 è invece uniforme sull'intervallo (29.5, 30.5). Trovare la percentuale di prodotto ricevuta dal supermercato che non soddisfa le prescrizioni.
(Risposta: 0.22)

Esercizio 2 X

1. Le rondelle contenute in una scatola hanno un diametro rappresentato da una distribuzione normale X1~N(2.1,0.04) (in cm). Scelta casualmente una rondella, calcolare la probabilità che abbia un diametro compreso tra 2cm e 2.3cm.
2. Le rondelle contenute in una seconda scatola hanno un diametro rappresentabile da una variabile casuale normale X2~N(μ,σ^2). Determinare tali parametri, sapendo che la probabilità che il diametro di una rondella sia inferiore a 2.1cm è 0.8413, mentre la probabilità che sia superiore a 1.8cm è 0.9772.

(Risposta: 1) 0.5328 – 2) media=2, varianza=0.01)

Esercizio 3 X

Il diametro (in *mm*) di un certo tipo di valvole è approssimativamente distribuito secondo una distribuzione normale con media 65; si è valutato inoltre che l'84% delle valvole ha un diametro superiore a 59.5.

1. Determinare la percentuale di valvole il cui diametro differisce dal diametro medio per più di una volta e mezzo la deviazione standard.
2. Calcolare la percentuale di valvole con un diametro superiore a 68, tra quelle con diametro superiore alla media più metà deviazione standard.
3. Avendo acquistato 12 valvole, calcolare la probabilità che almeno 2 abbiano un diametro compreso tra 63.5 e 66.5.

$P = \mathbb{P}[63,5 \le X \le 66,5] = \mathbb{P}\left[\frac{63,5}{5,5276} \le \frac{X-\mu}{6} \le \frac{66,5-65}{5,5276}\right]$

(Risposta: 1) 0.1336 - 2) 0.9549 – 3) 0.7597)

$\Rightarrow \mathbb{P}[-0,27 \le Z \le 0,27] = \mathbb{P}[Z < 0,27] - \mathbb{P}[Z < -0,27] = 2\,\Phi(0,27) - 1 = 0,2128 \quad Y \sim Bin(12, 0,2128)$

$\mathbb{P}[Y \ge 2] = 1 - \mathbb{P}[Y=0] - \mathbb{P}[Y=1] = 1 - \binom{12}{0}p^0(1-p)^{12} - \binom{12}{1}p^1(1-p)^{11} = 0,7597$

X **Esercizio 4**

In uno stabilimento, un detersivo è prodotto da due linee, A e B. La linea A produce il 40% dei flaconi, il rimanente è prodotto dalla linea B. E' noto che, se il detersivo è prodotto dalla linea A, la quantità di detersivo immessa nel flacone segue una distribuzione uniforme sull'intervallo (0.95,1.05); se è prodotto dalla linea B, invece, segue una distribuzione normale di media 1 e varianza 0.03^2.

1. Qual è la probabilità che un flacone scelto a caso abbia una quantità di liquido superiore a 1.09?
2. Qual è la probabilità che avendo trovato un flacone con una quantità di liquido inferiore a 1 sia stato prodotto dalla linea A?
3. I flaconi prodotti dalla linea A vengono assemblati in scatole da 10 pezzi, presi a caso a fondo linea. Qual è la probabilità che, scelta a caso una scatola, esattamente 3 dei pezzi in essa contenuta abbiano una quantità di liquido inferiore a 1?

(Risposta: 1) 0.00078 – 2) 0.4 – 3) 0.117)

Foglio 5

④ Dati: X_A = quantità ditta A $X_A \sim U((0{,}95, 1{,}05))$?: $\mathbb{P}[S]$, $\mathbb{P}[A|I]$, $\mathbb{P}[Z=3]$

X_B = " " B $X_B \sim N(1, 0{,}03^2)$

A = "il detersivo è prodotto da A" $\mathbb{P}[A]=0{,}4$ Z = # flaconi con quantità < 1

B = " " " " " " B" $\mathbb{P}[B]=0{,}6$ $n=10$ scatole $p=\mathbb{P}[I|A]$

S = "Il flacone ha 1 quantità > 1,09" I = "quantità liquido < 1"

fuori dall'Uniforme $[0.95, 1.05]$

1) $\mathbb{P}[S]=\mathbb{P}[S|A]\mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[S|B]\mathbb{P}[B]$ $\mathbb{P}[S|A]=\mathbb{P}[X_A>1{,}09]=0$

$\mathbb{P}[S|B]=\mathbb{P}[X_B>1{,}09]=\mathbb{P}\left[\frac{X_B-1}{0{,}03}>\frac{1{,}09-1}{0{,}03}\right]=\mathbb{P}[Z>3]=1-\Phi(3)=1-0{,}9987=$

$=0{,}0013 \Rightarrow \mathbb{P}[S]=0\cdot 0{,}4+0{,}6\cdot 0{,}0013=0{,}00078$

2) $\mathbb{P}[A|I]=\frac{\mathbb{P}[I|A]\,\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[I]}$ $\mathbb{P}[X_A<1]=\frac{1-0{,}95}{1{,}05-0{,}95}=\frac{0{,}05}{0{,}1}=0{,}5$ $\mathbb{P}[X_B<1]=\frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[X_B]=1$ $\mathbb{P}[I]=\frac{1}{2}=\mathbb{P}[I|A]\mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[I|B]\mathbb{P}[B]$ $\mathbb{P}[A|I]=\frac{0{,}5\cdot 0{,}4}{0{,}5}=0{,}4$

3) $Z \sim Bin(n,p)$ $n=10$ $p=\mathbb{P}[I|A]=0{,}5$ $\mathbb{P}[Z=3]=\binom{10}{3}(0{,}5)^3(0{,}5)^7=$

$=0{,}117$

⑤ Dati: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda}$?: $\mathbb{P}[X>3]$

X = vita del componente Y = # componenti $|\ \mathbb{P}[X>3] \sim Bin(10, p)$

$\mathbb{E}[X]=2\ h \rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & x\geq 0\\ 0 & \text{altrove}\end{cases} \qquad \mathbb{P}[X>3]=\int_3^{+\infty}f_X(x)\,dx=\int_3^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=e^{-\frac{3}{2}}=0{,}2231$$

$\mathbb{P}[Y\geq 2]=1-\mathbb{P}[Y=0]-\mathbb{P}[Y=1]=0{,}69$

Foglio 6

① Dati: $f_X(0)=\frac{1}{2}$ $f_X(1)=f_X(2)=\frac{1}{16}$ $f_X(3)=f_X(4)=$?: $\overbrace{Y=(X-2)^2}^{f_Y(x)}$, μ_Y

$=f_X(5)=\frac{1}{8}$ $X(S)=\{0,1,2,3,4,5\}$ X discreta

$Y=g(x)=(x-2)^2$ NON biunivoca! $Y(S)=\{0,1,4,9\}$

$Y(0)=4$ $Y(1)=1$ $Y(2)=0$ $Y(3)=1$ $Y(4)=4$ $Y(5)=9$

$f_Y(0)=\sum_{k:g(k)=0}f_X(k)=f_X(2)=\frac{1}{16}$ $f_Y(1)=\sum_{k:g(k)=1}f_X(k)=f_X(1)+f_X(3)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

$f_Y(4)=\sum_{k|g(k)=4}f_X(k)=f_X(0)+f_X(4)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ $f_Y(9)=\sum_{k|g(k)=9}f_X(k)=f_X(5)=\frac{1}{8}$

$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[(X-2)^2]=\mathbb{E}[X^2-4X+4]=\mathbb{E}[X^2]-4\mathbb{E}[X]+4$

$\mu_X=0\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{16}+3\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{8}=\frac{27}{16}$ $\mathbb{E}[X^2]=0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{8}+\frac{16}{8}+\frac{25}{8}=$

$=\frac{105}{16}$ $\mathbb{E}[Y]=\mu_Y=\frac{105}{16}-4\cdot\frac{27}{16}+4=\frac{61}{16}$

② Dati: $f_X(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{se } x\geq 1\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$?: $Y=\ln X$

$D_X=\{x \mid f_X(x)>0\}=[1,+\infty[$

$D_Y=g(D_X)=[0,+\infty[$ $Y(x)=\ln x$ $\xrightarrow{\text{invertibile}}$ $f_Y(y)=\left|\frac{d g^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g^{-1}(y))$

$\forall y \in D_Y$ $g^{-1}(y)=e^y \Rightarrow \frac{d}{dy}g^{-1}(y)=e^y$ $f_Y(y)=|e^y|\frac{\theta}{(e^y)^{\theta+1}}=e^y\frac{\theta}{e^{\theta y+y}}=\frac{\theta}{e^{\theta y}}$

$Y \sim Exp(\theta)$

A.A. 2014-2015 STATISTICA

FOGLIO N. 6 : TRASFORMAZIONI DI VARIABILI CASUALI

Esercizio 1 X

Sia X una variabile casuale discreta a valori in $\{0,1,2,3,4,5\}$, con funzione di densità: $f_X(0)=\frac{1}{2}$, $f_X(1)=f_X(2)=\frac{1}{16}$, $f_X(3)=f_X(4)=f_X(5)=\frac{1}{8}$.

Determinare la funzione di densità discreta di $Y=(X-2)^2$ e calcolarne la media.
(Risposta: media=61/16)

Esercizio 2 X

Sia X una variabile casuale con funzione di densità definita da $f_X(x)=\frac{\vartheta}{x^{\vartheta+1}}$ se $x\geq 1$ e nulla altrove.
Determinare la legge di $Y=\ln X$.
(Risposta: $\exp(\vartheta)$ *)*

Esercizio 3 X

Sia data la variabile casuale X con distribuzione uniforme sull'intervallo (-3, 5).
Calcolare la distribuzione e la media della variabile casuale $Y=(X-1)^2$.
(Risposta: media=16/3)

Esercizio 4 X

Sia X una variabile casuale con funzione di densità definita da $f_X(x)=\frac{2}{9}(x+1)$ sull'intervallo (-1,2) e nulla altrove.
Determinare la funzione di densità di $Y=X^2$.

Esercizio 5

Sia X una variabile casuale gaussiana $N(2,\sqrt{4})$. Calcolare la legge della variabile trasformata $Y=\left(\frac{X}{2}-1\right)^2$ e la sua media. → non invertibile

$y=\left(\frac{1}{2}(x-2)^2\right)^2=\frac{1}{4}(x-2)^2$

(Risposta: media=1)

$\mathbb{E}[\cancel{4}(x-2)^2]=\frac{1}{4}\mathbb{E}[(x-2)^2]=\frac{1}{4}\cdot 4=0$

N.B.

Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 4 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione – problemi svolti ed esercizi)

$\forall y \in D_Y$ abbiamo 2 controimmagini in $\overset{\varphi_1(y)}{]-\infty,2[}$ e $\overset{\varphi_2(y)}{]2,+\infty[}$

$$f_Y(y)=\left|\frac{d\varphi_1^{-1}(y)}{dy}\right|f_X(\varphi_1^{-1}(y))+\left|\frac{d\varphi_2^{-1}(y)}{dy}\right|f_X(\varphi_2^{-1}(y))=\frac{1}{\sqrt{y}}\left[f_X(2-2\sqrt{y})+f_X(2+2\sqrt{y})\right]=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} & \text{se } y>0\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}\left[\frac{x^2}{4}+1-x\right]=\frac{1}{4}\mathbb{E}[x^2]+1-\mathbb{E}[x]=1$

$= e^{-3,25}\frac{(1.25)^2}{3} = 0,0202$ c) $N_A(400) \sim P(400\alpha_A) = P(1)$ $N_B(400) \sim P(400\alpha_B) = P(1,6)$

$N(400) \sim P(2,6)$ $\mathbb{P}[N_A(400) = 2 \mid N(400) = 3] = \frac{\mathbb{P}[N_A(400)=1 \cap N(400)=3]}{} \cancel{\mathbb{P}[N(400)=3]}$

$= \frac{\mathbb{P}[N_A(400)=1 \cap N_B(400)=2]}{\mathbb{P}[N(400)=3]} = \frac{\mathbb{P}[N_A(400)=1]\,\mathbb{P}[N_B(400)=2]}{\mathbb{P}[N(400)=3]} = \mathbb{P}[N(400)=3]$

$= \cancel{e^{-1}}\frac{(1)^1}{1!} \cdot e^{-1,6}\frac{(1,6)^2}{2!} \cdot \frac{3!}{(2,6)^3\,\cancel{e^{-2,6}}} = 0,43696$

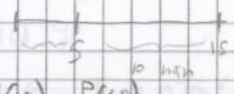
indipendente da $N(t)$

② Dati: $N(t)$ = nr veicoli passati in t min $N_C(1) = 0,2$?: a) $\mathbb{P}[N(5) = 0 \mid N(15) = 35]$

$N(1) = 3 \to N(1) \sim P(\alpha = 3)$ $N_C(t)$ = nr camper in t min b) $\mathbb{P}[N_C(10) = 1 \mid N(10) = 10]$

se t e s intervalli disgiunti ⇒ $N(t), N(s)$ indipendenti c) $\mathbb{P}[N(0,5) = 0]$

a) $\mathbb{P}[N(5)=0 \mid N(15)=35] = \frac{\mathbb{P}[N(5)=0, N(15)=35]}{\mathbb{P}[N(15)=35]} = \frac{\mathbb{P}[N(5)=0, N(10)=35]}{\mathbb{P}[N(15)=35]} =$



indipendenza

$= \frac{\mathbb{P}[N(5)=0]\,\mathbb{P}[N(10)=35]}{\mathbb{P}[N(15)=35]}$; $N(5) \sim P(15)$ $N(10) \sim P(30)$ $N(15) \sim P(45)$

$\to \mathbb{P}[\dots] = \cancel{e^{-15}}\frac{(15)^0}{0!} \cdot \cancel{e^{-30}}\frac{(30)^{35}}{\cancel{35!}} \cdot \frac{\cancel{35!}}{\cancel{e^{-45}}(45)^{35}} = \left(\frac{30}{45}\right)^{35} = \left(\frac{2}{3}\right)^{35}$

b) $N_C(1) = 0,2 \sim \mathbb{P}(\alpha = 0,2)$ $\mathbb{P}[N_C(10) = 1 \mid N(10) = 10] = \frac{\mathbb{P}[N_C(10) = 1, N_A(10) = 9]}{\mathbb{P}[N(10) = 10]}$

$N_A(t)$ = nr veicoli ≠ camper in t min $N_A(\alpha_A = \alpha - \alpha_C = 2,8)$

$\cancel{\mathbb{P}[\cap]} =$ $N_C(10) = 2$ $N(10) = 30$ $N_A(10) = 28$ $\mathbb{P}[\dots] = \frac{\mathbb{P}[N_C(10)=1]\,\mathbb{P}[N_A(10)=9]}{\mathbb{P}[N(10)=10]} =$

$= \cancel{e^{-2}}\frac{(2)^1}{1!} \cdot \cancel{e^{-28}}\frac{(28)^9}{9!} \cdot \frac{10!}{\cancel{e^{-30}}(30)^{10}} = \frac{20\,(28)^9}{30\,(30)^9} = \frac{2}{3}\left(\frac{\overset{14}{28}}{\underset{15}{30}}\right)^9 = 0,3583$

c) $t = 0,5$ min $N(0,5) \sim P(1,5)$ $\mathbb{P}[N(0,5) = 0] = e^{-1,5}\frac{(1,5)^0}{0!} = e^{-1,5}$ V

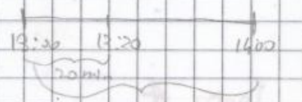
T = t tra 2 passaggi: $T \sim Exp(3)$ $\mathbb{P}(T > 0,5) = e^{-\lambda t} = e^{-1,5}$

③ Dati: $\alpha = 5$ tel/h $N(t)$ = nr tel in t h ?: a) $\mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) = 2 \mid N(\frac{2}{3}) = 0]$

nr tel in media in 1 h

$N(1) = 2 = N(\frac{1}{3}) + N(\frac{2}{3})$ nr tel nei primi 20 min

a) $\mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) = 2 \mid N(\frac{2}{3}) = 0] = \frac{\mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) = 2, N(\frac{2}{3}) = 0]}{\mathbb{P}[N(1) = 2]} =$



$= \frac{\mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) = 2]\,\mathbb{P}[N(\frac{2}{3}) = 0]}{\mathbb{P}[N(1) = 2]}$ $N(1) \sim P(\alpha)$ 1 h

$N(\frac{1}{3}) \sim P(\frac{\alpha}{3})$ $N(\frac{2}{3}) \sim P(\frac{2}{3}\alpha)$

$= \cancel{e^{-\alpha/3}}\frac{(\frac{\alpha}{3})^2}{2!}\,\cancel{e^{-\frac{2\alpha}{3}}}\frac{(\frac{2}{3}\alpha)^0}{0!} \cdot \frac{2!}{\cancel{e^{-\alpha}}\alpha^2} = \frac{1}{9}$

b) $\mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) \geq 1 \mid N(1) = 2] = 1 - \mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) = 0 \mid N(1) = 2] = 1 - \frac{\mathbb{P}[N(\frac{1}{3}) = 0]\,\mathbb{P}[N(\frac{2}{3}) = 2]}{\mathbb{P}[N(1) = 2]} =$

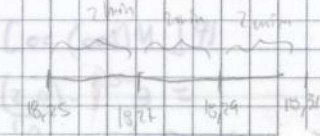
$= 1 - \left[e^{-\frac{\alpha}{3}}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^0 \frac{e^{-\frac{2\alpha}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2}{2!} \cdot \frac{2!}{e^{-\alpha}\alpha^2}\right] = \frac{5}{9}$

④ Dati: $N(t_1, t_2)$ = nr aperture tra t_1 e t_2 $\alpha = \frac{3}{2}$ min $= 1,5$/min ?: $\mathbb{P}[N(18{,}27, 18.29) = 3]$

$N(t_1, t_2) \sim P(\alpha(t_2 - t_1))$ $t_1 = 17.30$ $t_2 = 20$ $\mathbb{P}[N(18{,}29, 18.31) = 3]$

$N(4\text{ min}) = 5 = N(18.25, 18.29)$

a) $\mathbb{P}[N(2) = 3, N(2) = 2] / \mathbb{P}[N(4) = 5] = \frac{\mathbb{P}[N(2) = 3]\,\mathbb{P}[N(2) = 2]}{\mathbb{P}[N(4) = 5]} =$



$= e^{-2,15}\frac{(2 \cdot 1,5)^3}{3!}\,e^{-2.15}\frac{(3)^2}{2!} \cdot \frac{5!}{e^{-4 \cdot 1,5}(4 \cdot 1,5)^5} = 0,3125$

- **Esercizio 4**

Il numero di aperture della porta automatica di un'azienda, nell'orario compreso tra le 17.30 e le 20, è rappresentato con un processo di Poisson di intensità pari a 3 aperture ogni 2 minuti. Sapendo che il giorno 4 febbraio 2010 la porta si è aperta 5 volte tra le 18.25 e le 18.29 calcolare la probabilità che:

1. tra le 18.27 e le 18.29 si sia aperta 3 volte;
2. tra le 18.29 e le 18.31 si sia aperta 3 volte.

(Risposta: 1) 0.3125 - 2) 0.224)

N.B.

Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nell'Appendice dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione – problemi svolti ed esercizi)

Varianza:

$S^2 = \frac{1}{\boxed{n}} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 n_i$ → stimatore distorto

$n \to n-1$

Proprietà varianza:

- $y_i \neq a + b x_i \Rightarrow s_y^2 = b^2 s_x^2$ caso particolare $y_i = \frac{x_i - A}{B}$ se $A = \bar{x}$ e $B = s_x$ → standardizzazione
- $w_i = x_i + y_i + z_i + \dots \Rightarrow s_w^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + \dots + 2\,cov(x,y) + \dots$
- varianza di 1 miscuglio di K gruppi → v. within (interna ai gruppi)

  $S^2 = S_w^2 + S_B^2 = \frac{1}{\dots}$ ↳ v. between (varianza delle $\bar{x}_i$ dei gruppi dalla media del miscuglio)

$CV = \frac{\overset{\to\ varianza}{S}}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} n_i \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}} \right)^2}$ → coeff. di variazione

Foglio 8

① Dati: campione: $\{X_1, \dots, X_{12}\}$ $n = 12$?: $\mathbb{P}[63{,}5 < \bar{X}_{12} < 66{,}5]$

$\mu = 65$ $\sigma = 5{,}5276$ $\bar{X}_{12} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{12}\right)$ → distrib. media

$\mathbb{P}\left[\frac{63{,}5 - 65}{\frac{5{,}5276}{\sqrt{12}}} \leq Z \leq \frac{66{,}5 - 65}{\frac{5{,}5276}{\sqrt{12}}} \right] = \mathbb{P}[-0{,}94 \leq Z \leq 0{,}94] = \Phi(0{,}94) - \Phi(-0{,}94) =$

$= \Phi(0{,}94) - [1 - \Phi(0{,}94)] = 0{,}6528$

② Dati: $n_1 = 10$ $n_2 = 12$ $\bar{X}_{10} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{10}\right)$?: $\mathbb{P}[\bar{X}_{n_1} < \bar{X}_{n_2}]$

$\bar{X}_{12} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{12}\right)$ → indipendenti $\bar{X}_{10} - \bar{X}_{12} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{12}\right)$

$\mu = 0{,}1$ $\sigma^2 = 0{,}00483$ $\mathbb{P}[\bar{X}_{10} < \bar{X}_{12}] = \mathbb{P}[\bar{X}_{10} - \bar{X}_{12} < 0] = \mathbb{P}\left[\frac{(\bar{X}_{10} - \bar{X}_{12}) - \mu}{\sigma} < \frac{0 - \mu}{\sigma} \right] =$

$= \mathbb{P}\left[Z < \frac{-0{,}1}{0{,}0695} \right] = \mathbb{P}[Z < -1{,}44] = \Phi(-1{,}44) = 1 - \Phi(1{,}44) = 0{,}0749$

③ Dati: $X \sim N(65{,}08, 278{,}89)$ → σ ?: $\mathbb{P}[X_1 + X_2 > 121]$, $\mathbb{P}[X_{2013} - X_{2012} > 14]$

X = mm di precipitaz. in 1 anno X_1 = anno prossimo X_2 = ... anno successivo

X_1, X_2 ind. → $X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$ a) $\mathbb{P}[X_1 + X_2 > 121] = \mathbb{P}\left[\frac{X_1 + X_2 - 2\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} > \frac{121 - 2\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] =$

$= \mathbb{P}\left[Z > \frac{121 - 2 \cdot 65{,}03}{\sqrt{2 \cdot 278{,}89}} \right] = \mathbb{P}\left[Z > -\frac{9{,}16}{23{,}62} \right] = 0{,}6517$

$\boxed{N.B.\ X_1 + X_2 \neq 2X \to 2X \sim N(2\mu, 4\sigma^2)}$

b) X_{2012} = precipitazioni 2012

X_{2013} = precipitaz. 2013 $\mathbb{P}[X_{2013} - X_{2012} > 14] = \mathbb{P}\left[\frac{(X_{2013} - X_{2012}) - 0}{\sqrt{2\sigma^2}} > \frac{14}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] =$

$= \mathbb{P}\left[Z > \frac{14}{23{,}62} \right] = 1 - \Phi(0{,}59) = 0{,}2776$

④ Dati: $X_1 \sim Exp(1) \Rightarrow \mathbb{E}[X_1] = 1$ $Var[X_1] = 1$?: $\mathbb{E}[Y]$, $Var[Y]$, $\rho(U,V)$, $\mathbb{E}[U+V]$, $Var[U+V]$, $Var[Y]$, $\mathbb{E}[Y]$

$X_2 \sim Exp(2) \Rightarrow \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2}$ $Var[X_2] = \frac{1}{4}$

$X_3 \sim Exp(4) \Rightarrow \mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{4}$ $Var[X_3] = \frac{1}{16}$ $V = X_1 + X_2 + X_3$ $\rho(X_1, X_3) = 0{,}4$

$cov(X_i, X_j) = 0$ $\forall i \neq j$ $Y = X_1 + X_2 - X_3$ $U = 2X_1 - X_3$

a) $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_3] = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $Var[Y] = Var[X_1] + Var[X_2] +$

$+ Var[X_3] + 2\,cov[X_1, X_2] + 2\,cov[X_1, X_3] - \underbrace{2\,cov[X_2, X_3]}_{0} = \frac{21}{16}$

- **Esercizio 5**

Supponiamo che per ogni $i=1,2,3$ X_i sia una variabile casuale con distribuzione normale di media μ_i e varianza σ_i^2 e che le variabili siano indipendenti.

1. Se $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 60$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 15$ calcolare $P(X_1 + X_2 + X_3 \le 200)$ e $P(150 \le X_1 + X_2 + X_3 \le 200)$.
2. Usando medie e varianze del punto 1 calcolare $P(\bar{X} \ge 55)$ e $P(58 \le \bar{X} \le 62)$.
3. Usando medie e varianze del punto 1 calcolare $P\left(-10 \le X_1 - \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3 \le 5\right)$.
4. Se $\mu_1 = 40$, $\mu_2 = 50$, $\mu_3 = 60$, $\sigma_1^2 = 10$, $\sigma_2^2 = 12$, $\sigma_3^2 = 14$, calcolare $P(X_1 + X_2 + X_3 \le 160)$ e $P(X_1 + X_2 \ge 2X_3)$.

(Risposta: 1) 0.9986 e 0.9986 – 2) 0.9875 e 0.6266 – 3) 0.836 - 4) 0.9525 e 0.0003)

N.B.

Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 5 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione – problemi svolti ed esercizi)

$\mathbb{P}[Z > \sqrt{2}] + \mathbb{P}[Z < -\sqrt{2}] = \Phi(-\sqrt{2}) + [1 - \Phi(\sqrt{2})] = 0{,}1586$

Foglio 9

① Dati: $X_1, \dots, X_m \sim N(\mu, \sigma^2)$?: m

5% di σ

$\mathbb{P}[|\bar{X}_m - \mu| < 0{,}05\sigma) \geq 0{,}95$ a) $\bar{X}_m \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{m}) \Rightarrow 0{,}95 \leq \mathbb{P}\left[\left|\frac{\bar{X}_m - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}}\right| < \frac{0{,}05\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}}\right] =$

$= \mathbb{P}[|Z| < 0{,}05\sqrt{m}] = \mathbb{P}[-0{,}05\sqrt{m} < Z < 0{,}05\sqrt{m}] = \Phi(0{,}05\sqrt{m}) +$

$- \Phi(-0{,}05\sqrt{m}) = 2\Phi(0{,}05\sqrt{m}) - 1 \to \Phi(0{,}05\sqrt{m}) \geq \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975 \Rightarrow 0{,}05\sqrt{m} \geq \Phi^{-1}(0{,}975) =$

$= z_{0{,}975}$ $\sqrt{m} \geq \frac{1{,}96}{0{,}05} \Rightarrow m \geq 1536{,}64 \sim 1537$

b) X_m NON normale → Cebicev Tchebycheff $\mathbb{E}[\bar{X}_m] = \mu$ $Var[\bar{X}_m] = \frac{\sigma^2}{m}$

$\mathbb{P}[|\bar{X}_m - \mu| < 0{,}05\sigma] = \mathbb{P}[|\bar{X}_m - \mathbb{E}[\bar{X}_m]| < \underbrace{0{,}05\sqrt{m}}_{t}\sqrt{\frac{\sigma^2}{m}}] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$

$1 - \frac{1}{t^2} \geq 0{,}95 \to 1 - \frac{1}{(0{,}05\sqrt{m})^2} \geq 0{,}95 \to m \geq 8000$

② Dati: $X \sim U(-\theta, \theta)$?: $\theta > 0$

$X_1, \dots, X_m$ campione da U $f_X(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & \text{se } -\theta < x < \theta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Con il metodo dei momenti $\mu_1' = \mathbb{E}[X] = \frac{\theta - \theta}{2} = 0$

$\mu_2' = \mathbb{E}[X^2] = Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(\theta+\theta)^2}{12} = \frac{4\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3} \to \theta^2 = 3\mu_2' \to \theta = \pm\sqrt{3\mu_2'}$ $\theta > 0$

$\to \theta = \sqrt{3\mu_2'}$ $M_r' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^r$ $\theta_{MM} = \sqrt{3M_2'} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

stimatore

③ Dati: $X_1, \dots, X_m$ campione

$x_1, \dots, x_m$ realizzazione campione ?: θ

$f(x, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2} + 4\theta\right) x^{4\theta + \frac{1}{2}} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ con $\theta > -\frac{3}{8}$

Con la fz. di verosimiglianza $L(\theta) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{3}{2} + 4\theta\right) x_i^{4\theta + \frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2} + 4\theta\right)^m \prod_{i=1}^{m} x_i^{4\theta + \frac{1}{2}}$

con $x_i \in]0,1[$ $\ell(\theta) = \log L(\theta) = m\log\left(\frac{3}{2} + 4\theta\right) + \sum_{i=1}^{m} \left(4\theta + \frac{1}{2}\right)\log x_i$

$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{m}{\frac{3}{2} + 4\theta} \cdot 4 + 4\sum_{i=1}^{m} \log x_i = 0 \to \frac{m}{3/2 + 4\theta} = -\sum_{i=1}^{m} \log x_i \to \theta = -\frac{3}{8} - \frac{m}{4\sum_{i=1}^{m} \log x_i}$ $> -\frac{3}{8}$

verifichiamo che è a max $\frac{d^2\ell}{d\theta^2} = \frac{-4m}{(3/2 + 4\theta)^2} \cdot 4 < 0$ max assoluto $\theta \in]-\frac{3}{8}, +\infty[$ perché $x_i < 1$

(in qst caso non è necessario verificare se è assoluto xk ce n'è solo 1)

Con il metodo dei momenti $\mu_1' = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \theta)\, dx = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2} + 4\theta\right) x^{4\theta + \frac{1}{2}} dx =$

$= \int_0^1 \left(4\theta + \frac{3}{2}\right) x^{4\theta + \frac{3}{2}} dx = \left(4\theta + 3/2\right)\left[\frac{x^{4\theta + \frac{5}{2}}}{4\theta + \frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\theta + 3/2}{4\theta + 5/2} \Rightarrow 4\theta + \frac{3}{2} = \left(4\theta + \frac{5}{2}\right)\mu_1'$

$\to \theta = \frac{5\mu_1' - 3}{8(1 - \mu_1')} \rightsquigarrow \theta_{MM} = \frac{5\bar{X}_m - 3}{8(1 - \bar{X}_m)} \to \hat{\theta} = \frac{5\bar{x}_m - 3}{8(1 - \bar{x}_m)}$

④ Dato: $X_1, \dots, X_m$ campione ?: θ

$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $L(\theta) = \prod_{i=1}^{m} f_X(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\theta^3 x_i^2 e^{-\theta x_i} =$

$= \left(\frac{1}{2}\theta^3\right)^m \prod_{i=1}^{m} x_i^2 e^{-\theta x_i}$ $(x_i > 0)$

$\ell(\theta) = \log L(\theta) = m\log\left(\frac{1}{2}\theta^3\right) + \sum_{i=1}^{m} (\log x_i^2 - \theta x_i) = -m\log 2 + 3m\log\theta + 2\sum_{i=1}^{m} \log x_i - \theta\sum_{i=1}^{m} x_i$

ESERCIZIO 6

Sia dato il campione $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ estratto da una popolazione con distribuzione uniforme $U(0, \theta)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro θ è corretto? In caso negativo, come bisogna modificarlo per renderlo corretto? Lo stimatore ottenuto con il metodo dei momenti è corretto?

(Risposta: $\Theta^{MV} = \max X_i$ non è corretto, $\frac{n+1}{n}\Theta^{MV}$ è corretto ; $\Theta^{MM} = 2\bar{X}_n$ è corretto)

ESERCIZIO 7

Sia $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un campione casuale di dimensione n con $\mathbb{E}(X_j) = \mu$, $Var(X_j) = 2$, $\forall j = 1..n$.

Si considerino i seguenti stimatori di μ:

$$T_1(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad T_2(n) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} jX_j,$$

$$T_3(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j X_j, \qquad T_4(n) = \frac{X_1 + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j X_j + X_n}{2 + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j}.$$

a) Dire se $T_k(n)$, con $k = 1, 2, 3, 4$, sono stimatori corretti di μ.

b) Dire se $T_k(n)$, con $k = 1, 2, 3, 4$, sono stimatori consistenti (in media quadratica) di μ.

c) Qual è tra $T_1(n)$ e $T_2(n)$ lo stimatore più efficiente di μ?

(Risposta: a) $T_1(n)$, $T_2(n)$ e $T_4(n)$ sono corretti, $T_3(n)$ non lo è; b) $T_1(n)$ e $T_2(n)$ sono consistenti, $T_3(n)$ e $T_4(n)$ non lo sono; c) $T_1(n)$ è più efficiente di $T_2(n)$, $\forall n > 1$.)

N.B.

Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 5 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione - problemi svolti ed esercizi)

$MSE_{T_1(n)} = var\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\overbrace{var[x_j]}^{2} = \frac{2}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ consistente

$MSE_{T_2(n)} = var\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j\, x_j\right] = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n} j^2\, \underset{8}{\overset{2}{var[x_j]}} = \frac{8}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$= \frac{4}{3}\frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0 \quad n \to +\infty$ consistente

$MSE_{T_3(n)} = var[T_3(n)] + (\underbrace{\mathbb{E}[T_3(n)] - \mu}_{\text{BIAS = distorsione}})^2 \longrightarrow \begin{cases}(0-\mu)^2 = \mu^2 & n \text{ pari}\\ (-2\mu)^2 = 4\mu^2 & n \text{ dispari}\end{cases}$

$\to \cancel{MSE}_{T_3(n)} = var\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} var\left[(-1)^j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{var[x_j]}_{2} = 2n$

$\Rightarrow MSE_{T_3(n)} = \begin{cases}2n + \mu^2 & n \text{ pari} \quad (-1)^{2j}\\ 2n + 4\mu^2 & n \text{ dispari}\end{cases} \to +\infty$ per $n \to +\infty$ $\to T_3(n)$ non consistente

$MSE_{T_4(n)} = var\left[\left(X_1 + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j x_j + x_n\right)\frac{1}{2+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j}\right]$

c) il $T_i(n)$ + ~~efficiente~~ è quello con MSE < : $T_1(n) = \frac{2}{n}$ $\quad T_2(n) = \frac{4}{3}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$\frac{2}{n} < \frac{2}{3}\frac{2n+1}{n(n+1)} \iff 3(n+1) < 2(2n+1) \iff n > 1$ $\quad \begin{cases}T_1(1) = T_2(1) & n=1\\ T_1(n) < T_2(n) & n \geq 2\end{cases}$

$\to T_1(n)$ è + efficiente

Foglio 10 es. nr

① Dati: $X = \mu + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad$?: (l_i, l_s) per μ,

$\alpha = 0,05$ $\quad$ (l_i, l_s) per σ^2

7 prove indipendenti

a) $\bar{X}_7 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i = 2,03 \quad S_7^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2 = 0,0524 \to S = 0,23 \quad \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ poiché σ^2 sconosciuto usiamo S_n^2 $\to T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$(L_i, L_s) = \left(\bar{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\underset{0,23/\sqrt{7}}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}, \bar{X}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$

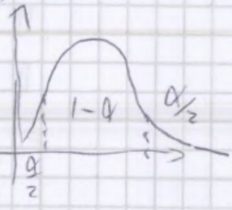
$\to (l_i, l_s) = \left(2,03 - t_{6,\,0,975}\vee, 2,03 + t_{6,\,0,975}\underset{0,23/\sqrt{7}}{\wedge}\right) = \left(2,03 - \frac{2,447\cdot 0,23}{\sqrt{7}}, 2,03 + \frac{2,447\cdot 0,23}{\sqrt{7}}\right)$

$\to (l_i, l_s) = (1,82, 2,24)$

b) $U_n = \frac{S_n^2}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2_{n-1}$ (non simmetrica) $^*(L_i, L_s) = \left(\frac{S_n^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_n^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) =$

$= \left(\frac{0,0524\cdot 6}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{0,0524\cdot 6}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = \left(\frac{0,3144}{14,449}, \frac{0,3144}{1,237}\right) = (0,0217, 0,254)$

$^* \mathbb{P}\left[\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < U_n < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$



② Date: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $\sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad$?: (l_i, l_s) per μ,

$n = 16 \quad \bar{X}_{16} = 7,9 \quad S^2_{16} = 10,43 \quad S_{16} = \sqrt{10,43} = 3,23$ $\quad 1-\alpha \mid 2]\alpha = 2,5,$

$\alpha = 0,05$ $\quad n \mid 2]\alpha \leq 2,5 \wedge 1-\alpha = 98\%$

a) $(l_i, l_s) = \left(7,9 - \frac{3,23}{\sqrt{16}}(t_{15,\,0,975}), 7,9 + \frac{3,23}{\sqrt{16}}(t_{15,\,0,975})\right) = (7,9 - 0,807(2,131),$
$7,9 + 1,72) = (6,18, 9.62)$

ESERCIZIO 5

In un'azienda addetta all'imballaggio di una certa merce sono in uso due macchine diverse, di qui in poi denotate con A e B; ci si chiede se i tempi di esecuzione dell'imballaggio sono differenti per le due macchine. A questo scopo, vengono osservati i tempi di esecuzione (in secondi) di 10 operazioni di imballaggio, con i seguenti risultati:

Descriptive Statistics: A;B

```
          Total
Variable  Count  Mean StDev   Variance
A            10    55  1.4       1.96
B            10    53  1.5       2.25
```

Assumendo che i tempi di esecuzione dell'imballaggio delle due popolazioni seguano una distribuzione normale, si costruisca l'intervallo di fiducia per $\mu_A - \mu_B$ (assumere un livello di fiducia del 95%). Si può affermare, allo stesso livello, che i due campioni provengano dalla stessa popolazione?
(Risposta: $(0.637, 3.363)$; NO)

ESERCIZIO 6

È stato stimato che il 36% delle ragazze che vivono in una vasta area metropolitana e il 29% di quelle che vivono in una regione montana sono vegetariane. In entrambi i casi, la stima è basata su un campione di 200 ragazze. Costruire un intervallo di fiducia per la reale differenza di percentuale di ragazze vegetariane nei due ambienti, al livello 95%. Si può affermare, sempre allo stesso livello, che non vi è alcuna differenza?
(Risposta: $(-0.0215, 0.1615)$; SI)

N.B.

Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 5 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione - problemi svolti ed esercizi)

$(\bar{x}_A - \bar{x}_B) + 2{,}101 \sqrt{\frac{S_A^2 + S_B^2}{m}} \Big) \Rightarrow (l_i, l_s) = \big((55-53) - 1{,}363, \; 2 + 1{,}363\big) = (0{,}637, \; 3{,}363)$

Poiché $0 \notin (l_i, l_s)$ non possiamo dire che i 2 campioni provengano dalla stessa popolazione.

⑥ Dati: $X_1, \dots, X_m \underset{i.i.d}{\sim} B(p_x)$ $\hat{p}_x = 0{,}36$?: (l_i, l_s) per $\hat{p}_x - \hat{p}_y$

$Y_1, \dots, Y_m \underset{i.i.d.}{\sim} B(p_y)$ $\hat{p}_y = 0{,}29$

$m_x = m_y = m = 200$

$$(l_i, l_s) = \left((\hat{p}_x - \hat{p}_y) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x) + \hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{m}}, \; (\hat{p}_x - \hat{p}_y) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x) + \hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{m}} \right)$$

$I_a = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x) + \hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{m}} = 1{,}96 \cdot 0{,}0467 = 0{,}0915$ $(l_i, l_s) = \big((0{,}36 - 0{,}29) - 0{,}0915,$ $(0{,}36 - 0{,}29) + 0{,}0915\big) = (-0{,}0215, \; 0{,}4615) \rightarrow 0 \subseteq (l_i, l_s) \Rightarrow p_x \approx p_y$

Foglio 11 es. hr:

① Dati: $H_0: \mu = 10$ $\alpha = 5\%$ $\sigma^2 = 4$ $\beta = 0{,}05$?: $m \mid \beta = 5\%$ dato H_0 vero

$H_A = \mu = 7$ $X_1, \dots, X_m \underset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \bar{X}_m \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right)$ a) Test monolaterale: $H_0: \mu = 10$ $H_A: \mu < 10$

$\alpha = P[Z < -z_{1-\alpha} \mid \mu = 10]$ con $Z = \frac{\bar{X}_m - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}}$ sotto H_0: $Z = \frac{\bar{X}_m - 10}{2/\sqrt{m}} \Rightarrow P\left[\frac{\bar{X}_m - 10}{2/\sqrt{m}} < -z_{1-\alpha} \mid \mu = 10\right] = \alpha$

$P\left[\bar{X}_m < 10 - z_{1-\alpha} \frac{2}{\sqrt{m}}\right]$

Rifiuto H_0 se $\bar{X}_m \in$ regione di rifiuto $(-\infty, \bar{X}_{min})$ ovvero se $\bar{X} < X_{min} \Rightarrow$ se $z_{calc} < -z_{1-\alpha}$

$\bar{X}_{min} = 10 - z_{0{,}95} \frac{2}{\sqrt{m}} = 10 - \frac{3{,}29}{\sqrt{m}}$ $P[\bar{X}_m > \bar{X}_{min} \mid \overset{\text{è vera } H_A}{\mu = 7}] = \beta \rightarrow$

$\rightarrow P\left[\frac{\bar{X}_m - 7}{2/\sqrt{m}} > \frac{\bar{X}_{min} - 7}{2/\sqrt{m}} \mid \mu = 7\right] = 0{,}05 \Rightarrow P[Z > 1{,}5\sqrt{m} - 1{,}645) = 1 - \Phi(1{,}5\sqrt{m} - 1{,}645) = 0{,}05$

$\rightarrow \Phi(1{,}5\sqrt{m} - 1{,}645) = 0{,}95 \rightarrow 1{,}5\sqrt{m} - 1{,}645 = z_{0{,}95} = 1{,}645 \Rightarrow m \geq 5$

α non $1-\alpha$

b) Test bilaterale $H_0: \mu = 0$ $H_A: \mu \neq 10$ $\alpha = P[\text{rifiuto } H_0 \mid \mu = 10] = P\left[\left|\frac{\bar{X}_m - 10}{\frac{2}{\sqrt{m}}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] =$

$= P\left[\left(\bar{X}_m < \underbrace{10 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{2}{\sqrt{m}}}_{X_{min}}\right) \cup \left(\bar{X}_m > \underbrace{10 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{2}{\sqrt{m}}}_{X_{max}}\right)\right]$ Regione di rifiuto $=$

$]-\infty, X_{min}[\; \cup \;]X_{max}, +\infty[$ $X_{min} = 10 - \frac{3{,}92}{\sqrt{m}}$ $X_{max} = 10 + \frac{3{,}92}{\sqrt{m}}$

rifiuto H_0 se $|z_c| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ $\beta = P[\text{accetto } H_0 \mid H_A \text{ vera}] = P[X_{min} < \bar{X} <$ $X_{max} \mid \mu = 7] = \beta = 0{,}05 = P\left[\frac{X_{min} - 7}{\frac{2}{\sqrt{m}}} < \frac{\bar{X}_m - 7}{2/\sqrt{m}} < \frac{X_{max} - 7}{2/\sqrt{m}}\right] =$

$P\left[\frac{\left(10 - \frac{3{,}92}{\sqrt{m}}\right) - 7}{2/\sqrt{m}} < Z < \frac{\left(10 + \frac{3{,}92}{\sqrt{m}}\right) - 7}{\frac{2}{\sqrt{m}}}\right] = P[1{,}5\sqrt{m} - 1{,}96 < Z < 1{,}5\sqrt{m} + 1{,}96] =$

$\Phi(1{,}5\sqrt{m} + 1{,}96) - \Phi(1{,}5\sqrt{m} - 1{,}96]$

$\forall m \geq 1$ $1{,}5\sqrt{m} + 1{,}96 \geq 3{,}46 \Rightarrow \Phi(1{,}5\sqrt{m} + 1{,}96) \approx 1 \Rightarrow 0{,}05 = 1 - \Phi(1{,}5\sqrt{m} - 1{,}96] \rightarrow$

$\Phi[1{,}5\sqrt{m} - 1{,}96] = 0{,}95 \Rightarrow 1{,}5\sqrt{m} - 1{,}96 = z_{0{,}95} \rightarrow m = 5{,}77 \rightarrow m \geq 6$

② Dati: $H_0: \mu = 11$ $H_A: \mu > 11$ $\alpha = 5\%$?: m

$S_{\bar{m}}^2 = \hat{\sigma}^2 = 4$ con $\bar{m} = 20$ $\beta \approx 10\%$ $\mid H_A: \mu = 12$

check m or $\bar{m}$!

$X_1, \dots, X_n \underset{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ $\bar{X}_m \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right)$

Poiché σ^2 è stimato $\rightarrow T = \frac{\bar{X}_m - \mu}{S/\sqrt{m}} \sim t_{\bar{m}-1}$ $X_{max} = \mu_0 + t_{1-\alpha, \bar{m}-1} \frac{S}{\sqrt{m}} = 11 + \frac{3{,}458}{\sqrt{m}}$

$0{,}10 = \beta = P\left[\frac{\bar{X}_m - 12}{S_m/\sqrt{m}} < \frac{X_{max} - 12}{2/\sqrt{m}}\right]$ sotto H_A $\bar{X}_m \sim N\left(12, \frac{\sigma^2}{m}\right)$ $T = \frac{\bar{X}_m - 12}{S_m/\sqrt{m}} \sim t_{\bar{m}-1}$

√ **ESERCIZIO 5** X (appunti teoria)

Si mettono a confronto due insetticidi (spray 1 e spray 2). Il conteggio del numero di insetti eliminati, in un'area ed un tempo fissati, ha prodotto una percentuale pari a 0.64, con un campione di dimensione 350, per lo spray 1 e una percentuale pari a 0.52, con un campione di dimensione 300, per lo spray 2.

a) Con un livello di significatività $\alpha = 0.05$, si può rifiutare l'ipotesi che i due insetticidi siano equivalenti?

b) Calcolare il p-value.

(Risposta: a) rifiuto H_0; $z_{calc} = 3.09$ b) p-value= 0.2% *(a) rifiuto H_0; $z_{calc} = 3.11$ b) p-value= 0.2%)*)

ESERCIZIO 6 (da fare)

Due misuratori A e B di pressione su 16 persone hanno fornito i seguenti risultati:

Tipo A) 79, 75, 93, 84, 93, 56, 87, 86 $\overline{X}_A = 81,625$ $S^2_A = 145,696$

Tipo B) 66, 74, 82, 77, 91, 58, 79, 80 $\overline{X}_B = 75,875$ $S^2_B = 102,125$

a) Vi è differenza significativa tra le medie ottenute dai due misuratori di pressione? (assumere $\alpha = 0.05$)

b) Calcolare la probabilità di errore di seconda specie per le ipotesi alternative $\mu_A - \mu_B = 3$, $\mu_A - \mu_B = 0$, $\mu_A - \mu_B = -3$.

(Risposta: a) No; $t_{calc} = 1.033$ b) $\beta_3 = 92\%$, $\beta_0 = 95\%$, $\beta_{-3} = 92\%$)

N.B.

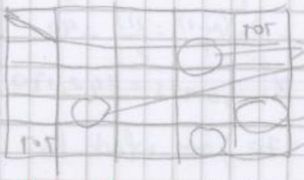
Altri esercizi della stessa tipologia si trovano nel Capitolo 6 dell'eserciziario (Fontana-Vicario: Laboratorio di metodi statistici per la sperimentazione - problemi svolti ed esercizi)

a) Verifichiamo se possiamo supporre $\sigma_A^2=\sigma_B^2$ x ricavare anche i g.d.l. della T di Student da utilizzare:

- $H_0: \sigma_A^2=\sigma_B^2$ $H_A: \sigma_A^2\neq\sigma_B^2$ $F=\frac{S_A^2/\sigma_A^2}{S_B^2/\sigma_B^2}=\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}$ sotto H_0: $\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A}=1 \rightarrow F=\frac{S_A^2}{S_B^2}\sim F(m_A-1,m_B-1)$
- $f_{calc}=\frac{145,696}{102,125}=1,427$ $f_{m_A-1,m_B-1,1-\frac{\alpha}{2}}=f_{7,7,0.975}=4,995$ $f_{7,7,\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{f_{7,7,1-\frac{\alpha}{2}}}=$
- $=\frac{1}{4,995}=0,2 \rightarrow f_{calc}\in\,]0,2\,,\,4,995[\ \rightarrow$ non rifiuto $H_0: \sigma_A^2=\sigma_B^2$
- $T=\frac{(\bar X_A-\bar X_B)-(\mu_A-\mu_B)}{S_{pool}\sqrt{\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}}}$ con $S^2_{pool}=\frac{(m_A-1)S_A^2+(m_B-1)S_B^2}{m_A+m_B-2}=\frac{S_A^2+S_B^2}{2}$ $X_{min}=-t_{m_B+m_A-2,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot$
- $S_{pool}\sqrt{\frac{2}{m}}=-t_{14,0.975}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{145,696+102,125}{2}}=-11,94$ $X_{max}=11,94$

$|\bar X_A-\bar X_B|=5,75 \in\,]-11,94\,,\,11,94[\ \rightarrow$ non rifiuto H_0

LAB 5 : Tabelle a doppia entrata



X tracciare i dati $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ vengono ordinati in modo crescente e posizionati sull'asse x assegnandogli l'ordinata corrispondente al quantile x_i x disegnare il grafico della normale (Graph → Probability plot → (Distribution)) H_0 di normalità

ANOVA (Stat → ANOVA → one-way...)

b) $H_{A2}=\mu_A-\mu_B=3$ $\beta=\mathbb{P}[-11,94<\bar X_A-\bar X_B<11,94 \mid \mu_A-\mu_B=3]=\mathbb{P}\left[\frac{-11,94-3}{\boxed{5,566}}<T_{14}<\right.$ $S_{pool}\sqrt{\frac{2}{m}}$

$\left.<\frac{11.94-3}{5,566}\right]=\mathbb{P}[-2,684<T_{14}<1,606]=0,92$

$H_A: \mu_A-\mu_B=0 \rightarrow \beta=\mathbb{P}\left[-\frac{11,94}{5,566}<T_{14}<\frac{11.94}{5,566}\right]=\mathbb{P}[-2.145<T_{14}<2.145]=$

$F_{T_{14}}(2.145)-F_{T_{14}}(-2.145)=2F_{T_{14}}(2.145)-1=0,95$

$H_{A2}=\mu_A-\mu_B=-3$ $\beta=\mathbb{P}\left[\frac{-11,94+3}{5,560}<T_{14}<\frac{11.94+3}{5,566}\right]=\mathbb{P}[-1,606<T_{14}<2,684]=$

⑤ :

Dati: $\hat p_1=0,64$ $m_1=350$ $\alpha=5\%$?: test H_0, z_{calc}, p-value

$\hat p_2=0,52$ $m_2=300$ $H_0: p_1=p_2$ $H_A: p_1\neq p_2$

a) $p=\frac{\sum x_i}{m}\sim bin(mp, mp(1-p))] \sim N \Rightarrow P_1\sim N\left(p_1,\frac{p_1(1-p_1)}{m_1}\right)$ $P_2\sim N\left(p_2,\frac{p_2(1-p_2)}{m_2}\right)$ $m_1\to\infty$

$\hat P_1-\hat P_2 = P_1-P_2 \sim N\left(p_1-p_2,\underbrace{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{m_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{m_2}}}_{\sigma_\Delta}\right)$ standardizzo: $Z=\frac{(P_1-P_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_\Delta}$

$\mathbb{P}[-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<Z\le \underset{1.96}{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}]=1-\alpha$ $L_i=(P_1-P_2)-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_\Delta$ $L_s=(P_1-P_2)+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_\Delta$

$\frac{\ell_i}{\ell_s}=(0,64-0,52)\pm z_{0.975}\sqrt{\frac{0,64(1-0,64)}{350}+\frac{0,52(1-0,52)}{300}}=0,12\pm1,96\sqrt{0,000658+0,000832}=$

$=0,12\pm0,0756 \Rightarrow (\ell_i,\ell_s)=(0,044\,,\,0.1956)\rightarrow$ rifiuto H_0

$-z_{1-\frac{\alpha}{2}}=-z_{0.975}=-1,96$ $+z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96 \Rightarrow$ valori critici, limiti zona di accettazione

$z_c=\frac{(\hat p_1-\hat p_2)-0}{\sigma}$ ← $H_0: p_1-p_2=0$ $z_c=\frac{(0,64-0,52)-0}{\sigma_\Delta}=\frac{0,12}{0,0386}=3,108>1,96\rightarrow$ rifiuto H_0

oppure stimo $\hat p=\frac{m_1\hat p_1+m_2\hat p_2}{m_1+m_2}=\frac{350\cdot0,64+300\cdot0,52}{650}=0,585$ $\hat\sigma_\Delta=\sqrt{\hat p(1-\hat p)\left(\frac{1}{350}+\frac{1}{300}\right)}=$

$=\sqrt{0,585(1-0,585)\left(\frac{1}{350}+\frac{1}{300}\right)}=0,0388\rightarrow z_c=\frac{0,12}{0,0388}=3,093\rightarrow$ rifiuto H_0 xk $>1,96$

calcolando $(p_1-p_2)_{min}(\equiv\bar X_{min}) \mid -1,96=\frac{(p_1-p_2)_{min}-0}{\sigma_\Delta}\rightarrow(p_1-p_2)_{min}=-0,076$

$(p_1-p_2)_{max} \mid 1,96=\frac{(p_1-p_2)_{max}-0}{0,0386}\rightarrow(p_1-p_2)_{max}=0,076\rightarrow$ limite di rifiuto

$|\hat p_1-\hat p_2|=0,12\notin\,]-0,076\,,\,0,076]\rightarrow$ rifiuto H_0

a) $V = \frac{(m-1)S_B^2}{\sigma_B^2} \sim \chi^2_{m-1} \Rightarrow \mathbb{P}\left[\chi_{14,\frac{\alpha}{2}} < \frac{(m-1)S_B^2}{\sigma_B^2} < \chi_{14,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 0,95 = \mathbb{P}\left[\frac{1}{\chi_{14,1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma_B^2}{(m-1)S_B^2} < \frac{1}{\chi_{14,\frac{\alpha}{2}}}\right] =$

$= \mathbb{P}\left[\frac{(m-1)S_B^2}{\chi_{14,0.975}} < \sigma_B^2 < \frac{(m-1)S_B^2}{\chi_{14,0,025}}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{14\cdot 715,56}{26,119} < \sigma_B^2 < \frac{10017,84}{5,624}\right] \Rightarrow$

$(\ell_i, \ell_s) = (383,55,\ 1779,883)$ $\sigma_B^2 = 900 \in (\ell_i, \ell_s) \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0

b) $T_{m_A-1} = \frac{\bar{X}_{m_A} - \mu}{S_A/\sqrt{m_A}}$ $\mathbb{P}\left[t_{m_A-1,\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_{m_A} - \mu}{S_A/\sqrt{m_A}} < t_{m_A-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha = \mathbb{P}\left[-\bar{X}_{m_A} - \frac{S_A}{\sqrt{m_A}} t_{m_A-1,1-\frac{\alpha}{2}} <\right.$

$\left. -\mu < t_{\alpha} - \bar{X}_{m_A} + \frac{S_A}{\sqrt{m_A}} t_{m_A-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ $(\ell_i, L_s) = \left(\bar{X}_{m_A} - \frac{S_A}{\sqrt{m_A}} t_{11,0.975},\ \bar{X}_{m_A} + \frac{S_A}{\sqrt{m_A}} t_{11,0.975}\right) =$

$= \left(-0.17 - \frac{24.86\cdot 2.2}{\sqrt{12}},\ -0.17 + \frac{54.692}{3.464}\right) = (-15,96,\ 15,62) \to$ rifiuto H_0

c) $1-\alpha = 0,9$ $\mathbb{P}\left[f_{m_B-1,m_A-1,\frac{\alpha}{2}} < \frac{S_B^2}{S_A^2}\cdot\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < f_{m_B-1,m_A-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 90\% =$

$= \mathbb{P}\left[f_{14,11,0.05}\cdot\frac{S_A^2}{S_B^2} < \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < \frac{S_A^2}{S_B^2}2.719\right] = \mathbb{P}\left[0,3843\cdot\frac{618,02}{715,56} < \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < 0.864\cdot 2,719\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ell_i, \ell_s) = (0,332\ \ 2.349) \Rightarrow$ non posso ~~rifiut~~ escludere che $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$

d) $S^2_{pool} = \frac{6798,22 + 10017,84}{23} = 672,64 \Rightarrow V = (m_A+m_B-2)\frac{S^2_{pool}}{\sigma^2} \sim \chi_{m_A+m_B-2}$

$(L_i, L_s) = \left[\frac{(m_A+m_B-2)S^2_{pool}}{\chi_{25,0.975}},\ \frac{25\,S^2_{pool}}{\chi_{25,0.025}}\right] \Rightarrow \left[\frac{25\cdot 672,64}{40,64},\ \frac{16816}{13,12}\right] =$ ha + gradi di libertà!

$= (\ell_i, \ell_s) = (413,78,\ 1281.7)$

Es. p.116 (CAP 5)

② Dati: $\bar{X}_1, \bar{X}_2$, $m_1 = m_2 = m$, $p = 0.01$?: m

$p: \mathbb{P}\left[|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > \sigma\right] = 0.01$ $Y = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu-\mu, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{m}\right) = N\left(0, \frac{2\sigma^2}{m}\right)$

$0.01 = \mathbb{P}[Y < -\sigma] + \mathbb{P}[Y > \sigma] = \mathbb{P}\left[Z < -\frac{\sigma - 0}{\sigma\sqrt{\frac{2}{m}}}\right] + \mathbb{P}\left[Z > \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{\frac{2}{m}}}\right] = \mathbb{P}\left[Z < -\sqrt{\frac{m}{2}}\right] +$

$+ \mathbb{P}\left[Z > \sqrt{\frac{m}{2}}\right] = 0.01 = \left(1 - \mathbb{P}\left[Z \le \sqrt{\frac{m}{2}}\right]\right) + \left(1 - \mathbb{P}\left[Z \le \sqrt{\frac{m}{2}}\right]\right) = 0.01 \to 2\left(1 - \mathbb{P}\left[Z \le \sqrt{\frac{m}{2}}\right]\right) = 0.01$

$\mathbb{P}\left[Z \le \sqrt{\frac{m}{2}}\right] = 0.995$ $z_{0.995} = 2.575 = \sqrt{\frac{m}{2}} \to m = 14$

Es. n° 10 p. 32

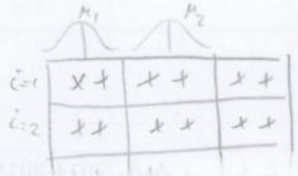
Dati: $m = 3300$ $m_S = 1518$ $m_C = 660$ $m_A = 1122$?: $\mathbb{P}[S|M]$

$\mathbb{P}[M|S] = 14\%$ $\mathbb{P}[M|C] = 15\%$ $\mathbb{P}[M|A] = 11\%$

Sotto $H_0 \Rightarrow t_{calc} = \frac{-4{,}86+3}{2\sqrt{0.1182}} = -2{,}705$ $\quad -t_{8,0.95} = -1{,}86 \quad t_{calc} < t_{8,0.95} \rightarrow$ rifiuto H_0

Ⓒ Dati: $H_0 : \Gamma = -5 \qquad H_A : \Gamma \leq -5 \qquad \Gamma = \frac{\mu_1+\mu_3}{2} - \mu_2$ $\quad$?: test H_0

$\alpha = 5\%$



$C = \hat{\Gamma} \sim N\left(\Gamma, var[c]\right) \qquad C = \frac{1}{2}\bar{Y}_{\cdot 1 \cdot} - \bar{Y}_{\cdot 2 \cdot} + \frac{1}{2}\bar{Y}_{\cdot 3 \cdot}$

$\rightarrow c = \frac{1}{2} 63.5 - 69.3 + \frac{1}{2} \cdot 34{,}8 = -26{,}65$ $\quad$ Nzoll

$var[c] = \frac{1}{4}\underbrace{var[\bar{Y}_{\cdot 1 \cdot}]}_{} + var[Y_{\cdot 2 \cdot}] + \frac{1}{4} var[\bar{Y}_{\cdot 3 \cdot}] + \boxed{0} \rightarrow$ indipendenza

$var\left[\frac{1}{\underset{\text{scelle}}{2 \times 2}} \sum_i^2 \sum_j^2 Y_{ij} \right] = \frac{1}{4^2} \sum_i \sum_j \underbrace{var[Y_{ij}]}_{\sigma^2} = \frac{1}{4^2} \cdot 4\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{4} = var[\bar{Y}_{\cdot 3 \cdot}] ; var[\bar{Y}_{\cdot 2 \cdot}]$

replicaz. $\quad$ celle $\quad$ replicaz.

$var[c] = \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}\sigma^2 \rightarrow$ incognito $\downarrow$ stimiamo $\rightarrow \hat{var}[c] = \frac{3}{8}\hat{\sigma}^2 = MS_{exp}$

$= 104$

$\rightarrow T_{(6)} = \frac{c - \Gamma_0}{\sqrt{\hat{var}[c]}} = \frac{-26.65+5}{\sqrt{\frac{3}{8} \cdot 104}} = t_{calc} = -3.4668 \rightarrow$ regione di rifiuto

g.d.l. MS_{exp} $\quad$ MS_{error}

Per l'IC : $(\ell_i, \ell_s) \Rightarrow c \mp t_{6, 0.975}\sqrt{\hat{var}[c]} = -26.65 \mp 2.447\sqrt{\frac{3}{8} \times 104}$

- **Esercizio 4** X
  Nella tabella seguente sono riportati i dati di peso, lunghezza e tipologia di trazione relativi a 54 veicoli. In fondo alla tabella sono disponibili alcune statistiche
  Calcolare la matrice di correlazione, valutando la significatività dei valori ottenuti.
  (Risposta : $\begin{pmatrix} 1 & r_{w,l} \\ r_{w,l} & 1 \end{pmatrix}$ *con* $r_{w,l} = 0.7755$, $p-value \approx 0$, $(t_{calc} = 8.86)$ *)*

Make	Model	W Weight (LBS)	L Length (IN)	D DriveTraincod 1=Front 2=Rear 3=All
Audi	A4 1.8T 4dr	3252	179	1
Audi	A41.8T convertible 2dr	3638	180	1
Audi	A4 3.0 4dr	3462	179	1
Audi	A4 3.0 Quattro 4dr manual	3583	179	3
Audi	A4 3.0 Quattro 4dr auto	3627	179	3
Audi	A6 3.0 4dr	3561	192	1
Audi	A6 3.0 Quattro 4dr	3880	192	3
Audi	A4 3.0 convertible 2dr	3814	180	1
Audi	A4 3.0 Quattro convertible 2dr	4013	180	3
Audi	A6 2.7 Turbo Quattro 4dr	3836	192	3
Audi	A6 4.2 Quattro 4dr	4024	193	3
Audi	A8 L Quattro 4dr	4399	204	3
Audi	S4 Quattro 4dr	3825	179	3
Audi	RS 6 4dr	4024	191	1
Audi	TT 1.8 convertible 2dr (coupe)	3131	159	1
Audi	TT 1.8 Quattro 2dr (convertible)	2921	159	3
Audi	TT 3.2 coupe 2dr (convertible)	3351	159	3
Audi	A6 3.0 Avant Quattro	4035	192	3
Audi	S4 Avant Quattro	3936	179	3
BMW	X3 3.0i	4023	180	3
BMW	X5 4.4i	4824	184	3
BMW	325i 4dr	3219	176	2
BMW	325Ci 2dr	3197	177	2
BMW	325Ci convertible 2dr	3560	177	2
BMW	325xi 4dr	3461	176	3
BMW	330i 4dr	3285	176	2
BMW	330Ci 2dr	3285	176	2
BMW	330xi 4dr	3483	176	3
BMW	525i 4dr	3428	191	2
BMW	330Ci convertible 2dr	3616	177	2
BMW	530i 4dr	3472	191	2
BMW	545iA 4dr	3814	191	2
BMW	745i 4dr	4376	198	2
BMW	745Li 4dr	4464	204	2
BMW	M3 coupe 2dr	3415	177	2
BMW	M3 convertible 2dr	3781	177	2
BMW	Z4 convertible 2.5i 2dr	2932	161	2
BMW	Z4 convertible 3.0i 2dr	2998	161	2
BMW	325xi Sport	3594	176	3
Volkswagen	Touareg V6	5086	187	3
Volkswagen	Golf GLS 4dr	2897	165	1

calcolare la stima delle covarianze tra i tre stimatori dei parametri del modello di regressione stimato. Testare l'ipotesi nulla che i tre stimatori sono mutuamente non correlati al livello di significatività 5%.

(Risposta: $cov(B_0,B_1) = -0,36576$, $cov(B_0,B_2) = -0,261255$, $cov(B_1,B_2) = 0$, *accetto* $H_0 : r_{12} = 0$ *(*$t_{calc} = 0$*), rifiuto* $H_0 : r_{01} = 0$ *(*$t_{calc} = -4.46$*) e* $H_0 : r_{02} = 0$ *(*$t_{calc} = -4.13$*))*

- **Esercizio 7** X

Data la parte di *output* di un modello di regressione lineare:

```
Predictor         Coef    SE Coef       T      P
Constant       -48.972      7.152   -6.85  0.000
x1              0.3861     0.1302    2.96  0.006
x2              2.0711     0.2791    7.42  0.000
x3            -0.01424    0.01219   -1.17  0.253
x4            0.144976   0.008405   17.25  0.000

Residual standard error: 3.05929   on 27 degrees of freedom
```

β_1 β_2 β_3 β_4

$\to n-2$

a) Calcolare l'intervallo di fiducia al livello 98% per il parametro β_2.
b) Per quale parametro/i non si può rifiutare l'ipotesi che esso sia nullo con α=2%? β_3

(Risposta a) (1.3809, 2.7613); b) β_3*)*

Esercizio 8

Un campione di numerosità *n=4,* relativo alle variabili X_1 e X_2, ha fornito i risultati in tabella:

per la variabile X_1: -3.1 -2.1 0.5 1.7 $\bar{x}_1 = -0.75$

per la variabile X_2: 2.7 1.3 0.6 -1.9 $\bar{x}_2 = 0.675$

Assumendo la normalità delle due variabili stimare la correlazione e valutarne la significatività (utilizzare $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 10\%$: cosa cambia ?)

(Risposta : $t_{calc} = -3.637$ *, quindi si rifiuta* H_0 *al 10%, ma non al 5%)*

- **Esercizio 9** X

Allo scopo di costruire un modello lineare polinomiale del primo ordine che espliciti il peso (in Kg) in funzione dell'altezza (in cm), è stato estratto un campione di 20 persone con età compresa tra i 30 e i 40 anni di sesso maschile. I risultati rilevati sono:

h: 177 176 173 174 176 165 172 172 177 176 180 175 178 183 191 174 172 172 181 193

p: 78 66 82 76 60 61 72 68 73 80 70 77 78 81 72 78 74 63 82 110

$x_1 = 172$ $Y_{1i} = 72, 68, 74, 63$ $n_1 = 4 \to \bar{Y}_1 = 69,25$ com 3 g.d.l. $\Sigma((y_{1i} - \bar{y}_1)^2 = 70,75$

$x_2 = 174$ $Y_{2i} = 76, 78$ $n_2 = 2 \to \bar{Y}_2 = 77$, $\Sigma(Y_{2i} - \bar{Y})^2 = 2$ com 1 g.d.l.

$x_3 = 176$ $Y_{3i} = 60, 80, 66$ $n_3 = 3 \to \bar{Y}_3 = 68.67$, $\Sigma(Y_{3i} - \bar{Y})^2 = 210,67$ com 2 g.d.l

$x_4 = 177$ $Y_{4i} = 73, 78$ $n_4 = 2 \to \bar{Y}_4 = 75,5$, $\underline{\Sigma(Y_{4i} - \bar{Y})^2 = 12.5}$ com 1 g.d.l

Σ: SSp.e = 295.92 com g.dl = 7

Data Display

```
Matrix M1   /* X */

1  177
1  176
1  173
1  174
1  176
1  165
1  172
1  172
1  177
1  176
1  180
1  175
1  178
1  183
1  191
1  174
1  172
1  172
1  181
1  193
```

= var x trasformata in matrice

h

Data Display

```
Matrix M2 /* X' */

  1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
177  176  173  174  176  165  172  172  177  176  180  175  178  183  191  174

  1    1    1    1
172  172  181  193
```

Data Display

[vedi ultima statistica descrittiva]

```
Matrix M3 /* X'X */

  20     3537
3537   626317
```

$X^T X =$; m ; $\sum x_i$; $\sum x_i^2$

$$b_1 = \frac{\sum x_i \cdot y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\underbrace{\sum x_i^2}_{626317} - \underset{20}{m}\bar{x}^2} \quad \left(\frac{3537}{20}\right)^2 = 798,55$$

Data Display

```
Matrix M4 /* (X'X)-1 */

39.2159   -0.221464
-0.2215    0.001252
```

$(X^T X)^{-1} =$

$$\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{Var[B_1]}{\sigma^2} = \frac{1}{798,55}$$

||

Data Display /* (X'X)-1 */

```
Matrix XPXI1

39.2159   -0.221464
-0.2215    0.001252
```

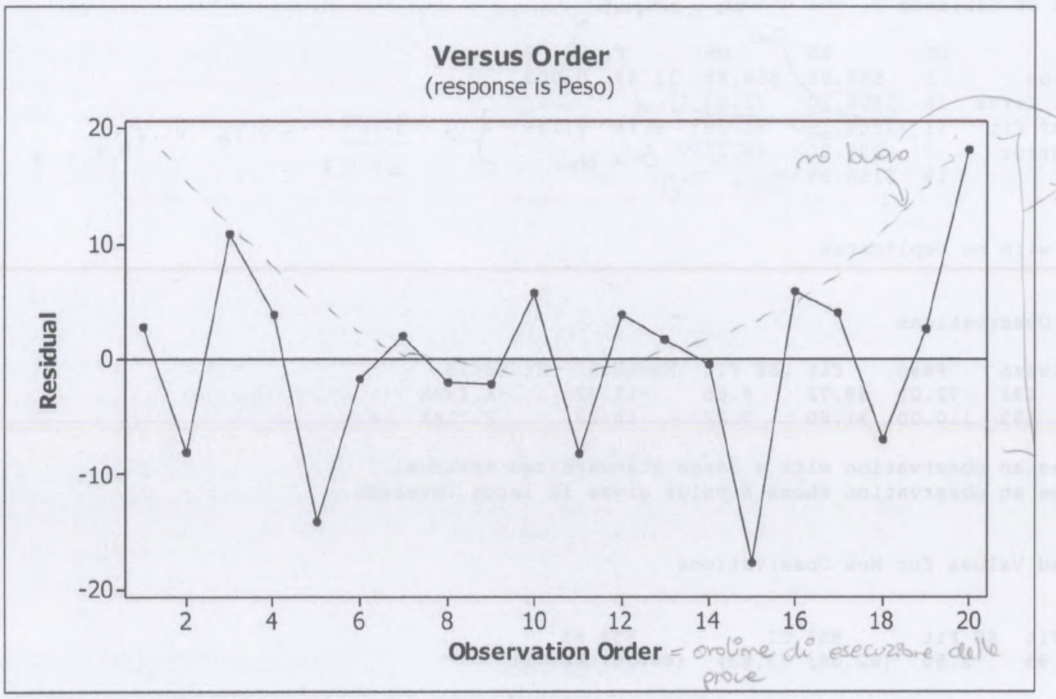
Regression Analysis: Peso versus Altezza

```
The regression equation is
Peso = - 108 + 1.04 Altezza


Predictor      Coef   SE Coef      T      P
Constant    -108.36     53.22  -2.04  0.057
Altezza      1.0371    0.3007   3.45  0.003


S = 8.49870    R-Sq = 39.8%    R-Sq(adj) = 36.4%
```

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$

$\sqrt{Var[B_1]}$

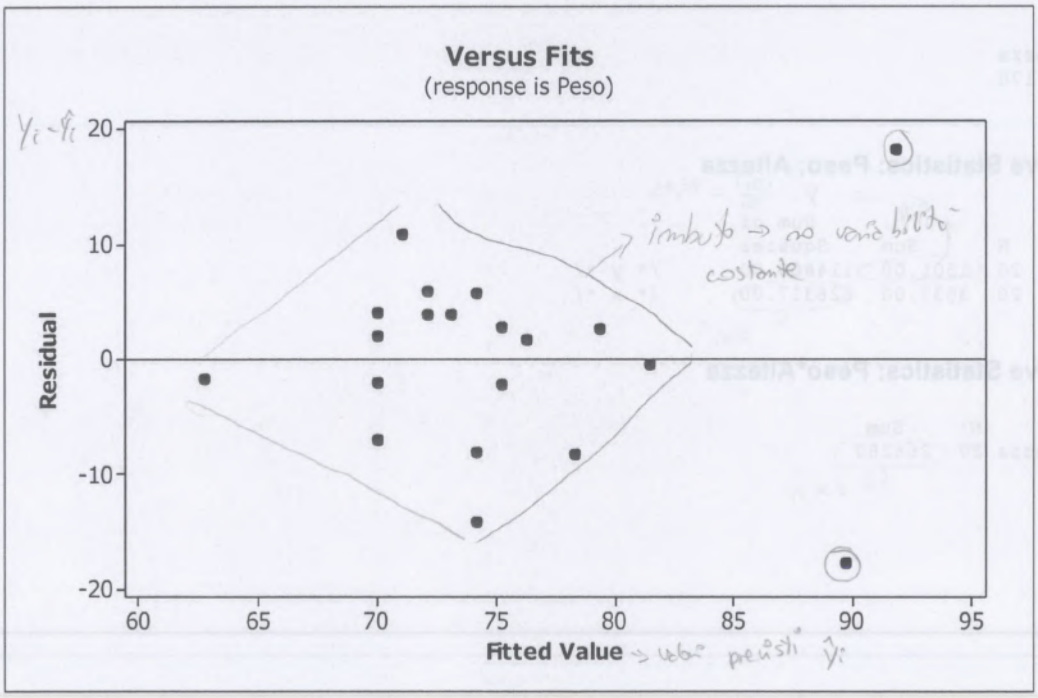
σ



= ordine di esecuzione delle prove

agli estremi c'è una variabilità >

modello non adeguato



imbuto ⇒ no variabilità costante

⇒ valori previsti $\hat{y}_i$

FOGLIO 13

① Dati: $\varepsilon \sim IIND(0, \sigma^2)$ $m = 14$?: $b_0, b_1, \hat{\sigma}^2$

a) $$b_1 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\Sigma x_i y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - m\bar{x}^2} = \frac{2234.3 - \cancel{14}\left(\frac{890}{\cancel{14}}\right)\left(\frac{37.6}{14}\right)}{67182 - 14 \cdot \left(\frac{890}{14}\right)^2} = -0.0147$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = \frac{37.6}{14} - (-0.0147) \cdot \frac{890}{14} = 3.6209$$

b) $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2 = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum^{m} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\Sigma y_i^2 - \overset{14}{m}\bar{y}^2 \quad \left(\frac{37.6}{14}\right)^2$$

63.54

$$\Sigma(b_0 + b_1 x_i - \bar{y})^2 = \Sigma(\bar{y} - b_1\bar{x} + b_1 x_i - \bar{y})^2 = b_1^2 \Sigma(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= b_1^2 \left(\underset{67182}{\Sigma x_i^2} - \overset{14}{m}\bar{x}^2\right) \quad \left(\frac{890}{14}\right)^2 \quad \ldots$$

② Dati: $m = 18$ $b_0 = 27.18$ $b_1 = -0.2476$?: I fiducia, I previsione ($\alpha = 5\%$)

$$S_x^2 = S_{xx} = 4340.7778 \qquad S = 2.864 \;\; \sqrt{\hat{\sigma}^2} \qquad \Sigma x_i = 659 \Rightarrow \hat{y} = 27.18 - 0.2476\,x$$

$$x_0 = 45 \rightarrow \hat{y}(x=45) = 27.18 - 0{,}2476 \cdot 45 = 13.788$$

a) $$(\ell_i, \ell_s) = \hat{Y}_{x=45} \mp t_{m-2,\, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{var}[\hat{Y}_{x=45}]} \rightarrow \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\right)} = \sqrt{2.864^2 \left(\frac{1}{18} + 0.914\right)}$$

$\frac{659}{18}$ $\quad$ 16 $\quad$ 0.975

N.B: $S_{xy} = \frac{1}{m}\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $\qquad (\ell_i\, \ell_s) = 13.788 \mp 2{,}684\sqrt{\ldots}$

b) $$(\ell_i\, \ell_s)_p = \hat{Y}_{x=45} \mp t_{16,\,0.975} \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{var}[\hat{Y}_{x=45}]}$$ } è > di quella di fiducia

⑤ Dati: $m = 17$ $\quad 1 - \alpha = 0{,}95\%$?: I fiducia

$x = 4.5$ $\qquad MSE = MS_{res.} = \hat{\sigma}^2 = 0.68$ $\qquad$ La matrice $X[X] = (X^T X)^{-1}$

$$\hat{y} = 2.51 + 1.25 \cdot 4.5 = 8.135 \qquad t_{15,\, 0{,}975} = 2.131 \qquad \frac{1}{2} = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$$(X^T X)^{-1}\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} \hat{var}[B_0] & \hat{cov}[\hat{B}_0, B_1] \\ \hat{cov}[\hat{B}_0, B_1] & \hat{var}[B_1] \end{pmatrix} \rightarrow \hat{var}[B_0] = \frac{\hat{\sigma}^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \rightarrow \frac{1}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = 0.00245$$

$$\hat{cov}[B_0, B_1] = -\hat{\sigma}^2 \frac{\bar{x}}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\rightarrow +0.022059 = +\frac{\bar{x}}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \rightarrow \bar{x} = \frac{0.022059}{0.00245} \simeq 9 \Rightarrow (\ell_i, \ell_s) \rightarrow 8.135 \mp 2.131 \sqrt{0.68 \left(\frac{1}{17} + (4.5 - 9)^2 \cdot 0.00245\right)}$$

③ Dati: $X^T X$, X, $m = 30$?: $\bar{x}_3$, $S_{x_3}^2$, $r_{x_2 x_3}$

coeff di correlazione

a) $$\bar{x}_3 = \frac{\Sigma x_{i3}}{m} = \frac{276.12}{30} = 9{,}204$$

b) $$S_{x_3}^2 = S_{x_3} S_{x_3} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{30} (x_{i3} - \bar{x}_3)^2 = \underset{2569{,}832}{\Sigma x_{i3}^2} - m\bar{x}_3^2 =$$

$$= 2569.832 - 30 \cdot \left(\frac{276.12}{30}\right)^2 = 0.9475 \cdot 30$$

c) $$r_{x_2 x_3} = \frac{cov[X_2, X_3]}{\sigma_{x_3}\, \sigma_{x_2}}$$

$$\hat{cov}[X, Y] = \frac{1}{m}\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{m}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$\vee\; m-1$ $\qquad$ $\vee\; m-1 \leftarrow m$

⑨ Dati: $\alpha = 5\%$ $\quad$?: β_1

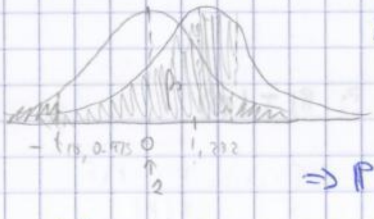
a)

b) $H_0: \beta_1 = \cancel{0}\ 1$ vs $H_A: \beta_1 \neq 1$ $\quad B_1 \sim N(\beta_1, var[B_1])$ sotto H_0:

$var[B_1] = \dfrac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \rightsquigarrow T_{20-2}$ $\quad t_c = \dfrac{\overset{1.0371}{\boxed{b_1}} - \overset{\text{val sotto } H_0}{\boxed{1}}}{\sqrt{\underset{0.3007}{\widehat{var}[B_1]}}} = \dfrac{1.0371 - 1}{0.3007} = 0.123$

$t_{18, 0.975} = 2.101$

c) $\beta_1 = 1.232$ $\quad \beta_{H_A: \beta_1 = 1.232} = \mathbb{P}[b_{1min} < B_1 \leq b_{1max} \mid \beta_1 = 1.232]$



$b_{1min} = -2.101 = \dfrac{b_{1min} - 1}{0.3007} \to b_{1min} = 0.368$

$b_{1max} = 2.101 = \dfrac{b_{1max} - 1}{0.3007} \Rightarrow b_{1max} = 1{,}63$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left[\dfrac{0.368 - 1.232}{0.3007} < T_{18} \leq \dfrac{1{,}63 - 1.232}{0.3007}\right] = \beta$

$\Rightarrow \beta = \mathbb{P}[-2{,}873 < T_{18} \leq 1{,}323] = \mathbb{P}[T_{18} \leq 1.33] - \mathbb{P}[T_{18} \leq -2.87] =$

$0{,}9 - 0{,}005$ $\quad$ e) $\rho_{B_0, B_1} = \dfrac{cov[B_0, B_1]}{\sqrt{var[B_0]}\sqrt{var[B_1]}} \to \hat{\rho}_{B_0, B_1} = \dfrac{-0.2216 / \cancel{\sigma^2}}{\sqrt{39.2154 / \cancel{\sigma}}\ \sqrt{0.001252 / \cancel{\sigma}}} = -0.9995$

⑧ Dati: $n = 4$ $\quad \alpha = 5\%,\ \alpha = 10\%$ $\quad H_0: \rho_{X_1 X_2} = 0$ $\quad$?: $\hat{\rho}$

$X_1 = \{X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}\}$

$X_2 = \{X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{24}\}$

$$\to X = \begin{pmatrix} -3.1 & 2.7 \\ -2.1 & 1.3 \\ 0.5 & 0.6 \\ 1.7 & -1.9 \end{pmatrix} \to Z = \begin{pmatrix} \dfrac{-3.1 - \bar{x}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2}} & \dfrac{2.7 - \bar{x}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}} \\ \dfrac{-2.1 - \bar{x}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} & \dfrac{1.3 - \bar{x}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\to Z^T Z \dfrac{1}{n-1} = R = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1, x_2} \\ r_{x_1, x_2} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{\rho}_{x_1, x_2} = r_{x_1 x_2} = \left(\sum x_{1i} x_{2i} + - n\bar{x}_1 \bar{x}_2\right) \dfrac{1}{\sqrt{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}} = -0.932$

$T_{n-2} = T_2 \to t_c = \dfrac{-0.932}{\sqrt{1 - (-0.932)^2}} \sqrt{4-2} = -3.636$

$t_{2, 0.975} = 4.303$ $\quad t_{2, 0.95} = 2.92$

Es. n° 24 p. 26

Dati: $\mathbb{P}[C_i] = 0{,}75$ $\quad$?: $\mathbb{P}[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5]$

$\mathbb{P}[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5] = (0{,}75)^5 = 0{,}24$

Es. n° 28 p. 21

Dati: $\mathbb{P}[E] = 0.7$ $\quad E_i$ = superare l'esame all'i-esima prova $\quad$?: $\mathbb{P}[E_3]$, $\mathbb{P}[E_i]$, $i \leq \cancel{4}$]

a) $\mathbb{P}[E_3] = \mathbb{P}[\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3] = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0{,}063$ $\quad$ b) $\mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[\bar{E}_1 E_2] + \mathbb{P}[\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3] =$

$= 0.7 + 0.3 \cdot 0.7 + 0{,}063 = 0{,}973$

b) $\mathbb{P}[II-IV) = p+p^2-p^3$ c) $\mathbb{P}[I-IV] = \mathbb{P}[(a\cap d)\cup(c\cap b)] = \mathbb{P}[a\cap d] + \mathbb{P}[c\cap b] +$

$- \mathbb{P}[a\cap d\cap c\cap b] = p^2+p^2-p^4 = 2p^2-p^4 > p^2+p^3-p^4 \to 2p^2 > p^2+p^3$

$p^2>p^3 \to p^2-p^3>0 \to p^2(1-p)>0 \to p^2>0 \ \forall p \quad 1-p>0 \to \forall p\in [0,1[\to$ cresce

$\mathbb{P}[II-IV] = p\,\mathbb{P}[d\cup(a\cap c\cap d)] = p+p^3-p^4 \le p+p^2-p^3 \to$ diminuisce

Es. n° 6 p. 10

Dati: $a=00$ $b=11$ $\mathbb{P}[\overset{T_A}{a}]=\mathbb{P}[\overset{T_B}{b}]=\frac{1}{2}$ T_a/T_A: si trasmette 0/1 ?: $\mathbb{P}[R_A]$, $\mathbb{P}[R_A]+\mathbb{P}[R_B]$

~~$\mathbb{P}[a]$~~ $= T_0'\cap T_0'' = T_A$ R_a/b: si riceve 0/1

$\mathbb{P}$ ~~$\mathbb{P}[b]$~~ $= T_B = T_1'\cap T_1''$

E_i = errore all'i-esima trasmissione

$E = (T_0\cap R_1)\cup(T_1\cap R_0)$

a) $\mathbb{P}[R_A|T_A] = \mathbb{P}[(T_0'\cap R_0')\cap(T_0''\cap R_0'')] = \mathbb{P}[T_0'\cap R_0']\cdot\mathbb{P}[T_0''\cap R_0''] = (1-p)^2 = \mathbb{P}[R_B|T_B]$

$\mathbb{P}[R_A] = \mathbb{P}[R_A|T_A]\mathbb{P}[T_A] + \overbrace{\mathbb{P}[R_A|T_b]}^{p^2}\mathbb{P}[T_b] = \frac{1}{2}(1-p)^2+\frac{1}{2}p^2$

b) $\mathbb{P}[R_A]+\mathbb{P}[R_B] = (1-p)^2+p^2$ c) $1-(\mathbb{P}[R_A]+\mathbb{P}[R_B]) = 1-[(1-p)^2+p^2]$

d) $\mathbb{P}[T_a|R_a] = \frac{\mathbb{P}[R_a|T_a]\mathbb{P}[T_a]}{\mathbb{P}[R_a]} = \frac{\frac{1}{2}(1-p)^2}{\frac{1}{2}(1-p)^2+\frac{1}{2}p^2} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2+p^2}$

Es. n° 6 p. 11

Dati: TOT = 400 = S A = 312 P = 248 AP = 173 N = 43 ?:

$N = S - A\cup P = \bar{S} - \to \#N = \#S - \#(A\cup P) \to \#A+\#P-\#AP = 400-(312+248-173) =$

$= 400 - 387 = 13 \to \#N = 43$ FALSO

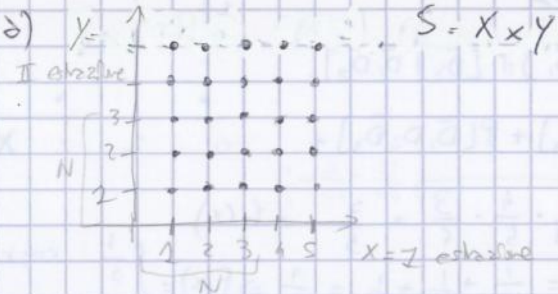
Es. n° 9 p. 15

Dati: 3N, 2R ① ② ③ ④ ⑤ B_1 = la prima è N ?: S, B_1, B_2, B_1B_2

estrazione con reimmissione di 2 palline B_2 = la seconda è N $\mathbb{P}[B_1]$, $\mathbb{P}[B_2]$,

$\mathbb{P}[B_1B_2]$

a)



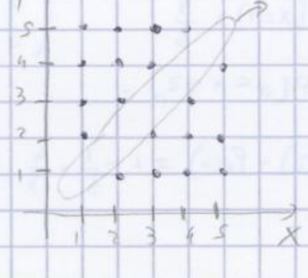
$S = X\times Y$ $B_1 = \{(x,y)\in S \mid x\le 3,\ x>0\}$

$B_2 = \{(x,y)\in S \mid 0<y\le 3\}$

$B_1B_2 = \{(x,y)\in S \mid 0<x\le 3,\ 0<y\le 3\}$

b) $\mathbb{P}[B_1]=\mathbb{P}[B_2]=\frac{3}{5}$ $\mathbb{P}[B_1B_2]=\frac{9}{25}$

c)



alla I e alla II estrazione verrebbe scelta la stessa pallina

$\mathbb{P}[B_1] = \frac{3}{5}$ $\mathbb{P}[B_2] = \mathbb{P}[B_2|\bar{B}_1]\mathbb{P}[\bar{B}_1] + \mathbb{P}[B_2|B_1]\mathbb{P}[B_1] =$

$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20}+\frac{6}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ~~$\mathbb{P}[B_1B_2] = \mathbb{P}[B_2|B_1]$~~

$\mathbb{P}[B_2|B_1] = \frac{\mathbb{P}[B_1B_2]}{\mathbb{P}[B_1]} \to \mathbb{P}[B_1B_2] = \mathbb{P}[B_2|B_1]\mathbb{P}[B_1] = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

A.A. 2014-2015 STATISTICA

FOGLIO N.14: DISTRIBUZIONE DEL MASSIMO E DEL MINIMO

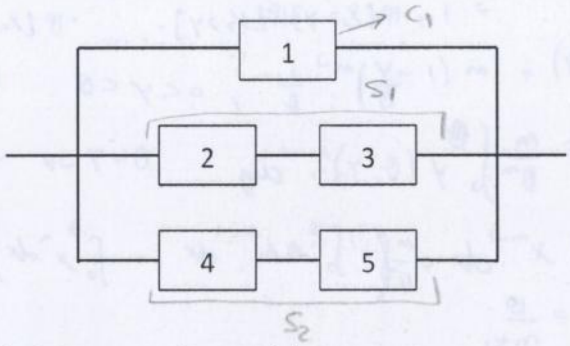
Esercizio 1 Y

Siano $X_1,\dots,X_n$ variabili casuali indipendenti, di legge uniforme sull'intervallo $(0,\vartheta)$.
Determinare la funzione di densità di $Y_n = \max(X_1 \dots X_n)$ e $Y_1 = \min(X_1 \dots X_n)$ e la loro media.

(Risposta: $E(Y_n) = \dfrac{n}{n+1}\vartheta$, $E(Y_1) = \dfrac{\vartheta}{n+1}$*)*

Esercizio 2 X

Un sistema elettronico è costituito da 5 elementi collegati fra loro come in figura. Tali componenti sono uguali ed indipendenti ed hanno un tempo di vita che segue una distribuzione esponenziale di parametro λ:



1. Qual è la densità del tempo di vita del sistema?
2. Se il tempo medio di vita di ciascun componente è di 3000 ore, calcolare il tempo medio di vita del sistema.

(Risposta : 2) 3850 ore)

② Dati: $m=5$, $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_5=\lambda$, $\mathbb{E}[T_i]=3000$ h ?: $f_T(t)$

$T_1, T_2, \dots, T_5$ = v.c. tempo di vita componenti

$F_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $\forall i$ + indipendenza

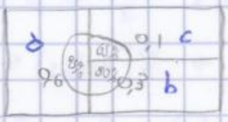
a) $T = \max(T_1, T_{S_1}, T_{S_2})$ $T_{S_1} = \min(T_2, T_3)$ $F_{T_{S_1}}(t) = \mathbb{P}[\min(T_2,T_3) \le t] = 1 - \mathbb{P}[\min(T_2,T_3) > t] =$
$= 1 - \mathbb{P}[T_2 > t; T_3 > t] = 1 - (1 - F_{T_2}(t))(1 - F_{T_3}(t)) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = 1 - e^{-2\lambda t}$ $t>0$

$F_{T_{S_2}}(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$ $F_{C_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $F_T(t) = \mathbb{P}[\max(T_1, T_{S_1}, T_{S_2}) \le t] =$
$= \mathbb{P}[T_1 \le t]\,\mathbb{P}[T_{S_1} \le t]\,\mathbb{P}[T_{S_2} \le t] = (1-e^{-\lambda t})(1-e^{-2\lambda t})^2 = (1-e^{-\lambda t})(1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-4\lambda t}) =$
$= 1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-4\lambda t} - e^{-\lambda t} + 2e^{-3\lambda t} - e^{-5\lambda t} \Rightarrow f_T(t) = 4\lambda e^{-2\lambda t} - 4\lambda e^{-4\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} + - 6e^{-3\lambda t} +$
$+ 5\lambda e^{-5\lambda t}$, $t>0$

b) $\mathbb{E}[T_i] = \dfrac{1}{\lambda} = 3000$ $E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t(4\lambda e^{-2\lambda t} + \dots + 5\lambda e^{-5\lambda t})\,dt$

Es. n°79 p. 36

Dati: f = il regolatore funziona a, b, c = fornitori di provenienza ?: $\mathbb{P}[f]$, $\mathbb{P}[c|f]$



a) $\mathbb{P}[f|a]\mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[f|b]\mathbb{P}[b] + \mathbb{P}[f|c]\mathbb{P}[c] = \mathbb{P}[f] =$

$= 0,95 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,65 \cdot 0,1 = 0,875$

b) $\mathbb{P}[c|f] = \dfrac{\mathbb{P}[f|c]\mathbb{P}[c]}{\mathbb{P}[f]} = \dfrac{0,65 \cdot 0,1}{0,875} = 0,074$

Es. n°7 p. 59

Dati:

x	-2	3	5
$\mathbb{P}[X=x]$	0.3	0.2	0.5

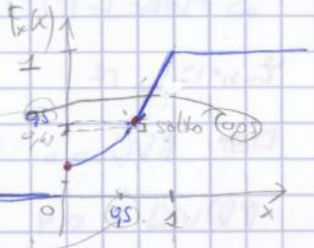
?: σ

~~pon3~~ $\mathbb{E}[X] = -2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 = 2,5$ $\mathbb{E}[X^2] = 4 \cdot 0,3 +$

$+ 9 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,5 = 15,5$ ~~var~~ $\sigma^2 = 15,5 - (2,5)^2 = 9,25 \Rightarrow \sigma = 3,04$

Es. n°4 p. 59

Dati: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2+0.2 & 0 \leq x < 0.5 \\ x & 0.5 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$?:



b) $\mathbb{E}[X] = \int_0^{0,5} x(2x)\,dx + \int_{0,5}^1 x\,dx + 0,05 \cdot 0,5 =$

$= \left[\dfrac{2x^3}{3}\right]_0^{0,5} + \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{0,5}^1 + 0,025 = \dfrac{2}{3}(0,5)^3 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{(0,5)^2}{2}\right) = 0,483$

c) $\mathbb{P}[0,25 < X \leq 0,75] = F_X(0,75) - F_X(0,25) = 0,75 - ((0,25)^2 + 0,2) = 0,4875$

d) $\mathbb{P}[0,25 < X \leq 0,5] = F_X(0,5) - F_X(0,25) = 0,5 - 0,2625 = 0,2375$

Es. n°26 p. 91

Dati: $\mathbb{P}[f] = 5\%$ $m = 10$ X = conta f ?: $\mathbb{P}[X>1]$, $\mathbb{P}[Y \geq 2]$, $\mathbb{P}[X \geq 3]$

$\hookrightarrow X \sim Bin(m, p)$ a) $\mathbb{P}[X>1] = 1 - \underbrace{\mathbb{P}[X \leq 1]}_{\mathbb{P}[X=1]+\mathbb{P}[X=0]} = 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} =$

$= 1 - \left(\dfrac{10!}{1!\,9!}(0,05)^1(0,95)^9 + \dfrac{10!}{0!\,10!}(0,05)^0(0,95)^{10}\right) = 1 - \left(10 \cdot 0,05\,(0,95)^9 + (0,95)^{10}\right) =$

$= 0,086$ b) Y = nr di scatole | scatola con + di 1 pezzo difettoso $\rightarrow p = 0,086$

$m = 3$ $\mathbb{P}[Y \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 2] = 1 - \dfrac{3!}{0!\,3!}(0,086)^0(0,914)^3 - \dfrac{3!}{1!\,2!}(0,086)^1(0,914)^2 +$

$+ \dfrac{3!}{2!\,1!}(0,086)^2(0,914)^1 = 0,021$ c) $m = 30$ $\mathbb{P} - \mathbb{P}[X \leq 3] = 1 - \left(\dfrac{30!}{0!\,30!}(0,05)^0(0,95)^{30} +\right.$

$\left.+ \dfrac{30!}{1!\,29!}(0,05)^1(0,95)^{29} + \dfrac{30!}{2!\,28!}(0,05)^{28}(0,95)^{28} + \dfrac{30!}{3!\,27!}(0,05)^3(0,95)^{27}\right) =$

d) $\mathbb{P}[X>1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1] = 0,01$ $1 - \left({}^{30}(1-p)^{30} + \dfrac{30!}{1!\,29!}p(1-p)^{29}\right) = 0,01$

$\rightarrow (1-p)^{30} + {}^{30}p(1-p)^{29} = 0,99$

③ Dati: $\mathbb{E}[X] = 3$ $\quad \mathbb{P}[-2 < X < 8]$ $\quad$?: $1 - \frac{1}{t^2}$

$\mathbb{E}[X^2] = 13$ $\quad \sigma_X^2 = 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4$ $\quad \mathbb{P}[|X - \mu_X| < t\sigma_X] > 1 - \frac{1}{t^2}$

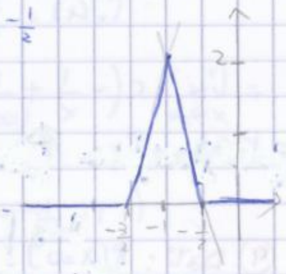
$\mathbb{P}[-5 < X - 3 < 5] = \mathbb{P}[|X-3| < 5] > 1 \quad t\sigma_X = 5 \implies t = \frac{5}{2}\sigma_X \Rightarrow \mathbb{P}[|X-3| < 5] \geq 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$\mathbb{P}[|X-3| < 5] \geq \frac{21}{25} = \frac{25-4}{25} \quad \frac{21}{25}$

④ Dati: $f_X(x) = \begin{cases} 2(1 - 2|x+1|) & -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad$?: $F_X(x)$, $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}[X]$, Q_1

$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1 + 2(x+1)) = 2(1+2x+2) = 2(2x+3) & \text{per } -\frac{3}{2} < x < -1 \\ 2(1 - 2x - 2) = 2(-2x-1) & \text{per } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad f_X(x) \geq 0 \;\; \forall x$

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ per $-\frac{3}{2} < x < -1$ $\quad F_X = 2\int_{-\frac{3}{2}} (2t+3)\,dt =$

$= 2[t^2 + 3t]_{-\frac{3}{2}} = 2\left[1 - 3 + \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right] = 2\left[\frac{-8-9+18}{4}\right] = \frac{1}{2}$ per $-1 < x < -\frac{1}{2}$

$\int F_X(x) = \frac{1}{2} + 2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t-1)\,dt$

⑤ Dati: $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in]0, \infty[\\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \in]0, \infty[\\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad$?: p.d.f.

$f(x) = (\theta + 1) f_1(x) - \theta f_2(x) \quad 0 < \theta < 1$

$e^{-x} > 0 \;\; \forall x \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} (-e^{-x} + e^0) = 1$

$2e^{-2x} > 0 \;\; \forall x \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx = [-e^{-2x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \to \infty} [-e^{-2x} + e^0] = 2$

$(\theta+1)e^{-x} - 2\theta e^{-2x} > 0 \to (\theta+1)e^{-x} > 2\theta e^{-2x} \to (\theta+1) > 2\theta e^{-x} \to e^{-x} < \frac{\theta+1}{2\theta}$

$e^{-x} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\theta} \quad \frac{1}{2\theta} \geq \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2\theta} \geq 1 \to e^{-x} < 1 \;\; \forall x \in]0, +\infty[\to f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in]0, +\infty[$

$\int_0^{+\infty} [(\theta+1)e^{-x} - 2\theta e^{-2x}]\,dx = (\theta+1)[-e^{-x}]_0^{+\infty} - \theta[-e^{-2x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \to \infty} [-(\theta+1)e^{-x} + (\theta+1) + 2\theta e^{-2x} - 2\theta] =$

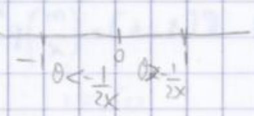
$= 1$

⑥ Dati: $f_X(x) = \begin{cases} |1-x| & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad$?: $\mathbb{E}[X]$, $\text{var}[X]$

⑩ Dati: $f_x(x;\theta) = \begin{cases} (\theta x + \frac{1}{2}) & -1<x<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$?: $\theta \mid f_x$ p.d.f., μ_x, $med[X]$, $\theta \mid var[X]$ max

a) $\theta x + \frac{1}{2} \geq 0 \rightarrow \theta x > -\frac{1}{2} \rightarrow \theta \geq -\frac{1}{2x}$ per $x>0$ $\int_{-1}^{1} (\theta x + \frac{1}{2}) dx = [\frac{\theta x^2}{2} + \frac{x}{2}]_{-1}^{1} =$

$\hookrightarrow \theta \leq -\frac{1}{2x}$ per $x<0$ $= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} = 1$



$\rightarrow \theta > -\frac{1}{2} \wedge \theta < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$

b) $\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{1} (\theta x^2 + \frac{1}{2}x) dx = [\frac{\theta x^3}{3} + \frac{x^2}{4}]_{-1}^{1} = \frac{\theta}{3} + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{\theta}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{2\theta}{3}$ ~~med~~

$\int_{-1}^{med(x)} (\theta x + \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{2} = [\frac{\theta}{2} med^2(x) + \frac{med(x)}{2} - \frac{\theta}{2} + \cancel{\frac{1}{2}}] = \cancel{\frac{1}{2}}$ $z = med(x)$

$\Rightarrow \theta z^2 + z - \theta = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\theta^2}}{2\theta} = med(x)$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^{1} (\theta x^3 + \frac{x^2}{2}) dx = [\frac{\theta x^4}{4} + \frac{x^3}{6}]_{-1}^{1} = \cancel{\frac{\theta}{4}} + \frac{1}{6} - \cancel{\frac{\theta}{4}} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ $var[X] = \frac{1}{3} - \frac{4\theta^2}{9}$

~~var[X]~~ $var[X] = max \rightarrow \theta = 0$ $(var'[X] = -\frac{8\theta}{9} = 0 \rightarrow \theta = 0)$

⑰ Dati: $f_x(x) = \begin{cases} k & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$?: k, μ_x, σ_x^2,

a) $\int_a^b k\,dx = [\ ]_a^b = [kx]_a^b = [kb - ka] = 1 \rightarrow k(b-a) = 1 \rightarrow k = \frac{1}{b-a}$

b) $\int_a^b kx\,dx = k[\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{k}{2}[b^2 - a^2] = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2} = \mathbb{E}[X]$

c) $\mathbb{E}[X^2] = \frac{k}{3}[x^3]_a^b = \frac{k}{3}[b^3 - a^3] =$ ~~$(b-a)(b^2$~~ ab $\frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)}$

$\sigma_x^2 = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$ d) ??

⑨ Dati: ① ② ③ X= "Nr di T" ?: $\mathbb{E}[X]$

$\mathbb{P}[X=0] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{2}(\frac{4+2+1}{8}) = \frac{7}{16}$ $\mathbb{E}[X] = 0 + \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} =$

$\mathbb{P}[X=1] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{7}{16}$ ... $= \frac{7+6+3}{16} = 1$

$\mathbb{P}[X=2] = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{2}(\frac{2+1}{8}) = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}[X=3] = \frac{1}{2}(0 + 0 + \frac{1}{8}) = \frac{1}{16}$

③ Dati: $f_x(x) = \begin{cases} 1/8 & x = \pm 1 \\ 6/8 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $K = 2$?: $\mathbb{P}[|X - \mu_x| \geq K\sigma_x] \leq \frac{1}{K^2}$

$\mu_x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$ $\sigma_x^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \rightarrow \sigma_x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}[|X| \geq 1] \leq \frac{1}{4}$

~~8) CAB~~

a) $\mathbb{P}\left[\frac{X-495,5}{6,45} < -4,638\right] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 4,134] = 1 - 0,9484 = 0,0516 = 5,16\%$

$\mathbb{P}[Z > 3,023] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 3,023] = 1 - 0,9987 = 0,0013 = 0,13\%$

b) ~~$\mu = 500,24$~~ $\mu = 499,76$ e $\sigma_x = 6,45$

c) $\mu = 500,24$ $\mathbb{P}[X > 515] \leq 2,5\%$

⑥ Dati: $X \sim N(2, \sqrt{2})$?: $\mathbb{P}[|X-1| \leq 2]$

$\mathbb{P}[-2 < X-1 \leq 2] = \mathbb{P}[-3 < X-2 \leq 1] = \mathbb{P}\left[-\frac{3}{\sqrt{2}} \leq Z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

⑦ Dati: $\mu > 0$, $\sigma^2 = \mu^2 \rightarrow \sigma = \mu$?: $\mathbb{P}[X < -\mu \mid X < \mu]$

$\mathbb{P}[X < -\mu \mid X < \mu] = \frac{\mathbb{P}[X < -\mu, X < \mu]}{\mathbb{P}[X < \mu]} = \frac{\mathbb{P}[X < -\mu]}{\mathbb{P}[X < \mu]} = \frac{\mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\mu} < \frac{-2\mu}{\mu}\right]}{\mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\mu} < 0\right]} =$
$= 2\Phi(-2)$

⑧ Dati: X = durata in h di un circuito ?: $\mathbb{P}[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 > 250]$

$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2} & 100 < x < \infty \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ p: $\mathbb{P}[X > 250]$

Y_i = durata dell'i-esimo circuito

$F_X(x) = \int_{100}^{x} \frac{100}{x^2}\,dx = 100\left[-x^{-1}\right]_{100}^{x} = 100\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{100}\right] = 1 - \frac{100}{x}$

$\mathbb{P}[X > 250] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 250] = 1 - \left(1 - \frac{100}{250}\right) = 0,4$ $\mathbb{P}[Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 > 250] = (0,4)^4$

⑨ Dati: $p = 0,25$ $n = 10$ X = # piante gerani rosse ?: $\mathbb{P}[X=6]$, $\mathbb{P}[X \geq 6]$, ...

a) $\mathbb{P}[X=6] = \binom{10}{6}(0,25)^6(0,75)^4 = 210 \cdot 0,00024 \cdot 0,3164 = 0,016$

0,9803

b) $\mathbb{P}[X \geq 6] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 5] = 0,0197$

c) $\mathbb{P}[X=1] = 10\,(0,25)(0,75)^9 = 0,1877$

d) una delle 10 piante è rossa Y = # piante rosse oltre la prefissata $\sim \text{bin}(9, 0.25)$

$\mathbb{P}[Y=5] = \binom{9}{5}(0,25)^5(0,75)^4 = 126 \cdot 0,000976 \cdot 0,3164 = 0,0389$

$\mathbb{P}[Y \geq 5] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 4] = 0,0489$ $\mathbb{P}[Y=0] = (0,75)^9 = 0,075$

e) almeno 1 tra le 10 piante è rossa $\Rightarrow \mathbb{P}[X=6 \mid X \geq 1] = \frac{\mathbb{P}[X=6, X \geq 1]}{\mathbb{P}[X \geq 1]} =$

$= \frac{\mathbb{P}[X=6]}{\mathbb{P}[X \geq 1]} = \frac{0,016}{1 - \mathbb{P}[X \leq 0]} = \frac{0,016}{1 - 0,0563} =$

$\frac{\mathbb{P}[X \geq 6]}{\mathbb{P}[X \geq 1]} = \frac{0,0197}{0,9437} =$ $\mathbb{P}[X=1 \mid X \geq 1] = \frac{\mathbb{P}[X=1]}{0,9437} = \frac{0,1877}{0,9437} = 0,1989$

$\Phi(1{,}67) - (1 - \Phi(1)) = 0.9525 - (1 - 0.8413) = 0.794$

$\mathbb{P}\left[\frac{9{,}6-10}{\sqrt{0.12}} < Z_2 < \frac{0.4}{0{,}35}\right] = \mathbb{P}[-1.14 < Z_2 < 1.14] = 0.75 \quad \mathbb{P}[-0.6 < Z_3 < 0.2] = 0.\cancel{65}$

$\mathbb{P}[9.6 < X < 10.4] = 0.6 \times 0.794 + 0.3 \times 0.75 + 0.10 \times 0.\cancel{6}5 = 0.77$

$\mathbb{P}[F_1 \mid 9.6 < X < 10.4] = \frac{0.6 \cdot 0.794}{0.77} = 0{,}62$

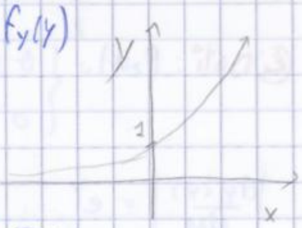
c) $n = 20$ $\quad Y = \#$ pezzi difettosi $\quad p = \mathbb{P}[X_3 \in (9.6, 10.4)] = 0.65$

$Y \sim (20, 0.65) \quad \mathbb{P}[\cancel{Y} \leq \cancel{2}] = \mathbb{P}[x=0] + \mathbb{P}[x=2] = (0.65)^{\cancel{20}} + 20(0.65)^{19}(0.35)^{19} =$

$= \cancel{0.76}\,(0.65)^{19}(0.65 + \cancel{7}) = \cancel{(0.65)^{19}\,7.35} = (0.65)^{19}\,7.65 = 0.002133$

Es. CAP 4

① Dati: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y = e^X$ $\qquad$?: $f_Y(y)$



$D_x =]-\infty, +\infty[\rightarrow D_y\,]0, +\infty[\quad g(x) = e^x \Rightarrow g^{-1}(y) = x = \ln y$

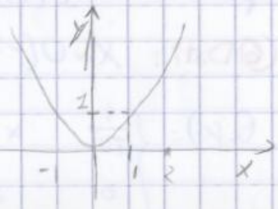
$f_Y(y) = \left|\frac{d g^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu_x}{\sigma}\right)^2} \quad \forall y > 0$

② Dati: $X \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad Y = 2x - 1$ $\quad g^{-1}(y) = x = \frac{y+1}{2}$ $\qquad$?: $F_Y(y)$

$f_Y(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y+1}{2} - \cancel{0}}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y+1}{2\sigma}\right)^2} \rightarrow Y \sim N(-1, 2\sigma)$

$F_Y(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(y+1)^2}\, dy = \mathbb{P}[Y < y] = \mathbb{P}\left[Z < \frac{y+1}{2\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{y+1}{2\sigma}\right)$

③ Dati: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x+1) & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad y = x^2$ $\qquad$?: $f_Y(y)$



$D_x \in]-1, 2[\quad , \quad D_y =]0, +\cancel{4}[\quad$ per $x \in]-1, 0[$

$g^{-1}(y) = -\sqrt{\cancel{x}}$, per $x \in]0, 1[\quad g^{-1}(y) = \sqrt{y}$, per $x \in]\cancel{0}, 2[$

$g^{-1}(y) = \sqrt{y} \rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \left|\frac{d(-\sqrt{y})}{dy}\right| \frac{2}{9}(-\sqrt{y}+1) + \left|\frac{d(\sqrt{y})}{dy}\right| \frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) & \text{per } y \in]0, 1[\\ \left|\frac{d(\sqrt{y})}{dy}\right| \frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) & \text{per } y \in]\cancel{0}, \quad [\\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{2}{9}(-\sqrt{y}+1) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) = \frac{2}{9\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ \frac{2}{9}\frac{1}{2\sqrt{y}}(\sqrt{y}+1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}+1}{9\sqrt{y}} & \cancel{x \geq 1}\ 1 \leq y < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

④ Dati: $F_X(x)$, $F_X(x)$, $g(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ $\qquad$?: $F_Y(y)$

$y = g(x)$ $\qquad D_x = \mathbb{R} \quad D_y = [-1, 1]$

~~$g^{-1}(y) = y$ per $y \in [$~~$-1, 1]$ $\quad \mathbb{P}[Y \leq y] = F_Y(y)$ $\quad$ se $y < -1 \rightarrow F_Y(y) = 0$

se $y \geq 1$ $F_Y(y) = 1$ $\quad$ per $y \in [-1; 1[\rightarrow \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[X \leq y] = F_X(y)$

a) $\begin{cases} \frac{b+a}{2} = 10 \rightarrow b = 20-a = 10+\sqrt{6} \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 4 \rightarrow (20-a-a)^2 = 48 \rightarrow 20-2a = \sqrt{48} \end{cases}$ $\rightarrow (a,b) = (10-\sqrt{6}, 10+\sqrt{6})$ $\Rightarrow 2(10-a) = 2\sqrt{6} \rightarrow a = 10-\sqrt{6}$

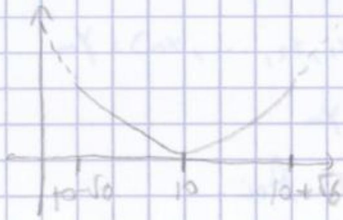
b) $\mathbb{P}[9.2 \geq X_A, X_A > 10.8] = F_x(9.2) + (1-F_x(10.8)) = $ con $F_{X_A}(x) = \left(\frac{x-10+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}\right)^2$

$\quad '' \quad '' \quad '' \quad = \frac{1.6495}{4.8989} ~~+0.337~~ + \left(1 - \frac{3.249}{4.8989}\right) = 0.3367 + 0.3367 =$

$= 0.6734$ $\quad \mathbb{P}[~~9.2~~\ X_B < 9,2,\ X_B > 10.8] = \mathbb{P}[Z < -0.4] + (1-\mathbb{P}[Z<0.4]) =$

$= 0.689$ $\quad \mathbb{P}[x \notin (9.2, 10.8)] = 0,7 \cdot 0,6734 + 0,3 \cdot 0,689 = 0,47 + 0,2067 = 0,67$

c) $Y = \left[x - \frac{(a+b)}{2}\right]^2 = (X-10)^2 \quad X \in [10-\sqrt{6}, 10+\sqrt{6}] \rightarrow D_Y = [0;6]$



$x > 10 \rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{y} + 10 \qquad x < 10 \quad g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} + 10$

$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{4\sqrt{6y}} = \frac{1}{2\sqrt{6y}} \quad y \in [0,6]$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X-10)^2] = Var[X] = 4$

⑰ Dati: $f_X(x) = \begin{cases} k\frac{(\ln x)^2}{x} & 1 < x < e \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad Y = e^{\sqrt[3]{x}}$ $\quad$?: $k, F_X(x), f_Y(y)$ se $X \sim U(0,1)$

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{k}{3}\int_1^e 3\frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{k}{3}[(\ln x)^3]_1^e = \frac{k}{3}[1-0] = 1 \rightarrow k=3$

$\Rightarrow f_X(x) = 3\frac{(\ln x)^2}{x}$ $\qquad$ b) $F_X(x) = \int_1^x 3\frac{(\ln x)^2}{x}dx = [(\ln x)^3]_1^x = \ln^3 x$

c) $X \sim U[0,1] \quad g(x) = Y = e^{\sqrt[3]{x}} \rightarrow \sqrt[3]{x} \quad D_X = [0,1] \rightarrow D_Y = [1, e]$

$g \quad \sqrt[3]{x} = \ln y \rightarrow x = (\ln y)^3 \rightarrow f_Y(y) = 3\frac{(\ln x)^2}{x}$

Es. CAP 5

① Dati: TOT = 1000, 200 campioni con $n = 25$ $\qquad$?: $\mathbb{E}[X_n], \sqrt{Var[X_n]}$,

X = altezze studenti $\sim N(68,5,\ 2.7^2) \quad I = (67,9,\ 69.2)$

a) $\mathbb{E}[X_n] = 68.5 \quad \sqrt{Var[X_{25}]} = \frac{2.7}{\sqrt{25}} = 0.54 \rightarrow X_{25} \sim N(68.5,\ 0.54^2)$

b) $\mathbb{P}[67.9 < X_n < 69.2] = \mathbb{P}\left[\frac{67.9-68.5}{0.54} < \frac{X_n - 68.5}{0.54} < \frac{69.2-68.5}{0.54}\right] = \mathbb{P}[-1,11 < ~~Z_{24}~~ <$

$1.296] = \mathbb{P}[~~Z_{24}~~ \leq 1.296] - (1 - \mathbb{P}[~~Z_{24}~~ \leq 1.11]) = 0.9025 - (1-0.8665) = 0.769$

nr medie campionarie: $0.769 \cdot 200 \cong 154$

c) $\mathbb{P}[X_n < 67] = \mathbb{P}[Z < -2.77] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 2.77] = 1 - 0.9972 = 0.0028$ nr. medie

campionarie $= 0.0028 \cdot 200 = 0.56 \approx 1$

④ Dati: $X \sim U(0,\theta)$, n $\qquad$?: θ_{MM}

$\mathbb{E}[X] = \mu' = \frac{\theta}{2} \rightarrow \theta = 2\mu' \qquad M' = \hat{\mu}' = \frac{\sum x_i}{n} \rightarrow \theta = \frac{2}{n}\sum_1^n x_i = 2\overline{X}_n$

⑪ Dati: $\bar{X}_m = \frac{\Sigma x_i}{m} = \hat{\mu}$ → corretto ?: consistenza

$var[\bar{X}_m] = \frac{var}{m^2}[\Sigma x_i] = \frac{\Sigma var[x_i]}{m^2} = \frac{m\sigma^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m}$ $\lim_{m\to\infty} \frac{\sigma^2}{m} = 0$ → $\bar{X}_m$ consistente

⑫ Dati: $S^2_m = \frac{1}{m-1} \sum_i^m (x_i - \bar{x}_m)^2 = \hat{\sigma}^2$ → corretto ?: consistenza

$var[S^2_m] = \frac{var}{(m-1)^2}[\Sigma_i (x_i - \bar{x}_m)^2] = \frac{1}{(m-1)^2} var[\Sigma_i (x_i^2 + \bar{x}_m^2 - 2x_i\bar{x}_m)] = var[\Sigma x_i^2 + \overbrace{\Sigma\bar{x}_m^2}^{m\bar{x}_m^2} +$

$- 2\bar{x}_m \underbrace{\sum_i^n x_i}_{m\bar{x}_m}] \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{1}{(m-1)^2} var[\Sigma x_i^2 - m\bar{x}_m^2] \ldots = \frac{1}{m}\left(\mu_4 - \frac{m-3}{m-1}\sigma^4\right)$

$\lim_{m\to\infty} var[S^2_m] = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(\mu_4 - \frac{m-3}{m-1}\sigma^4\right) = 0$ → S^2_m consistente

⑬ Dati: $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ $var[X_i] = 1$?: correttezza

$T_1(m) = \hat{\mu} = \frac{1}{m}\Sigma x_i$, $T_2(m) = \hat{\mu} = \frac{2}{m(m+1)} \sum_i^m i \cdot x_i$, $T_3(m) = \sum_i^m (-1)^i \cdot x_i = \hat{\mu}$

$T_1(m) \equiv \bar{x}_m$ corretto $\mathbb{E}[T_2] = \frac{2}{m(m+1)} \mathbb{E}[\sum^m i x_i] = \frac{2}{m(m+1)} \underbrace{\Sigma i}_{\frac{m(m+1)}{2}} \overbrace{\mathbb{E}[x_i]}^{\mu} = \frac{2}{m(m+1)} \frac{m(m+1)}{2} \mu$

$T_2(m)$ corretto $\mathbb{E}[T_3] = \mathbb{E}[\sum_i^m (-1)^i x_i] = \Sigma(-1)^i \underbrace{\mathbb{E}[x_i]}_{\mu} = \mu \sum_{i=1}^m (-1)^i$ 2 se m pari

$\mathbb{E}[T_3] = 0$ se m dispari $\mathbb{E}[T_3] = \mu$ non corretto

⑯ Dati: $x \sim N$ $\mathbb{P}[|\bar{x}_m - \mu| < \frac{\sigma}{5}] \geq 0.9$?: m, m; (senza ~N)

$\mathbb{P}[-\frac{\sigma}{5}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sigma} \leq \frac{\bar{x}_m - \mu}{\sigma/\sqrt{m}} < \frac{\sigma}{5}\frac{\sqrt{m}}{\sigma}] = \mathbb{P}[-\frac{\sqrt{m}}{5} \leq Z < \frac{\sqrt{m}}{5}] = 1 - 2(\mathbb{P}[Z > \frac{\sqrt{m}}{5}] =$

$= 1 - 2(1 - \mathbb{P}[Z \leq \frac{\sqrt{m}}{5}]) = 0.90$ → $1 - 2 + 2\mathbb{P}[Z \leq \frac{\sqrt{m}}{5}] = 0.90$ → $\mathbb{P}[Z \leq \frac{\sqrt{m}}{5}) = 0.95$

$\frac{\sqrt{m}}{5} = 1,645$ → $m \approx 68$; $\mathbb{P}[|\bar{x}_m - \mu| < t\overset{\sigma/\sqrt{m}}{\sigma_x}] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$ $\varepsilon = t\frac{\sigma}{\sqrt{m}}$ → $t = \frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sigma}$

$\mathbb{P}[|\bar{x}_m - \mu| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{m\varepsilon^2}$ $\varepsilon = \frac{\sigma}{5}$ → $\mathbb{P}[|\bar{x}_m - \mu| \leq \frac{\sigma}{5}) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{m \cdot \frac{\sigma^2}{25}} = 1 - \frac{25}{m} = 0.90$

$\frac{25}{m} = 0.10$ → $m = 250$

⑭ Dati: $T_1 = \frac{1}{5}\sum_i^5 x_i$ $T_2 = \frac{1}{15}\sum_i^5 i x_i = \hat{\mu}, \sigma^2$?: correttezza, efficienza

$T_1 \equiv \bar{X}_5$ corretto $\mathbb{E}[T_2] = \frac{1}{15}\mathbb{E}[\Sigma i x_i] = \frac{\sum_i^5 i \overbrace{\mathbb{E}[x_i]}^{\mu}}{15} = \frac{\mu \sum_i^5 i}{15} = \mu$

$var[T_1] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{5}}$ $var[T_2] = \frac{1}{15^2} var[\sum_i^5 x_i \cdot i] = \frac{\Sigma i^2 var[x_i]}{15^2} = \frac{\sigma^2}{15^2}\sum^5 i^2 =$

$\frac{\sigma^2}{15^2} \cdot 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = \frac{\sigma^2}{225} \cdot 55 = \frac{11}{45}\sigma^2$ $eff(T_2|T_1) = \frac{var[T_1]}{var[T_2]} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{45}{11\sigma^2} = \frac{9}{11} < 1$

→ T_1 è + efficiente

⑮ Dati: μ, σ^2 $T_m = \hat{\mu} = \frac{X_1 + X_m}{2} + \frac{1}{2(m-1)}\sum_{i=2}^{m-1} x_i$?: correttezza, consistenza

$\mathbb{E}[T_m] = \mathbb{E}[\frac{X_1 + X_m}{2}] + \mathbb{E}[\frac{\sum_{i=2}^{m-1} x_i}{2(m-1)}] = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{2} + \frac{\mathbb{E}[X_m]}{2} + \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \overbrace{\mathbb{E}[x_i]}^{\mu}}{2(m-1)} = \mu +$

$+ \frac{\mu(m-2)}{2(m+1)} = \frac{2\mu(m+1) + \mu(m-2)}{2(m+1)} = \frac{2m\mu + 2\mu + m\mu - 2\mu}{2(m+1)} = \frac{(3m-4)}{2(m+1)}\mu$

T_m non corretto $\mathbb{E}[(\frac{(3m-4)}{2m-2}\mu - \mu)^2] = \mathbb{E}[(\frac{(3m-4)\mu - 2m\mu + 2\mu}{2m-2})^2] =$

$= \mathbb{E}[(\mu\frac{(3m-4-2m+2)}{2m-2})^2] = \mathbb{E}[(\mu\frac{(m-2)}{2m-2})^2] = \mathbb{E}[\mu^2\frac{(m-2)^2}{(2m-2)^2}] = \mu^2\left(\frac{m-2}{2m-2}\right)^2$

b) $\beta_{H_A} = \mathbb{P}[\bar{X}_n \le \bar{X}_{max} \mid H_A \text{ vera}]$ $\quad \bar{X}_{max} = 15 + t_{0.95}\sqrt{\frac{0.64}{40}} = 15.21$

$\beta_1 = \mathbb{P}\left[Z < \frac{15.21 - 14.9}{0.1265}\right] = \mathbb{P}[Z < 2.45] = 0.9929$ $\quad \beta_2 = \mathbb{P}[Z < 0,079] = 0.5319$

$\beta_3 = \mathbb{P}[Z < -2.29] = 1 - 0.9890 = 0.011$

c) $\bar{X}_{max} = 15 + t_{0.975}\frac{0.8}{\sqrt{m}}$ $\quad \bar{X}_{min} = 15 - t_{0.975}\frac{0.8}{\sqrt{m}}$ $\quad (\bar{X}_{min}, \bar{X}_{max}) = \left(15 \mp 1.96 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{m}}\right)$

$\mathbb{P}[\bar{X}_{min} < \bar{X}_n < \bar{X}_{max} \mid \mu = 15.3] = 0.55 \rightarrow \mathbb{P}\left[\frac{15 - 1.96 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{m}} - 15.3}{} < \bar{X}_n <\right.$

$\left.\frac{-0.3 + 1.96 \times 0.8/\sqrt{m}}{0.8/\sqrt{m}}\right] = \mathbb{P}\left[\underbrace{-0.375\sqrt{m} - 1.96}_{\le -2,5} < \bar{X}_m < \frac{0.8}{\sqrt{m}} - 0.375\sqrt{m} + 1.96\right] = 55\%$

$\mathbb{P}\left[\bar{X}_m < \cancel{\frac{0.8}{\sqrt{m}}} - 0.375\sqrt{m} + 1.96\right] = 0.55 \quad \rightarrow -0.375\sqrt{m} + 1.96 = z_{0.55} = 0.125$

$-0.375\sqrt{m} = -1.835 \rightarrow \sqrt{m} = 4.893 \rightarrow m \simeq 24$ (rifare con test monolaterale superiore)

⑤ Dati: $m = 14$ $\quad \alpha = 0,01$ $\left(\alpha/2 = 0,005\right)$ $\qquad$?: Test H_0

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $\quad H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad \bar{X}'_{14} = 94.67$ $\quad \bar{X}''_{14} = 102.43$

④ Dati: $\bar{Y} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ $\quad m = 10$ $\quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma^2}{m}\right)$ $\qquad$?: Test $\mu_1 = \mu_2$, β

$\bar{X}_1 = 76$ $\quad \bar{X}_2 = 73.27$ $\quad S_1^2 = 6.25$ $\quad S_2^2 = 2.77$

test su σ_1^2 e σ_2^2: ~~S_1^2/σ~~ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\quad H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\rightarrow F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} =$

$= \frac{6.25}{2.77} = 2.26 = f_{9,9,1-\alpha}$, con un livello $1-\alpha = 90\%$ di fiducia (p-value) accetto $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$S^2_{pool} = \frac{9S_1^2 + S_2^2 9}{\cancel{10} + \cancel{10} - 2} = \frac{56.25 + 24.93}{18} = \cancel{5.07}\ 4.51$ $\qquad \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{4.51}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)}} \sim T_{18}\right.$

$\frac{76 - 73,27}{2.12 \cdot 0.447} = 2.88 = t_{8,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0.995}$

→ rifiuto $H_0: \mu_1 = \mu_2$ con un rischio del 5%.

b) $H_A: \mu_1 = 75$ $\quad \frac{\bar{X}_1 - \mu_1}{\frac{S_1}{\sqrt{m}}} \sim T_{m-1}$ $\quad \frac{76 - 75}{0.79} \sim t_{9,1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad t_{9,1-\frac{\alpha}{2}} = 1,26$ ~~$\pm t_9$~~,

$t_{9,0.95} = 1.833$ $\qquad t_{9,0.975} = 2.262$ → non rifiuto H_0 con un livello di 95%

c) $\alpha = 0,05$ $\quad (X_{min}, X_{max}) = 75 \mp 2.262 \cdot 0,79 = 75 \mp 1.787$ $\qquad H_A: \mu_1 = 76,26$

$\beta = \mathbb{P}[73,21 < \bar{X}_n < 76.787] = \mathbb{P}\left[-\frac{3.05}{0.79} < T_9 < 0.667\right] = \mathbb{P}[-3.86 < T_9 < 0.667] \simeq$

$\mathbb{P}[T_9 < 0.667]$ (test bilaterale)

⑫ Dati: $\bar{X}_1 = 12,5$ ~~S_1^2~~ , $S_1^2 = 101,17$, $n_1 = 8$?: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $\mu_2 < \mu_1$

$\bar{X}_2 = 10,2$ $S_2^2 = 94,73$ $n_2 = 9$ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_A: \mu_2 < \mu_1$

a) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{7,8}$ ~~f~~ $f_{calc} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 1,067$

$f_{7,8,0.025} = \frac{1}{f_{8,7,0.975}} = \underline{0,204}$ $f_{7,8,0.975} = 4,529$ posso ritenere $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ con un livello di fiducia del 95 %

b) $\alpha = 0.05$ ~~X_2~~ $H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0$ $H_A: \mu_2 - \mu_1 < 0$

$\frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_2)}{S^2_{pool}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim T_{n_1+n_2-2}$ $S^2_{pool} = \frac{(n_1-1)S_1^2 + S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2} =$

$= \frac{7 \cdot 101,17 + 8 \cdot 94,73}{15} = \frac{708,19 + 757,84}{15} = 97,735$

test monolaterale inferiore → $t_{15,0.05} = -t_{15,0.95} = -1.753$ accetto H_0 se $t_c > t_{15,0.05}$

$t_c = \frac{10,2 - 12,5}{\sqrt{97,735}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}} = \frac{-2.3}{9.886\sqrt{0.125 + 0.111}} = \frac{-2.3}{4.8} = -0,48 > -1.753$ → non posso rifiutare H_0 che non è evidente la modif.

⑬ Dati: $n = 120$ $1 - \alpha = 0.99$ $n_1 = 72$ $n_2 = 48$?: (ℓ_i, ℓ_s) per p_1, n

$\hat{p}_1 = \frac{72}{120} = 0,6$ $\hat{p}_2 = \frac{\overset{12}{48}}{120_{30}} = \frac{6}{15} = 0.4$ $p \sim N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

a) $(\ell_i, \ell_s) = 0,6 \mp z_{0.995}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,6 \mp 2,575\sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{120}} = 0,6 \mp 0,115 = (0.485, 0.715)$

b) $2 I_\alpha \leq 0,01$ → con $1 - \alpha = 90\%$ $2 \cdot z_{0.95} \cdot \sqrt{\frac{0.24}{n}} \leq 0.10$ → $\frac{2 \cdot 1,645 \cdot 0.48}{\sqrt{n}} \leq 0.01$

↑ → $n \geq 25971,84$

⑭ Dati: $n' = 150$ $n_1' = 85$ $n_2' = 65$ → $p_1' = 0,56$ $p_1 = 0,6$?: test H_0

$H_0: p_1' = p_1$ $H_A: p_2' \neq p_2$ → $H_0: p_1^* - p_1' = 0$ $\alpha = 0.05$

$\sigma.$ $p_1^* - p_1' \sim \left(p_1^* - p_1', \sqrt{\frac{p_1'(1-p_1')}{n'} + \frac{p_1(1-p_1)}{n}}\right) = \left(0,04, \sqrt{0.00164 + 0.002}\right)$

$\frac{p_1 - p_1'}{\sigma_p} \sim Z$ $z_{0.975} = 1,96^{\sigma_p}$ $z_c = \frac{0,04}{0,06} = 0.66 < 1,96$ → non rifiuto H_0

** b) $\alpha = 1\%$ $(\ell_i, \ell_s) = \left(7.5 \mp z_{0,995}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}\right) = (7.5 \mp 2.575 \cdot 0,428) =$

$= (7.5 \mp 1.10) = (6,4 , 8.6)$

② Dati: $n = 100$ $\bar{x} = 2.7$ $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 225$?:

$H_0: \mu = 3$ $H_0: \sigma^2 = 2.5$ $1 - \alpha = 99\%$ $H_A: \mu = 2.5$

$S^2 = \frac{225}{99} = 2.27$

a) $H_0: \sigma^2 = 2.5$ $H_A: \sigma^2 < 2.5$ $\chi_c > \overbrace{\chi_{99,0.01}}^{\sim 70}$ $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}$

$\chi_c = 89.$ V $\frac{S - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}} \sim Z$ perché $n > 30$ $z_{calc} = \frac{1.5 - 1,58}{1.58/14.14} = -0.716$

① Dati: $\alpha = 1/_{min}$?: $\mathbb{P}[N(0,5)=0]$

$\mathbb{P}[N(0.5)=0] = \frac{e^{-0.5}(0.5)^0}{0!} = 0.60$

② Dati: $\alpha_1 = \frac{20}{30\ min} = \frac{2}{3\ min}$ $\alpha_2 = \frac{30}{30\ min} = 1/_{min}$?: $\mathbb{P}[N_1(45)+N_2(45) \leq 25]$

a) $N_1 + N_2 = N$ $\lambda = \frac{2}{3} \cdot 45 + 45 = 75$ $\mathbb{P}[N(45) \leq 25] = \sum_{x=0}^{25} \frac{e^{-45}(75)^x}{x!}$

b) $\mathbb{P}[N_1(2)=0] \Rightarrow$ $\lambda = \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ $\mathbb{P}[N(2)=0] = \frac{e^{-10/3}(10/3)^0}{0!} = 0.036$

c) $\mathbb{P}[N_1(60)=40 \mid N(60)=100]$ $\lambda = \frac{2}{3} \cdot 60 + 60 = 100$ $\mathbb{P}[N_1(60)=40 \mid N(60)=100] =$

$$\frac{\mathbb{P}[N_1(60)=40]\ \mathbb{P}[N_2(60)=60]}{\mathbb{P}[N(60)=100]} = \frac{\cancel{e^{-40}}(40)^{40}}{40!} \cdot \frac{\cancel{e^{-60}}(60)^{60}}{60!} \cdot \frac{(100)!}{\cancel{e^{-100}}(100)^{100}} = \left(\frac{40}{100}\right)^{40}\left(\frac{60}{100}\right)^{60}\binom{100}{40}$$

d) $\lambda_1 = \frac{2}{3}45 = 30$ $\lambda_2 = 45$ $\lambda = 75$ $\mathbb{P}[N_2(45)=10 \mid N(45)=10] = \frac{\mathbb{P}[N_2(45)=10;\ N(45)=10]}{\mathbb{P}[N(45)=10]} =$

$$= \frac{\mathbb{P}[N_2(45)=10]\ \mathbb{P}[N_1(45)=0]}{\mathbb{P}[N(45)=10]} = \frac{\cancel{e^{-45}}(45)^{10}}{\cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{e^{-30}}(30)^0}{0!} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{e^{-75}}(75)^{10}} = \left(\frac{45}{75}\right)^{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$$

⑥ Dati: $\alpha = \frac{3}{60\ min\ sec}$ $t=5$ $s=5$ $s=20$?: $\mathbb{P}[N(5)=0]$

a) $\mathbb{P}[N(\frac{5}{20})=0] = \frac{e^{-5/20}(5/20)^0}{0!} = e^{-\frac{5}{10}}$ → $e^{-5/20} = 0.778 \vee e^{-1} = 0.368$

b) $\mathbb{P}[N(\frac{5}{20})<2] = \frac{e^{-5/20}(5/20)^0}{0!} + \frac{e^{-\frac{5}{20}}(\frac{5}{20})}{1!} = e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) = 0.97 \vee e^{-1} + e^{-1} = 0.736$

④ Dati: $\alpha_T = \frac{3}{20m}$ $\alpha_L = \frac{2}{10m}$?:

a) $\lambda = \left(\frac{3}{20} + \frac{2}{20}\right)240 = \left(\frac{5}{20}\right)240 = 60$ $\mathbb{P}[N_T(240)=40 \mid N(240)=100] = \frac{e^{-36}(36)^{40}}{40!} \cdot \frac{e^{-24}(24)^{60}}{60!} \cdot \frac{100!}{e^{-60}(60)^{100}}$

b) $\mathbb{P}[N(240)=150] = \frac{e^{-60}(60)^{150}}{150!}$ c) $\mathbb{P}[N(10)=0]$ $\lambda = \left(\frac{3}{20} + \frac{2}{20}\right)10 = 2.5$

$\mathbb{P}[N(10)=0] = \frac{e^{-2.5}(2.5)^0}{0!} = e^{-2.5}$

Es CAP 7:

④ Dati: $X_i \sim Bin(m, p_i)$ $i=1,2,3,4$ $Y = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$?: $\mathbb{E}[Y]$, $var[Y]$

$U = X_1 - 4X_4$ $V = X_1 + 2X_2 - 3X_3$ $\mathbb{E}[X_i] = mp_i$ $var[X_i] = mp_i(1-p_i)$

a) $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_3] - \mathbb{E}[X_4] = mp_1 + mp_2 - mp_3 - mp_4 = m\,[p_1 + p_2 - p_3 - p_4]$

$var[Y] = m[p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + p_3(1-p_3) + p_4(1-p_4)]$

b) ~~var~~[Y] se $\rho(X_i, Y_j) = 0.5 \Rightarrow cov[X_i, X_j] = \sigma_j \sigma_i\ 0.5 = 0.5\sqrt{var[X_i]}\sqrt{var[X_j]}$

$var[Y] = m(p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + p_3(1-p_3) + p_4(1-p_4)) + 2cov[X_1, X_2] - 2cov[X_1, X_3] +$

$-2cov[X_1, X_4] - 2cov[X_2, X_3] + 2cov[X_2, X_4] + 2cov[X_3, X_4] = \ldots + 2\sqrt{m^2 p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)} +$

$- 2m\sqrt{p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)} - 2m\sqrt{p_1(1-p_1)p_4(1-p_4)} \ldots$

c) $cov[U, V] = cov[X_1 - 4X_4, X_1 + 2X_2 - 3X_3] = cov[X_1, X_1] + 2cov[X_1, X_2] +$

② Dati: $\bar{X}_5 = 0{,}56$ $\quad S^2 = \frac{0{,}072}{4} = 0{,}018$ $\quad 1-\alpha = 0.95$ $\quad$?: I_α

$\binom{\ell_i}{\ell_s} = 0{,}56 \mp t_{0.975}\sqrt{\frac{0{,}018}{5}} = 0{,}56 \mp 2{,}776\cdot\frac{0{,}134}{\sqrt5} = 0{,}56 \mp \frac{0{,}3728}{\sqrt5} \Rightarrow$ ~~$(\ell_i,\ell_s) = (0.297, 0.823)$~~

$= 0{,}56 \mp 0{,}166 \Rightarrow (\ell_i, \ell_s) = (0{,}39 , 0.726)$

③ Dati: $X_i \sim N$ } $\bar{X}_5 = 0.56$ $\quad 2]_\alpha = 0.2$ $\quad 1-\alpha = 0.95$ $\quad S^2 = 0.018$ $\quad$?: m

$2]_\alpha = 2\, t_{4,0.975}\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{m}} \to 0.1 = 2{,}776\cdot\frac{0.134}{\sqrt m} \to \sqrt m = 3.72 \to m \cong 14$

④ Dati: $\alpha_1 = 3/\text{min}$ $\quad \alpha_2 = 0.2/\text{min}$ $\quad \alpha = 3.2/\text{min}$ $\quad$?: $\mathbb{P}[N_2(10) = 1 | N(10) = 10]$, $\mathbb{P}[N(0.5) = 0]$

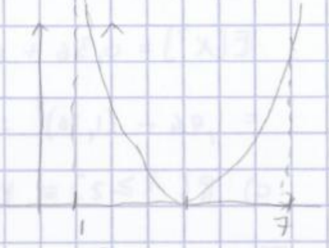
a) $\mathbb{P}[N_2(10) = 1 | N(10) = 10] = \frac{\mathbb{P}[\overset{\lambda=2}{N_2(10)=1} , \overset{\lambda=30}{N_1(10)=9}]}{\mathbb{P}[N(10)=10]} = \frac{\cancel{e^{-2}}\, 2^1}{1!}\cdot\frac{\cancel{e^{-30}}(30)^9}{9!}\cdot\frac{10!}{\cancel{e^{-32}}(32)^{10}} =$

$= \frac{20}{32}\cdot\left(\frac{30}{32}\right)^9 = \frac58\left(\frac{15}{16}\right)^9 = 0{,}625\cdot 0.559 = 0{,}349$ $\quad \lambda = 32$

b) $\mathbb{P}[\underset{\lambda=1{,}6}{N(0{,}5)=0}] = \frac{e^{-1.6}(1{,}6)^0}{0!} = 0{,}202$

⑥ Dati: $X \sim U(a,b)$ $\quad \mathbb{E}[X] = 4$ $\quad \text{var}[X] = 3$ $\quad$?: $f_X(x), f_Y(y), \mathbb{E}[Y]$

a) $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \mathbb{E}[X] = 4 \to a+b = 8 \to a+6+a = 8 \to 2a = 2 \to a = 1 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \text{var}[X] = 3 \to (b-a)^2 = 36 \to b-a = 6 \to b = 6+a \to b = 7 \end{cases}$



$f_X(x) = \begin{cases} \frac16 & 1 \le x \le 7 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad$ b) $Y = (X-4)^2$ $\quad x \in [1,7] \to$

$Y \in [0,9]$ $\quad g_1^{-1}(y) = \sqrt{y} + 4$

pe $x \in [4,7]$ $\quad g_2^{-1}(y) = 4 - \sqrt{y}$

$f_Y(y) = \left|\frac{d g_1^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g_1^{-1}(y)) + \ldots = \frac{1}{2\sqrt y}\cdot\frac16 + \frac{1}{2\sqrt y}\cdot\frac16 = \frac{1}{6\sqrt y}$ $\quad y \in]0,9]$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X-4)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{var}[X] = 3$

⑦ Dati: $X \sim N(10, \sqrt4)$ $\quad m = 20$ $\quad$?: $\mathbb{P}[X<8]$, $\mathbb{P}[\bar X<8]$, $\mathbb{P}[|X_1 - X_2| > 4]$

a) $\mathbb{P}[X < 8) = \mathbb{P}[Z < \frac{8-10}{\sqrt4}] = \mathbb{P}[Z < -1] = 0{,}1587$

b) $\mathbb{P}[\bar X < 8] = \mathbb{P}[Z < \frac{8-10}{\sqrt4}] = \mathbb{P}[Z < -\frac22\sqrt{20}] = \mathbb{P}[Z < -4.47) \approx 0$

c) $X_1 - X_2 \sim N(0, \sqrt{4+4})\sqrt{20} = N(0,\sqrt8)$ $\quad \mathbb{P}[\frac{|X_1-X_2| - 0}{\sqrt8} \ge \frac{4}{\sqrt8}] = \mathbb{P}[Z < -\frac{4}{\sqrt8}] +$

$+ \mathbb{P}[Z > 4/\sqrt8] = 2\mathbb{P}[Z \le -1{,}41] = 0.1586$

⑧ Dati: $N = 20$ $\quad K = 3$ $\quad m = 4$ $\quad X \sim$ ipergeom$(20,3,4)$ $\quad$?: $\mathbb{P}[X \ge 2]$

$\mathbb{P}[X \ge 2] = \cancel{\binom{20}{3}\binom{17}{3}}$ $\; 1 - \mathbb{P}[X=0] = 1 - \frac{\binom30\binom{17}{4}}{\binom{20}{4}} = 1 - \frac{3!}{3!}\frac{17!}{4!\,13!}\cdot\frac{4!\,16!}{20!} =$

$= -\frac{\cancel{2}\cdot16\cdot15\cdot14}{\cancel{2}\,20\cdot19\cdot18\cdot3} + 1 = 1 - 0{,}4912 = 0{,}50877$

④ Dati: $\mathbb{P}[X > -4{,}5] = 84\%$ $X \sim N(1, \sigma)$?: $\mathbb{P}[|\bar{X}-1| > 1{,}5\sigma]$,

a) $\mathbb{P}[|Z| > 1{,}5] = 2(1 - \mathbb{P}[Z<1{,}5]) = 0.1336$ $\mathbb{P}[X>4 \mid X-1 > 0{,}5\sigma]$

b) $\mathbb{P}[Z > \frac{-4{,}5-1}{\sigma}] = 0{,}84 = \mathbb{P}[Z < \frac{5{,}5}{\sigma}] = 0{,}84$ $\frac{5{,}5}{\sigma} = t_{0{,}84} = 0{,}995$

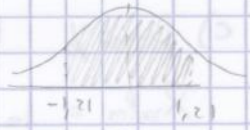
$\rightarrow \sigma = \frac{5{,}5}{0{,}995} = 5{,}53$ $\mathbb{P}[X>4 \mid X-1 > 2{,}76] = \mathbb{P}[X>4 \mid X > 3{,}76] =$

$$\frac{\mathbb{P}[X>4]}{\mathbb{P}[X>3{,}76]} = \frac{1-\mathbb{P}[X<4]}{1-\mathbb{P}[X<3{,}76]} = \frac{1-\mathbb{P}[Z<0{,}54]}{1-\mathbb{P}[Z<0{,}499]} = \frac{0{,}2946}{0{,}3085} = 0{,}9548$$

⑤ Dati: $X \sim (1, 5{,}53^2)$ $n_1 = 20$ $n_2 = 12$?: $\mathbb{P}[-0.5 < \bar{X} < 2.5]$

a) $\mathbb{P}\left[\frac{-0.5-1}{5{,}53/\sqrt{20}} < Z < \frac{2.5-1}{5.53/\sqrt{20}}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{-1.5}{1.236} < Z < \frac{1.5}{1.236}\right] = \mathbb{P}[-1.21 < Z < 1.21] =$

$= \mathbb{P}[Z<1{,}21] + (1-\mathbb{P}[Z<1{,}21]) = 2\mathbb{P}[Z<1{,}21] - 1 = 0{,}7738$



b) $\mathbb{P}[Y \geq 2]$ Y= nr lavente dietetiche con $X \in [-0{,}5, 2.5]$

$Y \sim Bin(12, ~~0.778~~)$ $p = \mathbb{P}[-0{,}5 < X < 2{,}5] = \mathbb{P}\left[\frac{-1{,}5}{5{,}53} < Z < \frac{1{,}5}{5{,}53}\right] =$

$= \mathbb{P}[-0{,}27 < Z < 0{,}27] = 2\mathbb{P}[Z<0{,}27] - 1 = 0{,}2128$ $\rightarrow Y \sim Bin(12, 0.2128)$

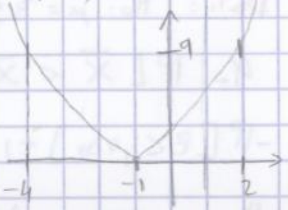
$\mathbb{P}[Y \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 1] = 1 - (\mathbb{P}[Y=0] + \mathbb{P}[Y=1]) = 1 - \left[\binom{12}{0}(0.218)^0(0.7872)^{12} +\right.$

$\left. + \binom{12}{1}(0.218)^1(0.7872)^{11}\right] = 1 - \left[(0.7872)^{12} + \frac{12!}{11!}(0.218)(0.7872)^{11}\right] = 1 - (0.7872)^{11}[$

$0.7872 + 12 \cdot 0.218] = 1 - 3{,}4092 \cdot 0{,}0719 = 0{,}755$

⑥ Dati: $X \sim Unif(-4, 2) \rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & -4 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$?: $f_Y(y)$, $\mathbb{E}[Y]$

$Y = (X+1)^2$



a) $D_X = [-4, 2] \rightarrow D_Y = [0, 9]$ per $X \in [-1, 2]$

$\rightarrow g_1^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$ per $x \in [-4, -1] \rightarrow g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} - 1$

$\rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{6 \cdot 2\sqrt{y}} = \frac{1}{6\sqrt{y}}$ per $y \in [0, 9]$

b) $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X+1)^2]$ $\mathbb{E}[X] = \frac{-4+2}{2} = -1$

$\mathbb{E}[Y] \equiv Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6)^2}{12} = 3$

⑦ Dati: $\alpha_A = 1/h = \frac{1}{60\,min}$ $\alpha_B = \frac{1}{40\,min}$?: $\mathbb{P}[N_A(60) = 1 \mid N(60) = 3]$,

b) ~~$\mathbb{P}[$~~ $t = 60$ min $\lambda_A = 1$ $\lambda_B = \frac{3}{2}$ $\lambda = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ $\mathbb{P}[N_A(60) = 1 \mid N(60) = 3] =$

$$\frac{\mathbb{P}[N_A(60)=1]\,\mathbb{P}[N_B(60)=2]}{\mathbb{P}[N(60)=3]} = \frac{e^{-1}1^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} \cdot \frac{3!}{e^{-\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 3 \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{2^3}{5^3} =$$

$= \frac{3^3}{5^3} \cdot 2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot 2 = 0{,}432$

Es. n° 22 p. 175

Dati: $H_0: \mu = 10$ $H_A: \mu < 10$ $\alpha = 5\%$ $n = 64$?: $\bar{X}_{min}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, n$

Es. p 186 n° 2

Dati: $X^TX = \begin{pmatrix} 20 & 120 & 7,40 \\ 120 & 1240 & 148,6 \\ 7.4 & 148,6 & 73,06 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \Sigma x_{1i}$, $\rightarrow \Sigma x_{i2}$, $\rightarrow \Sigma x_{i1} x_{i2}$, $\rightarrow \Sigma x_{i2}^2$

?: $\bar{x}_2$, $\sum_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$, $\text{cov}[X_1, X_2]$

a) $\bar{x}_2 = \frac{\sum_i x_{2i}}{m} = \frac{7,40}{20} = 0.37$ b) $\Sigma(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \Sigma x_{2i}^2 - m\bar{x}_2^2 = 73,06 - 20 \cdot (0,37)^2 =$

$= 70,322$ c) $\text{cov}[X_1, X_2] = \frac{\Sigma x_{i1} x_{i2} - m \bar{x}_1 \bar{x}_2}{m} = \left(198,6 - 20 \cdot 0,37 \cdot \frac{120}{20}\right) \frac{1}{20} =$

$= \frac{154.2}{20} = 7,71$

Es. n° 3 p. 187

Dati: $\alpha = 0,02$ $H_0: \rho_{jk} = 0$ $H_A: \rho_{jk} \neq 0$ $m = 14$?: ρ_{jk}

$\rho_{12} = \frac{-1,4}{\sqrt{2 \cdot 8,2425}} = \frac{-1,4}{4,06} = -0,345$ $\frac{R}{\sqrt{1+R^2}} \sqrt{m-2} \sim T_{m-2}$, $|t_{12}, 0.99| = 2,681$

$t_c = -\frac{0.345 \sqrt{12}}{0.9387} = -1,273$ $\rightarrow \overset{\text{non}}{\vee}$ rifiuto $H_0: \rho_{12} = 0$ $\rightarrow \overset{\text{non}}{\vee}$ c'è correlazione tra X_1 e X_2

$\rho_{23} = \frac{1.52417}{\sqrt{8.7576}} = 0.515$ $t_c = \frac{0.515 \sqrt{12}}{0.857} = 2,081$ → non rifiuto H_0: X_2 e X_3 correlate

$\rho_{13} = \frac{0.16067}{1.84577} = 0.1143$ $t_c = \frac{0.114 \sqrt{12}}{0.993} = 0,347$ " " " X_1 e X_3 correlate

Es. n° 6 p. 192

Dati: $m = 25$ $H_0: \rho_{B_0 B_1} = 0$ $\alpha = 0,02$?: $\text{cov}(B_0, B_2)$, Test H_0

a) $= \text{cov}[B_0, B_2] = MSE_m \cdot (-0.017857) = -0,2612$ b) $\rho_{02} = \frac{\text{cov}[B_0, B_2]}{\sqrt{\text{var}[B_0] \text{var}[B_2]}} =$

$= \frac{-0.017857}{\sqrt{0.02736}} = -0,653$ $|t_{23}, 0.99| = 2.5$

$t_c = \frac{-0.653 \sqrt{23}}{0.757} = 4.135$ → rifiuto $H_0: \rho_{01} = 0$

Tema esame 12/07/2007

⑤ Dati: $X \sim U(a, b)$ $\mathbb{E}[X] = 0$ $\text{var}[X] = \frac{4}{3}$?: $f_Y(y)$, $\mathbb{E}[Y]$

$Y = X^2$

a) $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2]$ $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{0})^2 \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \text{var}[X] = \frac{4}{3}$

b) $\begin{cases} \frac{b+a}{2} = 0 \rightarrow a = -b \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3} \rightarrow (b+b)^2 = \frac{4}{3} \cdot 12^4 \Rightarrow 4b^2 = 16 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \end{cases}$ $\rightarrow X \sim (-2, 2)$

per $x \geq 0$ $\rightarrow x = \sqrt{y} = g_1^{-1}(y)$ $g_2^{-1}(y) = x = -\sqrt{y}$ ~~per $x \geq 0$~~

$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ per $y \in [0, 4]$

Tema 31/01/2014

① Dati: $1-\alpha = 95\%$ $\quad x_k = 8,5 \quad m = 14 \qquad y = -2,26 + 1,92x \qquad$?: PI

$$PI = \left((b_0 + b_1 x) \mp t_{m-2, 1-\frac{\alpha}{2}}\, \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{14} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}\right) = \left(\cancel{(b_0 + b_1 x) \mp z_{0.975}\sqrt{2.1002}\sqrt{1+\frac{1}{14}}}\,(8,5-\right.$$

$$\text{resErr} = 2,10020 \qquad 0,120358 = \frac{1}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = 8,3085$$

$$\frac{-\bar{x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = -0,966300 \Rightarrow \bar{x} = 8,0295 \qquad t_{12, 0.975} = 2,179$$

$$PI = \left(-2,26 + 16,32 \mp 2,174 \cdot \sqrt{2,10020}\sqrt{1 + \frac{1}{14} + \frac{(8,5 - 8,0295)^2}{8,3035}}\right) =$$

$$= \left(14,06 \mp 3,158\sqrt{1 + \frac{1}{14} + 0,0268}\right) = \left(14,06 \mp 3,158\sqrt{1,1267}\right) =$$

$$= (14,06 \mp 3,90) = \boxed{(10,158 \,,\, 17.96)}$$

Se $x_k = 1,5$ $\quad PI = \left(0,62 \mp 2,179\sqrt{2,10020}\sqrt{1 + \frac{1}{14} + 5,13}\right) = \left(0,62 \mp 3,158\sqrt{6,20}\right] =$

$$= (0,62 \mp 7.864) = \boxed{(-7,244 \,,\, 8.484)}$$

② Dati: $m = 500 \quad m_i = 225 \quad \alpha = 0,5\% \qquad$?: (p_i, p_s)

$$(p_i, p_s) = \left(0,45 \mp z_{0.975}\sqrt{\frac{0,45(0,55)}{500}}\right) = (0,45 \mp 1,96 \cdot 0,0222) = (0,45 \mp 0,0436)$$

$$\Rightarrow (p_i, p_s) = (0,406 \,,\, 0.494)$$ CHECK

③ Dati: $U_1 = 6B + 4N \quad U_2 = 6B + 9N \quad \mathbb{P}[C] = 0,75 = \mathbb{P}[U_2] \qquad$?: $\mathbb{P}[A_3 | A_1 \cap A_2]$,

$\mathbb{P}[T] = \mathbb{P}[U_1] = 0,25 \quad A_i$ = "Alla i-esima estrazione la palla è N" $\quad \mathbb{P}[U_1 | A_1 \cap A_2]$

a) $$\mathbb{P}[A_3 | A_1 \cap A_2] = \frac{\mathbb{P}[A_3 \cap A_2 \cap A_1]}{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]}$$

$$\mathbb{P}[A_3 A_2 A_1] = \mathbb{P}[A_3 | U_1]\,\mathbb{P}[A_2 | U_1]\,\mathbb{P}[A_1 | U_1]\,\mathbb{P}[U_1] + \mathbb{P}[A_3 | U_2]\,\mathbb{P}[A_2 | U_2]\,\mathbb{P}[A_1 | U_2]\,\mathbb{P}[U_2].$$

$$'' \quad = \left(\frac{4}{10}\right)^3 0,25 + \left(\frac{9}{15}\right)^3 0,75 = 0,016 + 0,162 = 0,178$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1 | U_1]\,\mathbb{P}[A_2 | U_1]\,\mathbb{P}[U_1] + \mathbb{P}[A_2 | U_2]\,\mathbb{P}[A_1 | U_2]\,\mathbb{P}[U_2] =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 0,25 + \left(\frac{9}{15}\right)^2 0,75 = 0,04 + 0,27 = 0,31$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A_3 | A_1 \cap A_2] = \frac{0,178}{0,31} = \boxed{0,5742}$$

b) $$\mathbb{P}[U_1 | A_1 \cap A_2] = \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | U_1]\,\mathbb{P}[U_1]}{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]} = \frac{\mathbb{P}[A_1 | U_1]\,\mathbb{P}[A_2 | U_1]\,\mathbb{P}[U_1]}{0,31} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2 0,25}{0,31} = \boxed{0,129}$$

CHECK

④ Dati: Isolante termico $\quad \alpha_A = \frac{2}{10 m^2} \quad \alpha_B = \frac{3}{12 m^2} \qquad$?: $\mathbb{P}[N(12 m^2) = 0]$

$$\alpha = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{4+5}{20} = \frac{9}{20 m^2} \qquad \lambda \qquad \mathbb{P}[N_A(40) = 2 | N(40) = 6]$$

$$\Rightarrow a) \quad \lambda = \frac{9}{\cancel{20}\,5} \cdot \cancel{12}^3 = \frac{27}{5} \qquad \mathbb{P}[N(12) = 0] = \frac{e^{-\frac{27}{5}} \cdot \left(\frac{27}{5}\right)^0}{0!} = \boxed{0,0045}$$

$$b) \quad \lambda_A = \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \cancel{40}^8 = 8 \qquad \lambda_B = \frac{3}{\cancel{12}\,3} \cdot \cancel{40}^{10} = 10 \qquad \lambda = \frac{9}{\cancel{20}} \cdot \cancel{40}^3 = 18$$

$= \frac{2,43}{0.0025} = \boxed{972}$ $(m \geq 969)$

⑧ **Dati:** $f(x_i;\theta) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+2\theta)\, x^{3\theta+\frac{1}{2}} & 0<x<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ **?:** θ_{ML} $\theta > -\frac{1}{2}$

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{m} \frac{3}{2}(1+2\theta)\, x_i^{3\theta+\frac{1}{2}} = \left[\frac{3}{2}(1+2\theta)\right]^m \prod_i^m x_i^{3\theta+\frac{1}{2}}$ $\ell(\theta) = \log L(\theta) =$

$m \log \frac{3}{2}(1+2\theta) + \sum_i^m \log x_i^{3\theta+\frac{1}{2}} = m \log \frac{3}{2}(1+2\theta) + \left(3\theta+\frac{1}{2}\right)\sum_i^m \log x_i =$

$= m \log \frac{3}{2} + m \log(1+2\theta) + \left(3\theta+\frac{1}{2}\right)\sum_i^m \log x_i$ $\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2m}{1+2\theta} + 3\sum_i^m \log x_i = 0$

$\frac{2m}{1+2\theta} = -3\sum_i^m \log x_i \rightarrow 1+2\theta = \frac{2m}{-3\sum \log x_i} \rightarrow 2\theta = -\frac{2m}{3\sum \log x_i} - 1$

$\rightarrow \boxed{\theta = -\frac{m}{3\sum \log x_i} - \frac{1}{2}}$

⑪ **Dati:** $\bar{x}_1 = 32,89$ $\bar{x}_2 = 53,86$ $\bar{x}_3 = 34,56$ $\bar{x}_4 = 64,69$ **?:** Test H_0

$H_0: \frac{\mu_1+\mu_3}{2} + 25 = \frac{\mu_2+\mu_4}{2}$ $H_A: \frac{\mu_1+\mu_3}{2} - \frac{\mu_2+\mu_4}{2} \neq -25$

$\alpha = 5\%$ $S = 6,966$ DF TOTAL = 39 DF Error = 32

$\hat{C} = 33,725 - 59,275 = -25,55$ $Var[C] = \frac{\sigma^2}{m}\sum c_i^2 = \frac{\sigma^2}{40}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sigma^2}{40}$

40 → DF Total + 1

$t_c = \frac{-25,55+25}{6,866/\sqrt{40}} = \frac{-0,55}{6,966} \cdot \sqrt{40} = -0,506$ $t_{32,\, 0.975} = 2-037$

DF error

$\Rightarrow$ non posso rifiutare H_0

⑦ **Dati:** $m = 500$ $f = 235$ $H_0: p_0 = 0,49$ $\alpha = 0,05$ $H_A: p_0 < 0,49$

$\hat{p} = \frac{235}{500} = 0,47$ $z_c = \frac{0,47-0,49}{\sqrt{\frac{0,47(0,53)}{500}}} = \frac{-0,02}{0,0223} = \boxed{-0,896}$ $-z_{0.95} = \boxed{-1,645}$

$\rightarrow$ non posso rifiutare H_0

⑪ **Dati:** $H_0: \Gamma = \frac{\mu_1+\mu_3}{2} - \frac{\mu_2+\mu_4}{2} = -25$ $H_A: \Gamma < -25$ $\alpha = 0,05$

$MS_{err} = 47,14$ $a = 2 \rightarrow b = 4$ $ab(m-1) = 32$ $m-1 = \frac{32}{8} = 4$

$\rightarrow m = 5$ $\mathbb{E}[C] = \Gamma$ $\hat{C} = 33,725 - 54,275 = -25,55$ $Var[C] = \frac{\sigma^2}{m}\sum_i c_i^2 =$

2×5

$= \frac{47,14}{8} \cdot 1$ $\frac{\hat{C}-\Gamma_0}{\sqrt{\hat{var}[C]}} \sim T_{32}$ $\rightarrow t_c = \frac{-0.55}{\sqrt{\frac{47.16}{10}}} = -0.55 \cdot 0.460 = -0.253$

$-t_{32,\, 0.95} = -1,694$ $\rightarrow$ non posso rifiutare H_0

① **Dati:** $\beta = 10\%$ $H_0: \mu = 12,5$ $H_A: \mu = 10.5$ $S^2_{20} = 44.8$ $\alpha = 0.02$ **?:** m

~~$P\left[\left|\frac{\bar{X} - 12.5}{S/\sqrt{m}}\right| < t_{m-1,\, 0.98}\right]$~~ $X_{min} = 12.5 - t_{19,\, 0.99}\frac{S}{\sqrt{m}} = 12.5 - \frac{16,99}{\sqrt{m}}$

$X_{max} = 12,5 + \frac{16.99}{\sqrt{m}}$ $P\left[12,5 - \frac{16,99}{\sqrt{m}} < \bar{X}_m < 12.5 + \frac{16.99}{\sqrt{m}} \,\middle|\, \mu = 10.5\right] =$

$= 0,10 \rightarrow P\left[\left(2 - \frac{16.99}{\sqrt{m}}\right)\frac{\sqrt{m}}{6,69} < T_{19} < \left(2 + \frac{16.49}{\sqrt{m}}\right)\frac{\sqrt{m}}{6,69}\right] = 0,10$

⑥ Dati: $n = 37$ $y = 3,27 + 1,97x$ $S = 0,050142$ $1-\alpha = 98\%$?: I_α per B_0, β

$H_0 : \beta_1 = 1,8556$ $H_A ; \beta_1 \neq 1,8556$ $\alpha = 5\%$ | $H_A : 1,9150$

$S_{B_0} = 0,3842$ $S_{B_1} = 0,1188$

a) $I(l_i, l_s) = (3,27 \mp t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot 0.3842) = (3,27 \mp t_{35, 0.99} \cdot 0,3842) = (3,27 \mp 0,93667)$

$(l_i, l_s) = (2.3333, \; 4.20667) = \boxed{(2,334 , 4.2067)}$

b) $\beta = P[B_{1min} < B_1 < B_{1max} \,|\, \beta_1 = 1,9150]$ $B_{1min} = 1,8556 - t_{35, 0.975} \cdot 0.1188$

$B_{1min} = 1,8556 - 0,24 = 1,6144$ $B_{1max} = 2,0956$

$P[\frac{1,6144 - 1,9150}{0,1188} \le T_{35} \le \frac{2,0956 - 1,9150}{0.1188}] = P[-2.53 \le T_{35} \le 1,52] =$

$P[T_{35} \le 1,52] - P[T_{35} \le -2,53] = P[T_{35} \le 1,52] - (1 - P[T_{35} \le 2,53]) =$

$= 0,932 - (1 - 0,9928) = 0,932 - 0.008 = \boxed{0.924} \sim 0,9313$

con l_s: $0,9357 - (1 - 0,9943) = \boxed{0,93}$

⑦ Dati: $n = 16$ $\hat{S}^2_{16} = 715,78$ $H_0 : S^2 = 800$ $1-\alpha = 0,95$?: Test H_0

$n = 100$ $S_{100} = 26,754$ $H_0 : S = 28,284$ $S \sim N(\sigma, (\frac{\sigma}{\sqrt{2n}})^2)$ $\alpha = 0,05$

a) $V = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}$ $\chi_{15, 0.025} = 6,262$ $\chi_{15, 0.975} = 24,488$

$\chi_c = 15 \cdot \frac{715,78}{800} = \boxed{13,42}$ → non posso rifiutare H_0

b) $Z_0 = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0 / \sqrt{2n}} \sim N(0,1)$ $|z_{0.975}| = 1,96$ $z_c = \frac{26,754 - 28,284}{28,284 / \sqrt{2 \cdot 100}} =$

$= -0,054 \cdot \sqrt{200} = \boxed{-0,765}$ → non posso rifiutare H_0

CHECK

⑨ Dati: $l = 300$ km $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ iid $i = 1,2,3,4,5$?: $P[|Y| < 1]$

$\mu_1 = \mu_2 = 20$ $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 21$ $X_1 X_2$ no logo $X_{2,3,4}$ marca

$Y = \frac{X_1 + X_2}{2} - \frac{X_3 + X_4 + X_5}{3}$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 4$ $\sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = 3,5$

$E[Y] = \frac{20}{2} + \frac{20}{2} - \frac{21 + 21 + 21}{3} = 20 - 21 = -1$ $var[Y] = \frac{1}{4} var[X_1 + X_2] +$

$+ \frac{var[X_3 + X_4 + X_5]}{9} = \frac{1}{4}(4+4) = \frac{1}{9}(3,5 + 3,5 + 3,5) = 2 + 1,167 = 3,167$

$P[|Y| < 1] = P[$ [illegible]

$=$ [illegible] $=$ [illegible] CHECK

⑪ Dati: 3 prodotti A, B, C ?: Prezzo medio A, B, C

	A	B	C
nr prodotti venduti	2160	8100	4640
prezzo unitario	2,45	4,87	2,74

$n_{TOT} = 14900$ $\alpha = 0,145$