NUMERO: 1490A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Arcero

MATERIA: Fisica I. Prof.Vadacchino

Teoria degli insiemi

Diagrammi di Venn:

$A \subset X$ (A incluso propriamente in X)

$A \subseteq X$ (A non necessariamente propriamente incluso in X, xk potrebbe anche coincidere)

$\emptyset$ = insieme vuoto $\rightarrow \emptyset \subset$ in qualsiasi insieme X!

Insiemi numerici

$A = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$ elencazione

$A = \{x \in X \mid p(x)\}$

$\mathbb{N}$ = numeri naturali interi $\{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = " relativi $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = " razionali $\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$ e viceversa

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità (#) χ_0 che è = a quella di $\mathbb{Q}$ (dim. con la tabella)

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$P(X)$ = insieme delle parti dell'insieme X = contiene tutti i possibili sottoinsiemi di X compreso X e $\emptyset$ es. $A = \{a, b, c\}$ $P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{A\}, \emptyset\}$

$\#A = 3$ $\#P(A) = 2^3$ si dimostra infatti che se $\#X = n \Rightarrow \#P(X) = 2^n$

Complementare: $C_X A$ = tutto ciò che non sta in A ma sta in X $= \{x \in X \mid x \notin A\}$
insieme ambiente

es. $C\emptyset = X$ $\quad CX = \emptyset$ $\quad CCA = A$ $\quad$ se $A = B$ $\quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (doppia inclusione)

N.B: Il complementare dipende dall'insieme ambiente! es. $A = \{\text{numeri pari}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad CA \rightarrow C_{\mathbb{N}} A = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} \vee C_{\mathbb{R}} A = \{\dots\}$

$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$ $\quad A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Per queste operazioni valgono le proprietà:

1) booleane $A \cap CA = \emptyset$ $\quad A \cup CA = X$

II) commutativa, associativa, distributiva

III) Leggi di De Morgan: $C(A \cap B) = CA \cup CB$ $\quad C(A \cup B) = CA \cap CB$

Differenza: $A \setminus B$ = tutto ciò che sta in A a cui sottraggo gli elementi di B $= \{x \in A \mid x \notin B\}$ $\rightarrow$ non è un'operazione simmetrica $\rightarrow$ non vale la proprietà commutativa! $A \setminus B \neq B \setminus A$

Differenza simmetrica: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

vale la proprietà commutativa

$A \Delta B$

INSIEMI	LOGICA
$A = \{x \in X \mid p(x)\}$	$p(x)$
$\complement A$	$\neg p(x)$
$B = \{x \in X \mid q(x)\}$	$q(x)$
$A \cup B$	$p(x) \vee q(x)$
$A \cap B$	$p(x) \wedge q(x)$
$A \subseteq B$	$p(x) \Rightarrow q(x)$

Quantificatori

$\forall$ = quantificatore universale $\qquad \exists$ = quantificatore esistenziale

es. $p(x)$: essere 1 nr pari $\rightarrow A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \forall a \in A \; p(a)$ (vera) $\quad \exists n \in \mathbb{N} \mid p(n)$ (vera)

es. $p(x,y) \quad x \leq y$ in $\mathbb{R}$ $\qquad$ es. $p(x)$ vera $\rightarrow \neg p(x)$ falsa $\quad \forall x \in A \mid p(x)$

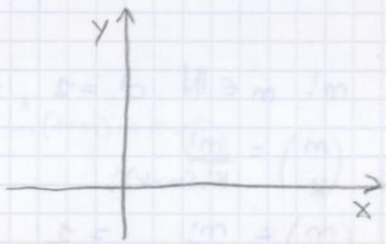
$\forall x \forall y \mid p(x,y) \rightarrow$ falsa $\qquad \neg(\forall x \in A \mid p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A \mid \neg p(x)$

$\exists x \, \exists y \mid p(x,y) \rightarrow$ vera $\qquad \neg(\exists x \in A \mid p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A \mid \neg p(x)$

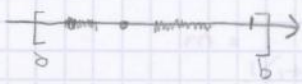
$\forall x, \exists y \mid p(x,y) \rightarrow$ vera

$\exists y, \forall x \mid p(x,y) \rightarrow$ falsa

$|xy| = |x||y| \qquad |x+y| \leq |x| + |y| \rightarrow$ Disuguaglianza triangolare: in un triangolo la lunghezza di un lato è sempre < della somma degli altri 2.



Insiemi limitati



insieme A limitato

$\exists a, b \in \mathbb{R} \mid A \subseteq [a, b]$

Insieme A superiormente limitato

$\exists b \in \mathbb{R} \mid A \subseteq]-\infty, b] \rightarrow$ maggiorante di A

Insieme A inferiormente limitato es. $A = \mathbb{N}$ $(A \subseteq [0, +\infty[)$

$\exists a \in \mathbb{R} \mid A \subseteq [a, +\infty[\rightarrow$ minorante di A

es. $A =]-1, 5] \subseteq [-1, 5] \qquad A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right\} \quad 0 \leq \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow A$ è limitato perché $1 \notin A$ è l'estremo superiore ($\exists r < 1$ maggiorante per A)

DIM: per assurdo poniamo $\frac{n}{n+1} < r \;\; \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{r} \geq 1 + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{r} - 1 \geq \frac{1}{n}$ $\quad r < \frac{m}{m+1} < 1$

$\rightarrow \frac{1-r}{r} \geq \frac{1}{n} \rightarrow n < \frac{r}{1-r}$ FALSO perché $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato c.v.d.

MASSIMO: 1: $\forall x \in A \mid x \leq x_M$ $\quad$ 2: $x_M \in A$ $\Big\}$ Hp. $\quad$ Th: x_M, se $\exists$, è unico

$A \subseteq \mathbb{R}$

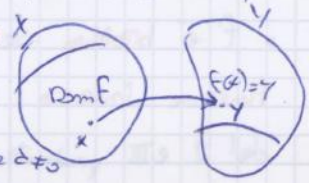
DIM: per assurdo ipotizziamo di avere 2 massimi $x_M, x'_M \rightarrow x_M, x'_M \in A$ per hp.1 $x'_M \leq x_M$, $x_M \leq x'_M$

$\Rightarrow x_M = x'_M$ c.v.d.

Prodotto cartesiano

(a,b) con $a \neq b$ coppia ordinata: l'ordine in cui compaiono gli elementi è influente $\to (a,b) \neq (b,a)$ le due componenti sono scambiate. $A, B \to A \times B$ = insieme di tutte le possibili coppie con prima componente in A e seconda in B = $\{a,b \mid a \in A, b \in B\}$ se $A = B = R$ $R \times R = R^2$ prodotto cartesiano $R^n (x_1, x_2 \dots x_n)$ $x_i \in R$, $i = 1, \dots, n$ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n)_{x_i} \in A_i\}$ Relazione $R \subseteq A \times B$ (sottoinsieme) es. $\{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 = a\}$ le funzioni sono delle particolari relazioni

X, Y $f: \mathrm{dom} f \subseteq X \to Y$ $x \to f(x) = y \to$ sto prendendo un sottoinsieme di $X \times Y$ $\{(x, f(x)) \mid x \in X, y = f(x) \in Y\}$ $\mathrm{Im} f = \{y \in Y \mid \exists x \in \mathrm{dom} f \wedge y = f(x)\}$ $\mathrm{dom} f \subseteq X$ $\mathrm{Im} f \subseteq Y$ φ = grafico di f



es. $X = Y = \mathbb{R}$ a) $f(x) = ax+b$ $a, b \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$ se $a \neq 0$ $\mathrm{Dom} f = \{b\}$ se $a = 0$ b) $f(x) = x^2$ $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ $\mathrm{Im} f = [0, +\infty[$ vale anche per $f(x) = x^n$ con n pari c) $f(x) = x^3$ $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$ vale $\forall f(x) = x^n$ con n dispari

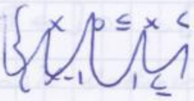
Successioni

$\mathrm{Dom}\, a(n) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ es. $a_n = \frac{n}{n+1}$ $n_0 = 0$ es. $a_n = n!$ $n_0 = 0$ $a_n = (-1)^n$ $n_0 = 0$ $\mathrm{Im}\, a_n = \{1\} \cup \{-1\}$ es. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $n \geq 1$ converge ad e quindi $2 \leq a_n < 3$ $\mathrm{Im}\, a(n) = [2, 3[$

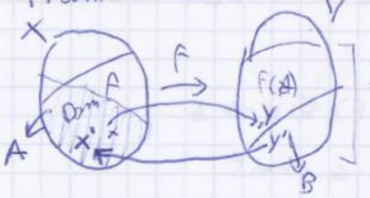
Funzioni definite a tratti

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < x_0 \\ f_2(x) & x \geq x_0 \end{cases} \qquad f(x) = \mathrm{sign}\, x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \mathrm{Im}\, f(x) = \{-1, 0, 1\}$$

F. parte intera: $f(x) = [x] \leq x \to$ sta ad indicare il più grande intero relativo $\leq x$
$\mathrm{Im}\, f(x) = \mathbb{Z}$ es. $f(\frac{1}{2}) = [1,5] = 1$ $f(-\frac{1}{2}) = [1,5] = -2$
F. mantissa $= f(x) = x - [x] \geq 0$ $M(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq \end{cases}$ $\mathrm{Im}\, M(x) = [0, 1[$



$f: \mathrm{dom} f \subseteq X \to Y$



$f(A) = \{y \in \mathrm{Im} f \mid \exists x \in A \wedge y = f(x)\}$ $A \subseteq X \subseteq \mathrm{Dom} f$
es. nella $M(x)$ $f([1,2]) = \{1, 2\}$ immagine di A
$B \subseteq Y$ $f^{-1}(B) = \{x \in \mathrm{dom} f \mid f(x) \in B\} \subseteq \mathrm{Dom} f$ controimmagine di B
es. parabola $y = x^2$ $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$
Consideriamo $f: \mathrm{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathrm{dom} f$ f è limitata su A se $f(A)$ è limitato $\Rightarrow$ $\forall x \in A$ $a \leq f(x) \leq b$ es. $f(x) = M(x)$ $f(\mathbb{N}) = \{0\}$ $f(\mathbb{R}) = [0, 1[\Rightarrow M(x)$ è limitata su tutto il suo $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$

$x_M \in A$ è un massimo assoluto per f su A se $f(x) \leq f(x_M)$, $\forall x \in A$
$x_m \in A$ " " minimo assoluto " " " " " $f(x_m) \leq f(x)$, $\forall x \in A$
Max e min non sono per forza unici es. $f = M(x)$ $M: R \to [0, 1[$

$f \circ g = \sqrt{x} + 1 \quad Dom(f \circ g) = [0, +\infty[\quad Im(f \circ g) = [1, +\infty[$

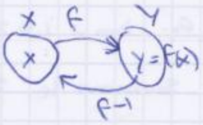
N.B. la monotonia nella composizione di funzioni funziona come la regola dei segni:
- se le f hanno = monotonia → la monotonia è crescente nella composizione
- " " " " ≠ " → la loro composizione sarà decrescente ($\nearrow = +$ $\searrow = -$)

se f, g iniettive ⇒ $g \circ f$, $f \circ g$ iniettive ⇒ $f \circ g$, $g \circ f$ invertibili

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z : (g \circ f) \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$f^{-1} \quad g^{-1} : (f^{-1} \circ g^{-1})$

$f \circ f^{-1} = id_y$ → una fx
$f^{-1} \circ f = id_x$ composta con la sua inversa, mi dà qualcosa di simile all'identità



es. $f(x) = x^2 \quad g(x) = f^{-1} = \sqrt{x}$ se io scelgo $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\quad g \circ f = f^{-1} \circ f = x$

$\sqrt{x^2} = |x|$ f. pari: $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in dom f$ es. $y = x^2$ f. dispari: $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in dom f$ es. $y = x^3$

N.B: Anche x le funzioni pari e dispari vale la "regola dei segni" sia nel prodotto, che nel quoziente che nella composizione (dispari − pari: +)

F. periodica: $f(x) = f(x+p)$, $\forall x \in dom f$ Non è sempre possibile trovare il p minimo.

es. $y = k$ es. funzione di Dirichlet $= \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ periodica

Intorni

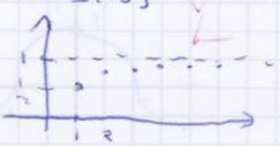
$x_0 \in \mathbb{R} \quad r > 0$ (raggio dell'I) x_0 = centro dell'I ⇒ $I_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[=$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$ r è errore di misurazione ⇒ intorni circolari $\in]a, +\infty[=$
intorno di $+\infty = I_a(+\infty)$, intorno di $-\infty =]-\infty, b[$ = intorno di $-\infty = I_b(-\infty)$

se $x_1 \neq x_2 \quad \exists r > 0 \mid I_r(x_1) \cap I_r(x_2) = \emptyset \quad$ r migliore $= \frac{|x_1 - x_2|}{2} \quad r \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}$

Limiti di successioni

$a : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} \to \mathbb{R} \qquad \{a_n\}_{n \geq n_0}$ immagine

es. $a_n = \frac{n}{n+1}$



$0 \leq a_n < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon$
$\forall x \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

$\forall I_\varepsilon(1), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) \mid \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(1) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

es. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1 \qquad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (numero di Nepero)

Def. di limite (x le successioni): la successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ converge ad un numero $\ell \in \mathbb{R}$
$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; n_\varepsilon \geq n_0 \mid \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \vee$
$\forall I_\varepsilon(\ell), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) \mid \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(\ell)$.

La successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ diverge a $+\infty$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty$ se $\forall A > 0 \; \exists n_\varepsilon \geq n_0, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid$
$\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n > A \quad \vee \quad \forall I_A(+\infty), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) \mid \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_A(+\infty)$

se es. $a_n = n^2 \quad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ se $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$ allora a_n è indeterminata

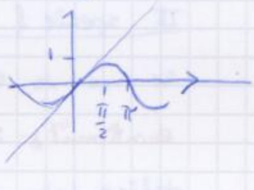
es. $a_n = (-1)^n \Rightarrow$ non è monotona

Continuità in x_0: $f(x)$ è continua in x_0 ($x_0 \in \mathrm{Dom}f$) se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge |x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ovvero $\forall I_\varepsilon(f(x_0)), \exists I_\delta(x_0) \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \cap I_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_0) \in I_\varepsilon(f(x_0))$
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

es. $f(x) = ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = ax_0 + b$ se $f(x)$ è continua $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
$\mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |ax + \cancel{b} - ax_0 - \cancel{b}| < \varepsilon \to |a||x - x_0| < \varepsilon$
se $a = 0$ è vero $\forall \delta$, se $a \neq 0$ basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ $\to |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$ $\Rightarrow$ tutte le rette sono continue su $\mathbb{R}$

es. $f(x) = x^2$ $x_0 = 2$ $|x^2 - 4| < \varepsilon \to |x+2||x-2| < \varepsilon$ se pongo $\delta < 1$ $1 < x < 3 \to 3 < x+2 < 5$
$|x - 2| < \delta$ $\quad 5 \quad |x+2||x-2| < 5|x-2| < \varepsilon \to |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \to \delta \leq \min\left]1, \frac{\varepsilon}{5}\right[$

es. $f(x) = \sin x$ $x_0 \in \mathbb{R}$ tenendo presente che $|\sin x| \leq |x|$ verifichiamo la continuità $|x - x_0| < \delta \to |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, prostaferesi $\to$



$\left|2 \sin\frac{x - x_0}{2} \cos\frac{x + x_0}{2}\right| < \varepsilon \to 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \underbrace{\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|}_{\leq 1} \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \to$
$2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < \varepsilon \to \quad |x - x_0| < \varepsilon \to \delta \leq \varepsilon$

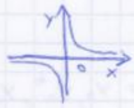
es. $f(x) = \cos x$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $|x - x_0| < \delta \to |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon \to \left|-2 \sin\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}\right| < \varepsilon$
$\to \left|-2 \sin\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}\right| < \left|-2 \sin\frac{x - x_0}{2}\right| < \varepsilon \to 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\frac{x - x_0}{2} < \varepsilon \to \delta \leq \varepsilon$

Proprietà: Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro Dom.

es. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$
$\forall I_A(+\infty), \exists I_\delta(x_0) \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_A(+\infty)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ $\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$
$\forall I_{-A}(-\infty), \exists I_\delta(x_0) \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_{-A}(-\infty)$

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ poiché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



es. $\nexists \lim_{x \to 0} H(x)$ $\to \lim_{x \to 0^+} H(x) = 0 = H(0)$ $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 1$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \to \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ $\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge \underset{]x_0, x_0 + \delta[}{x_0 < x < x_0 + \delta} \Rightarrow f(x) > A$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ $\forall I_{-A}(-\infty) \exists I^+_\delta(x_0) \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \cap I^+_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$ " " " " $\wedge x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ $\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid$ " " " " " " " " $\Rightarrow f(x) > A$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ " " " " " " " " " " " $\Rightarrow f(x) < -A$

Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell = f(x_0)$, f è continua da destra ovvero $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f$
$\wedge x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = f(x_0)$, f è continua da sx $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom}f \wedge x - x_0 > -\delta$

DIM: Considero $I(\ell) = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (qualunque intorno che non contiene 0 $\Rightarrow \exists I(c) \mid \forall x \in \text{Dom}f \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in \left(\frac{\ell}{2}; \frac{3}{2}\ell\right) \Rightarrow 0 < \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\ell \Rightarrow f(x) > 0$ c.v.d.

Corollario: Hp: $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell$, $\exists I(c) \mid \forall x \in \text{Dom}f \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \geq 0$

Th: $\ell \geq 0$ DIM: Per assurdo $\ell < 0 \Rightarrow$ per il T. della permanenza del segno troverei tutto un $I(c)$ in cui $f(x) < 0 \Rightarrow$ assurdo c.v.d.

I Teorema del confronto

Hp: Se $\exists I(c) \mid \forall x \in \text{Dom}f \cap \text{Dom}g \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ Th: $\ell \leq m$

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell$

$\exists \lim_{x \to c} g(x) = m$

DIM: costruisco $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ in $I(c)$

$\lim_{x \to c} h(x) = m - \ell$ che per il T. della permanenza del segno è $\geq 0 \Rightarrow m \geq \ell \Rightarrow \ell \leq m$ c.v.d.

II Teorema del confronto

• $\boxed{\text{Caso finito}}$ Hp: $\exists I(c) \mid \forall x \in \text{Dom}f \cap \text{Dom}g \cap \text{Dom}h \cap I(c) \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$\exists \lim_{x \to c} f = \lim_{x \to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Th: $\exists \lim_{x \to c} h(x) = \ell$ $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \text{Dom}h \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon)$

DIM: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_f(c) \mid \forall x \in \text{Dom}f \cap I_f(x) \setminus \{c\} \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

" $\exists I_g(c) \mid$ " " $\text{Dom}g \cap I_g(c) \setminus \{c\} \Rightarrow \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

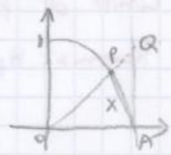
scelgo $I_h(c) = I_f(c) \cap I_g(c) \cap I(c)$ → intorno dell'Hp $\Rightarrow \forall x \in I_h(c) \cap \text{Dom}h \setminus \{c\}$

$\Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$, c.v.d.

Applicazione: DIM che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ricordando che $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^-} h(x)$ supponiamo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin x < x$ $P(\cos x; \sin x)$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \leq 1 \to g(x)$ inoltre $A_{O\hat{A}P} < A_{O\hat{A}Q}$ $Q(1; \operatorname{tg} x)$



$\Rightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ $A(1;0)$

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0} 1 \Rightarrow$ per il II teorema del confronto $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, c.v.d.

Corollario: Hp: f limitata in $I(c)$ $(\exists K \mid |f(x)| \leq K, \forall x \in I(c))$ N.B. $\lim_{x \to c} f(x) = 0 = \lim_{x \to c} |f(x)|$

g infinitesimo per $x \mapsto c$ $\left(\lim_{x \to c} g(x) = 0\right)$

Th: $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$ (anche $g(x)f(x)$ è infinitesimo)

DIM: considero $|f(x)g(x)| \geq 0$ dall'Hp $|f(x)| \leq K$ quindi maggioro f con $K \Rightarrow$

$0 \leq |f(x)||g(x)| \leq K|g(x)| \to 0$ $\lim_{x \to c} |f(x)g(x)| = \lim_{x \to c} g(x)f(x) = 0$, c.v.d.

es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ $f = \sin x$ limitata $g = \frac{1}{x}$ infinitesimo $-1 \leq \sin x \leq 1$ ~~divido~~ per $x > 0$

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ x il II t. del confronto $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

• $\boxed{\text{Caso } \infty}$ $\boxed{f(x) \leq h(x) \leq g(x)} \to +\infty$

$+\infty$ è sufficiente

Hp: $\exists I(c) \mid \forall x \in \text{Dom}f \cap \text{Dom}h \cap I(c) \setminus \{c\}$, Th: $\exists \lim_{x \to c} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

Proprietà: $h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\log_e f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log_e(f(x))}$ $f(x) > 0$ *

- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\text{Dom}\,h = \{x \mid 1+\frac{1}{x} > 0\} \to \text{Dom}\,h =]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$

- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ $a \in \mathbb{R}$ $y = \frac{x}{a}$ con $a \neq 0$ $\lim_{x\to+\infty} y = \begin{cases} -\infty & \text{se } a<0 \\ +\infty & \text{se } a>0 \end{cases}$

DIM: $y = \frac{x}{a} \to \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a$ c.v.d.

- $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $y = \frac{1}{x} \to \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} \to \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\log_e a}$ $a>0$ $a\neq 1$

- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ $y = a^x - 1$ $a^x = y+1$ $x = \log_a(1+y) \to \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \log_e a$

- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ $\alpha\in\mathbb{R}$ pongo $1+x = e^y \to \lim_{\substack{y\to 0\\ x=e^y-1}}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1}\cdot\frac{y}{y} = \lim_{y\to 0}\alpha\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = \alpha$

$\log e^\alpha = \alpha \log_e e$ $\log_e e$

es. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$ es. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\sin x}-1}{\sin x}$ $t = \sin x$ $\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{5}}-1}{t} = \frac{1}{5}$

* Se $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log_e f(x)) = e^{g(x)\log_e f(x)} \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\left[\lim_{x\to c} g(x)\log_e f(x)\right]}$ da questa scrittura si possono ricavare tutti i tipi di f.i. $f(x)^{g(x)}$ se $g(x)\to 0$ $f(x)\to 0 \Rightarrow$ f.i. 0^0
$f(x)\to\infty \to$ f.i. ∞^0
se $g(x)\to\infty$ $f(x)\to 1 \to$ f.i. $1^{+\infty}$
$g(x)\log_e f(x) \to$ f.i. $0\cdot\infty$ se $f\to 0$ o $+\infty$

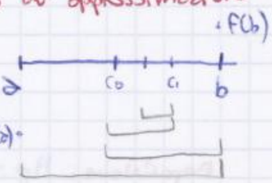
Proprietà globali delle funzioni continue

Zero di una $f(x)$: x_0 è lo 0 di f se $f(x_0) = 0$

Teorema di esistenza degli 0: Hp: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua Th: $\exists\, x_0\in[a,b] \mid f(x_0)=0$
$f(a)f(b)<0$ lo 0 è unico se f strettam monotona

DIM (costruttivo: dimostro che lo 0 ∃ e trovo un modo per calcolarlo): metodo di approssimazione

Consideriamo ad es. $f(a)<0$, $f(b)>0$ $c = \frac{a+b}{2}$ $f(c) = \begin{cases} 0 \to \text{fine } x_0 = c \\ >0 \to a_1 = a\ b_1 = c \\ <0 \to a_1 = c\ b_1 = b \end{cases}$



$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ $f(c_1) = \{\ \ldots$ $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$

$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4}$ $\ldots$ $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

$a\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_n \le b_n \le b_{n-1}\le\ldots\le b_1\le b$ $\{a_n\}$ ↗ monotona crescente e limitata da $\{b_n\}$, $\{b_n\}$ ↘ monotona decrescente e limitata da $\{a_n\}$

$f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ $\exists\lim_{n\to\infty} a_n = x_0^- \subset [a,b]$, $\exists\lim_{n\to\infty} b_n = x_0^+ \subset [a,b]$

$a\le a_n\le b_n\le b$ $x_0^+ - x_0^- = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)}{2^n} = 0$ $x_0 = x_0^+ = x_0^- = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

poiché $f(x)$ continua $f(x_0) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\underbrace{f(a_n)}_{<0}}_{\le 0} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\underbrace{f(b_n)}_{>0}}_{\ge 0} = 0$

per il T. della permanenza del segno

N.B: Nelle Hp non è restrittivo porre $]a,b[$ al posto di $[a,b]$

Corollario: Hp: $f: I\to\mathbb{R}$ continua Th: $\exists x_0\in I \mid f(x_0) = 0$
$i = \inf I$
$s = \sup I$
$\left(\lim_{x\to i} f(x)\right)\left(\lim_{x\to s} f(x)\right) < 0$

es. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0$ es. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\cos x \overset{\vee}{\wedge} x^2,\ x\to 0$ *

$\Rightarrow 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ x\to 0$ es. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \sin x = o(x),\ x\to\pm\infty$

* $f \overset{\vee}{\wedge} g,\ x\to c \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\ell\cdot g(x)} = 1 \to f(x) \sim \ell g(x),\ x\to c$

Proprietà II: $f \sim g,\ x\to c$ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \to \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0 \to \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right) = 0$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = o(g),\ x\to c \Rightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)),\ x\to c$

Proprietà III: $\lambda \neq 0$ $O(\lambda f) = \lambda O(f) = O(f),\ x\to c$ $o(\lambda f) = \lambda o(f) = o(f),\ x\to c$

$\lim_{x\to c}\frac{g}{\lambda f} = 0 \to \frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to c}\frac{g}{f}\right) = 0$

IV: f continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{1} = 0$ $f(x) - f(x_0) = o(1),\ x\to x_0$

$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + o(1) \Rightarrow$ se $f(x)$ continua in x_0 posso approssimarla con $f(x_0)$ in un $I(x_0)$ commettendo un errore $o(1)$

Per $x\to 0$ considero $f(x) = x^n$, $g(x) = x^m$ $\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m}$ poniamo $n > m$

$\lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0$ $x^n = o(x^m)$ * per $x\to+\infty$ $x^m = o(x^n)$

Algebra degli "o" p. 131

per $x \to 0$ $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$ la somma di funzioni che sono $o(x^n)$ mantiene la stessa proprietà

classi di funzioni che sono $o(x^n)$ per $x\to 0$

" " $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$ $p = \min(n, m)$ es. $f = o(x^n)$, $g = o(x^m)$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^m} = 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^p} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x^n}\cdot\frac{x^n}{x^p} + \frac{g(x)}{x^m}\cdot\frac{x^m}{x^p}\right)$ $\to 0$ o 1 a seconda di qual'è il min tra m e n $\to 0$

$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^p} = 0$

$(o(x^n))^k = o(x^n)o(x^n)\ldots o(x^n) = o(x^{kn})$ $o(x^n)o(x^m) = o(x^{m+n})$

es. $\sin x \sim x,\ x\to 0 \Rightarrow \sin x = x + o(x)$ $x\to 0$ ($\sin x$ in un $I(0)$ è approssimabile con "x")

ogni costante si toglie

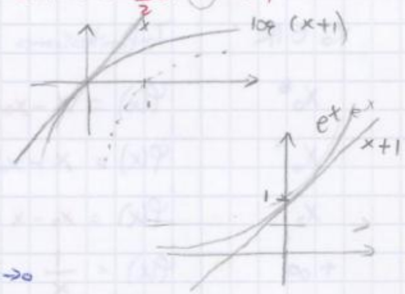
es. $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ x\to 0 \Rightarrow 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2)$ $x\to 0 \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ $x\to 0$

es. $\log(1+x) \sim x,\ x\to 0 \Rightarrow \log(1+x) = x + o(x),\ x\to 0$

se $t = x+1$ $\log t = t - 1 + o(t-1),\ t\to 1$

es. $e^x - 1 \sim x,\ x\to 0 \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x), x\to 0$

$\Rightarrow e^x = 1 + x + o(x),\ x\to 0$



es. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ x\to 0$ $\alpha \neq 0$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x),\ x\to 0$

$\Rightarrow$ es. $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ es. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0 \to \log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $\alpha > 0$

Semplificazione calcolo di limiti

Proposizione: Hp: $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ per $x\to c$ $g(x) \neq 0$, $\tilde{g}(x) \neq 0$

Th: $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c}\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$, $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$

DIM: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x)}\cdot\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to c}\underbrace{\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\tilde{g}(x)}{g(x)}}_{\to 1}\cdot\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to c}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ c.v.d.

es. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{25}{2}x^2}{9x^2} = \frac{25}{18}$ es. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x-1}-e}{\log(1+\sin^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e(e^{7x}-1)}{\log(1+\sin^2 x)}$ t = $\sin x \to 0$ è per $x\to 0$

$\Rightarrow f(x) - mx - q = o(1) \to f(x) = mx + q + o(1)$ per $x \to +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{mx}{x}}_{\to m} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{q}{x}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ all'infinito $f(x) \sim mx$ $m \neq 0$

da $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0$ si ottiene $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q$

es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ $m=0$ $q=1$ $y=1$ a. orizzontale completo

es. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \pm 1$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}+x} = 0$

asintoto obliquo $y = x$ destro a. obliquo $y = -x$ sinistro

es. $f(x) = x + \sqrt{x}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sqrt{x}}{x} = 1$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ∄ asintoto obliquo

asintoto verticale: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $x = x_0$ asintoto (completo)

es. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ Dom $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $x=0$ a. verticale

es. $f(x) = x + \log_e x$ Dom $=]0, +\infty[$ $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\log_e x}{x} = 1$ $\lim_{x\to+\infty} \log_e x = +\infty$ ∄ a. obliquo

$\lim_{x\to 0} x + \log_e x = -\infty$ $x = 0$ a. verticale dx

es. $f(x) = [x]$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$ $\lim_{x\to+\infty} [x] - x = \lim_{x\to\infty} -M(x)$ ∄ no. asintoto obliquo

Teoremi sui limiti applicati alle successioni p. 142

a_n è convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ è limitata globalmente ($|a_n| \le k$)

es. $a_n = q^n$ (successione geometrica)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \ell \to \begin{cases} \ell = 0 & \text{se } q = 0 \\ \ell = 1 & \text{se } q = 1 \\ \ell = 0 & \text{se } 0 \le |q| < 1 \\ \ell = +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists\, \ell \text{ (indeterminato)} & \text{se } q \le -1 \end{cases}$$

se $q \in]-1, 1]$ converge se no diverge (o è indeterminata)

es. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ es. $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(-1)^n}^{\text{limitata}}}{\underbrace{2^n}_{\to+\infty}} = 0$ es. $p > 0$ $a_n = \sqrt[n]{p}$ $n > 1$ $\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = 1$

es. $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{1}{n}\log_e n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log_e n} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\log_e n}{n} = 1$

$\Rightarrow \log_e n = o(n)$ $n \to \infty$

Criterio del rapporto: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ se $\ell < 1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se $\ell > 1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Ordine di infiniti: $\log_e n, n^\alpha, q^n, n!, n^n \to \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ DIM: $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$\to \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Derivate

$x_0 \in \mathbb{R}$, $I(x_0)$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = rapporto incrementale (v medio) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = derivata in x_0 (v istantanea) $\to f$ è derivabile in x_0 se ∃ finito $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

Proprietà: f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

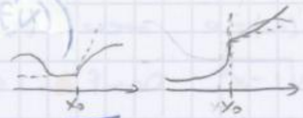
DIM: $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ (perché f è continua) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \lim_{x\to x_0} (x - x_0) =$

$f'(x) \cdot 0 = 0 \to$ il limite è uguale a quello iniziale quindi la th è valida

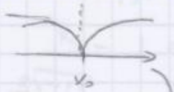
NON vale il viceversa! es. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \pm 1 \to \nexists \lim_{x\to 0}$ R.I.

Funzione derivata: $f' : \text{Dom} f' \to \mathbb{R}$ $\text{Dom} f' \{x \in \text{Dom} f : f \text{ è derivabile in } x\}$

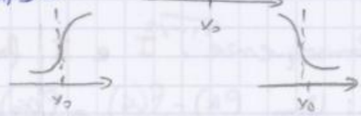
Punti di non derivabilità ($\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$)



- x_0 punto angoloso: $\exists f'_+, f'_-$ finite ma $f'_+ \neq f'_-$ anche se una sola è finita
- x_0 " di cuspide: $\exists f'_+, f'_-$ ∞ $f'_+ \neq f'_-$ es. $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$

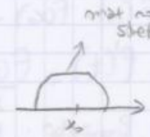


- " " a Tg verticale: $\exists f'_+, f'_-$ ∞ $f'_+ = f'_-$ es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$



Proposizione: f derivabile in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\wedge$ f continua in x_0
$\wedge \ \exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell = f'(x_0)$

Punti di estremo (solo max e min)



$x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$, $\exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0)$ $f(x) \leq f(x_0) \rightarrow x_0$ max locale (non stretto)
" " " " " " " " $f(x) \geq f(x_0) \rightarrow x_0$ min locale

Punto critico / stazionario (di Fermat) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (max, min, flessi a tg. orizzontale)

Teorema di Fermat

Hp: f derivabile in x_0
x_0 p.to di estremo locale

Th: $f'(x_0) = 0$

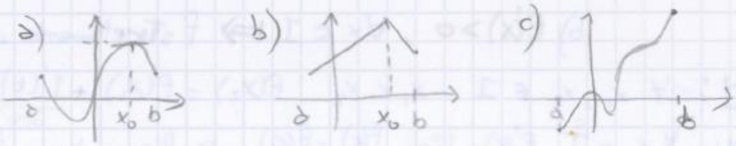
DIM: supponiamo x_0 punto di max locale
$\exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0)$ $f(x) \leq f(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ $\quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\leq 0}{> 0} \rightarrow f'(x_0) \leq 0 & x > x_0 \\ \frac{\leq 0}{< 0} \rightarrow f'(x_0) \geq 0 & x < x_0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to x_0^+} R.I. \leq 0 \quad \lim_{x \to x_0^-} R.I. \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} R.I. = f'(x_0) = 0$, c.v.d.

I punti di estremo di f si devono cercare tra:

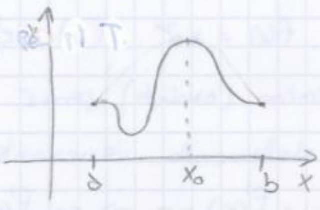
a) punti stazionari
b) punti di non derivabilità
c) estremi del Dom f



Teorema di Rolle

Hp: f continua in $[a,b]$
f derivabile in $]a,b[$
$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
$f(a) = f(b)$

Th: $\exists x_0 \in]a,b[\mid f'(x_0) = 0$



DIM: per il T. di Weierstrass $\exists x_m, x_M \in [a,b] \mid f(x_m) = m \leq f(x_M) = M$

Nel caso $m = M \rightarrow f(x)$ è costante $\Rightarrow \forall x_0 \in]a,b[$ $f'(x_0) = 0$

Nel caso $m < M$ poiché $f(a) = f(b)$ almeno uno tra m ed M è $\neq f(a) \rightarrow$ almeno uno tra x_m e $x_M \in]a,b[$ per almeno uno dei 2 valgono le hp del T. di Fermat $\Rightarrow f'(x_m) = 0$ $\vee$ $f'(x_M) = 0$ c.v.d.

Teorema di Lagrange

Hp: $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
f continua in $[a,b]$
f derivabile in $]a,b[$

Th: $\exists x_0 \in]a,b[\mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

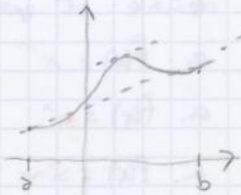
DIM: Considero $\varphi(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}_{\text{retta passante x } f(a) \text{ e } f(b)}$

$\varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile

$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\varphi(a) = f(a)$ $\quad \varphi(b) = f(a)$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \rightarrow$ vale il T. di Rolle



$f^{(35)}(x) = -\cos x$ $\quad \sin x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

es. $\varphi(x) = \cos x \quad \varphi'(x) = -\sin x \quad \varphi''(x) = -\cos x \quad \varphi'''(x) = \sin x \quad \varphi^{IV}(x) = \cos x$ ciclo di ordine 4

$\varphi^{(42)}(x) = -\cos x \quad \cos x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

es. $f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad \dots \quad \sqrt{x} \in C^{\infty}]0,+\infty[$

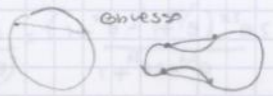
$Dom = [0,+\infty[$

es. $f(x) = x^{3/5}$ $Dom = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}$ $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ $f''(x)\ \frac{24}{25}x^{-\frac{2}{5}}$ $C^2]0,+\infty[$

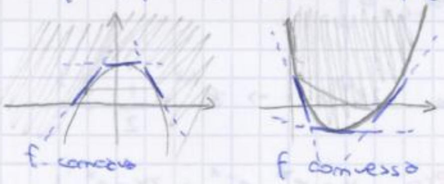
es. $f(x) = x^{12/5}$ $Dom = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{12}{5}x^{\frac{7}{5}}$ $f'' \in \frac{12}{5}\cdot\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$ $f \in C^2(\mathbb{R})$ $f''' = \frac{12\cdot 7}{25}\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$ $f \in C^3]0,+\infty[$

Proprietà di convessità

Geometricamente una figura è convessa se, presi 2 punti qualunque, il segmento che li congiunge è completamente compreso nella figura



Per stabilire se una funzione è convessa si fa riferimento al suo epigrafico. Epigrafico di f: semipiano al di sopra del grafico di f



$Epi(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom f,\ y \geq f(x)\}$ f è convessa in I se l'insieme $Epi(f)$ è un insieme convesso $\Rightarrow$ la tangente $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ in x_0 sta sotto il grafico della funzione in x_0: $\forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. Se in $I(x_0)$ la funzione cambia concavità, x_0 è un punto di **flesso** $\Rightarrow$ la $t(x)$ attraversa il grafico di f ($f(x) \geq t(x)$ per $x \geq x_0$ $\wedge$ $f(x) < t(x)$ $x < x_0$ $\Rightarrow$ x_0 flesso discendente $\vee$ $f(x) \leq t(x)$ $x \geq x_0$ $\wedge$ $f(x) \geq t(x)$ $x < x_0$ $\Rightarrow$ x_0 flesso ascendente)

Teorema: Hp: $f: I \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $\mathring{I}$ Th: f convessa / strettamente convessa $f'(x)$ crescente / strettam. crescente

Teorema: Hp: $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$, $f''(x) \geq 0$ in I Th: f è convessa in I DIM: $(f')'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x)$ è crescente $\Rightarrow f(x)$ è convessa su I

Proprietà: $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$ $x_0 = $ flesso $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ ⚠ non vale il viceversa

infatti $f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$ in $x_0 = 0$ $f''(x) = 0$ ma x_0 non è un flesso ma un min

$\Rightarrow \nexists f''(x_0) = 0 \to$ se $f'(x_0)$ cambia segno in $I(x_0)$, x_0 no flesso

↳ se $f'(x_0)$ non " " " ", $x_0 = $ flesso

Es. $f(x) = xe^{2x}$ $f'(x) = e^{2x}(1+2x)$ $f''(x) = 4e^{2x}(1+x)$ $x_0 = -1$ $\quad \underset{\frown\ -1\ \smile}{-\quad +}$ x_0 flesso

Funzioni Iperboliche

$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \varphi(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ⤳ catenaria: curva descritta da 1 catena tesa da 2 lati. In dimensione 2 descrive la S minima formata dalle bolle di sapone

$Dom f(x) = \mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f(-x) = -f(x)$ dispari $\to f(0) = 0$ $\quad f(x) \geq 0 \quad e^x > e^{-x}$ per $x \geq 0$ $\quad f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \varphi(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ strettamente crescente su $\mathbb{R}$ $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$ $x_0 = 0$ punto di flesso

$\Rightarrow$ f concava in $]-\infty, 0]$, convessa in $[0,+\infty[$

es. $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ DIM: $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{|x|^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{-\alpha|x|^{\alpha-1}} \overset{H}{=} \dots \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{-\alpha!} = 0$?

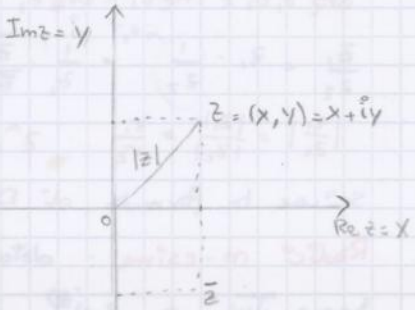
es. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x = 0$ $\alpha>0$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x^{-\alpha}}$ "=" $\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{1}{\alpha}\cdot x^\alpha = 0$

Teorema: Hp: f continua in $I(x_0)$ → Th: $\exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell$

f derivabile in $I(x_0)\setminus\{x_0\}$ DIM: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1} = \ell = f'(x_0)$

$\exists \lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell$ c.v.d.

Numeri Complessi $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$



$x^2+1=0$ $x=\pm i$ $i^2=-1$ se non è presente una parte reale il nr è immaginario puro. $Re(z_1\pm z_2) = Re\, z_1 \pm Re\, z_2$

$Im(z_1\pm z_2) = Im\, z_1 \pm Im\, z_2$ $-z$ = opposto di $z = -x-iy$

$\frac1z = z^{-1}$ = reciproco di z: $\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar z}{|z|}$

coniugato del denominatore

es. $\frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i+6i-8}{9+16} = \frac{2i-1}{5} = \frac25 i - \frac15$ $\bar z$ = coniugato di $z = x-iy$

$|z|^2 = z\cdot\bar z = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ = distanza di z da 0, numero reale! $|z_1z_2| = |z_1||z_2| =$

$= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)}\sqrt{(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{(x_1^2x_2^2+y_2^2x_1^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2)} = |(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)| = |x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2| =$

$= |x_1x_2 - y_1y_2 - (x_1y_2+x_2y_1)i| = \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+\cancel{2x_1x_2y_2y_1}} =$

$\sqrt{x_1^2y_2^2+x_1^2y_2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2}$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right| = \left|\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}\right| = \left|\frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right| =$

$= \left|\frac{x_1x_2+y_1y_2+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}\right| = \left|\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2 + \frac{(x_2y_1-x_1y_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}} = \frac{\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_2y_1-x_1y_2)^2}}{x_2^2+y_2^2} =$

$= \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2}}{x_2^2+y_2^2}$ $|\bar z| = |z| \Rightarrow \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

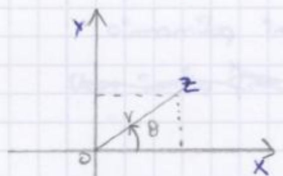
→ disuguaglianza triangolare risultante del parallelogramma

$z+\bar z = 2x \to Re\, z = \frac{z+\bar z}{2}$ $z-\bar z = 2iy$ $Im\, z = \frac{z-\bar z}{2i}$ $Re\, z \le |Re\, z| \le |z|$

$i^0=1$ $i^1=i$ $i^2=-1$ $i^3=-i$ i^n → ciclo di ordine 4 $Im\, z \le |Im\, z| \le |z|$

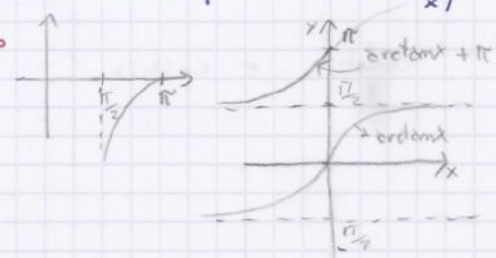
es. $i^{42} = i^{40}\cdot i^2 = 1^{10}\cdot(-1) = -1$ $i^{47} = (i^4)^{11}\cdot i^3 = -i$

Forma Trigonometrica ed Esponenziale



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$ $r = \sqrt{\underbrace{r^2\cos^2\theta}_{x^2} + \underbrace{r^2\sin^2\theta}_{y^2}} = |z|$ θ = argomento di z (arg z): non è univocamente determinato in quanto è periodico di 2π ⇒ $\tan\theta = \frac yx$ $x\neq0$ ma non sempre $\theta = \arctan\left(\frac yx\right)$

se scegliamo $-\pi<\theta<\pi$ ⇒ θ: argomento principale (Arg z)



$-\frac\pi2 < x < \frac\pi2$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac yx & x>0 \\ \arctan\frac yx + \pi & x<0,\ y\ge0 \\ \arctan\frac yx - \pi & x<0,\ y\le0 \\ \pi/2 & x=0,\ y>0 \\ -\pi/2 & x=0,\ y<0 \end{cases}$$

Sviluppi di Taylor

Considero f definita in $I(x_0)$:

- se f continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \to f(x) = f(x_0) + o((x-x_0)^0)$ per $x \to x_0$ $\quad o(1)$

$\to f(x) = T_{f,x_0,0}(x) + o((x-x_0)^0)$ in un $I(x_0)$ la funzione è approssimabile con un $T_{f,x_0,0}$ (polinomio centrato in x_0, di grado 0) più un resto trascurabile (errore)

- se f è anche derivabile in x_0, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x_0)(x-x_0)} = 1 \to$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \Rightarrow f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) + o(x-x_0)$ che è l'equaz. della retta tangente al f nel punto x_0) per $x \to x_0$ $T_{f,x_0,1}(x)$ errore più preciso (forma di Peano)

I formula dell'incremento finito

- Se f derivabile in tutto un $I(x_0)$ (escluso al massimo x_0) vale il teorema di Lagrange e quindi la seconda formula dell'incremento finito $f'(t) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\quad x_1 < x_2 \quad t \in]x_1, x_2[$

$f(x_2) - f(x_1) = f'(t)(x_2 - x_1) \to f(x) = f(x_0) + f'(t)(x-x_0) \to$ forma di Lagrange

$T_{f,x_0,0}(x)$ errore più preciso, stima numerica

- Avendo trovato 1 $T_{f,x_0,0}$ e un $T_{f,x_0,1}$ che approssimano $f(x)$ in x_0, ci chiediamo se è possibile trovare anche un polinomio di grado 2 che approssimi f in x_0, tale da commettere un errore del tipo $(x-x_0)^2$ ($\exists\, T_{f,x_0,2}(x) \mid f(x) = T_{f,x_0,2}(x) + o((x-x_0)^2)$ per $x \to x_0$?)

vogliamo dunque cercare un $a \mid f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$ $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)+a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \quad \to f.i. = \frac{0}{0} \to \text{De l'Hopital}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) + 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0} \boxed{\frac{f'(x)-f'(x_0)}{(x-x_0)}}\right) + a = 0$$ per ricavare a dunque

R.I. di $f'(x_0)$; $f''(x_0)$

devo avere la condizione che f sia derivabile 2 volte in x_0, quindi f sia derivabile in $I(x_0)$, in tal caso $\frac{1}{2}f''(x_0) - a = 0 \to a = \frac{f''(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$ $x \to x_0$ $\quad T_{f,x_0,2}(x)$

- Se f è derivabile 2 volte in $I(x_0)$ $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_{f,x_0,1}(x)} + \frac{f''(t)}{2}(x-x_0)^2 \to$ resto + preciso

Reiterando il procedimento ed allargando la derivabilità in x_0 e $I(x_0)$ si possono trovare polinomi con grado sempre > che approssimano $f(x)$ in x_0

Teorema di Taylor:

I) f derivabile n volte in x_0 $\quad f(x) = T_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$ = Polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n con resto di Peano $: f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ $= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ se $x_0 = 0$ il polinomio viene detto di Maclaurin

II) f derivabile n+1 volte in $I(x_0)$ (quindi derivabile n volte in x_0 e $f^{(n)}(x)$ continua in x_0) $\quad f(x) = T_{f,x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ = Polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n con resto di Lagrange $= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Es: troviamo lo sviluppo di Taylor di $f(x) = e^x$ $\quad f(x) \in C^\infty\, \mathbb{R}$ $\quad f^{(k)}(x) = e^x \;\; \forall k \geq 0$

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

per $x_0 = 0$ (centro del polinomio) $f^{(k)}(0) = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) =$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\quad t \in]0, x[$ se noi calcoliamo il valore dello es. $g(x) = \cos x$ pari $g'(x) = -\sin x$ $g''(x) = -\cos x$ $g'''(x) = \sin x$ $g^{IV}(x) = \cos x$ in $x_0 = 0$

$g^{(2m+1)}(0) = 0$ $g^{(2m)}(0) = (-1)^m$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2m+1})$

es. $f(x) = (1+x)^\alpha$ in $x_0 = 0$

- se $\alpha_1 = 1$ $f(x) = x+1$ $f'(x) = 1$ $f''(x) = 0$ $f^k(x) = 0$ $\forall k > 1$ quindi $T_{f,0,0}(x) = 1$

  $T_{f,0,1}(x) = 1 + x$ $T_{f,0,5}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \dots + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!} = 1 + x$
- se $\alpha = m \in \mathbb{N}$ $(1+x)^m = 1 + mx + \binom{m}{2}x^2 + \dots + x^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$ (binomio di Newton)

  es. $m = 3$ $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ $T_{f,0,2} = 1 + 3x + 3x^2$ in $x_0 = 0$ $T_{f,0,47} = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

  Per un polinomio il suo $T_{f,x_0,m}$ coincide esattamente con il polinomio stesso per $k \geq$ grado del polinomio.
- se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ è $f(x) = (x+1)^\alpha$ $f'(x) = \alpha(x+1)^{\alpha-1}$ $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(x+1)^{\alpha-2}$

  $f^k(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ $f(0) = 1$ $f'(0) = \alpha$ $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

  $f^k(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ $T_{f,0,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k =$

  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} x^m + o(x^m)$ per scrivere il T in maniera compatta definiamo un binomiale di un numero α che $\notin \mathbb{N}$ come

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{m} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^m)$

es. $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 +$
$+ \frac{3}{16}x^3 + o(x^3)$ per $x_0 = 0$ e $m = 3$

es. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ $x_0 = 0$ $m = 2$

es. $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}_{1} x^2 + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}}_{-1} + \dots + \binom{\alpha}{5}x^5 + o(x^5) =$
$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$ in $x_0 = 0$ e $m = 5$

Proprietà: Hp: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabile m volte in $]a,b[$ $x_0 \in]a,b[$
$\exists$ un polinomio $P_m(x)$ che ha la proprietà $f(x) = P_m(x) + o((x-x_0)^m)$

Th: $P_m(x) = T_{f,x_0,m}$ (Il polinomio di Taylor se $\exists$ è unico)

Somma algebrica di sviluppi

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m + o(x^m) = P_m(x) + o(x^m)$ per $x_0 = 0$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_m x^m + o(x^m) = Q_m(x) + o(x^m)$

$f(x) + g(x) = P_m(x) + o(x^m) + Q_m(x) + o(x^m) = \underbrace{\boxed{P_m(x) + Q_m(x)}}_{T_{f,0,m}} + o(x^m)$

$T_{f\pm g, x_0, m}(x) = T_{f,x_0,m}(x) \pm T_{g,x_0,m}(x)$

es. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è una f. pari in $x_0 = 0$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^m}{m!}$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^m x^m}{m!}$ sommando e i polinomi di Taylor $(e^x + e^{-x})$ spariscono le potenze dispari e rimangono le potenze pari considerate 2 volte ma moltiplicate per $\frac{1}{2}$ ⇒ (ovvero solo le potenze pari) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$

$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$

Composizione di sviluppi

es. $f(x) = a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ $\quad g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_n y^n + o(y^n)$

per ottenere lo sviluppo di Maclaurin di $g \circ f$ v $f \circ g$ bisogna fare attenzione che entrambe $f(x)$ e $g(y)$ siano sviluppate in 0 (f in $x_0 = 0$ e g in $y_0 = 0$ $\Rightarrow y_0 = f = 0$ v $x_0 = g = 0$)

$\Rightarrow g(f(x)) = b_0 + b_1 f(x) + \dots + b_n (f(x))^n + o((f(x))^n) = b_0 + b_1 (a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)) +$
$+ b_2 (\dots)^2 + \dots + b_n \underbrace{(a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n))^n}_{\text{tengo solo i termini con potenza} \le x^n} + o\overbrace{((a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n))^n)}^{o(x^n)}$

es. $f(x) = \sqrt{\cos x}$ in $x_0 = 0$ $\quad f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$ $\quad n = 3$ $\quad (1+t)^{\frac{1}{2}}$ $t \to 0$ $\quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) +$
$- \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$

es. $f(x) = e^{\cos x}$ per $x_0 = 0$ $\quad e^{\cos x}$ non è sviluppato in 0 poiché $\cos(0) = 1$ quindi sviluppiamo il $\cos x$ cercando di riportarci ad e^t con $t \to 0$ $\Rightarrow f(x) = e^{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)} = e \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}$ $\to 0$

a questo punto si può sviluppare e^t $\to f(x) = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = e - \frac{e}{2} x^2 + o(x^3)$ $\quad t \to 1 \to t - 1 \to 0$

se volessimo sviluppare prima e^t usiamo lo ~~formula~~ sviluppo generale $e^t = e + e(t-1) + \frac{e}{2}(t-1)^2 + \dots$

quindi lo sviluppo sarebbe $f(x) = e + e(\cos x - 1) + \frac{e}{2}(\cos x - 1)^2 + \dots + o(\cos x - 1)^3 = e + \frac{e x^2}{2} + o(x^3)$

Teorema: Hp: f derivabile n volte in x_0

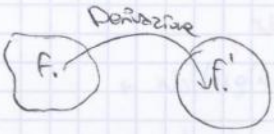
$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Th: se n è pari $\to x_0$ punto di Fermat ; $a_n > 0$ $x_0 = \min$ v $a_n < 0$ $x_0 = \max$

se n dispari $\to x_0$ NON è un punto di estremo ~~Fermat~~ $\to$ se anche $f'(x_0) \neq 0$ allora x_0 è un flesso
$\hookrightarrow$ se $f'(x_0) = 0$ flesso a tg orizzontale

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_n (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$

Integrazione Indefinita



$f: I \to \mathbb{R}$ la funzione $F: I \to \mathbb{R}$, derivabile $\mid F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ si dice primitiva di f in I.

es. $f(x) = x^3$ $\quad F(x) = \frac{x^4}{4}$ $\quad F(x) = \frac{x^4}{4} + c$ famiglia delle primitive

I teorema fondamentale: Caratterizzazione delle primitive: Hp: $f: I \to \mathbb{R}$ intervallo in $\mathbb{R}$

F è una primitiva di f $\quad$ Th: TUTTE le primitive di f sono della forma $G(x) = F(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$

$\int f(x)\,dx$ = insieme delle primitive di f = $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$

DIM: se F è una primitiva di f $\Rightarrow F'(x) = f(x)$, supponiamo che sia una primitiva di f.
e consideriamo $H(x) = G(x) - F(x)$. $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ su I $\to H(x) = c$
per terza conseguenza del T. di Lagrange $\to G(x) = F(x) + H(x) \to G(x) = F(x) + c$

N.B. = $F(x)$ è continua xk è derivabile. Solitamente se noi partiamo da f continue siamo in grado di calcolare F

es. $f(x) = e^{-3x}$ $\quad \int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c$ $\quad G(0) = 3 \to 3 = -\frac{e^0}{3} + c \to c = \frac{10}{3}$ $\quad G(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{10}{3}$

es. $f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x & x \ge 0 \quad [0, +\infty[\quad F_1(x) = -\cos x + c_1 \\ -\sin x & x < 0 \quad]-\infty, 0[\quad F_2(x) = \cos x + c_2 \end{cases}$ $F(x)$

Poiché non sono sicuro che in 0 $F(x)$ sia continua ed il Teorema afferma che la costante C è unica, devo scegliere un opportuno $c \mid F(x) + c$ continua in 0

Proprietà: Sostituzione: se $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \Rightarrow \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$

Hp: $\varphi: I \to J$, derivabile in $I \to f: J \to \mathbb{R}$, F primitiva di f su J

Dim: $F(\varphi(x))' = \underbrace{F'(\varphi(x))}_{f(\varphi(x))}\varphi'(x)$ c.v.d. Nella pratica poniamo $y = \varphi(x)$ $y' = \frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$

$dy = \varphi'(x)dx \to$ (regola solo mnemonica in quanto teoricamente non è corretta) $\Rightarrow \int f(y)dy = F(y) + c$

es. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$; $y = \cos x$ $dy = -\sin x\, dx \to -\int \frac{1}{y}dy = -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$

es. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ $y = \sqrt{1+x^2} - x$ $dy = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)dx = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$dx = \frac{dy \cdot \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}}$ $\to \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}}dy = -\int \frac{1}{y}dy = -\log|\sqrt{1+x^2} - x| + c = +\log|x + \sqrt{x^2+1}| = \operatorname{settsinh} x$

es. $\int \sqrt{1+x^2}dx \to$ per parti e poi per sostituzione $I = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx \Rightarrow$

$\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \left(\int \sqrt{x^2+1}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \Rightarrow 2\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \log|\sqrt{1+x^2} - x| \Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} - \log|\sqrt{1+x^2} - x|}{2}$ oppure ricordando la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ poniamo

$x = \sinh y \to \cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y \to \cosh y = \sqrt{1+x^2}$, $dx = \cosh y\, dy$ $y = \operatorname{settsinh} x \to \int \cosh y \cdot \cosh y\, dy =$

$= \int \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 dy = \int \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4}\right)dy = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{8} + \frac{y}{2} + c = \frac{1}{2}\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \frac{\operatorname{settsinh} x}{2} + c =$

$= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\log|x + \sqrt{x^2+1}|}{2} + c = \frac{x\sqrt{1+x^2} - \log|\sqrt{x^2+1} - x|}{2} + c$, facendo il reciproco e razionalizzando si ottiene $\log|x + \sqrt{x^2+1}|$

es. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ $y = \sqrt{x^2-1} - x$ $dy = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}dy \Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{-(\sqrt{x^2-1} - x)}dy =$

$= \int -\frac{1}{y}dy = -\log|y| + c = -\log|\sqrt{x^2-1} - x| + c = \log|\sqrt{x^2-1} + x| + c = \operatorname{settcosh} x + c$

es. $\int \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} - \left(\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx\right) = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx - \operatorname{settcosh} x + c$

$2\int \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1} - \log|\sqrt{x^2-1} + x| \to \int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{x\sqrt{x^2-1} + \log|\sqrt{1+x^2} - x|}{2} + c$ oppure

ricordando che $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ poniamo $x = \cosh y \Rightarrow \sinh y = \sqrt{x^2-1}$ $dx = \sinh y\, dy$ $y = \operatorname{settcosh} x$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}dx = \int \sinh^2 y\, dy = \int \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 dy = \int \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{4} - \frac{2}{4}\right)dy = \left(\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{8}\right) - \frac{y}{2} + c =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - \frac{\operatorname{settcosh} x}{2} + c = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\log|\sqrt{x^2-1} + x|}{2} + c = \frac{x\sqrt{x^2-1} + \log|\sqrt{x^2-1} - x|}{2} + c$

es. $\int \sqrt{1-x^2}dx$ si può fare per parti $= \int x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x(-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow$

$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx - \arcsin x + c \to \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x}{2} + c$

es. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx \Rightarrow y = e^x$ $dy = e^x dx \to dx = \frac{dy}{y} \to \int \frac{1}{y + \frac{1}{y}} \cdot \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{y^2+1}dy = \operatorname{arctg} y + c =$
$= \operatorname{arctg} e^x + c$

Integrazione funzioni razionali $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Steps:

- se $n \geq m$ divisione tra P_n e Q_m (risultato $= \int \left(\text{Quoziente} + \frac{\text{Resto}}{Q_m(x)}\right)dx$)
- considerare $\frac{N_n(x)}{D_m(x)}$ con $n < m$ $\Delta < 0 \to 2$ radici complesse coniugate
- decomporre $D_m(x) = d(x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_h)^{r_h}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{s_k}$ $\alpha_1, \dots \alpha_h \in \mathbb{R}$

$p_1, p_2, \dots p_k, q_1, q_2 \dots q_k \in \mathbb{R}$ per ottenere come risultato tante frazioni (fratte semplici) quant'è la molteplicità r_h $\frac{N_n(x)}{D_m(x)} = F_1(x) + \dots + F_h(x) + \tilde{F}_1(x) + \dots + \tilde{F}_k(x)$ dove $F_i(x) = \frac{A}{(x-\alpha_i)} + \dots + \frac{A_{r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}$ $\wedge$ $\tilde{F}_i(x) = \frac{B_i x + c_i}{x^2 + p_i x + q_i} + \dots + \frac{B_{s_i} + C_{s_i}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{s_i}}$

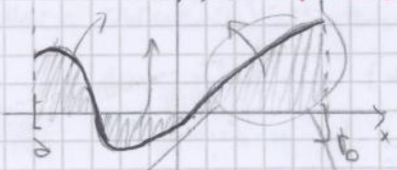
- scrivere la funzione razionale come somma di funzioni elementari (so integrare qualsiasi

$x = \arctan t \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ es. $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(2t^2+1)} \quad y^2 = 2t^2 \quad y = \sqrt{2}\,t$

$dy = \sqrt{2}\,dt \to \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{(\sqrt{2}t)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + c$

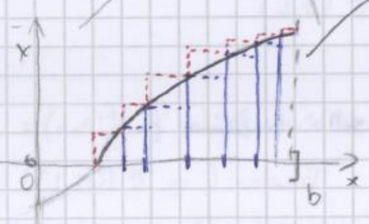
Integrale Definito

$A = \mathcal{T}(f; a,b)$: trapezoide



$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata $\mathcal{T}(f; a,b)$ = trapezoide di f su $[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \wedge 0 \le y \le f(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \wedge f(x) \le y \le 0\}$

→ costruzione di Riemann: partizione di $[a,b]$



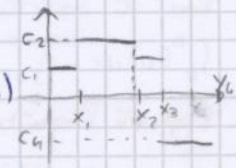
$\{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

f: funzione step = funzione a scala = funzione costante a tratti $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $f(x) = c_i$ $x \in\,]x_{i-1}, x_i[$ $i = 1, \dots, n$

$\int_a^b f(x)dx = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1}) =$

$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$ → per le funzioni di tipo step (con partizione adattata)

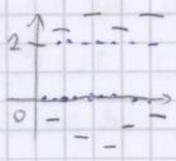


Proprietà di monotonia dell'integrale: $f, g \in S([a,b]) =$ $\{f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a scala$\}$, suppongo $f \le g$, $I = [a,b] \Rightarrow \int_I f \le \int_I g$ per confrontare le 2 funzioni a scala posso considerare suddivisioni di $[a,b]$ che siano adattate ad entrambe: $\{z_0, \dots, z_l\}$, $f(x) \le g(x) \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{l} \overset{f(x)}{c_i}(z_i - z_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{l} \overset{g(x)}{d_i}(z_i - z_{i-1})$, → $c_i \le d_i$

Occupiamoci di una generica funzione $f(x)$ limitata su $[a,b]$ $i_f = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ $S_f = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ considero l'insieme delle funzioni a scala $< f$ $S^-(f; a,b) =$ $\{g \in S(a,b) \mid g \le f\}$ e quelle $> f$ $S^+(f; a,b) = \{h \in S(a,b) \mid f \le h\}$

h e g $\exists$ sempre perché f è limitata → $g(x) \le f(x) \le h(x)$ nel caso estremo $g(x) = \inf f \wedge h(x) = \sup f$. Tra tutti gli integrali delle funzioni a scala che maggiorano f, scegliamo il minore che quindi ci dà un'approssimazione per eccesso di $\int_I f \to \inf\{\int_I h : h \in S_+(f; a,b)\} = \overline{\int_I} f$ = integrale superiore di f mentre il maggiore tra gli integrali delle $S([a,b])$ che minorano f sarà un'approssimazione per difetto di $\int_I f \to \sup\{\int_I g : g \in S^-(f; a,b)\} = \underline{\int_I} f$ = integrale inferiore ⇒ si ha che $\underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f$, si noti che essi non sono sempre uguali es. nella f. di Dirichlet: $\begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$



non sono in grado di trovare delle $f \in S(0,1)$ che

DIM $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F_{x_0}(\bar{x}+\Delta x) - F_{x_0}(\bar{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_0}^{\bar{x}+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt + \right.$

$\left. + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} f(t)dt \rightarrow m(f; a, b) = m(f; \bar{x}; \bar{x}+\Delta x)$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F_{x_0}(\bar{x}+\Delta x) - F_{x_0}(\bar{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(z(\Delta x)) \rightarrow$ z dipende da Δx, $z \in]\bar{x}, \bar{x}+\Delta x[$ per $\Delta x \to 0$

$z \to \bar{x}$ $\lim_{\Delta x\to 0} f(z(\Delta x)) = f(\bar{x})$ perche f è continua, quindi $F'_{x_0}(\bar{x}) = f(\bar{x})$

Se f non è continua si parla di $F_{x_0}(x)$ come di primitiva generalizzata

Corollario: Hp: $f: I \to \mathbb{R}$ continua, G primitiva di f su I Th: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

DIM: prendiamo come $x_0 = a$, $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'_a(x) = f(x)$ $\quad G(x) = F_a(x) + c$ (G primitiva di f)

$\int_a^b f(t)dt = F_a(b) - F_a(a) = G(b) - c - (G(a) - c) = G(b) - G(a) = G(x)\big|_a^b = [G(x)]_a^b$ c.v.d.

Corollario 2: Hp: f derivabile su I Th: $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$ $\quad f(x) - f(x_0)$

Corollario 3: Hp: $\varphi(x) = o(x^\alpha)$ $\alpha > 0$ per $x \to 0$ Th: $\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = o(x^{\alpha+1}) \Rightarrow \int_0^x o(t^\alpha)dt = o(x^{\alpha+1})$

DIM: $\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x^{\alpha+1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\psi'(x)}{(\alpha+1)x^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{(\alpha+1)x^\alpha} = 0$ c.v.d. ($\to o(x^\alpha)$ per hp)

es. $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \arctan 0$ (per corollario 2) vogliamo trovare lo sviluppo di arctan x fino ad $n = 5$ $\quad \frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 + o(x^4)$ $\arctan x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + o(t^4))dt =$

$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ per $x \to 0$

es. $\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}t^4 + o(t^4)$ $\arcsin x = x + \frac{x^3}{3} +$
$\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$

Proprietà (integrazione per parti): $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Proprietà (sostituzione): $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy$ es. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x\, dx$ $y = \sin x$

$dy = \cos x dx$ $\quad \int y^5 dy = \frac{1}{6}y^6 + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c \Rightarrow \int_0^1 y^5 = \left[\frac{\sin^6 x}{6}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}$

Proprietà (funzioni simmetriche) se f pari $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

pari è pari $y = -x$ $dy = -dx$ $\quad$ se f dispari $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$

DIM: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(y)dy + \int_0^a f(x)dx =$

$= \int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ c.v.d.

DIM: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x) + \int_0^a f(x)dx$ $\quad y = -x \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow -\int_a^0 f(y)dy + \int_0^a f(x)dx =$

$= -\int_a^0 -f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = 0$ c.v.d.

es. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x = 0$ ($\sin^3 x$ dispari, $\cos x$ pari)

Per ora abbiamo limitato l'operazione a funzioni $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate in un intervallo limitato della retta reale $\Downarrow$

Integrali Impropri

$f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f \in R_{loc}([a, +\infty[) =$ f si dice localmente integrabile su $[a, +\infty[$ se è integrabile su ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a,b]$ $\forall c \geq a$ $F(c) = \int_a^c f(x)dx$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx = \ell$ se $\ell \in \mathbb{R}$, la funzione è integrabile (in senso improprio) su $[a, +\infty[$

f può anche non avere segno costante!

Teorema (Criterio di convergenza assoluta): Hp: $f \in R_{loc}([a,+\infty[)$, $|f| \in R([a,+\infty[)$ ⇒ l'integrale improprio di $|f|$ converge. Th: $f \in R([a,+\infty[)$ → anche l'I. di f converge ∧ $\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ (il modulo della somma è ≤ della somma dei moduli)

Definiamo le funzioni f_+ = parte positiva di f è = f dove f è positiva e = 0 dove è negativa

$f_+ = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$ e f_- = parte negativa = $\begin{cases} 0 & f(x) \ge 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$ sono entrambe ≥ 0 ∧ $0 \le f_+, f_- \le |f|$

⇒ per il criterio del confronto $f_+, f_- \in R([a,+\infty[)$ ovvero sono integrabili in senso improprio su $[a,+\infty[$ $|f(x)| = f_+ + f_-$ $f(x) = f_+ - f_-$ ⇒ in quanto somma di funzioni integrabili anche f è integrabile in senso improprio ($f \in R[a,+\infty[$) ∀ intervallo $[a,c]$ inoltre x la proprietà di maggiorazione si ha $\left|\int_a^c f(x)dx\right| \le \int_a^c |f(x)|dx$ ⇒ $\left|\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx\right| \le \lim_{c\to+\infty} \int_a^c |f(x)|dx$

le funzioni che soddisfano $|f| \in R([a,+\infty[)$ sono dette assolutamente integrabili. c.v.d.

N.B.: se il modulo non è integrabile (non converge) non è detto che f non lo sia ⇒ il criterio fornisce 1 condizione SUFFICIENTE ma non necessaria x la convergenza

es. $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ → diverge ma $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge es. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ $|\sin x| \le 1$ → $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$

$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge/ → è integrabile → $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ converge → è integrabile ⇒ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ converge

Teorema (Criterio del Confronto Asintotico) Hp: $f \in R_{loc}([a,+\infty[)$, f infinitesimo di ordine α per $x \to +\infty$ Th: se $\alpha > 1$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, se $\alpha \le 1$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge ∨

Hp: $f \in R_{loc}([a,b[)$, f infinito di ordine α per $x \to b^-$

Th: se $\alpha < 1$, $\int_a^b f(x)dx$ converge, se $\alpha \ge 1$, $\int_a^b f(x)dx$ diverge

es. $\int_1^{+\infty} (\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x)dx$ considero $f(x) = \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x$ che → 0 per $x \to +\infty$ e troviamone l'ordine di infinitesimo $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x}{\frac{K}{x^\alpha}} = \ell \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{K(-\alpha)x^{-\alpha-1}}$ $-\alpha-1 = -2$ → $\alpha = 2$

→ $\int_1^{+\infty} (\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x)dx$ diverge N.B.: $\mathrm{arctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$ per $x > 0$

Dim: $h(x) = \mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$ → $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} = 0$

⇒ visto che $h'(x) = 0$ ∀ x > 0, ⇒ h(x) è una costante $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{\pi}{2}$ c.v.d.

es. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ per $\alpha = 1$ $y = \log x$ $dy = \frac{1}{x}dx$ $I = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \beta \le 1 \end{cases}$

per $\alpha > 1$ $\log x \ge \log 2$

$\left(\frac{1}{\log x}\right)^\beta \le \left(\frac{1}{\log 2}\right)^\beta \to K$ → $\frac{1}{x^\alpha (\log^\beta x)} \le \frac{K}{x^\alpha}$ → per $\alpha > 1$ $I_{\alpha,\beta}$ converge ∀β > 0

per $\alpha < 1$ $\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \frac{x^{-\alpha+1}}{x(\log x)^\beta}$ → +∞ ∀β → ∃ M costante | $\frac{x^{-\alpha+1}}{\log^\beta x} \ge M$ ⇒ $\frac{x^{-\alpha+1}}{x(\log x)^\beta} \ge \frac{M}{x}$ → diverge

per il criterio del confronto anche $I_{\alpha,\beta}$ con $\alpha < 1$ diverge ∀ β > 0

es. $\int_1^{+\infty} \frac{x-5}{(x+1)^3 \sqrt[3]{(x-2)(x-6)}} dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx}_{} + \underbrace{\int_3^6 f(x)dx + \int_6^7 f(x)dx}_{} + \int_7^{+\infty} f(x)dx$

per $x \to 6$ $f(x) \sim \frac{K}{(x-6)^{\frac{1}{3}}}$ $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ convergono convergono per $x \to 2$ $f(x) \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{-4}\,(x-2)^{\frac{1}{3}}}$

per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{K}{x^{2/3}}$ $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ diverge ⇒ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge aggiungendo gli integrali singolari si ha che $0 = \frac{Me^x}{1+Me^x} \Rightarrow M=0 \wedge \frac{Me^x}{1+Me^x} = 1$ per $M \to +\infty$

$\Rightarrow M \in \mathbb{R}$ es. $y' = y$ $g(x) = 1$ $h(y) = y$ $\int \frac{dy}{y} = \int dx$ $y=0$ $\log|y| = x + c$ $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^c e^x$ $y(x,c) = ce^x$ $c>0$ $y = ce^x$ $c \in$

es. $y' = \frac{1+e^x}{1+e^y}$ $g(x) = 1+e^x$ $h(y) = \frac{1}{1+e^y} > 0$ $\int 1+e^y dy = \int 1+e^x dx \Rightarrow \overbrace{y+e^y}^{H(y)} = \overbrace{x+e^x}^{G(x)} + c$

$c \in \mathbb{R}$ (rimane in forma implicita) volendo risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1+e^x}{1+e^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$1+e = 0+e^0+c \Rightarrow c = e \Rightarrow$ integrale particolare: $y + e^y = x + e^x + e$

Equazioni differenziali omogenee

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = \frac{y}{x} \Rightarrow z(x) = \frac{y(x)}{x}$ $y = xz$ $y' = z + x \cdot z'(x) = \varphi(z) \Rightarrow z' = \frac{\varphi(z) - z}{x} \Rightarrow$ variabili

separabili $g(x) = \frac{1}{x}$ $h(z) = \varphi(z) - z$ $\Rightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z)-z} = \int \frac{1}{x} dx$ $\varphi(z) - z = 0$ se $h(z) \neq 0 \ldots$

$\Rightarrow$ es. $x^2 y' = y^2 + xy + x^2 \Rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 \Rightarrow \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$ $\frac{y}{x} = z$

$\varphi(z) = z^2 + z + 1 \Rightarrow z + x \cdot z'(x) = z^2 + z + 1 \Rightarrow z'(x) = \frac{z^2+1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{x}$ $h(z) = z^2 + 1 > 0$

non ho zeri per $\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \arctg z = \log|x| + c \Rightarrow \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \log|x| + c \Rightarrow$

→ non è impossibile!

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(\log|x| + c) \Rightarrow y = x \tan(\log|x| + c)$

Equazioni differenziali Lineari → i termini $y', y \ldots$ sono di I grado

$y' + a(x) y = b(x)$ $a(x), b$ funzioni: $I \to \mathbb{R}$ continue

$\boxed{b(x) = 0}$ → equazione omogenea associata $y' + a(x) y = 0$ $y' = -a(x) y$ $g(x) = -a(x)$

$h(y) = y$ $y = 0$, $\int \frac{dy}{y} = -\int a(x) dx$ $A(x)$ primitiva di $a(x) \Rightarrow \log|y| = -A(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$

$y = ke^{-A(x)}$ $k \in \mathbb{R}$

$\boxed{b(x) \neq 0}$ cerco la S della non omogenea nella forma di prima con K funzione in x

ovvero $y = k(x) \underbrace{e^{-A(x)}}_{\neq 0}$, $y' = k'(x) e^{-A(x)} + k e^{-A(x)} (-\overbrace{A'(x)}^{a(x)})$ sostituiamo nell'equazione:

$k'(x) e^{-A(x)} - a(x) k e^{-A(x)} + a(x) \underbrace{k(x) e^{-A(x)}}_{y} = b(x) \Rightarrow k'(x) e^{-A(x)} = b(x) \Rightarrow k'(x) = e^{A(x)} b(x)$

$k(x) = \int e^{A(x)} b(x) dx$ perché $k(x) = \frac{y}{e^{-A(x)}} \Rightarrow y = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x) dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y = y(x,c) = e^{-\int a(x) dx} \left(\int e^{\int a(x) dx} b(x) dx\right) + c$

es. $xy' + y = x^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = x$ $a(x) = \frac{1}{x}$ $b(x) = x$ $y = e^{-\log|x|} \left(\int e^{\log|x|} x \, dx\right) =$

$= \frac{1}{|x|} \left(\int |x| x \, dx\right)$ (sono sempre concordi quindi tolgo il modulo) $\Rightarrow y = \frac{1}{x} \int x^2 dx =$

$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3} x^3 + c\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$ volendo risolvere il probl di Cauchy ponendo $y(x_0) = y_0$

si può direttamente ricavare c dalla formula $y(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \left(\int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s a(t) dt} b(s) ds + c\right)$

scegliamo la primitiva che si annulla in x_0

$c = y(x_0) = y_0$

Equazioni di secondo ordine riconducibili al I: quando non compare y

es. $y'' - (y')^2 = 1$ $y'' = f(x, y')$ $z = y'$ $z' - z^2 = 1$ $z' = 1 + z^2$ $g(x) = 1$ $h(z) = 1 + z^2$

$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx \Rightarrow \arctg z = x + c_1$ $z = \tg(x + c_1) \Rightarrow y' = \tg(x + c_1) \Rightarrow y(x, c_1, c_2) =$

$= \int \tg(x + c_1) dx = -\log|\cos(x + c_1)| + c_2$

Equazioni lineari di II ordine particolari

$y'' + ay' + by = g(x)$ $a, b \in \mathbb{R}$ → a coefficienti costanti $g \in C^0(I)$

$q(x)$ sia una $f(x)$ esponenziale, polinomiale o goniometrica o 2 combinazione di queste

- Se $q(x) = e^{\mu x}$ cerchiamo $y_p(x)$ nella forma $y_p(x) = \alpha x^m e^{\mu x}$ se μ è una radice di $\chi(\lambda) \Rightarrow m=1$, se $\chi(\mu) \neq 0 \Rightarrow m=0$, se μ è una radice doppia di $\chi(\lambda) \Rightarrow m=2$

es. $y'' + y' - 6y = e^x$ $\quad y_{om} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ $\quad \lambda_1 = 2, \lambda = -3$ $\quad \mu = 1 \neq \lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow$ la x^m non compare se questa è l'S dell'eq completa sostituendo dovrebbe annullarsi $y_p(x) = \alpha e^x$

$\underbrace{\alpha e^x}_{y''} + \underbrace{\alpha e^x}_{y'} - \underbrace{6\alpha e^x}_{y} = \underbrace{e^x}_{q} \Rightarrow -4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$ $\quad y(x) = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}}_{y_{om}} - \frac{1}{4} e^x$

es. $y'' + y' - 6y = e^{2x}$ $\quad \mu = 2 \Rightarrow m = 1$ $\quad y_p = \alpha x e^{2x}$ $\quad \mu = \lambda_1 \Rightarrow$ la S ha la stessa frequenza dell'equazione = effetto di risonanza $y_p'(x) = \alpha e^{2x} + \alpha x 2e^{2x}$ $\quad y_p''(x) = 2\alpha e^{2x} + 2\alpha e^{2x} + 4\alpha x e^{2x} =$
$= 4\alpha e^{2x} + 4\alpha e^{2x} \Rightarrow (4\alpha e^{2x} + 4\alpha x e^{2x} + \alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x} - 6\alpha x e^{2x}) = e^{2x} \Rightarrow 4\alpha + 4\alpha x + \alpha + 2\alpha x - 6\alpha x =$
$= 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$ $\quad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} x e^{2x}$. Se avessimo avuto $y'' + y' - 6y = e^{2x} + e^x$ si sarebbero trattate le equazioni con e^{2x} e e^x separati e l'integrale generale sarebbe stato $y_{om} + y_p(x)$ di e^{2x} + y_p dell'eq. con $e^x \Rightarrow$ principio di sovrapposizione: Se si hanno somme di $q(x)$ si può vedere l'equazione come somma di 2 equazioni con $q_1(x)$ e $q_2(x)$ separati

- $q_2(x) = P_m(x) e^{0x} \Rightarrow y_p(x) = x^m q_m(x)$ $\quad \lambda^{\mu} = 0 \Rightarrow \chi(0) = 0 \xrightarrow{m=1}$; $\chi(0) \neq 0$ $\quad m = 0$

es. $y'' + 2y' + 5y = x^2 + 1$ $\quad \chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ $\quad \lambda = 0$ non è S di $\chi(\lambda)$ $\quad y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$y_p'(x) = 2\alpha x + \beta$ $\quad y_p''(x) = 2\alpha$ $\quad \Rightarrow 2\alpha + 4\alpha x + 2\beta + 5\alpha x^2 + 5\beta x + 5\gamma = x^2 + 1$ eguaglio i coefficienti

$$\begin{cases} 5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \\ 4\alpha + 5\beta = 0 \quad \beta = -\frac{4}{25} \\ 2\alpha + 2\beta + 5\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{23}{125} \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{23}{125} \quad y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + {} + \text{〃} \text{〃} \text{〃}$$

- $q(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \Rightarrow y_p(x) = x^m q_m(x) e^{\alpha x}$ se α è S di $\chi(\lambda) \Rightarrow m = 1$, se $\chi(\alpha) \neq 0 \Rightarrow m = 0$

- $q(x) = \sin \theta x \cdot e^{0x}$ $\quad \lambda = 0 + i\theta$ $\quad \chi(\lambda) = 0 \Rightarrow m = 1$ $\quad \chi(\lambda) \neq 0 \Rightarrow m = 0$ ~~$y_p = x^m (c_1 \sin\theta x + c_2 \cos\theta x) e^{\mu x}$~~

(vale anche per il $\cos \theta x$) $\Rightarrow y_p = x^m (c_1 \sin \theta x + c_2 \cos \theta x) e^{\mu x}$ $\quad$ es. $y'' + 2y' + 5y = \sin x$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ $\quad m = 0$ $\quad \mu = 0$ $\quad y_p(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ $\quad y_p'(x) = \alpha \cos x - \beta \sin x$

$y_p''(x) = -\alpha \sin x - \beta \cos x \Rightarrow -\alpha \sin x - \beta \cos x + 2\alpha \cos x - 2\beta \sin x + 5\alpha \sin x + 5\beta \cos x = \sin x$

$$\begin{cases} -\alpha - 2\beta + 5\alpha = 1 \quad \beta = -\frac{1}{10} \\ -\beta + 2\alpha + 5\beta = 0 \quad \alpha = 2\beta = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad y_p(x) = \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{10}\cos x \ldots$$

- $q(x) = \cos \theta x \cdot e^{\mu x}$ $\quad \lambda = \mu + i\theta$ $\quad y_{om}(x) =$