NUMERO: 1488A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Arcero

MATERIA: Analisi Matematica I. Prof.Tabacco

Meccanica: studio del comportamento dei corpi materiali sottoposti a F:

- STATICA: condizioni di equilibrio di corpi sottoposti a F
- CINEMATICA: regole del moto
- DINAMICA: modalità di moto di 1 corpo sottoposto a F

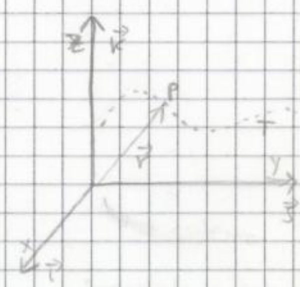
Sistemi materiali:

- punto materiale / particella: struttura massiva ma priva di dimensioni (le dimensioni sono trascurabili rispetto al sistema di riferimento)
- sistema di particelle: più punti materiali. Non possiamo conoscere il comportamento di ogni singola particella (es-gas).
- corpo rigido: insieme di particelle in cui la distanza tra esse rimane costante

Statica (del punto)

una condizione di equilibrio: $\sum_{i=1}^{N} F_i = 0 \qquad [N] = Kg \cdot m/s$

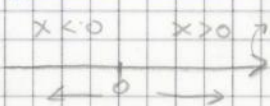
Cinematica

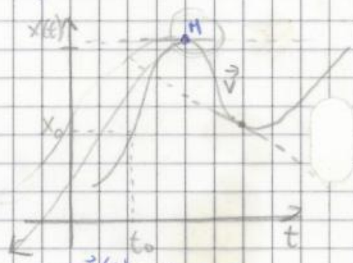


$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ → equazione del moto / legge oraria:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ ricavando t da un eq. e sostituendola nelle altre 2 si trova una funzione $T(x, y, z) = 0$ dove la variabile t non compare che rappresenta la curva della traiettoria nelle 3 variabili x, y, z.

La classificazione del moto avviene in base alla TRAIETTORIA (rettilineo, curvilineo...) e alla LEGGE ORARIA, ovvero il valore dell'accelerazione (uniforme, accelerato...)





$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \qquad a_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$

Se $\vec{v} > 0$ non è detto che il corpo si trovi nella parte ~~x>0~~ dove x>0 ma vuol dire semplicemente che si muove in quella direzione (idem x l'a) $v(t) = \frac{dx}{dt}$ → istantaneo $a(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$x, \vec{v}, \vec{a}$ sono grandezze algebriche. Nel punto M $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ → $\vec{v}(t) = 0$ ma il punto non è fermo, bensì inverte il verso del suo moto. Per ricavare x(t) bisogna integrare v(t): $v(t)\,dt = dx$ → $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \quad t_0 = 0 \quad x(t_0) = x(0) = x_0$

$x - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt$; mentre per ricavare v(t) si può integrare $a(t)$: $\int_0^t a(t)\,dt = \int_{v_0}^{v} d\vec{v}(t) \Rightarrow \int_0^t a(t)\,dt = V - V_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)\,dt$ → la legge del moto è nota quando conosciamo x_0, v_0 e a.

Se $a = 0$ → $\vec{v}(t) = v(0) = V_0$ → moto uniforme → $x(t) = x_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = x_0 + \int_0^t v_0\,dt \Rightarrow$ $x(t) = x_0 + v_0 t$. Se $a = a_0$ → $v(t) = v_0 + a_0 t$ $\quad x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t)\,dt$ →

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ ricavando t e sostituendolo nella legge del moto: $t = \frac{v(t) - v_0}{a_0}$

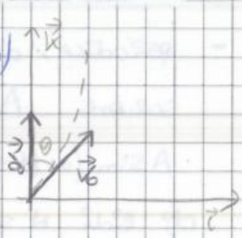
→ $x(t) = x_0 \, v_0 \left(\frac{v(t) - v_0}{a_0} \right) + \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v(t) - v_0}{a_0} \right)^2 \Rightarrow v^2(t) - v_0^2 = 2 a_0 (x(t) - x_0)$ → moto uniformemente accelerato. Se $a = a(t)$ → moto vario a $\vec{v}(t)$ quindi la traiettoria è rettilinea (moto rettilineo uniforme)

Se $a \neq 0$ e $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t$: Se $\vec{a}_0 \parallel \vec{v}_0 \rightarrow \vec{v}(t) \parallel \vec{a}_0$ e $\vec{v}_0 \rightarrow$

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t$ (moto rettilineo uniformemente accelerato).

Se $a \neq 0$, $\vec{a}_0 \not\parallel \vec{v}_0$, $\vec{a}_0 = |\vec{a}_0|\vec{k}$ (x qst opportuno sistema di riferimento)

si ha il vero e proprio moto in 2 dimensioni



$\vec{v}_0 = |\vec{v}_0|\sin\theta\,\vec{i} + |\vec{v}_0|\cos\theta\,\vec{k}$ $\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt = |\vec{v}_0|\sin\theta\,\vec{i} +$

$+ |\vec{v}_0|\cos\theta\,\vec{k} + \int_0^t |\vec{a}_0|\vec{k}\,dt = \underbrace{|\vec{v}_0|\sin\theta\,\vec{i}}_{} + \underbrace{\left[|\vec{v}_0|\cos\theta + \int_0^t |\vec{a}_0|dt\right]\vec{k}}_{}$

la componente rispetto alla $\vec{i}$ rimane costante (moto a $\vec{v}$ costante) — la componente rispetto a $\vec{k}$ varia com t (moto uniformemente accelerato)

La traiettoria è la composizione di 2 moti, uniforme e uniformemente accelerato:

$\vec{r}(t) = \int_0^t v(t)dt = [|\vec{v}_0|\sin\theta\, t]\,\vec{i} + [|\vec{v}_0|\cos\theta\, t + \frac{1}{2}|\vec{a}_0|t^2]\,\vec{k}$ $\quad x(t)$: componente di $\vec{r}(t)$

sull'asse $x = |\vec{v}_0|\sin\theta\, t$ $\quad z(t)$ = componente su $z = [|\vec{v}_0|\cos\theta\, t + \frac{1}{2}|\vec{a}_0|t^2]$

$$\begin{cases} x(t) = |\vec{v}_0|\sin\theta\, t \\ z(t) = |\vec{v}_0|\cos\theta\, t + \frac{1}{2}|\vec{a}_0|t^2 \end{cases} \rightarrow t = \frac{x(t)}{|\vec{v}_0|\sin\theta} \Rightarrow T: z(x) = \frac{|\vec{a}_0|}{2|\vec{v}_0|^2\sin^2\theta}x^2 + \cot\theta\, x$$

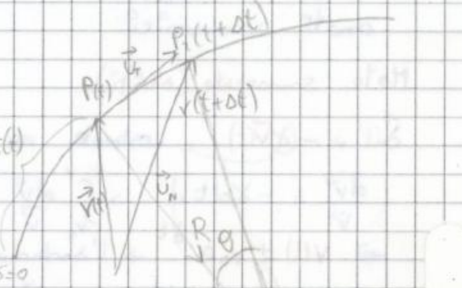
$\rightarrow$ la traiettoria è sempre $\parallel v_0$ e rappresenta una parabola

$\rightarrow$ moto parabolico (caduta dei gravi). Per $x \rightarrow 0$, $z(x) \rightarrow 0$, $\theta \Rightarrow 0$ (caso limite

$\Rightarrow v_0 \parallel a_0$ moto rettilineo, $\theta = \frac{\pi}{2}$ $z(x) = \frac{1}{2}\frac{|\vec{a}_0|}{|\vec{v}_0|^2}x$ (vedi moto dei proiettili)

Per generalizzare in 3 dimensioni si sceglie il sistema di riferimento con gli assi individuati da $\vec{a}$ e $\vec{v}_0$

Moto in Coordinate Intrinseche



Servono per indicare la posizione del punto lungo la traiettoria come distanza tra $s=0$ e $s(t)$ (coord. curvilinea)

$P_1 \rightarrow \vec{r}(t) \rightarrow s(t)$ $\quad P_2 \rightarrow \vec{r}(t+dt) \rightarrow s(t+dt)$

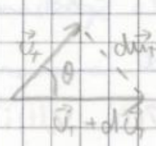
$\Delta\vec{r}(t)$ = spostamento $= \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$ — spazio percorso lungo la traiettoria

$d\vec{r}(t)$ = " infinitesimo $= \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = ds\,\vec{u}_T$ $\quad d\vec{r}(t) \neq ds\,\vec{u}_T$

$\vec{u}_T$ = versore tangente a $s(t)$ $\quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = \vec{v}$ tangenziale

per la definizione di angolo piano $\theta = \frac{s}{R} \rightarrow d\theta = \frac{ds}{R} \rightarrow ds = d\theta\, R$ — raggio di cerchio osculatore *

ricordando che la derivata di 1 versore è



si può calcolare l'accelerazione: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\vec{u}_T\right] = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}_T}{dt} =$ $\quad d\vec{u}_T = d\theta\cdot\vec{u}_N$

$= \vec{a}_T + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\frac{\vec{u}_N}{R} = \vec{a}_T + \underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}_{V_T^2}\frac{\vec{u}_N}{R} = \vec{a}_T + \frac{V_T^2}{R}u_N$ — derivata di 1 prodotto — accelerazione tangenziale — accelerazione centripeta

$\Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ $\quad \vec{a}_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T$ $\quad \vec{a}_N = \frac{V_T^2}{R}\vec{u}_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\vec{u}_N}{R}$

Si noti che se la traiettoria è rettilinea $R \rightarrow \infty$ quindi $a(t) \rightarrow \vec{a}_T$

* cerchio osculatore: cerchio di raggio R che approssima la curva in un punto fino al II ordine.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 34

Dinamica del punto

Principio di inerzia (I legge di Newton): in un sistema inerziale 1 corpo non sottoposto a F permane nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme nel quale si trova.

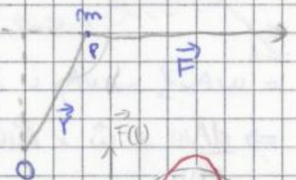
Sistema inerziale: sistema di riferimento in cui vale il principio di inerzia e la legge di Newton.

$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ = quantità di moto $[p] = \frac{kg \cdot m}{s}$ II legge di Newton: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m \cdot v(t))}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v(t) + m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$ tiene conto del caso in cui la m non è costante. Se m = cost $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}(t)$ $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$ l'eq. per ricavare lo spazio in funzione del tempo applicata è un'equazione differenziale del II ordine, in cui le 2 costanti di integrazione che appaiono nell'integrale generale sono $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Poiché il tipo di moto è legato al valore di $a(t)$, lo si può individuare guardando l'espressione della forza: $\vec{F}(t) = 0$ $(a(t) = 0) \rightarrow$ vale il principio di inerzia, il moto è uniforme

$\vec{F}(t) = F_0 \rightarrow$ moto uniformemente accelerato $\vec{F}(t) = m\,a(t) \rightarrow$ moto vario es. $F(t) = e^{-3t}$

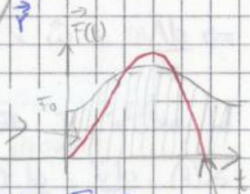
Momento di F rispetto ad O: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



Momento angolare (o della quantità di moto p): $L = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$

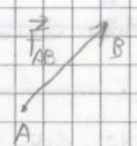
Teorema del momento angolare L: (in un sistema con m costante)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Big(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}}_{0}\Big) + \Big(\underbrace{\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{M}\Big) = \vec{r} \times m\,\vec{a} = \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Teorema dell'impulso: $\int_0^t \vec{F}(t)dt = \int_0^t d\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(0)$ impulso della F. viene usato nei problemi di urto. Forze impulsive (di breve durata): es. macchina/chiodo schiacciato

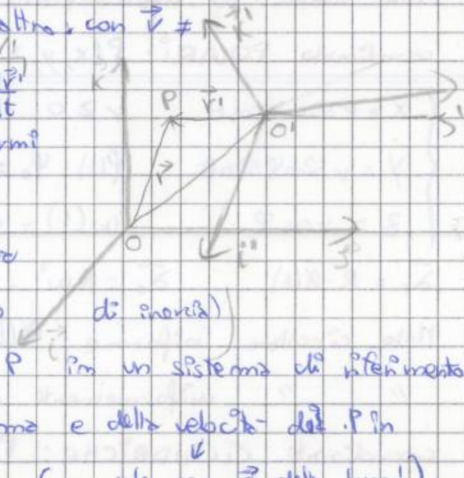
Principio di azione e reazione (III legge di Newton): $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$



Moti relativi e sistemi inerziali

Consideriamo 2 sistemi che si muovono l'uno rispetto all'altro, con $\vec{v} \neq$

$\vec{r} = \vec{O} + \vec{r}'$ $\vec{O} = \vec{OO'}$ spostamento di un sistema rispetto all'altro $\Rightarrow \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{v} = \underbrace{\frac{d\vec{O}}{dt}}_{V_{O'}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}'}{dt}}_{V'}$



- Se $\omega = 0$ e $\frac{d\vec{O}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ * $\Rightarrow$ i 2 sistemi sono fermi l'uno rispetto all'altro (non ruotano e non traslano)
- Se $\omega = 0$ e $\frac{d\vec{O}}{dt} \neq 0$ si muovono di moto traslatorio senza ruotare

* $F = m\frac{d^2 r'}{dt^2} = m\frac{d^2 r}{dt^2} = m\vec{a}' = m\vec{a}$ (vale il principio di inerzia)

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \vec{V}_{O'}(t) + \vec{v}'(t)$ la velocità di 1 punto P in un sistema di riferimento è pari alla somma della velocità di deriva del II sistema e della velocità del P in quest'ultimo. $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\vec{V}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$ (non vale per c della luce!)

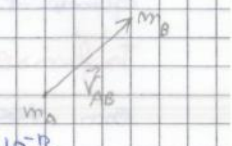
Nel caso $\vec{a}_{O'} = 0 \Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) \rightarrow$ sistemi inerziali: ricordando che $\vec{V}_{O'} = \frac{d\vec{O}}{dt}$

$\Rightarrow \int_0^t \vec{V}_{O'}(t)dt = \int_0^t \frac{d\vec{O}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{O}(t) - \vec{O}_0 = \int_0^t \vec{V}_{O'}(t)dt$ posizione reciproca iniziale $\rightarrow \vec{O}(t) = \vec{O}_0 + \int_0^t \vec{V}_{O'}(t)dt$

Interazioni Fondamentali (p.26)

1. I. nucleare forte
2. I. nucleare debole
3. Interazione gravitazionale: $\vec{F}_{BA} = -G m_A m_B \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|^3}$ $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$

mondo macroscopico — m attrattiva — m gravitazionale



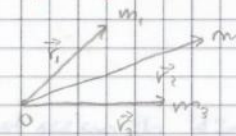
Principio debole di equivalenza: $\vec{F}_{AB} = -G m_A m_B \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|^3}$ $\vec{F} = m_i a$

$\Rightarrow m_A = m_i$ è stato dimostrato che $m_i = K m_g$ dove $K = 1 \pm 10^{-12}$

L'interazione gravitazionale agisce a distanza, ~~ovvero~~ una massa A modifica tutto lo spazio circostante, lo stato fisico dei singoli punti perché crea un campo di forze

Campo gravitazionale $\vec{f}_{BA} = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_B} = -G m_A \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|^3}$ Se ci sono più masse $m_i \to r_i$

$$\vec{f}(r)_{TOT} = -G \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{(r - r_i)}{|(r - r_i)|^3}$$



4. Interazione elettromagnetica F. di Coulomb: $\vec{F}_{AB} = \frac{Q_A Q_B}{4K\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|^3}$ permeabilità elettrica nel vuoto $= 8{,}8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2 m^2}{Kg\, s^2}$

mondo microscopico

Campo elettrico $\vec{E}_{AB} = \frac{\vec{F}_{AB}}{Q_B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_A \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|^3}$ (è difficile isolare una carica a causa dell'interazione elettromagnetica)

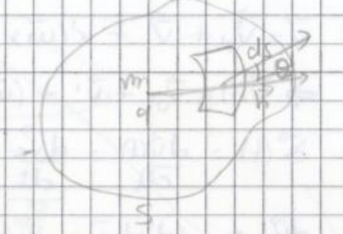
campi centrali / coulombiani: campi che hanno simmetria centrale, ovvero sono radiali ($\vec{f}_{AB} \propto \frac{1}{r^2}$) es. $\vec{f}_{AB}$ gravitazionale ed $\vec{E}$. In generale i campi coulombiani si possono esprimere con $\vec{h} = K \cdot \frac{r}{|r^3|}$ dove $K = -Gm$ per $\vec{f}_{AB}$ e $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q$ per $\vec{E}$.

Teorema di Gauss (proprietà geometrica del campo)

$$\Phi = \int_S \vec{h}\, d\vec{S} = \int_S K \frac{\vec{r}}{|r^3|} d\vec{S} = K \int_S \frac{|\vec{r}|}{|r^3|} |d\vec{S}| \cos\theta$$ se $dS = S \to d\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$

poiché $d\Omega$ = angolo solido $= \frac{dS}{r^2}$ $\Rightarrow \Phi = K \int_{4\pi} d\Omega$

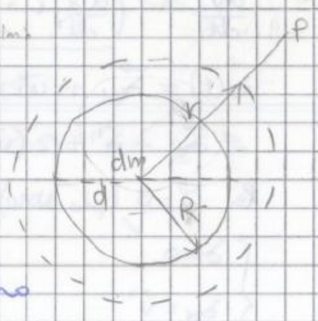
$\Phi = K \cdot 4\pi$ → non dipende dalla posizione di m o di q in S



Campo gravitazionale di una m sferica

Se la m non è puntiforme ($d \approx r$) $\vec{f}(r) = \int -G \int_V dm \frac{r}{|r|^3}$ massa infinitesima in 1 punto

Se la m non puntiforme ha una certa simmetria si può calcolare $\vec{f}(r)$ con il T. di Gauss. Es. se il corpo m è una sfera: scegliamo una S sferica ad essa concentrica con $r > R$



$\Phi = \int_S \vec{h}\, d\vec{S} = h \int_S |d\vec{S}| = h\, 4\pi r^2 = K \cdot 4\pi \to h = \frac{K}{r^2} = -\frac{Gm}{r^2}$ All'esterno

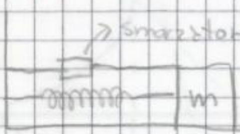
$\vec{f} = \vec{\phi}$ = al campo generato dalla massa concentrata nel centro della sfera (una m con simmetria sferica influenza la simmetria del campo radiale)

All'interno della sfera invece la nuova massa m sarà: $\frac{m}{V_1} = \frac{M}{V_{TOT}}$

poiché ρ è costante $\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \to m = \frac{M}{R^3} r^3$ $\vec{h} = \frac{K}{r^2}$

$\vec{f}(r) = \frac{-GM}{r^2 R^3} \cdot r^3 \Rightarrow \vec{f}(r) = -\frac{GM}{R^3} r$ → all'interno della sfera il campo varia linearmente al variare della distanza dal centro mentre all'esterno

Oscillatore armonico smorzato



smorzatore $\rightarrow F = -\gamma \frac{dx}{dt}$ $\quad F_{TOT} = F_1 + F_2$ (forza dello smorzatore; forza della molla) $\rightarrow -kx - \gamma\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$

il sistema non continua ad oscillare indefinitamente perché viene frenato dallo smorzatore ($> \gamma >$ freno)

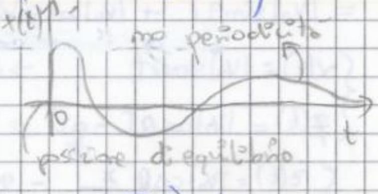
$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \rightarrow$ eq. differenziale del II ordine $\quad x = e^{\lambda t} \quad m\lambda^2 x + \gamma\lambda x + kx = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{\gamma^2 - 4mk} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\Delta}}$ $\quad \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0^2$ $\quad$ soluz. generale: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Se $\Delta > 0 \quad \frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0 \rightarrow \gamma^2 > 4mk \rightarrow$ lo smorzamento è elevato $\Rightarrow x(t) =$

$\Rightarrow x(t) = c_1 \exp\left[-\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{\Delta}\right]t + c_2 \exp\left[-\frac{\gamma}{2m} - \sqrt{\Delta}\right]t = e^{-\frac{\gamma}{2m}}\left(c_1 e^{\sqrt{\Delta}t} + c_2 e^{-\sqrt{\Delta}t}\right)$

Se c'è una grande resistenza vi è un moto di rilassamento, ovvero il sistema torna allo stato iniziale di equilibrio ($x(t) \rightarrow 0$)



Se $\Delta < 0 \rightarrow \gamma^2 < 4mk$ è minore e relativamente piccolo

$\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|} \quad x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}}\left[c_1 e^{i\sqrt{|\Delta|}t} + c_2 e^{-i\sqrt{|\Delta|}t}\right] = e^{-\frac{\gamma}{2m}}\left[c_1(\cos\sqrt{\Delta}t + i\sin\sqrt{\Delta}t) +\right.$

$\left. + c_2(\cos(-\sqrt{\Delta}t) + i\sin(-\sqrt{\Delta}t))\right] = e^{-\frac{\gamma}{2m}}\left[c_1(\cos\sqrt{\Delta}t + i\sin\sqrt{\Delta}t) + c_2(\cos\sqrt{\Delta}t - i\sin\sqrt{\Delta}t)\right]$

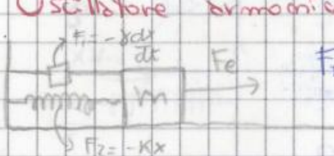
$= e^{-\frac{\gamma}{2m}}\left[(c_1 + c_2)\cos\sqrt{\Delta}t + i(c_1 - c_2)\sin\sqrt{\Delta}t\right] = e^{-\frac{\gamma}{2m}} A\sin(\sqrt{\Delta}t + \phi)$ $\quad \sqrt{\Delta} = \omega_s = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m} - \frac{k}{m}} =$

$= \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{4m^2 k}\right)} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4m^2 k}}$ $\quad$ poiché $\gamma^2 < 4m^2 k \rightarrow \frac{\gamma^2}{4m^2 k} < 1 \Rightarrow$

$\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4mk}} < 1 \Rightarrow \omega_s < \omega_0$ $\rightarrow$ frequenza propria oscillatore armonico; frequenza propria oscillatore smorzato

Se γ è molto piccolo la curva esponenziale decresce meno velocemente quindi il moto è meno smorzato

Oscillatore armonico forzato (e smorzato)



$F_{TOT} = F_1 + F_2 + F_e \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_e \rightarrow$ eq. di II ordine a coefficienti costanti con forzante ($F_e \neq 0$) $\quad x(t) = x_{om} + x_p$ $\rightarrow x_{om}$ moto armonico smorzato

$F_e = F_{0e}\cos\omega_e t \rightarrow$ anche la forzante è armonica. $\rightarrow F_e = F_{0e}e^{i\omega_e t}$ Supponiamo che una soluzione sia $x_e = \overset{x_{0e}e^{i\varphi_e}}{A} e^{i\omega_e t} = x_{0e}e^{i(\omega_e t + \varphi_e)}$, deriviamo e sostituiamo nell'equazione $\frac{dx_e}{dt} = i\omega_e x_e$

$\frac{d^2x_e}{dt^2} = -\omega_e^2 x_e \Rightarrow m(-\omega_e^2 x_e) + \gamma(i\omega_e x_e) + kx_e = F_{0e}e^{i\omega_e t}$ $\quad x_e = x_{0e}e^{i\omega_e t}e^{i\varphi_e} \rightarrow e^{i\omega_e t} = \frac{x_e}{x_{0e}e^{i\varphi_e}}$

si deve semplificare x_e: $-\omega_e^2 m x_e + \gamma i\omega_e x_e + kx_e = F_{0e}\frac{x_e}{x_{0e}e^{i\varphi_e}} \rightarrow$

$\rightarrow F_{0e} = x_{0e}e^{i\varphi_e}(-\omega_e^2 m + \gamma i\omega_e + k)$ $\quad$ se $\varphi_e = 0$ la Fe e l'oscillatore sono in fase

$F_{0e} = x_{0e}(\cos\varphi_e + i\sin\varphi_e)(-\omega_e^2 m + \gamma i\omega_e + k) = x_{0e}[-\omega_e^2 m\cos\varphi_e + \gamma i\omega_e\cos\varphi_e + \underbrace{k}_{m\omega_0^2}\cos\varphi_e - i\omega_e^2 m\sin\varphi_e +$

$- \omega_e\gamma\sin\varphi_e + ik\sin\varphi_e] = x_{0e}[-\omega_e^2 m\cos\varphi_e + m\omega_0^2\cos\varphi_e - \omega_e\gamma\sin\varphi_e] + i x_{0e}[\gamma\omega_e\cos\varphi_e +$

$- \omega_e^2 m\sin\varphi_e + m\omega_0^2\sin\varphi_e] = x_{0e}[m(\omega_0^2 - \omega_e^2)\cos\varphi_e - \gamma\omega_e\sin\varphi_e] + x_{0e}[m(\omega_0^2 - \omega_e^2)\sin\varphi_e + \gamma\omega_e\cos\varphi_e]$

poiché tutta l'espressione a secondo membro è = a un numero reale F_{0e}, la parte immaginaria dovrà essere $= 0$ e quella reale $= F_{0e}$

$$\begin{cases} x_{0e}[m(\omega_0^2 - \omega_e^2)\cos\varphi_e - \gamma\omega_e\sin\varphi_e] = F_{0e} \rightarrow m(\omega_0^2 - \omega_e^2)\cos\varphi_e - \gamma\omega_e\sin\varphi_e = \frac{F_{0e}}{x_{0e}} \\ x_{0e}[m(\omega_0^2 - \omega_e^2)\sin\varphi_e + \gamma\omega_e\cos\varphi_e] = 0 \rightarrow m(\omega_0^2 - \omega_e^2)\sin\varphi_e = -\gamma\omega_e\cos\varphi_e \end{cases}$$

$L = \ell(\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}) \times m\left(+\ell\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\vec{j} + \ell\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\vec{k}\right) = \ell^2 m \begin{vmatrix} \vec{i} & 0 & 0 \\ \vec{j} & \sin\theta & +\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \\ \vec{k} & -\cos\theta & +\frac{d\theta}{dt}\sin\theta \end{vmatrix} =$

$= \ell^2 m\left(+\frac{d\theta}{dt}\sin^2\theta\vec{i} + \frac{d\theta}{dt}\cos^2\theta\vec{i}\right) = \ell^2 m \frac{d\theta}{dt}\vec{i}$

Per il teorema del momento angolare $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \ell^2 m \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{i} = -\ell m g \sin\theta\vec{i}$

$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ → equazione differenziale del II ordine non lineare e quindi non integrabile analiticamente. Si trova quindi una soluzione approssimata ricordando che $\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3$ per $\theta \to 0$ (piccole oscillazioni) $\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

è un'equazione pari a quella dell'oscillatore armonico la cui soluzione dunque è

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ → frequenza propria $= \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ questo ci suggerisce che per piccole oscillazioni il pendolo oscilla come l'oscillatore armonico

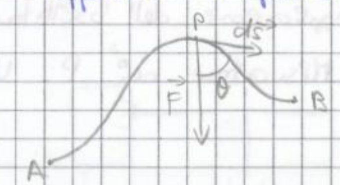
ampiezza, fase iniziale → dipendono dalle condizioni iniziali $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ periodo

$\Rightarrow$ Isocronismo del pendolo (Galileo): Per piccole oscillazioni T non dipende dall'ampiezza θ_0

Leggi di conservazione (costanti del moto) p 35

$\exists f\{\vec{r}(t), \vec{v}(t)\}$ ~~costante~~: insieme di funzioni composte da variabili dipendenti dal tempo ($\vec{r}$ e $\vec{v}$) che però rimangono costanti

- Conservazione di P: se $F = 0 \Rightarrow p = cost.$ Se nessuna forza è applicata alla particella essa conserva la propria quantità di moto



- conservazione di L: se $M = 0 \Rightarrow L = cost$
- Lavoro: $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B |\vec{F}||d\vec{s}|\cos\theta = \int_A^B \vec{F}_{//} |d\vec{s}|$ (prodotto scalare; $F_{//}$)

$[W] = \frac{Kg\, m^2}{s^2} = N \cdot m = Joule$ dal lavoro si definisce la grandezza Potenza come:

$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle = |\vec{F}||\vec{v}|\cos\theta = \vec{F}_{//} \vec{ds}$ $[P] = \frac{Kg \cdot m^2}{s^3} = \frac{J}{s} = W$ (Watt)

- Teorema di conservazione dell'E cinetica: ricordando che $dW = F_{//} d\vec{s} = m\vec{a}\, d\vec{s} =$

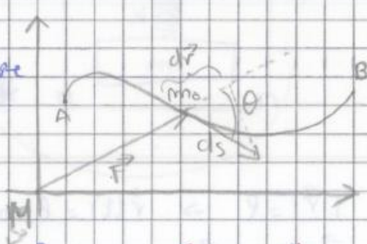
$= m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = m\vec{v}\, d\vec{v}$ è il lavoro fatto da F per far variare la $\vec{v}$ di m di $d\vec{v}$.

$\Rightarrow$ si può scrivere $W = \int_A^B dW = \int_A^B m\vec{v}\, d\vec{v} = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2 = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$

$E_K = \frac{1}{2}m v^2$ il lavoro fatto produce una variazione dell'E cinetica

W delle F di gravità e della F_P

Il lavoro delle F di gravità tra una massa M posta nell'origine e un'altra massa m che si muove lungo 1 traiettoria da A a B è: $W = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B -G Mm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{s}$ $\langle \vec{r}, d\vec{s} \rangle = |\vec{r}||d\vec{s}|\cos\theta$



$W = -GMm \int_A^B \frac{|\vec{r}||d\vec{s}|\cos\theta}{|\vec{r}|^3} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -GMm\left[-r^{-1}\right]_A^B = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$ (componente di $d\vec{s}$ su $\vec{r}$)

W delle forze di gravità dipende solo dalla posizione di A e B e non dalla traiettoria → Forze e campi conservativi. $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ → potenziale gravitazionale

$\Rightarrow |\vec{F}(r)| = -\frac{dU}{dr}$ Se $A \equiv B \rightarrow W = 0$ ⇒ il lavoro fatto su m o q lungo 1 traiettoria chiusa vale 0 per i campi di forze centrali che sono conservativi.

Faccendo un cambio di variabili: $\boxed{p = x_1 - x_2}$ = distanza $\overline{x_1 x_2}$

$\boxed{q = x_1 + x_2}$ = 2 volte la distanza del punto medio $\overline{x_1 x_2}$ $\Rightarrow x_1 = p + x_2 \rightarrow x_2 = q - x_1 = q - p + x_2$

$\rightarrow 2x_2 = q - p \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{q-p}{2}} \quad x_1 = \frac{q-p}{2} + p = \frac{q-p+2p}{2} = \boxed{\frac{q+p}{2}}$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{d^2q}{dt^2}\right) = -K\left(\frac{q+p}{2}\right) + K_0 p \rightarrow \frac{m}{2}\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{m}{2}\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{Kq}{2} - \frac{Kp}{2} - K_0 p \\ x_2 \rightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{d^2p}{dt^2}\right) = -K\left(\frac{q-p}{2}\right) + K_0 p \Rightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{d^2p}{dt^2}\right) = -\frac{Kq}{2} + \frac{Kp}{2} + K_0 p \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\frac{d^2p}{dt^2} = -m\frac{d^2q}{dt^2} - Kq - p(K+2K_0) \Rightarrow m\frac{d^2p}{dt^2} = -(-Kq) - Kq - p(K+2K_0) \\ m\frac{d^2q}{dt^2} - \left(-m\frac{d^2q}{dt^2} - Kq - p(K+2K_0)\right) = -Kq + p(K+2K_0) \Rightarrow 2m\frac{d^2q}{dt^2} + Kq = -Kq \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\frac{d^2p}{dt^2} = -(K+2K_0)p \\ m\frac{d^2q}{dt^2} = -Kq \end{cases}$$

$\rightarrow$ Sono equazioni armoniche con soluzioni:

$q = q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) \quad p = p_0\cos(\omega_p t + \phi_p)$ con

$\omega_q = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{K+2K_0}{m}}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) \rightarrow x_1 = q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) - x_2 \\ x_1 - x_2 = p_0\cos(\omega_p t + \phi_p) \rightarrow q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) - x_2 - x_2 = p_0\cos(\omega_p t + \phi_p) \end{cases}$$

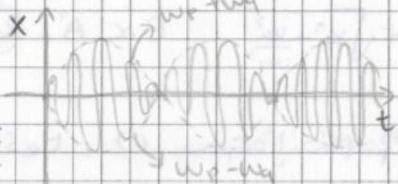
$$\begin{cases} x_1 = q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) - \frac{1}{2}\left[q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) - p_0\cos(\omega_p t + \phi_p)\right] \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left[q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) + p_0\cos(\omega_p t + \phi_p)\right] \\ -2x_2 = p_0\cos(\omega_p t + \phi_p) - q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left[q_0\cos(\omega_q t + \phi_q) - p_0\cos(\omega_p t + \phi_p)\right] \end{cases}$$

se $\phi_q = \phi_p = 0 \wedge p_0 = q_0 = 1$ si ottiene $x_1 = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_q t) + \cos(\omega_p t)\right]$

$x_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_q t) - \cos(\omega_p t)\right]$ che per prostaferesi diventano

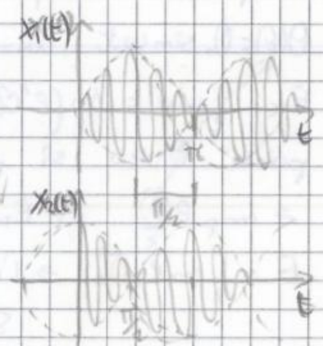
$$\begin{cases} x_1 = -\left[\sin\left(\frac{\omega_p + \omega_q}{2}\right)t\right]\left[\sin\left(\frac{\omega_p - \omega_q}{2}\right)t\right] \\ x_2 = \left[\cos\left(\frac{\omega_p + \omega_q}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_q - \omega_p}{2}\right)t\right] \end{cases}$$

prodotto di oscillazioni periodiche con $\omega \neq$



L'andamento temporale di x_1 e x_2 presenta il fenomeno dei battimenti. Le 2 curve x_1 e x_2 sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ quando 1 raggiunge il max l'altro raggiunge il minimo



E del sistemo a 2 gradi di libertà

$E_{TOT} = E_K + E_P = (E_{K_1} + E_{K_2}) + (E_{e_1} + E_{e_2} + E_{e_{1,2}})$

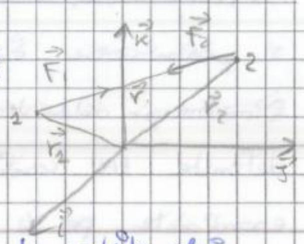
$E_K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad E_P = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}K_0(x_1 - x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2}(K + K_0)x_1^2 + \frac{1}{2}(K + K_0)x_2^2 - K_0 x_1 x_2 \rightarrow$ E che passa da una m all'altra nello spostamento, perché quando m_1 ha uno spostamento max, m_2 sta ferma e viceversa.

II: $E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{iG})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_G^2 + v_{iG}^2 + 2 v_G v_{iG}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{iG}^2 +$
$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{iG} \vec{v}_G = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + 0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{iG}^2 \Rightarrow E_K = E_{KG} + E_{KG}$ (E_K di G, E_K nel sistema $G \equiv 0$; $P_G = 0$)

Problema a 2 corpi → verifica della legge di Newton

$r(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad \vec{F}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \qquad \vec{F}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \to \frac{\vec{F}_2}{m_2} = -\frac{\vec{F}_1}{m_2} = \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$



$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} + \frac{\vec{F}_1}{m_2} = \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \vec{F}_1 \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_1 \to$ sistema a un corpo (dipende solo da r distanza $m_1 - m_2$) → massa ridotta: le soluzioni nel caso di una F gravitazionale sono traiettorie ellittiche stabili come le orbite dei pianeti intorno al sole. es. sistema Terra - Sole.

Se si considera il G del sistema e si utilizza il sistema dove $G \equiv 0$ si ottiene:

$v_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r}_1 = \vec{r}_G + \vec{r}_{1G} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_G + \vec{r}_{2G}$

$$\begin{cases} \frac{d^2(r_G + r_{1G})}{dt^2} = \frac{F_1}{m_1} \\ \frac{d^2(r_G + r_{2G})}{dt^2} = \frac{F_2}{m_2} \end{cases}$$

→ sottraendo membro a membro: $\frac{d^2(r_{1G} - r_{2G})}{dt^2} = \frac{F_1}{m_1} - \frac{F_2}{m_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d^2(r_{1G} - r_{2G})}{dt^2} = \frac{m_2 F_1 + m_1 F_1}{m_1 m_2}$

equivalentemente a prima dunque si ottiene $\frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \frac{d^2(r_{1G} - r_{2G})}{dt^2} = F$ ~~detto~~ se $m_2 \ll m_1$ si ricava che $m_1 + m_2 \approx m_1 \leadsto r_G = \frac{m_1}{m_1}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$

⇒ il centro di massa G tende a coincidere con m_1, ovvero con la m maggiore.

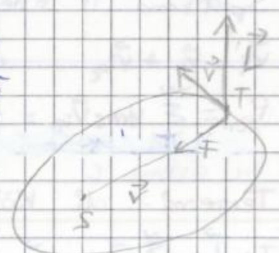
Problema a 3 corpi (Poincaré)

~~In~~ Un sistema di N=3 particelle, supponendo di avere tutti i dati necessari, è un sistema di equazioni differenziali non lineari, e quindi non integrabili, che generano un moto caotico (deterministico): un'infinitesima variazione delle condizioni iniziali provoca invece un effetto rilevante sul sistema → l'evoluzione del sistema è imprevedibile (il sistema di equazioni è irrisolvibile)

Leggi di Keplero

Definiamo $\gamma = \frac{M_P}{M_\odot}$ → massa pianeta, → " Sole es. γ sistema $\cong 10^{-3}$ γ Terra $\cong 10^{-6}$ γ Marte $\cong 10^{-7}$

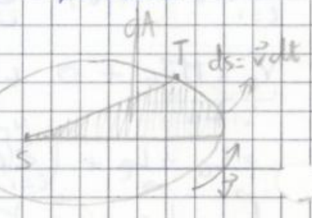
I legge: I pianeti descrivono intorno al Sole orbite piane ellittiche e il Sole è in 1 dei 2 fuochi. La traiettoria è ellittica piana perché $M^{(e)} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ (Nel problema a 2 corpi si è supposto che $R^{(e)} = 0$)



e costante ~~$M^{(e)}$~~ $\frac{d\vec{L}}{dt} = M^{(e)} = 0 \to \vec{L} = \text{cost.} \to$ poiché non c'è un movimento verticale, l'orbita rimane sullo stesso piano

se a = asse maggiore e b = asse minore $\to e = \frac{b}{a}$ eccentricità $e_T = 0{,}099986 \Rightarrow$ la traiettoria della Terra è quasi circolare

II legge: Il moto dei pianeti avviene con $\vec{v}$ areolare (A spazzata nel lasso di tempo) costante. $\pi R^2 : 2\pi R = dA : ds \to dA = \frac{R\,ds}{2}$



$L = R \cdot M_T \vec{v}$ → costante

la velocità areolare è $\frac{dA}{dt} = \frac{R}{2}\frac{ds}{dt} = \frac{R}{2}\vec{v} = \frac{R}{2}\cdot\frac{L}{R M_T}$

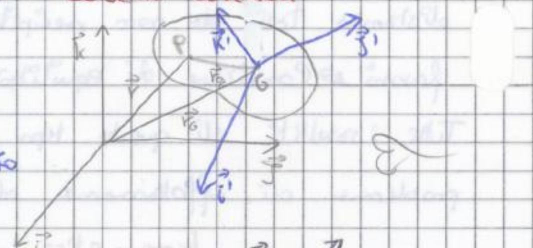
$\to \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{M_T}$ costante che è costante. Nel caso la traiettoria sia fortemente ellittica urto totalmente anelastico: P si conserva ma l'E no. ~~Dopo~~ un urto totalmente anelastico le 2 masse poi continuano insieme e quindi $V_{f_1} = V_{f_2} = V_f \Rightarrow m_1 V_{0,1} + m_2 V_{0,2} = (m_1 + m_2) V_f$ se un oggetto si spiaccica su un'altro → $V_f = 0$

Meccanica del corpo rigido

corpo rigido: la d. tra 2 particelle del corpo rigido ($\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$) è costante → reticolo cristallino ordinato (simmetria / anisotropia). Si dice che i solidi sono indeformabili anche se in realtà ∄ un solido con rigidità ∞.

Poiché nel corpo rigido ci sono N particelle, per descriverle tutte dovrei dare 3N numeri. Avendo 3 punti, poiché le distanze reciproche sono costanti, la posizione di tutto il corpo è definita (9 numeri); se però teniamo conto che $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = cost$ allora i numeri possono essere ridotti a 6: X_G, Y_G, Z_G, $\alpha = \cos(\vec{i}, \vec{i'})$, $\beta = \cos(\vec{j}, \vec{j'})$, $\gamma = \cos(\vec{k}, \vec{k'})$

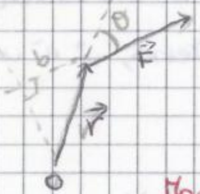
Stato del corpo rigido → ci possono essere rotazioni coseni direttori



coppia di forze: = modulo, = direzione, verso opposto

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $|\vec{M}| = \underbrace{|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta}_{b}$

il momento dipende dal polo O scelto per calcolarlo



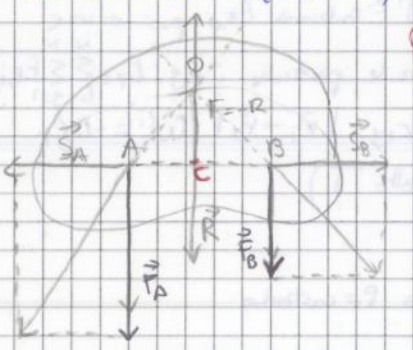
Momento di una coppia di forze: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 =$

$= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$ ma $F_1 = -F_2 \rightarrow M = (\vec{r}_1 \times -\vec{F}_2) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2$

$\Rightarrow \vec{M} = |F|(b_1 + b_2) = |F| b$ → $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \sin\theta$ → il momento di una coppia di forze non dipende dal polo O scelto!

le condizioni di equilibrio di un corpo rigido sono: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{R} = 0 \;\wedge\; \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0$

se vale la I equazione, la seconda è indipendente dal polo scelto!



Centro delle F //: $\vec{F}_A \parallel \vec{F}_B$, stesso verso ma modulo ≠

$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ Per mantenere l'equilibrio dovremmo applicare una $\vec{F} = -\vec{R}$, il problema è trovare il punto in cui applicare $\vec{F}$; questo punto C è il centro delle $\vec{F}$ //.

Per calcolarlo si aggiungono al sistema 2 forze S_A e S_B | $\vec{S}_A = -\vec{S}_B$. Geometricamente si ha: $\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{|\vec{F}_A|}{|\vec{S}_A|}$ e $\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} = \frac{|\vec{F}_B|}{|\vec{S}_B|}$

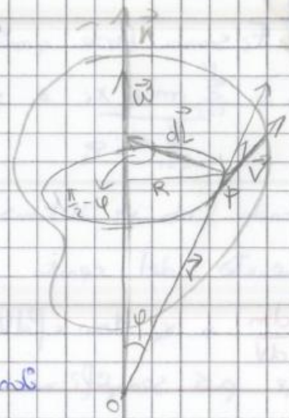
per la similitudine tra i triangoli → $\overline{AC} \cdot \frac{|\vec{F}_A|}{|\vec{S}_A|} = \frac{|\vec{F}_B|}{|\vec{S}_B|} \cdot \overline{CB}$

$\Rightarrow \frac{|\vec{F}_A|}{|\vec{F}_B|} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ se aumenta l'intensità di $\vec{F}_A$, il centro C si sposta verso A.

Verifichiamo la II condizione di equilibrio scegliendo il polo arbitrariamente (perché $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$): lo scegliamo ≡ A ($M_{F_A} = 0$) $M_{\vec{F}} + M_{F_B} = 0 \rightarrow -|\vec{R}| \cdot \overline{AC} + |\vec{F}_B|(\overline{AC} + \overline{CB}) = 0$

se $\overline{AC} = \frac{\overline{C_B}|\vec{F}_B|}{|\vec{F}_A|}$ si può generalizzare il problema col n $\vec{F}$ applicate al corpo rigido scrivendo $X_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i x_i}{\sum |F_i|}$ → $\vec{M}$ rispetto a Y_G; $\sum |F_i|$ → $|\vec{R}|$

Rotazione intorno ad un asse: $\vec{\omega} = \omega \vec{K}$ massa infinitesima in P



$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\varphi = |\vec{\omega}|R \qquad d\vec{L} = \vec{r} \times dm\,\vec{v}$

$|d\vec{L}| = |\vec{r}|\,dm\,|\vec{v}|\sin\frac{\pi}{2}$ angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{v}$ $= |\vec{r}|\,dm\,|\vec{\omega}|R$

$dL_z = |d\vec{L}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |d\vec{L}|\sin\varphi = |\vec{r}|\,dm\,|\vec{\omega}|R\sin\varphi =$ (componente $// \vec{K}$)

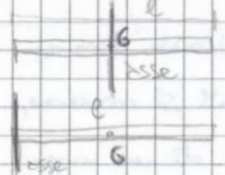
$= dm\,R^2\omega = dI\cdot\omega \Rightarrow L_z = \int dL_z = \int \omega R^2 dm =$

$= \int \omega\, dI = \omega I_z \Rightarrow I_z = \int_V dm\,R^2 \rightarrow$ momento di inerzia:

caratterizza il corpo rispetto alla dinamica della rotazione, quindi

I dipende sia dal corpo che dall'asse di rotazione $\quad M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\alpha$

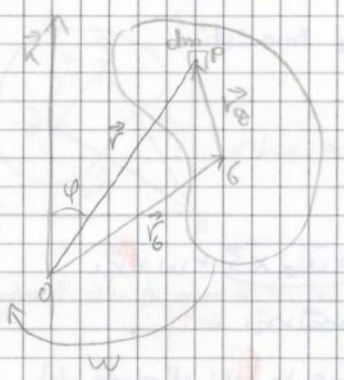
Consideriamo la rotazione di uno stesso corpo rispetto ad assi $\neq$:



$dm = \frac{M_{tot}}{l}dx \quad I_1 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dm\,x^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l}x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{M}{l}\left(\frac{l^3}{2^3\cdot 3} + \frac{l^3}{2^3\cdot 3}\right) = \frac{Ml^2}{12}$

$I_2 = \int_0^l \frac{M}{l}x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{l}\left(\frac{l^3}{3}\right) = \frac{1}{3}Ml^2 \Rightarrow$ ciò che lega e

stabilisce la relazione tra I_1 e I_2 è il **Teorema di Huygens-Steiner:**



$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}_G$ il corpo ruota intorno a $\vec{K}$ con $\vec{\omega} = \omega\vec{K}$

verifichiamo di poter scrivere dI come $dI = \frac{dm}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$

$\frac{dm}{\omega^2}(|\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\varphi)(|\vec{\omega}|\underbrace{|\vec{r}|\sin\varphi}_{R}) = \frac{dm}{\omega^2}\omega^2R^2$

quindi sostituendo $\vec{r}$: $dI = \frac{dm}{\omega^2}(\vec{\omega}\times(\vec{r}_G + \vec{r}_G))(\vec{\omega}\times(\vec{r}_G + \vec{r}_G)) =$

$= \frac{dm}{\omega^2}\Big(\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)}_{I_G} + 2(\vec{\omega}\times r_G)(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) + \underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)}_{I_G}\Big) =$

$dI = \left(\frac{dm}{\omega^2}\cdot 2(\vec{\omega}\times r_G)\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)}_{costante}\right) + dI_G + dI_G$

$I = \frac{2(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)}{\omega^2}\int (\vec{\omega}\times r_G)\,dm = \frac{2}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\left(\omega\times\int \vec{r}_G\,dm\right) + I_G + I_G$

ricordando che $\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int(\vec{r}_G + \vec{r}_G)dm}{\int dm} \Rightarrow \vec{r}_G\int dm = \int \vec{r}_G\,dm + \int \vec{r}_G\,dm \Rightarrow \int \vec{r}_G\,dm = 0$

$\Rightarrow$ $I = I_G + I_G$ → momento di inerzia rispetto asse $\vec{K}$ assumendo tutta M in G

I rispetto asse $//$ a K e passante per G

Nell'esempio dell'inizio $I = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$ (rispetto a R)

$I = I_G + I_G$ il momento di inerzia del punto G è semplicemente

MR^2 mentre per I_G bisogna considerare che il $dV = \underbrace{2\pi r}_{Area}\underbrace{h\,dr}_{}$ spessore infinitesimo

$\Rightarrow dm = \rho\,dV \quad I_G = \int r^2\rho\,dV = \int r^2\rho\,2\pi r h\,dr = \rho 2\pi h\int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h\frac{R^4}{4}$

ma $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} \Rightarrow I_G = \frac{m}{\pi R^2 h}\pi h\cdot\frac{R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

E_K di un corpo rigido

$dE_K = \frac{1}{2}dm\,v^2 \quad \vec{v} = \vec{v}_G + \vec{\omega}\times r_G \quad v^2 = (\vec{v}_G + \vec{\omega}\times\vec{r}_G)(\vec{v}_G + \vec{\omega}\times\vec{r}_G) = v_G^2 + 2\vec{v}_G(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) +$

$+ (\vec{\omega}\times\vec{r}_G)(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) \quad E_K = \int dE_K = \int\frac{1}{2}dm\left[\vec{v}_G^2 + 2v_G(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) + (\vec{\omega}\times\vec{r}_G)(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\right] =$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\vec{v}_G^2\int dm}_{\frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 \rightarrow \text{contributo della traslazione}} + v_G\int(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)dm + \frac{1}{2}\int(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)dm = \frac{M\vec{v}_G^2}{2} + \frac{1}{2}\int(|\vec{\omega}|\underbrace{|\vec{r}_G|\sin\varphi}_{R})^2 dm$

0 per $\int \vec{r}_G\,dm = 0$

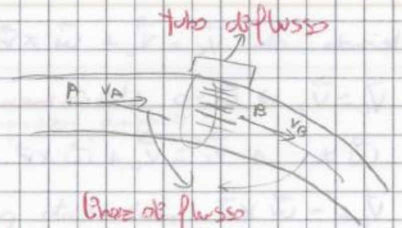
$E_K = \frac{M\vec{v}_G^2}{2} + \frac{1}{2}\int\omega^2\underbrace{R^2dm}_{dI} \Rightarrow E_K = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow$ contributo della rotazione sulla faccia superiore è applicata una $F_{tot\,1}$: $P(z)\,S = P_0 S + z\rho g S$ mentre sulla faccia inferiore $F_{tot_2} = P(z+h)\,S = P_0 S + (z+h)\rho g S$ che ha verso opposto a $F_{tot\,1}$

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = P_0 S + z\rho g S - [P_0 S + (z+h)\rho g S] + \rho_c g h S$ (corpo) $\Rightarrow \vec{R} = z\rho g S - (z+h)\rho g S + \rho_c g h S$

$= z\rho g S - z\rho g S - h\rho g S + \rho_c g h S = \vec{R}$ → Principio di Archimede: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto = al peso del fluido spostato

$\vec{R} = \underbrace{\rho_c g h S}_{F_p\ corpo} - \overbrace{\rho g h S}^{F_p\ del\ V\ di\ liquido\ spostato} \rightarrow \vec{R} = (\rho_c - \rho) g h S \Rightarrow \rho_c < \rho \Rightarrow \vec{R}\uparrow$ → il corpo galleggia, se $\rho_c > \rho$ affonda. Rimane a metà solo se $\rho_c = \rho$

Dinamica dei fluidi



Approccio locale/euleriano: ci si concentra su un punto del fluido e si descrive la v che hanno tutte le particelle passando x quel punto

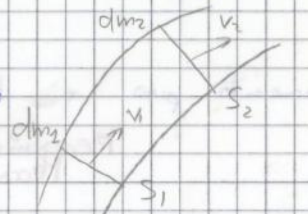
Approccio molecolare/lagrangiano: si segue tutta la storia di 1 particella. Si può passare da un approccio all'altro per mezzo di equazioni differenziali/integrali.

La traiettoria seguita da una particella si chiama linea di flusso (la $\vec{v}$ è tg ad essa).

Nel moto laminare le particelle si muovono su traiettorie // quindi quelle che si trovano nel tubo di flusso continuano a rimanerci.

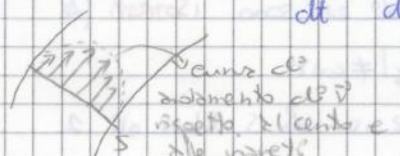
Portata $Q = \frac{dV}{dt}$ → volume di liquido passato per una sezione S nel tempo dt

$[Q] = \frac{m^3}{s}$ Teorema di conservazione della portata:



Nell'intervallo di tempo dt una massa m_1 passa da S_1 e una stessa massa m_2 passa da S_2 perché il liquido perfetto è incomprimibile, ovvero $\rho = cost.$ → $dm_1 = dm_2$ $\rho dV_1 = \rho dV_2$

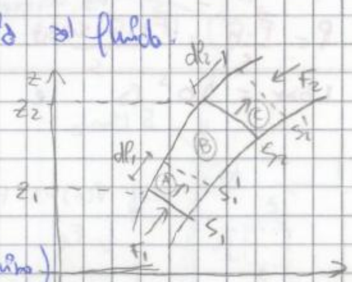
→ $dV_1 = dV_2$ ⇒ $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$ → $Q_1 = Q_2$ (non vale x i gas!)



Supponiamo che v sia costante x ∀ le particelle che attraversano S. Nel tempo dt le particelle percorrono uno spazio dl con velocità v: $dl_1 = v_1 dt$ (S_1) $dl_2 = v_2 dt$ (S_2)

$Q_1 = \frac{dV_1}{dt} = \frac{dl_1 \cdot S_1}{dt} = S_1 v_1$ $Q_2 = \frac{dV_2}{dt} = S_2 \frac{dl_2}{dt} = S_2 v_2$ ⇒ visto che $Q_1 = Q_2$ ⇒ $S_1 v_1 = S_2 v_2 = cost.$

Teorema di Bernoulli = T. di conservazione dell'E applicato al fluido.

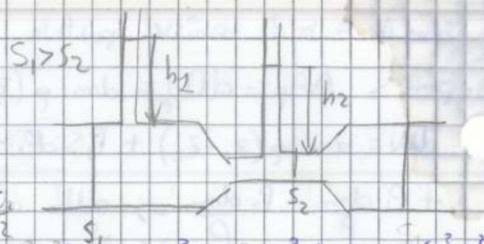


Consideriamo 2 sezioni S_1 e S_2 a 2 h ≠ z_1 e z_2.

Le forze applicate al fluido compreso tra le 2 sezioni sono: la forza peso F_p, la forza $F_1 = P_1 dS_1$ applicata dal fluido sottostante, e la $F_2 = P_2 S_2$ applicata dal fluido soprastante (come nell'esperimento di Stevino)

~~poiché~~ $S_1 \vec{v}_1 = S_2 \vec{v}_2$ → $S_1 dl_1 dt = S_2 dl_2 dt$ → $S_1 dl_1 = S_2 dl_2$ nel tempo dt S_1 si sposta di dl_1 in S_1' e S_2 di dl_2 in S_2'; la massa di fluido dm da z_1 a z_2 (la massa totale si sposta da A e B a B e C, quindi poiché la massa in B rimane costante, è come se la

6) Venturimetro: Permette di misurare la portata all'interno di un condotto. Per Pascal: $P_1 = P_0 + \rho g h_1$



$P_2 = P_0 + \rho g h_2 \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$

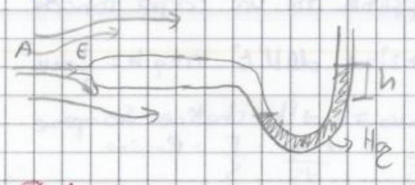
$P_0 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_0 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \rightarrow 2gh_1 + v_1^2 = 2gh_2 + v_2^2$

poiché $S_1 \vec{v}_1 = S_2 \vec{v}_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1}\vec{v}_2 \rightarrow 2gh_1 + \frac{S_2^2 v_2^2}{S_1^2} = 2gh_2 + v_2^2 \rightarrow 2S_1^2 g h_1 - 2S_1^2 g h_2 = v_2^2(S_1^2 - S_2^2)$

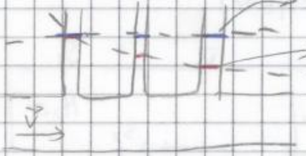
$\Rightarrow v_2^2 = \frac{2S_1^2 g(h_1 - h_2)}{(S_1^2 - S_2^2)} \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{(h_1 - h_2)2gS_1^2}{(S_1^2 - S_2^2)}}$ misurando $h_1 - h_2$ possiamo conoscere

dunque $Q = S_2 v_2 = S_1 v_1$

7) * Tubo di Pitot:



Fluidi reali



h ideale in assenza di attriti

h effettiva dovuta alla resistenza idrodinamica (il T. di Bernoulli non è applicabile)

Forze di attrito viscoso

Viscosità: Tra due strati di liquido adiacenti tra loro ma in movimento con $\vec{v} \neq$ si esercita una forza d'attrito F_A. Newton osservò x primo, che x la > parte dei liquidi (liquidi Newtoniani), $F_A = \mu S \frac{\Delta v}{\Delta h}$

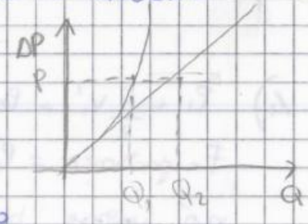
coefficiente di viscosità

rapidità di variazione di $\vec{v}$ lungo h

Non dipende dalla P

Un fluido può scorrere secondo un moto laminare (vedi es precedente) o turbolento: solitamente il primo si ha per velocità di flusso moderate ed il secondo per $\vec{v}$ elevate. Turbolenza = transizione di fase, passaggio da moto laminare a turbolento

La relazione tra P e Q cambia a seconda del tipo di moto:



per il regime laminare $\Delta P \triangleq Q$ mentre per quello turbolento $\Delta P \triangleq Q^2$ (in questo caso a parità di P, Q diminuisce)

Si può prevedere l'instaurarsi di un regime di moto turbolento in base al valore di una costante (che dipende da v) detta Numero di Reynolds

$R_c = \frac{\rho L \vec{v}}{\mu}$ dimensione caratteristica del corpo che è una formula ricavata sperimentalmente.

Se $R_c > 4000 \rightarrow$ turbolento se $R_c \leq 2000 \rightarrow$ laminare

La forza applicata da un fluido a 1 corpo in movimento in esso è $F = -\gamma v^{m}$

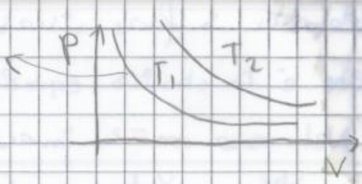
γ è indipendente dalla $\vec{v}$ ma dipende dalle caratteristiche del fluido e dalla forma del corpo

m è un numero che indica la modalità di moto: se il fluido si muove a bassa $\vec{v}$ con moto laminare $m = 1$ (moto smorzato) altrimenti $m = 2$ (moto

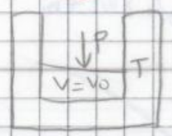
Legge di Boyle

$T = \text{cost.}$ $P = \frac{Mg}{S}$ Le isoterme sul piano di Clapeyron sono IPERBOLI $(T_2 > T_1)$

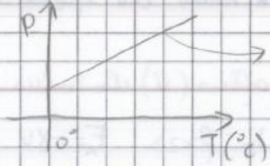
$PV = H \rightarrow$ costante che dipende da T



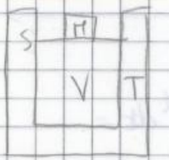
Leggi di Gay-Lussac



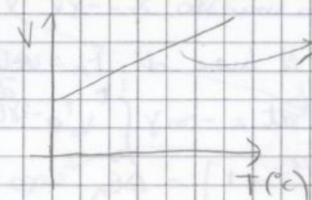
$P = P_0(1 + \alpha t^\circ)$ $\alpha \approx \frac{1}{273{,}15} \, {}^\circ C$



→ isocora: trasformazione che non produce lavoro



$V = V_0(1 + \beta t^\circ)$ $\beta \approx \alpha = \frac{1}{273{,}15 \, {}^\circ C}$



→ isobara

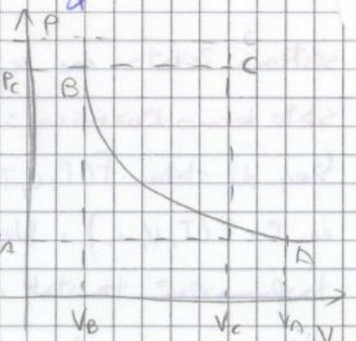
Introduciamo la T assoluta misurata in Kelvin definita da $T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273{,}15$

Le leggi precedenti si possono riscrivere come
$$\begin{cases} PV = H(T) \\ P = P_0 \alpha T \\ V = V_0 \alpha T \end{cases}$$

Supponiamo di effettuare una trasformazione $A \to C$: prima effettuiamo un isoterma $A \to B$ $P_A V_A = P_B V_B$

$V_B = \frac{P_A V_A}{P_B}$ Isobara $B \to C$ $V_B = \alpha V_0 T_B = \alpha V_0 T_A$ e $V_C = \alpha V_0 T_C$

$\frac{V_C}{T_C} = \alpha V_0$ $\frac{P_A V_A}{P_B} = \alpha V_0 T_A \Rightarrow \frac{P_A V_A}{P_B T_A} = \alpha V_0 \Rightarrow \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_A V_A}{T_A} = \text{cost.}$

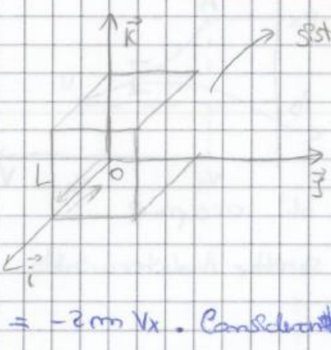


Si può dimostrare che questa costante è pari a $K_B N \Rightarrow \frac{PV}{T} = K_B N$

dove $N = m N_A$ e $K_B = \frac{R}{N_A} \Rightarrow \frac{PV}{T} = \frac{R}{N_A} m N_A$ costante di Boltzmann: $1{,}38 \cdot 10^{-23} \, J/K$

$\Rightarrow PV = mRT$ → costante dei gas perfetti: $8{,}314 \, \frac{J}{K\,mol}$ Per descrivere il comportamento dei gas reali, però, bisogna modificare l'equazione in modo da considerare l'interazione attrattiva tra le particelle (che diminuisce P sulle pareti) e lo spazio occupato dalle particelle stesse (covolume) → eq. di van der Walls: $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

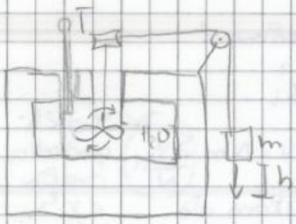
Teoria cinetica del gas perfetto



→ sist. di particelle in un ipotetico recipiente. La particella i-esima avrà
$\vec{V}_i = V_{x_i}\vec{i} + V_{y_i}\vec{j} + V_{z_i}\vec{k}$ prima dell'urto $\vec{V}_0 = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$
Considerando che la particella parte da O e si muove lungo x, dopo l'urto con la parete la sua v sarà $\vec{V} = -V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$
dunque la sua quantità di moto sarà variata di $\Delta p = (\vec{V} - \vec{V}_0)m =$
$= -2m V_x$. Considerato che $x(t) = V_x t$, tra 2 urti successivi c'è un intervallo di tempo $T = \frac{2L}{V_x}$ dunque in 1 generico intervallo $t_2 - t_1$ ci sono K urti e $K = \frac{t_2 - t_1}{T} = (t_2 - t_1)\frac{V_x}{2L}$

Per il th. dell'impulso $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = K 2m V_x = 2\frac{(t_2 - t_1)}{2L} V_x^2 m$ per N particelle:

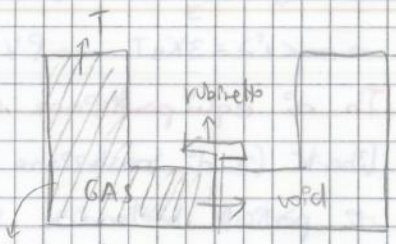
$\sum \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \sum \frac{(t_2 - t_1)}{L} m V_{x_i}^2 = \frac{(t_2 - t_1)}{L} \sum m V_{x_i}^2$ perché il numero di urti è elevato



$U_B - U_A = -\underbrace{mgh}_{W}$ Si può ottenere la stessa trasformazione senza fornire W al sistema ma solo Q: in questo caso $U(T_B) - U(T_A) = Q$ (Q è > 0 quando l'esterno lo trasmette al sistema).

In generale si ha quindi che U può essere variato fornendo Q e/o W al sistema: $\Delta U = -W + Q$ **I principio della termodinamica**: I) Q è una forma di energia e $dU + \delta W = \delta Q$ → non sono differenziali perfetti perché non sono funzioni di stato

* La conferma sperimentale del fatto che ΔU dipenda solo da T venne effettuata da Joule attraverso l'esperimento dell'espansione libera di un gas (trasf. irreversibile): nel caso di un gas poco rarefatto $T_1 < T_0$ ma nel caso del gas ideale possiamo considerare $T_1 \cong T_0$, poiché $\Delta Q = \Delta W = 0$ e ci aspettiamo che anche $\Delta U = 0 \rightarrow U = cost$. Poiché la P e il V tot sono variati, allora U dovrà dipendere solo da T e N che sono rimaste =.



pareti adiabatiche e rigide (trasf. isocora → no $W^{(e)}$ perché $\Delta V = 0$)

Calore specifico

$Q = C\Delta T$ → Capacità termica: caratteristica del corpo che dipende dalla T° alla quale si trova

$c_s = \frac{C}{m}$ → calore specifico: dipende da T e dal materiale ⇒ $Q = c_s \cdot m\,\Delta T$

c_s molare: $C_m = \frac{C}{n}$ Queste relazioni però presuppongono che il sistema non faccia lavoro sull'esterno ($V = cost.$) quindi ma questa ipotesi non è + valida x il gas perfetto

se $P = cost \rightarrow c_p = \left(\frac{Q}{n\Delta T}\right)$ se $V = cost$ $c_v = \left(\frac{Q}{n\Delta T}\right)$ Poiché in 1 isobara, a parità di Q, # il Q fornito serve x aumentare T, ΔT sarà maggiore in c_v rispetto a c_p quindi $c_p > c_v$ infatti: se $P = cost$ $dU + PdV = \delta Q$ $c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{dU + PdV}{\delta T}\right) =$

$= \frac{dU}{n\delta T} + \overbrace{\frac{PdV}{nT}}^{R}$ ricordando che per $V = cost$ $dU = \delta Q$ $c_v = \frac{\delta Q}{ndT}$ si può scrivere

$c_v = \frac{dU}{ndT}$ si ricava che $c_p = c_v + R$ e che $dU = nc_v dT$

Se si definisce $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ (esponente adiabatico) la relazione di Mayer diventa

$\gamma_p = c_v\left(1 + \frac{R}{c_v}\right) \rightarrow \gamma = 1 + \frac{R}{c_v}$

Consideriamo una trasformazione adiabatica $\delta Q = 0 \rightarrow dU + PdV = 0 \rightarrow nc_v dT = -PdV$

$\frac{nc_v dT}{nc_v T} = \frac{-PdV}{nc_v T} \rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{-dV}{nc_v T} \cdot \frac{nRT}{V} \rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v}\frac{dV}{V} \rightarrow \int_A^B \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v}\int_A^B \frac{dV}{V}$

$\ln\frac{T_B}{T_A} = -\frac{R}{c_v}\ln\frac{V_B}{V_A} \rightarrow \ln\frac{T_B}{T_A} = \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-\frac{R}{c_v}} \rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-\frac{R}{c_v}} \rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\frac{R}{c_v}}$

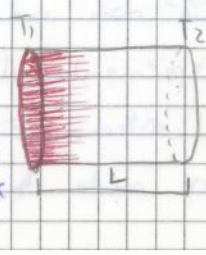
$\Rightarrow V_B^{\frac{R}{c_v}} \cdot T_B = V_A^{\frac{R}{c_v}} T_A = cost.$ $\frac{R}{c_v} = \gamma - 1 \rightarrow V^{(\gamma-1)}T = cost \rightarrow \frac{V^\gamma}{V} T = cost$ $\frac{T}{V} = \frac{P}{nR}$

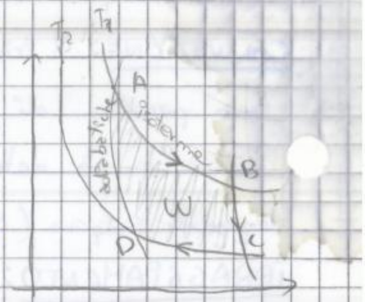
$\rightarrow V^\gamma \frac{P}{nR} = cost. \Rightarrow V^\gamma P = cost.$ ∧ $V^{\gamma-1}T = cost.$

La trasmissione del calore

CONDUZIONE: $T_1 > T_2$ $\Delta Q = k\frac{S}{L}(T_2 - T_1)\Delta t$ — siccome il Q x irraggiamento è istantaneo, la conduzione è lenta

conducibilità termica: caratteristica del materiale es. $Ag = 417\,\frac{W}{mK}$ $Al = 403\,\frac{W}{mK}$





Ciclo di Carnot → trasformazione cicliche

Per calcolare il W dobbiamo considerare che nelle adiabatiche non c'è scambio di Q e che nelle isoterme $\Delta U = 0$ poiché $\Delta U = mc_v \Delta T$.

$\boxed{A \to B}$ $T_A = T_B = T_1$ $W_{A\to B} = mRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$ e $Q_{AB} = W_{AB}$ poiché $V_B > V_A$

$W_{AB} > 0 \to Q_{AB} > 0$ → ceduto (espansione)

$\boxed{B \to C}$ $Q_{BC} = 0$ $\Delta U_{BC} = mc_v(T_2 - T_1)$ $\Delta U_{BC} < 0 \Rightarrow W_{BC} > 0$ (espansione)

$\boxed{C \to D}$ $T_C = T_D = T_2$ $W_{C\to D} = mRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$ e $Q_{CD} = W_{CD}$ $V_C > V_D$ $W_{CD} < 0 \Rightarrow Q_{CD} < 0$ (compressione) → assorbito

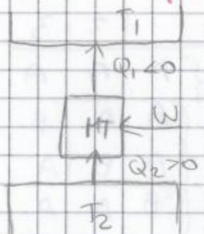
$\boxed{D \to A}$ $Q_{DA} = 0$ $\Delta U_{DA} = mc_v(T_1 - T_2)$ $T_1 > T_2 \to \Delta U > 0 \Rightarrow W_{DA} = -\Delta U_{DA}$ (compressione) < 0

$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{CD} = mRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + mRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$ $\eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{|mRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}|}{mRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} =$

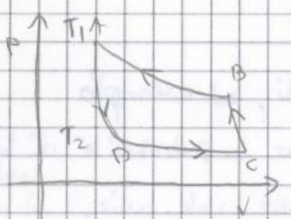
$= 1 - \frac{|-T_2 \ln \frac{V_C}{V_D}|}{T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}}$ poiché considerando le relazioni tra le coordinate dei punti A, B, C, D si scopre che $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$ (dim. p.191-192 Amaldi)

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ Si può dimostrare che questo è il max η ottenibile da una macchina termica.

Macchina frigorifera



$T_2 < T_1$

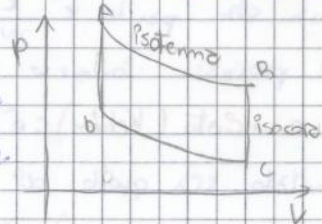


Utilizza il ciclo di carnot ma in senso inverso quindi $W < 0$ e $Q_2 > 0$, $Q_1 < 0$ quindi

$-|W| = -|Q_1| + |Q_2|$ $|Q_2| = |Q_{DC}|$ e $|Q_1| = |Q_{AB}|$

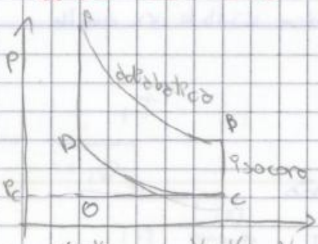
$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{|Q_{DC}|}{|Q_{BA}|}$ DC e BA sono isoterme

$\Rightarrow \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{mRT_2 \ln \frac{V_C}{V_D}}{mRT_1 \ln \frac{V_A}{V_B}} \to \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}$ → concettualmente questa relazione è rilevante perché permette di definire la T in termodinamica partendo dal Q scambiato. ✱✱



Il frigorifero in realtà non usa il ciclo di Carnot ma il ciclo di Stirling, che alle adiabatiche sostituisce delle isocore.

Ciclo di Otto

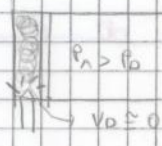


N.B.: il sistema non è né chiuso né isolato.

fase 1 $\boxed{O \to C}$ aspirazione (espansione isobara): la miscela passa all'interno del sistema $n = 0 \to n$ (le moli passano da ϕ a n) $P_C = cost = P_{atm}$ $V_0 \cong 0 \to V_C \neq 0$

Fase 2: $\boxed{C \to D}$ compressione adiabatica (non perché il sistema sia isolato ma xk il gas viene compresso velocemente). $P_C \to P_D$ $V_C \to V_D$ $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ poiché $V_D < V_C$

$T_D > T_C$



Fase 3 $\boxed{D \to A}$ accensione: la candela accende la miscela di gas ed il sistema acquista Q dell'E chimica della benzina. $V_A = V_D$ $P_D \to P_A$

$\rightarrow \int_{A,1}^{B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A,2}^{B} \frac{\delta Q}{T}$ secondo i percorsi 1 e 2. Ciò significa che $\frac{\delta Q}{T}$ non dipende dal percorso scelto, quindi è una funzione di stato chiamata entropia (S) additiva e estensiva $\int_{A}^{B} \frac{\delta Q}{T} = S(B) - S(A)$ $[S] = J/K$ $\rightarrow$ $dS = \frac{\delta Q}{T}$ $\rightarrow$ il merito di Clausius è stato di scoprire che basta dividere δQ per T per ottenere una funzione di stato!

Considerando invece una trasformazione ciclica metà reversibile e metà no:

$\int_{A,irr}^{B} \frac{\delta Q}{T} < S(B) - S(A)$ Se il sistema è isolato (adiabatico) $\delta Q = 0 \rightarrow S(B) - S(A) > 0$

$\Rightarrow$ IV enunciato (formulazione analitica): in tutti i processi naturali S aumenta sempre ovvero $S(B) > S(A)$. Tutti i sistemi macroscopici (+ particelle) obbediscono ai 2 principi della termodinamica.

$S = \int_{A}^{B} dS = S(B) - S(A) = \int_{A}^{B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A}^{B} \frac{dU + \delta W}{T} \rightarrow S(B) = \int_{A}^{B} \frac{dU + \delta W}{T} + \text{cost.} \rightarrow S(A)$

Se consideriamo un corpo solido dove $\Delta V = 0 \rightarrow \delta W = 0$ $S = \int_{0}^{T} \frac{\delta Q}{T} = \int_{0}^{T} \frac{dU}{T} \rightarrow m\, c_m\, dT$

$S = \int_{0}^{T} m \frac{c_m}{T} dT = m\, c_m \ln T + \text{cost.}$ il fatto che compaia m sta ad indicare che S effettivamente è estensiva

** Il rendimento di 1 cella frigorifera, pompa lavoro "al contrario" non è definito da η ma dal $C.O.P. = \frac{|Q_2|}{W}$ (Coefficiente di prestazione) che può essere > 1.